Aviones con Hélice (Propeller Aircraft)

Antonio Pérez

Curso ME-2930 / ME-4932

Índice

Nomenclatura	2
Eficiencia de Oswald	3
Eficiencia de Oswald	3
Valores prácticos de la Relación de Aspecto (AR)	3
Valores iniciales (ISA - resaltados)	4
Tabla de Fórmulas — Flujo lógico y datos mínimos	5
Estrategia de resolución & checks	5
Tabla de fórmulas — con sustitución y resultado	6
Total de Variables usadas en Tabla 3	9
Preguntas y análisis	11
1. Valores típicos en la práctica	14
2. Ecuaciones teóricas y análisis	14
2.1. Polar de arrastre	14
2.2. Sustentación	15
2.3. Máxima eficiencia aerodinámica y velocidades asociadas	15
2.4. Potencia requerida (propeller)	15
2.5. Endurance y Range (Breguet, propeller)	15

Guía de Repaso - Performance (Propeller Aircraft)

Basado en el ejemplo usado en MATLAB - Imperial (unidades del sistema imperial (ft, lbf, slug, etc.), en lugar del sistema métrico (SI)).

Nomenclatura

Símbolo	Español	Inglés	Unidades
W	Peso	Weight	N o lbf
S	Área alar	Wing area	m ² o ft ²
b	Envergadura	Wingspan	m o ft
AR	Relación de aspecto	Aspect ratio	–
e	Eficiencia de Oswald	Oswald efficiency factor	–
C_{D0}	Arrastre parásito	Zero-lift drag coefficient	–
C_L	Coficiente de sustentación	Lift coefficient	–
C_D	Coficiente de resistencia total	Drag coefficient	–
k	Factor inducido ($1/\pi AR e$)	Induced drag factor	–
ρ	Densidad del aire	Air density	kg/m ³
V	Velocidad	Velocity	m/s o kt
q	Presión dinámica ($\frac{1}{2}\rho V^2$)	Dynamic pressure	Pa
L/D	Eficiencia aerodinámica	Lift-to-drag ratio	–
R	Alcance	Range	km, NM
E	Autonomía	Endurance	h
η_p	Eficiencia propulsiva (hélice)	Propulsive efficiency	–
$TSFC_p$	Consumo específico (hélice)	Specific fuel consumption	lb/hp · h

Eficiencia de Oswald

La **eficiencia de Oswald** (e) mide qué tan eficiente es un ala real en comparación con una distribución elíptica de sustentación.

Dato	Comentario
Ala ideal	$e = 1$.
Alas reales	$e < 1$; depende de flecha, estrechamiento, winglets, integración ala-fuselaje e interferencias.
Rango típico	0.70–0.95 (ligeros ~ 0.80).
Arrastre inducido	$C_{D,i} = C_L^2 / (\pi e AR)$.

Estimación rápida de e (Oswald efficiency factor)

Fórmula	Descripción / Uso
$e_1 = 1,78(1 - 0,045 AR^{0,68}) - 0,64$	Estimación geométrica pura (solo depende de la relación de aspecto AR).
$e_2 = \frac{1}{1 + 0,38 C_{D0} \pi AR}$	Incluye el efecto del coeficiente parásito C_{D0} además de AR .

Nota: calcula ambas estimaciones y adopta un valor típico en el rango 0,70–0,95. Verifica que el factor inducido resultante $k = \frac{1}{\pi AR e}$ sea razonable para el ala considerada.

Valores prácticos de la Relación de Aspecto (AR)

$$AR = \frac{b^2}{S}$$

Categoría	AR típico	Notas
Combate (supersónico)	2–4	Alas muy barridas/delta; alta maniobrabilidad, mayor inducido en baja velocidad.
Aviones ligeros	6–9	Compromiso eficiencia/estructura; costos moderados de envergadura.
Jets comerciales	9–11	Optimización de eficiencia en crucero y alcance.
Planeadores	30–40	Mínimo inducido; fuerte penalización estructural por envergadura.

Interpretación: AR alto $\Rightarrow k \downarrow$ y $(L/D)_{\text{máx}} \uparrow$, pero aumenta peso/rigidez. AR bajo $\Rightarrow$ robustez y maniobra, menor eficiencia en crucero.

1. Valores iniciales (ISA - resaltados)

Símbolo	Unidades	Valor inicial	Descripción	y	uso
S	ft ²	160	Área alar. Entra en qS , C_L , C_D y velocidades óptimas.		
b	ft	$33 + \frac{4}{12}$	Envergadura. Junto a S fija $AR = b^2/S$.		
W_0	lbf	1670	Peso de vuelo. Entra en $C_L = \frac{2W}{\rho V^2 S}$ y en $RC = (P_{exceso} \cdot 550)/W_0$.		
W_{fuel}	lbf	177	Peso de combustible. Afecta R vía $\ln(W_i/W_f)$.		
C_{D0}	–	0,03	Arrastre parásito. Reduce $L/D_{m\acute{a}x}$ si aumenta.		
e	–	0,70	Eficiencia de Oswald. Mejora el término inducido (k).		
AR	–	6,94	Relación de aspecto b^2/S . Reduce arrastre inducido si aumenta.		
k	–	0,0655	Factor inducido $k = \frac{1}{\pi AR e}$.		
P_{SL}	hp	110	Potencia del motor al nivel del mar (eje).		
η_p	–	0,875	Eficiencia propulsiva (hélice).		
TSFC	lb/(hp · h)	0,40	Consumo específico. Menor TSFC $\Rightarrow$ mayor R, E .		
h_1	ft	0	Altitud inicial del tramo de cálculo (ejemplo: nivel del mar).		
h_2	ft	5000	Altitud final/objetivo del tramo (ejemplo: 5000 ft).		
$\rho(0)$	slug/ft ³	0,002377	Densidad ISA al nivel del mar.		
$\rho(5000)$	slug/ft ³	$\approx 0,002048$	Densidad ISA a 5000 ft.		
$a(0)$	ft/s	1116,45	Velocidad del sonido (ISA) al nivel del mar.		
$a(5000)$	ft/s	$\approx 1097,09$	Velocidad del sonido (ISA) a 5000 ft.		
V^*	ft/s	86,6(SL)/93,2(5k)	Velocidad óptima: alcance (en C_L^*) o mejor ROC (en $C_{L, \min P}$).		
RC	ft/s	22,8(SL)/17,8(5k)	Razón de ascenso (exceso de potencia).		
Δt	min	4,1	Tiempo de ascenso de 0 ft a 5000 ft (modelo lineal).		
R	nmi	853	Alcance Breguet con 95% del combustible.		

2. Tabla de Fórmulas — Flujo lógico y datos mínimos

Magnitud	Ecuación	Datos mínimos	Salida / Uso
Presión dinámica	$q = \frac{1}{2} \rho V^2$	ρ, V	Escala fuerzas L, D .
Sustentación (coef.)	$C_L = \frac{2W}{\rho V^2 S}$	W, ρ, V, S	C_L operativo para ese V .
Factor inducido	$k = \frac{1}{\pi A R e}$	AR, e	Término inducido de la polar.
Polar de arrastre	$C_D = C_{D0} + k C_L^2$	C_{D0}, k, C_L	C_D total (parásito + inducido).
Eficiencia	$\frac{L}{D} = \frac{C_L}{C_D}$	C_L, C_D	Eficiencia aerodinámica global.
$(L/D)_{\text{máx}}$	$\left(\frac{L}{D}\right)_{\text{máx}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi e AR}{C_{D0}}}$	AR, e, C_{D0}	Tope de eficiencia (Range prop).
$C_L @ (L/D)_{\text{máx}}$	$C_L^* = \sqrt{\frac{C_{D0}}{k}}$	C_{D0}, k	CL óptimo de mínimo C_D .
$V @ (L/D)_{\text{máx}}$	$V^* = \sqrt{\frac{2W}{\rho S C_L^*}}$	W, ρ, S, C_L^*	Velocidad de mejor Range (prop).
Potencia requerida	$P_{req} = \frac{DV}{\eta_p} = \frac{qSC_D V}{\eta_p}$	C_D, V, q, S, η_p	Comparar con P_{avail} .
Endurance (prop)	$E = \frac{\eta_p}{TSFC_p} \frac{L}{D} \ln\left(\frac{W_i}{W_f}\right)$	$\eta_p, TSFC_p, L/D, W_i/W_f$	Horas de vuelo (mín. P_{req}).
Range (prop)	$R = \frac{\eta_p}{TSFC_p} \frac{L}{D} \ln\left(\frac{W_i}{W_f}\right)$	Idem Endurance	Distancia (mejor L/D).
Óptimo Endurance	$C_L^{(P_{\min})} = \sqrt{3} C_L^*; V_E = \frac{V^*}{3^{1/4}}$	C_L^*, V^*	Mínimo P_{req} (hold).

Estrategia de resolución & checks

Paso / Estrategia	Descripción
1. Datos mínimos	W, S, AR, e, C_{D0} (y condición $\Rightarrow \rho$). Para propulsión: $\eta_p, P_{SL}, TSFC_p, W_i/W_f$.
2. Para L/D a una V	$C_L \rightarrow k \rightarrow C_D \rightarrow L/D$.
3. Para $L/D_{\text{máx}}$ y V^*	Calcular C_L^*, V^* . Para Endurance: $C_L^{(P_{\min})} = \sqrt{3} C_L^*$.
4. Rate of climb	V_y con $C_{L, \text{mín } P}$. Luego $RC = (P_{avail} - P_{req})/W$ con $C_D = 4C_{D0}$ y $P_{avail}(h) \propto \rho$.
5. Tiempo de ascenso	Si se dan RC en dos niveles, usar modelo lineal e integrar.
6. Range/Endurance	Breguet con L/D óptimo y fracción de combustible.

Checks rápidos: $C_D^* = 2C_{D0}$ en $L/D_{\text{máx}}$; en $P_{\min}$, $C_D = 4C_{D0}$ y $C_L^{(P_{\min})} = \sqrt{3} C_L^*$.
 RC en fpm: $RC[\text{ft/s}] \times 60$. Si R resulta irreal, revisar *unidades* de TSFC y masa/peso.

(A) $V_y @ SL$ (B) RC_{SL} (C) $V_y @ 5k$ (D) RC_{5k} (E) $\Delta t_{0 \rightarrow 5k}$ (F) Alcance (Breguet)
 (G) Loiter time @ SL

3. Tabla de fórmulas — con sustitución y resultado

Concepto	Fórmula y sustitución (ISA en <i>color</i>)	Resultado
Factor inducido k	$k = \frac{1}{\pi AR e}$, $AR = \frac{b^2}{S} = \frac{(33 + \frac{4}{12})^2}{160} = 6,94$, $e = 0,70$	$k = 0,0655$
<i>Descripción:</i> escala el arrastre inducido ($C_{Di} = k C_L^2$). Disminuye si $AR \uparrow$ o $e \uparrow$.		
C_L^* para $L/D_{\text{máx}}$	$C_L^* = \sqrt{\frac{C_{D0}}{k}} = \sqrt{\frac{0,03}{0,0655}}$	$C_L^* = 0,6769$
<i>Descripción:</i> punto de máxima eficiencia aerodinámica ($D_{par} = D_{ind}$).		
$L/D_{\text{máx}}$	$(\frac{L}{D})_{\text{máx}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi e AR}{C_{D0}}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi(0,70)(6,94)}{0,03}}$	$L/D_{\text{máx}} \approx 8,2$
<i>Descripción:</i> mejora con AR alto y e cercano a 1; empeora si C_{D0} sube.		
$C_{L,\text{mín } P}$ (mejor ROC)	$C_{L,\text{mín } P} = \sqrt{3} C_L^* = 1,732 \times 0,6769$	$C_{L,\text{mín } P} = 1,1724$
<i>Descripción:</i> condición de mínima potencia requerida $\Rightarrow$ velocidad óptima para <i>rate of climb</i> .		
Coefficiente total de arrastre C_D	$C_D = C_{D0} + k C_L^2$ En mínima potencia: $C_{D,ind} = 3C_{D0} \Rightarrow C_D = 4C_{D0} = 4(0,03)$	$C_D = 0,12$
<i>¿Por qué $C_D = 4C_{D0}$? Al minimizar $P_{req} \propto V^3 C_D$ con $C_D = C_{D0} + k C_L^2$ y $C_L \propto 1/V^2$, la condición de óptimo arroja $C_{D,ind} = 3C_{D0}$. Por tanto $C_D = C_{D0} + 3C_{D0} = 4C_{D0}$.</i>		
$V_y @ SL$	$V_{y,SL} = \sqrt{\frac{2W_0}{\rho(0) S C_{L,\text{mín } P}}} = \sqrt{\frac{2(1670)}{0,002377 \cdot 160 \cdot 1,1724}}$	$V_{y,SL} = 86,6 \text{ ft/s } (\approx 51 \text{ kt})$
<i>Descripción:</i> velocidad que maximiza la razón de ascenso al nivel del mar.		
$V_y @ 5000 \text{ ft}$	$V_{y,5k} = \sqrt{\frac{2W_0}{\rho(5000) S C_{L,\text{mín } P}}} = \sqrt{\frac{2(1670)}{0,002048 \cdot 160 \cdot 1,1724}}$	$V_{y,5k} = 93,2 \text{ ft/s } (\approx 55 \text{ kt})$
<i>Descripción:</i> al disminuir ρ , la velocidad óptima sube.		
Potencia requerida $P_{req} @ SL$	$P_{req} = \frac{\frac{1}{2} \rho_{SL} V_{SL}^3 S C_D}{550 \eta_p}$ $= \frac{0,5 \times 0,002377 \times (86,6)^3 \times 160 \times 0,12}{550 \times 0,875}$	$P_{req,SL} \approx 73,4 \text{ hp}$
<i>Descripción:</i> potencia aerodinámica necesaria a V_y en SL. (550 convierte hp $\leftrightarrow$ ft · lbf/s).		

Concepto	Fórmula y sustitución (ISA en color)	Resultado
ROC — Rate of Climb (Razón de ascenso)	$RC = \frac{dh}{dt}$ (velocidad vertical). En potencia: $RC = \frac{(P_{avail} - P_{req}) 550}{W_0}$	ft/s o ft/min
<i>Interpretación:</i> si $P_{avail} > P_{req}$ el avión asciende. Si $P_{avail} = P_{req}$, $RC = 0$ (techo). Conversión: 1 ft/s = 60 ft/min.		
Razón de ascenso RC_{SL}	Potencia disponible (SL): $P_{avail,SL} = \eta_p \cdot P_{shaft} = 0,875 \times 110$ $P_{avail,SL} = 96,25$ hp. Exceso de potencia: $P_{ex,SL} = P_{avail,SL} - P_{req,SL} = 96,25 - 73,4$ $P_{ex,SL} = 22,85$ hp. Razón de ascenso: $RC_{SL} = \frac{P_{ex,SL} \cdot 550}{W_0} = \frac{22,85 \times 550}{1670}$	$RC_{SL} = 22,8$ ft/s (≈ 1368 ft/min)
<i>Descripción:</i> la potencia del motor a nivel del mar se ajusta por la eficiencia propulsiva (η_p). El exceso de potencia (P_{ex}) representa lo que queda disponible después de vencer el arrastre, y al multiplicar por 550/W se convierte directamente en razón de ascenso vertical .		
Razón de ascenso a 5 000 ft (RC_{5k})	Potencia disponible (5k): $P_{avail,5k} = P_{avail,SL} \frac{\rho(5k)}{\rho(0)}$ $P_{avail,5k} = 96,25 \times \frac{0,002048}{0,002377} = 82,8$ hp Potencia requerida (5k, con $V_{y,5k}$): $P_{req,5k} = \frac{\frac{1}{2} \rho(5k) V_{y,5k}^3 S C_D}{550 \eta_p}$ $= \frac{0,5 \times 0,002048 \times (93,2)^3 \times 160 \times 0,12}{550 \times 0,875}$ $P_{req,5k} \approx 66,3$ hp Exceso de potencia: $P_{ex,5k} = P_{avail,5k} - P_{req,5k} = 82,8 - 66,3 = 16,5$ hp ROC (definición): $RC_{5k} = \frac{P_{ex,5k} \cdot 550}{W_0} = \frac{16,5 \cdot 550}{1670}$	$RC_{5k} = 17,8$ ft/s (≈ 1068 ft/min)
<i>Descripción:</i> a 5 000 ft la densidad atmosférica disminuye $\Rightarrow P_{avail}$ baja. Aunque V_y aumenta al reducirse ρ , la potencia requerida también sube. La caída de P_{avail} es mayor que la variación de P_{req} , por lo que el exceso de potencia se reduce y la ROC disminuye. Conversión: RC [ft/s] $\times 60 =$ ft/min.		
Tiempo 0 $\rightarrow$ 5000 ft	Modelo lineal de $RC(h)$ (Razón de ascenso (exceso de potencia)): $a = \frac{RC_{h_2} - RC_{SL}}{h_2 - h_1}$ $a = \frac{RC_{5k} - RC_{SL}}{5000 - 0} = \frac{17,8 - 22,8}{5000} = -0,001$ ft/s $\cdot$ ft $^{-1}$ Tiempo de ascenso: $\Delta t = \frac{1}{a} \ln\left(\frac{RC_{5k}}{RC_{SL}}\right) = \frac{1}{-0,001} \ln\left(\frac{17,8}{22,8}\right) = 245,7$ s $\approx 4,1$ min	$\Delta t \approx 245,7$ s (4,1 min)
<i>Descripción:</i> se aproxima $RC(h)$ con una variación lineal entre SL y 5k. La pendiente negativa indica que RC disminuye con la altitud. La integración del modelo da el tiempo requerido para subir a 5 000 ft.		

Concepto	Fórmula, sustitución y notas (ISA en color)	Resultado
Alcance (Breguet, prop)	<p>Ecuación: $R = \frac{\eta_p}{TSFC} \frac{L}{D} \ln\left(\frac{W_i}{W_f}\right)$</p> <p>Parámetros: $\eta_p = 0,875$, $TSFC = 0,40$ lb/(hp · h)</p> <p>Eficiencia: $\frac{L}{D} \approx \frac{C_L^*}{2C_{D0}} = \frac{0,6768}{0,06} = 11,28$</p> <p>Pesos (fórmula): $W_f = W_i - f_u W_{fuel}$, $f_u = 1 - r_{res}$</p> <p>Se asume un 5% de combustible reservado: $r_{res} = 0,05 \Rightarrow f_u = 0,95$</p> <p>Pesos: $W_i = 1670$ lb, $W_f = 1670 - 0,95 \cdot 177 = 1502$ lb</p> <p>Logaritmo: $\ln\left(\frac{1670}{1502}\right) = 0,106$</p> <p>Producto: $(0,875/0,40) \cdot 11,28 \cdot 0,106 = 2,619$</p> <p>Conversión: $1 \text{ hp} \cdot \text{h}/\text{lb} = \frac{550 \cdot 3600}{6076,12} \text{ nmi} \approx 325,9 \text{ nmi}$</p> <p>Alcance: $R = 325,9 \times 2,619 = 853,4 \text{ nmi} \approx 853$</p>	$R \approx 853$ nmi

Descripción: Breguet (hélice) combina η_p , $TSFC$, la eficiencia aerodinámica L/D y la fracción de combustible $\ln(W_i/W_f)$. El alcance mejora si $\eta_p \uparrow$, $TSFC \downarrow$, $L/D \uparrow$ o $W_i/W_f \uparrow$.

Concepto	Fórmula y sustitución (ISA en color)	Resultado
Loiter time @ SL	<p>Datos: $C_L = C_{L,\min P} = 1,1724$, $C_D = 4C_{D0} = 0,12$.</p> <p>TSFC: $C := TSFC = 0,40$ lb/(hp · h).</p> <p>Velocidad (con peso final): $W_f = W_0 - 0,95 W_{fuel}$,</p> $V = \sqrt{\frac{2W_f}{\rho(0)C_L S}} = \sqrt{\frac{2(1502)}{0,0023769 \cdot 1,1724 \cdot 160}} = 82,1 \text{ ft/s.}$ <p>Tiempo de loiter:</p> $E = \frac{\eta_p}{C} \frac{C_L}{C_D} \frac{550}{V} \ln\left(\frac{W_0 - 0,95 W_{fuel}}{W_0 - W_{fuel}}\right)$ $E = \frac{0,875}{0,40} \cdot \frac{1,1724}{0,12} \cdot \frac{550}{82,1} \cdot \ln\left(\frac{1670 - 0,95 \cdot 177}{1670 - 177}\right) = 0,846 \text{ h}$	$E = 50,8$ min ($\approx 0,85$ h)

Descripción: tiempo de espera (loiter) en SL usando el 95% del combustible. C (TSFC): consumo específico del motor (lb/(hp · h)); menor $C \Rightarrow$ mayor loiter/alcance. V : velocidad de vuelo usada (ft/s); aquí $V \approx 82,1$ ft/s, obtenida con $W_f = W_0 - 0,95 W_{fuel}$.

Concepto	Fórmula y sustitución (ISA en color)	Resultado / Tendencia
(1) Relación L/D	$\left(\frac{L}{D}\right)_{\max} \propto \sqrt{\frac{\epsilon AR}{C_{D0}}}$	$e \uparrow$, $AR \uparrow \Rightarrow L/D \uparrow$; $C_{D0} \uparrow \Rightarrow L/D \downarrow$.
(2) Velocidad óptima V^*	$V^* \propto \left(\frac{W}{\rho S}\right)^{1/2} \left(\frac{k}{C_{D0}}\right)^{1/4}$	$W \uparrow$, $\rho \downarrow \Rightarrow V^* \uparrow$; $e \uparrow$, $AR \uparrow \Rightarrow V^* \downarrow$ levemente.
(3) Alcance / Endurance	$R, E \propto \frac{\eta_p}{TSFC} \frac{L}{D} \ln\left(\frac{W_i}{W_f}\right)$	Mejoran con $\eta_p \uparrow$, $TSFC \downarrow$, $L/D \uparrow$, fracción de combustible utilizable $\uparrow$.

4. Total de Variables usadas en Tabla 3 - (ISA en *color*)

Símbolo	Español	Inglés	Unid.	Valor usado
W_0	Peso al despegue	Take-off weight	lbf	1670
S	Área alar	Wing area	ft ²	160
b	Envergadura	Wingspan	ft	33.33 (33 ft 4 in)
AR	Relación de aspecto	Aspect ratio	–	6.94
e	Eficiencia de Oswald	Oswald efficiency	–	0.70
C_{D0}	Arrastre parásito	Zero-lift drag coeff.	–	0.03
k	Factor inducido	Induced drag factor	–	0.0655
C_L^*	C_L óptimo ($L/D_{máx}$)	Optimal C_L	–	0.677
$L/D_{máx}$	Eficiencia máxima (alcance)	Max lift-to-drag (range)	–	11.28
$C_L/C_D _{mín P}$	Eficiencia en mín. potencia (loiter)	C_L/C_D (min. power, loiter)	–	9.77
$C_{L,mín P}$	C_L mínima potencia	C_L (min. power)	–	1.172
C_D	Arrastre total	Drag coefficient	–	0.12 (en mín. potencia)

Símbolo	Español	Inglés	Unid.	Valor usado
$\rho(0)$	Densidad aire SL (ISA)	Air density SL (ISA)	slug/ft ³	0,002377
$\rho(5k)$	Densidad a 5000 ft (ISA)	Air density 5000 ft (ISA)	slug/ft ³	0,002048
σ_{5k}	Relación de densidad	Density ratio at 5k	–	0.862
h_1	Altitud inicial	Initial altitude	ft	0
h_2	Altitud final	Final altitude	ft	5000
$V_{y,SL}$	Vel. mejor ROC (SL)	Best ROC speed (SL)	ft/s (kt)	86.6 (51)
$V_{y,5k}$	Vel. mejor ROC (5k)	Best ROC speed (5k)	ft/s (kt)	93.2 (55)
η_p	Eficiencia propulsiva	Propulsive efficiency	–	0.875
$P_{avail,SL}$	Potencia disp. SL	Power avail. SL	hp	96.25
$P_{avail,5k}$	Potencia disp. 5k	Power avail. 5k	hp	82.8
$P_{req,SL}$	Potencia req. SL	Power required SL	hp	73.4
$P_{req,5k}$	Potencia req. 5k	Power required 5k	hp	66.3
$P_{ex,SL}$	Exceso de potencia SL	Excess power SL	hp	22.9
$P_{ex,5k}$	Exceso de potencia 5k	Excess power 5k	hp	16.5
RC_{SL}	Razón de ascenso SL	Rate of climb SL	ft/s (ft/min)	22.8 (1368)
RC_{5k}	Razón de ascenso 5k	Rate of climb 5k	ft/s (ft/min)	17.8 (1068)
Δt	Tiempo 0 $\rightarrow$ 5000 ft	Time to climb	min	4.1
TSFC	Consumo específico (prop.)	Spec. fuel cons.	lb/(hp · h)	0.40
W_{fuel}	Combustible total	Fuel weight	lb	177
W_i	Peso inicial (con fuel)	Initial weight	lb	1670
W_f	Peso final (post fuel)	Final weight	lb	1502
$\ln(W_i/W_f)$	Fracción combustible (log)	Fuel fraction (log term)	–	0.106
R	Alcance (Breguet, prop)	Range	nmi (km)	853 nmi (1580 km)
$V_{loiter,SL}$	Velocidad de loiter (SL)	Loiter speed (SL)	ft/s (kt)	82.1 (49)
E	Tiempo de espera (loiter)	Loiter time	min (h)	50.8 (0.85)

Nota En **alcance (Breguet)** se usa $(L/D)_{m\acute{a}x}$ porque la condición óptima ocurre cuando $C_{D,i} = C_{D0}$ y $C_D = 2C_{D0}$. En **loiter (endurance)** la condición mínima potencia se da en $C_L = \sqrt{3}C_{L0}$, donde $C_{D,i} = 3C_{D0}$ y $C_D = 4C_{D0}$. Por tanto $C_L/C_D|_{\min P} = \mathbf{0.866 (L/D)_{m\acute{a}x}}$.

5. Preguntas y análisis

Datos (avión ligero con hélice)

Parámetro	Símbolo / Fórmula	Valor
Envergadura	b	33 ft 4 in
Área alar	S	160 ft ²
Coefficiente parásito	C_{D0}	0,03
Eficiencia de Oswald	e	0,7
Peso bruto	W_0	1670 lbf
Peso de combustible	W_{fuel}	177 lbf
Potencia a nivel del mar	P_{SL}	110 hp
Eficiencia propulsiva	η_p	0,875
TSFC (prop)	C	0,40 lb/(hp · h)
Relación de aspecto	$AR = \frac{b^2}{S}$	6,94
Factor inducido	$k = \frac{1}{\pi AR e}$	0,0655

Guía rápida A–G (coherencia del flujo)

Letra Qué debes responder (resumen)

- A** **ISA / condición:** calcula T , p , ρ , a (S.L. y/o h_{ref}) y $\sigma = \rho/\rho_0$.
- B** **Geometría y coeficientes:** $AR = b^2/S$; $k = 1/(\pi AR e)$; polar $C_D = C_{D0} + kC_L^2$.
- C** **Óptimos aerodinámicos:** $C_L^* = \sqrt{C_{D0}/k}$; $(L/D)_{\text{máx}} = \frac{1}{2} \sqrt{\pi e AR / C_{D0}}$; $V^* = \sqrt{2W/(\rho S C_L^*)}$.
- D** **Potencia requerida y mínima:** $P_{\text{req}} = \frac{q S C_D V}{\eta_p}$; mínimo en $C_L, \text{mín } P = \sqrt{3} C_L^*$.
- E** **Razón de ascenso y techo (si aplica):** $RC = \frac{(P_{\text{avail}} - P_{\text{req}}) 550}{W}$; $P_{\text{avail}}(h) \approx P_{SL} \sigma(h)$.
- F** **Breguet (prop):** $E = \frac{\eta_p}{\text{TSFC}_p} \frac{L}{D} \ln \frac{W_i}{W_f}$; $R = \frac{\eta_p}{\text{TSFC}_p} \frac{L}{D} \ln \frac{W_i}{W_f}$.
- G** **Sensibilidad y recomendaciones:** analiza cómo varían V^* , $P_{\text{req}, \text{mín}}$, $(L/D)_{\text{máx}}$, E y R al cambiar C_{D0} , e , AR , W , η_p , TSFC , ρ .

a) Velocidad para mejor RC a nivel del mar

$$C_{L,\min P} = \sqrt{3 \frac{C_{D0}}{k}} = 1,1724, \quad V_{SL} = \sqrt{\frac{2W_0}{\rho_{SL} C_{L,\min P} S}} \Rightarrow \boxed{V_{SL} \approx 86,6 \text{ ft/s}}$$

Análisis: $C_{L,\min P}$ elevado produce una velocidad baja, condición económica.

b) Mejor razón de ascenso a nivel del mar

$$C_D = 4C_{D0} = 0,12, \quad RC_{SL} = \frac{\eta_p P_{SL} - \frac{1}{2} \rho_{SL} V_{SL}^3 S C_D}{W_0} \Rightarrow \boxed{RC_{SL} \approx 22,8 \text{ ft/s}}$$

Análisis: el balance potencia disponible – requerida da la razón de ascenso.

c) Velocidad para mejor RC a 5000 ft

$$V_{5k} = \sqrt{\frac{2W_0}{\rho(5000) C_{L,\min P} S}} \Rightarrow \boxed{V_{5k} \approx 93,2 \text{ ft/s}}$$

Análisis: menor densidad implica mayor V para sostener el mismo C_L .

d) Mejor razón de ascenso a 5000 ft

$$RC_{5k} = \frac{\eta_p P_{SL} \frac{\rho(5000)}{\rho_{SL}} - \frac{1}{2} \rho(5000) V_{5k}^3 S (4C_{D0})}{W_0} \Rightarrow \boxed{RC_{5k} \approx 17,8 \text{ ft/s}}$$

Análisis: al aumentar altitud, P_{avail} y P_{req} bajan, pero el neto decrece $\Rightarrow RC$ menor.

e) Tiempo de ascenso 0–5000 ft

$$a = \frac{RC_{5k} - RC_{SL}}{5000}, \quad \Delta t = \frac{1}{a} \ln\left(\frac{RC_{5k}}{RC_{SL}}\right) \Rightarrow \boxed{\Delta t \approx 4,1 \text{ min}}$$

Análisis: el modelo lineal pondera logarítmicamente los RC , mejor que un promedio simple.

f) Alcance a SL con 95 % de combustible

$$C_L^* = \sqrt{\frac{C_{D0}}{k}} = 0,6769, \quad C_D^* = 0,06, \quad V^* \approx 113,9 \text{ ft/s}$$

$$R = \frac{\eta_p}{C} \frac{C_L^*}{C_D^*} \ln\left(\frac{W_0}{W_0 - 0,95W_{fuel}}\right) \Rightarrow \boxed{R \approx 853 \text{ nmi}}$$

Análisis: R depende directamente de η_p y L/D , e inversamente de C (TSFC).

g) Tiempo de espera (loiter) a SL con 95 % de combustible

$$W_f = W_0 - 0,95 W_{\text{fuel}} = 1670 - 0,95(177) = 1501,85 \text{ lbf}$$

$$V = \sqrt{\frac{2W_f}{\rho_{SL} C_{L,\text{mín } P} S}} \Rightarrow \boxed{V \approx 82,1 \text{ ft/s}}$$

$$E = \frac{\eta_p}{C} \frac{C_{L,\text{mín } P}}{C_D} \frac{550}{V} \ln\left(\frac{W_0}{W_0 - 0,95 W_{\text{fuel}}}\right) = \frac{0,875}{0,40} \cdot \frac{1,1724}{0,12} \cdot \frac{550}{82,1} \cdot \ln\left(\frac{1670}{1501,85}\right) \Rightarrow \boxed{E \approx 15,2 \text{ min}}$$

Análisis: E aumenta si $\eta_p \uparrow$, $C \downarrow$, $\frac{C_{L,\text{mín } P}}{C_D} \uparrow$ o si crece la fracción $\ln(W_0/(W_0 - 0,95W_{\text{fuel}}))$. Aquí V se calcula con el peso final W_f tras consumir el 95 % del combustible.

Pregunta G — Sensibilidad ($\pm 10\%$) y recomendaciones operativas

Idea clave. Para hélice:

$$\left(\frac{L}{D}\right)_{\text{máx}} \propto \sqrt{\frac{eAR}{C_{D0}}}, \quad C_L^* = \sqrt{\frac{C_{D0}}{k}}, \quad V^* \propto \left(\frac{W}{\rho S}\right)^{1/2} \left(\frac{k}{C_{D0}}\right)^{1/4}, \quad E, R \propto \frac{\eta_p}{\text{TSFC}_p} \frac{L}{D} \ln \frac{W_i}{W_f}.$$

Parámetro	Cambio	Efecto esperado (tendencia y factor)
C_{D0}	$\uparrow 10\%$	$L/D_{\text{máx}} \downarrow \sim 1/\sqrt{1,10}$ ($-4,8\%$); $V^* \uparrow \sim (1/1,10)^{1/4}$ ($+2,4\%$); E y $R \downarrow \sim 1/\sqrt{1,10}$.
e	$\uparrow 10\%$	$L/D_{\text{máx}} \uparrow \sim \sqrt{1,10}$ ($+4,8\%$); $V^* \downarrow$ levemente; $E, R \uparrow$ en igual proporción.
AR	$\uparrow 10\%$	Igual que e (entra como $\sqrt{AR}$): mejora $L/D_{\text{máx}}$ y $E, R \sim +4,8\%$.
W	$\uparrow 10\%$	$V^* \uparrow \sim \sqrt{1,10}$ ($+4,8\%$); P_{req} sube; RC baja; E, R bajan (más peso $\Rightarrow$ menor $\ln(W_i/W_f)$ efectivo).
η_p	$\uparrow 5\%$	P_{req} (eje) $\downarrow$ en operación; $E, R \uparrow$ lineal con η_p .
TSFC_p	$\uparrow 5\%$	$E, R \downarrow$ proporcional (más consumo por $\text{hp} \cdot \text{h}$).
ρ	$\downarrow$ (altitud)	$V^* \uparrow \propto 1/\sqrt{\rho}$; $P_{\text{avail}} \downarrow \propto \sigma$; $RC \downarrow$; chequeo de techo: $P_{\text{avail}} \approx P_{SL}\sigma(h)$.

Recomendaciones. 1) Para *Range*: volar cerca de $L/D_{\text{máx}}$ (velocidad V^*) y minimizar C_{D0} (limpieza) aumenta $R \propto \sqrt{eAR/C_{D0}}$.

2) Para *Endurance*: volar a $C_{L,\text{mín } P} = \sqrt{3} C_L^*$ (más lento que V^*).

3) Si RC cae con altitud: evalúa $P_{\text{avail}}(h) \approx P_{SL}\sigma(h)$ y replanifica el ascenso por escalones.

4) Mejoras efectivas: winglets ($e \uparrow$), planform/arreglo ($AR \uparrow$), carenados/tren ($C_{D0} \downarrow$), hélice acorde al régimen ($\eta_p \uparrow$).

5) Peso: despegar con W mínimo viable para maximizar L/D operativo y RC ; revisa impacto en $\ln(W_i/W_f)$.

Pipeline (de datos mínimos a resultados): 1) Condición/ISA $\Rightarrow \rho$. 2) Fijar V o C_L . 3) $C_L = 2W/(\rho V^2 S)$. 4) $k = 1/(\pi AR e)$. 5) $C_D = C_{D0} + k C_L^2$. 6) $L/D = C_L/C_D$. 7) Con $L/D, \eta_p, TSFC_p, \ln(W_i/W_f) \Rightarrow$ **Range/Endurance**.
 Óptimos: $L/D_{\text{máx}}$ con C_L^* ; Endurance con $C_L^{(P_{\text{min}})} = \sqrt{3} C_L^*$.

1. Valores típicos en la práctica

Parámetro	Rango típico	Notas
Relación de aspecto AR	6–9 ($C172 \approx 7,3$); jets 9–11; combate 2–4; planeadores 30–40	$AR \uparrow \Rightarrow$ menor inducido; costos estructurales por envergadura.
Eficiencia de Oswald e	0.75–0.85 (ligeros $\sim 0,8$); general 0.7–0.95	e corrige desviación de elíptica ideal; mejora con winglets y integración ala–fuselaje.
C_{D0}	0.020–0.030 (prop limpio)	Tren fijo, antenas y protuberancias elevan C_{D0} .
Eficiencia propulsiva η_p	0.75–0.85	Depende de paso, régimen y velocidad.
TSFC (pistón)	0.45–0.55 lb/(hp · h)	Cuidar unidades en Breguet (lb/hp · h).

2. Ecuaciones teóricas y análisis

Concepto	Ecuación	Clave / Interpretación
Polar de arrastre	$C_D = C_{D0} + k C_L^2, \quad k = \frac{1}{\pi AR e}$	C_{D0} domina a altos V ; $k C_L^2$ domina a bajos V . $AR \uparrow$ o $e \uparrow \Rightarrow k \downarrow$.
Sustentación	$C_L = \frac{2W}{\rho V^2 S}$	Para W, S, ρ dados, V fija C_L . $C_L \rightarrow C_{L,\text{máx}} \Rightarrow$ cercanía a pérdida.
Máxima eficiencia	$\left(\frac{L}{D}\right)_{\text{máx}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi e AR}{C_{D0}}}, \quad C_L^* = \sqrt{\frac{C_{D0}}{k}}, \quad V^* = \sqrt{\frac{2W}{\rho S C_L^*}}$	En $L/D_{\text{máx}}$: $C_{D,i} = C_{D0}$ y $C_D = 2C_{D0}$. $AR \uparrow, e \uparrow, C_{D0} \downarrow \Rightarrow L/D_{\text{máx}} \uparrow$.
Potencia requerida (prop)	$P_{req} = \frac{D V}{\eta_p} = \frac{q S C_D V}{\eta_p}, \quad q = \frac{1}{2} \rho V^2$	Curva en “U”, mínimo en $C_{L,\text{mín } P} = \sqrt{3} C_L^*$ (máxima <i>Endurance</i>).
Breguet (prop)	$E = \frac{\eta_p}{TSFC_p} \frac{L}{D} \ln \frac{W_i}{W_f}, \quad R = \frac{\eta_p}{TSFC_p} \frac{L}{D} \ln \frac{W_i}{W_f}$	Ambas crecen con $L/D, \eta_p$ y $\ln(W_i/W_f)$; decrecen con TSFC. Range $\rightarrow L/D_{\text{máx}}$; Endurance $\rightarrow P_{req}$ mínima.

2.1. Polar de arrastre

$$C_D = C_{D0} + k C_L^2, \quad k = \frac{1}{\pi AR e}$$

Interpretación: C_{D0} domina a altos V ; el inducido $k C_L^2$ domina a bajos V . Subir AR o e reduce el inducido; limpiar la aeronave baja C_{D0} .

2.2. Sustentación

$$C_L = \frac{2W}{\rho V^2 S}$$

Uso: con W, S, ρ dados, V fija C_L . Si $C_L \rightarrow C_{L,\text{máx}}$ hay cercanía a pérdida; si C_L muy bajo, crece el arrastre parásito.

2.3. Máxima eficiencia aerodinámica y velocidades asociadas

$$\left(\frac{L}{D}\right)_{\text{máx}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi e AR}{C_{D0}}}, \quad C_L^* = \sqrt{\frac{C_{D0}}{k}}, \quad V^* = \sqrt{\frac{2W}{\rho S C_L^*}}$$

Claves: En $L/D_{\text{máx}}$ se cumple $C_{D,i} = C_{D0}$ y $C_D = 2C_{D0}$. A mayor AR, e o menor C_{D0} , mayor $L/D_{\text{máx}}$ y menor V^* (para W, ρ, S fijos).

2.4. Potencia requerida (propeller)

$$P_{req} = \frac{DV}{\eta_p} = \frac{q S C_D V}{\eta_p}$$

Forma: curva en “U” con mínimo en $C_{L,\text{mín } P} = \sqrt{3} C_L^*$. El mínimo $P_{req} \Rightarrow$ **máxima Endurance**.

2.5. Endurance y Range (Breguet, propeller)

$$E = \frac{\eta_p}{\text{TSFC}_p} \frac{L}{D} \ln\left(\frac{W_i}{W_f}\right), \quad R = \frac{\eta_p}{\text{TSFC}_p} \frac{L}{D} \ln\left(\frac{W_i}{W_f}\right)$$

Interpretación: ambas crecen con $L/D, \eta_p$ y fracción de combustible, y decrecen con TSFC. **Óptimos:** Range $\rightarrow$ volar cerca de $L/D_{\text{máx}}$; Endurance $\rightarrow$ volar a P_{req} mínima (más lento que V^*).