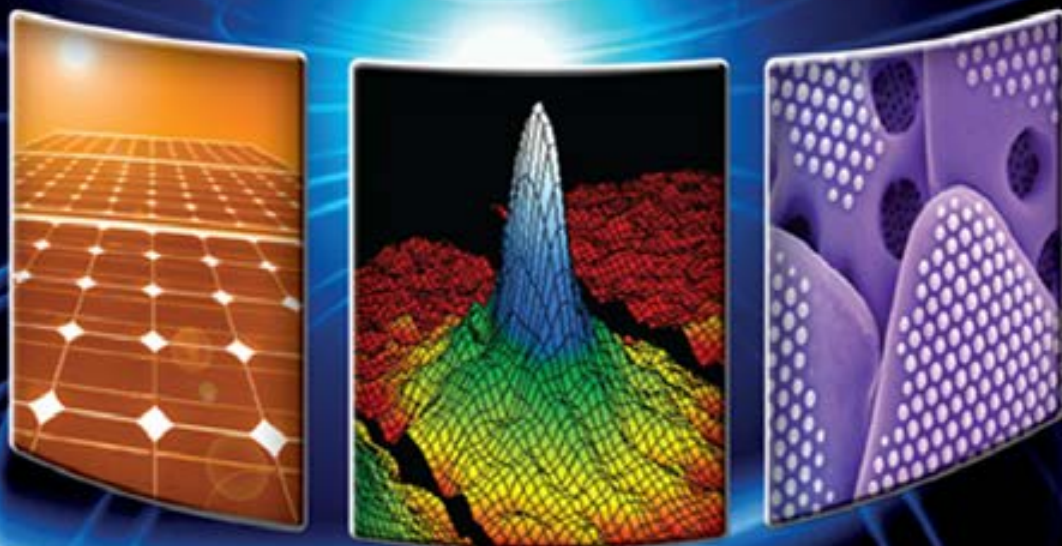


Física

para ingeniería y ciencias



VOLUMEN 1

Wolfgang Bauer | Gary D. Westfall

Mc
Graw
Hill

Física

para ingeniería y ciencias



Física

para ingeniería
y ciencias

volumen 1

Revisión técnica

Jorge Álvarez Díaz

Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, Campus Cuernavaca, México

Enrique Adelaido Bravo Medina

Universidad Nacional Autónoma de México

Ángel de Andrea González

Universidad Carlos III, Madrid, España

Carlos Gutiérrez Aranzeta

Instituto Politécnico Nacional, México

Joel Ibarra Escutia

Instituto Tecnológico de Toluca

Adolfo Finck Pastrana

Universidad Iberoamericana, Ciudad de México

Misael Flores Rosas

Instituto Politécnico Nacional, México

Antonio Gen Mora

Universidad Iberoamericana, Ciudad de México

Wendi Olga López Yépez

Universidad Nacional Autónoma de México

Miguel Ángel Pascual Iglesias

Universidad Politécnica de Madrid, España

Mauro Ricardo Pintle Monroy

Instituto Politécnico Nacional, México

Víctor F. Robledo Rella

Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, Campus Ciudad de México

Honorino Rubio García

Universidad de Oviedo, España

Marcela M. Villegas Garrido

Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, Campus Estado de México

Phillip Von Bülow

Universidad Anáhuac, Campus México Norte, México

Wolfgang Bauer

Michigan State University

Gary D. Westfall

Michigan State University



MÉXICO • BOGOTÁ • BUENOS AIRES • CARACAS • GUATEMALA • MADRID • NUEVA YORK
SAN JUAN • SANTIAGO • SÃO PAULO • AUCKLAND • LONDRES • MILÁN • MONTREAL
NUEVA DELHI • SAN FRANCISCO • SINGAPUR • ST. LOUIS • SIDNEY • TORONTO

Director Higher Education: Miguel Ángel Toledo Castellanos
Editor sponsor: Pablo E. Roig Vázquez
Coordinadora editorial: Marcela I. Rocha Martínez
Editora de desarrollo: Ana L. Delgado Rodríguez
Supervisor de producción: Zeferino García García

Traducción: Sergio Sarmiento Ortega, Thomas Werner Bartenbach, Carlos Rafael Reynoso Pohlenz

FÍSICA PARA INGENIERÍA Y CIENCIAS. Volumen 1

Prohibida la reproducción total o parcial de esta obra,
por cualquier medio, sin la autorización escrita del editor.



DERECHOS RESERVADOS © 2011 respecto a la primera edición en español por
McGRAW-HILL/INTERAMERICANA EDITORES, S.A. DE C.V.

A Subsidiary of **The McGraw-Hill Companies, Inc.**

Edificio Punta Santa Fe
Prolongación Paseo de la Reforma 1015, Torre A
Piso 17, Colonia Desarrollo Santa Fe,
Delegación Álvaro Obregón
C.P. 01376, México, D.F.
Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana, Reg. Núm. 736

ISBN 978-607-15-0545-3

Traducido de la primera edición de *University Physics with Modern Physics* by Wolfgang Bauer and Gary D. Westfall
Copyright © 2011 by The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. ISBN: 978-0-07-285736-8

1234567890

1098765432101

Impreso en China

Printed in China

Contenido breve

El panorama general 1

PARTE 1: MECÁNICA DE PARTÍCULAS PUNTUALES

- 1 Visión general 7
- 2 Movimiento en línea recta 35
- 3 Movimiento en dos y tres dimensiones 71
- 4 Fuerza 100
- 5 Energía cinética, trabajo y potencia 140
- 6 Energía potencial y conservación de la energía 168
- 7 Momento y colisiones 205

PARTE 2: OBJETOS EXTENSOS, MATERIA Y MOVIMIENTO CIRCULAR

- 8 Sistemas de partículas y objetos extensos 246
- 9 Movimiento circular 279
- 10 Rotación 312
- 11 Equilibrio estático 354
- 12 Gravitación 381
- 13 Sólidos y fluidos 417

PARTE 3: OSCILACIONES Y ONDAS

- 14 Oscilaciones 455
- 15 Ondas 492
- 16 Sonido 524

PARTE 4: FÍSICA TÉRMICA

- 17 Temperatura 556
- 18 El calor y la primera ley de la termodinámica 581
- 19 Gases ideales 614
- 20 La segunda ley de la termodinámica 649

Apéndice A: Matemáticas Primer A-1

Apéndice B: Masas de isótopos, energías de enlace y vidas medias A-9

Apéndice C: Propiedades de los elementos A-19

Respuestas de problemas y preguntas seleccionadas RES-1

Acerca de los autores



Wolfgang Bauer nació en Alemania y obtuvo un doctorado en física nuclear teórica en la Universidad de Giessen en 1987. Después de una beca de investigación posdoctoral en el California Institute of Technology, fue nombrado catedrático de la Michigan State University en 1988. Ha trabajado en una gran variedad de temas de física computacional, desde la superconductividad a alta temperatura hasta las explosiones de supernovas; pero se ha interesado especialmente en colisiones nucleares relativistas. Quizás es más conocido por su trabajo sobre transiciones de fase de la materia nuclear en colisiones de iones pesados. En años recientes, el doctor Bauer ha enfocado gran parte de su investigación y de su cátedra en temas relativos a la energía, incluyendo fuentes de combustibles fósiles, modos de usar más eficientemente la energía y, especialmente, fuentes de energía alternativas y neutras al carbono. Actualmente trabaja como presidente del departamento de Física y Astronomía, así como director del Institute for Cyber-Enabled Research.

Gary D. Westfall comenzó su carrera en el Center for Nuclear Studies de la Universidad de Texas en Austin, donde hizo su doctorado en física nuclear experimental en 1975. De ahí se trasladó al Lawrence Berkeley National Laboratory (LBNL), en Berkeley, California, para llevar a cabo su trabajo posdoctoral en física nuclear de alta energía, y luego permaneció como científico de cátedra. Mientras estuvo en el LBNL, el doctor Westfall fue conocido internacionalmente por su trabajo sobre el modelo nuclear de bola de fuego y el uso de la fragmentación para producir núcleos lejos de la estabilidad. En 1981, el doctor Westfall ingresó al National Superconducting Cyclotron Laboratory (NSCL) en la Michigan State University (MSU), como profesor investigador; ahí concibió, construyó y operó el detector MSU 4π . Su investigación basada en el uso del detector 4π produjo información acerca de la respuesta de la materia nuclear cuando se le comprime en un colapso de supernova. En 1987, el doctor Westfall ingresó al Departamento de Física y Astronomía de la MSU como profesor asociado, mientras continuaba llevando a cabo su investigación en el NSCL. En 1994, el doctor Westfall ingresó a la STAR Collaboration, que actualmente lleva a cabo experimentos en el Relativistic Heavy Ion Collider (RHIC) en el Brookhaven National Laboratory, en Long Island, Nueva York.

La asociación Westfall-Bauer Los doctores Bauer y Westfall han colaborado en la investigación de física nuclear y en investigación física educativa durante más de dos décadas. La asociación comenzó en 1988, cuando ambos autores dieron conferencias en la misma convención y decidieron ir a esquiarse juntos después de la sesión. En esa ocasión, Westfall contrató a Bauer para unirse como catedrático en la Michigan State University (en parte amenazándolo con empujarlo del teleférico si se rehusaba). Obtuvieron fondos de NSF para desarrollar nuevas técnicas de enseñanza y de laboratorio, hicieron CD multimedia de física para sus estudiantes en la Lyman Briggs School, y coescribieron un libro de texto en CD-ROM llamado *cliXX Physik*. En 1992, fueron de los primeros en adoptar la internet para enseñar y aprender, desarrollando la primera versión de su sistema *on-line* para tareas en casa. En años subsiguientes, participaron en la creación del LearningOnline Network con CAPA, que se usa ahora en más de 70 universidades y escuelas superiores en Estados Unidos y en otras partes del mundo. Desde 2008, Bauer y Westfall han sido parte de un equipo de profesores, ingenieros y físicos que investigan el uso de la enseñanza asistida por compañeros en el programa de física introductoria. Este proyecto ha recibido financiamiento del Programa de Expansión de Talentos de NSF STEM, y sus mejores prácticas se han incorporado en este libro de texto.

Dedicatoria Este libro está dedicado a nuestras familias. Sin su paciencia, aliento y apoyo, no podríamos haberlo terminado.

Nota de los autores

La **física** es una ciencia floreciente, animada por el reto de cambio intelectual, y presenta innumerables problemas de investigación sobre temas que van desde las más grandes galaxias hasta las más pequeñas partículas subatómicas. Los físicos han logrado aportar a nuestro mundo entendimiento, orden, congruencia y predictibilidad, y continuarán con este cometido en el futuro.

Sin embargo, cuando abrimos la mayoría de los libros de texto de introducción a la física, encontramos otra historia. La física se presenta como una ciencia terminada en la que los principales progresos sucedieron en el tiempo de Newton, o quizás a principios del siglo xx. Sólo hacia el final de los libros de texto convencionales se cubre la “física moderna”, e incluso esta cobertura a menudo incluye únicamente descubrimientos realizados hasta la década de 1960.

Nuestra motivación principal para escribir este libro es cambiar esta percepción entretejiendo de manera adecuada la apasionante física contemporánea en todo el texto. La física es una disciplina estimulante y dinámica, que está continuamente en la frontera de nuevos descubrimientos y aplicaciones que cambian la vida. Para ayudar a los estudiantes a percibir esto, necesitamos contar toda la emocionante historia de nuestra ciencia integrando adecuadamente la física contemporánea dentro del curso de primer año, basado en el cálculo. Tan sólo el primer semestre ofrece muchas oportunidades para hacer esto, al vincular resultados de la investigación física en dinámica no lineal, caos, complejidad y alta energía, en el programa introductorio. Como estamos realizando investigación de manera activa en este campo, sabemos que muchos de los resultados de vanguardia están accesibles en su esencia para el estudiante de primer año.

Autores en muchos otros campos, tales como la biología y la química, ya incorporan la investigación contemporánea en sus libros de texto, y reconocen los cambios sustanciales que están afectando los fundamentos de sus disciplinas. Esta integración de la investigación contemporánea da a los estudiantes la impresión de que la biología y la química son lo último en emprendimientos de investigación. Los fundamentos de la física, por otro lado, descansan en terreno mucho más firme; pero los nuevos avances son igualmente intrigantes y apasionantes, si no es que más. Necesitamos encontrar una manera de compartir con nuestros estudiantes los avances en la física.

Creemos que hablar acerca del amplio tema de la energía ofrece un gran aliciente introductorio para captar el interés de los estudiantes. Los conceptos de fuentes de energía (fósil, renovable, nuclear, etc.), eficiencia energética, fuentes alternativas de energía y efectos ambientales de las decisiones de suministro de energía (calentamiento global) son mucho más accesibles en el nivel de física introductoria. Constatamos que los temas de energía detonan el interés de nuestros estudiantes como ningún otro tema actual, y hemos tratado diferentes aspectos de energía en todo nuestro libro.

Además de estar expuesto al estimulante mundo de la física, los estudiantes se benefician en gran medida al obtener la capacidad de **resolver problemas y pensar lógicamente acerca de una situación**. La física se basa en un conjunto central de ideas que es fundamental para toda la ciencia. Reconocemos esto y proporcionamos un útil método de resolución de problemas (descrito en el capítulo 1) que se usa en todo el libro. Este método de resolución de problemas se basa en un formato de pasos múltiples que ambos hemos desarrollado con los estudiantes en nuestras clases.

Considerando todo esto, y junto al deseo de escribir un libro de texto cautivante, hemos creado lo que esperamos que sea una herramienta que capte la imaginación de los estudiantes y los prepare para cursos futuros en los campos que elijan (con la esperanza, lo reconocemos, de convencer en el camino por lo menos a unos pocos estudiantes para que estudien física como carrera). Fue de gran ayuda en este enorme trabajo contar con la realimentación de más de 300 personas, incluyendo un consejo de asesores, varios colaboradores, revisores de manuscritos y participantes en grupos de enfoque, como también lo fueron las pruebas de campo de nuestras ideas con aproximadamente 4 000 estudiantes en nuestras clases introductorias de física en la Michigan State University. ¡Gracias a todos!



—Wolfgang Bauer y Gary D. Westfall

Contenido

Prefacio xi
Desarrollo de 360° xix
Agradecimientos xxiii

El panorama general 1

PARTE 1: MECÁNICA DE PARTÍCULAS PUNTUALES

1 Visión general 7

- 1.1 ¿Por qué estudiar física? 8
 - 1.2 Trabajo con números 9
 - 1.3 Sistema de unidades SI 11
 - 1.4 Las escalas de nuestro mundo 14
 - 1.5 Estrategia general para resolución de problemas 16
 - 1.6 Vectores 23
- Lo que hemos aprendido/Guía de estudio para examen 28
Preguntas de opción múltiple/Preguntas/Problemas 30



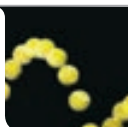
2 Movimiento en línea recta 35

- 2.1 Introducción a la cinemática 36
 - 2.2 Vector de posición, vector de desplazamiento y distancia 36
 - 2.3 Vector velocidad, velocidad media y rapidez 40
 - 2.4 Vector de aceleración 43
 - 2.5 Soluciones en computadora y fórmulas de diferencia 44
 - 2.6 Determinación del desplazamiento y la velocidad a partir de la aceleración 46
 - 2.7 Movimiento con aceleración constante 47
 - 2.8 Reducción de movimiento en más de una dimensión a una dimensión 56
- Lo que hemos aprendido/Guía de estudio para examen 59
Preguntas de opción múltiple/Preguntas/Problemas 64



3 Movimiento en dos y tres dimensiones 71

- 3.1 Sistemas de coordenadas tridimensionales 72
- 3.2 Velocidad y aceleración en un plano 73
- 3.3 Movimiento ideal de proyectil 74
- 3.4 Altura máxima y alcance de un proyectil 78
- 3.5 Movimiento realista de proyectil 83
- 3.6 Movimiento relativo 84



Lo que hemos aprendido/Guía de estudio para examen 87
Preguntas de opción múltiple/Preguntas/Problemas 92

4 Fuerza 100

- 4.1 Tipos de fuerzas 101
 - 4.2 Vector de fuerza gravitacional, peso y masa 103
 - 4.3 Fuerza neta 105
 - 4.4 Leyes de Newton 106
 - 4.5 Cuerdas y poleas 109
 - 4.6 Aplicación de las leyes de Newton 112
 - 4.7 Fuerza de fricción 118
 - 4.8 Aplicaciones de la fuerza de fricción 123
- Lo que hemos aprendido/Guía de estudio para examen 126
Preguntas de opción múltiple/Preguntas/Problemas 132



5 Energía cinética, trabajo y potencia 140

- 5.1 La energía en nuestra vida diaria 141
 - 5.2 Energía cinética 143
 - 5.3 Trabajo 145
 - 5.4 Trabajo realizado por una fuerza constante 145
 - 5.5 Trabajo realizado por una fuerza variable 152
 - 5.6 Fuerza de resorte 153
 - 5.7 Potencia 157
- Lo que hemos aprendido/Guía de estudio para examen 159
Preguntas de opción múltiple/Preguntas/Problemas 164



6 Energía potencial y conservación de la energía 168

- 6.1 Energía potencial 169
 - 6.2 Fuerzas conservativas y no conservativas 171
 - 6.3 Trabajo y energía potencial 173
 - 6.4 Energía potencial y fuerza 174
 - 6.5 Conservación de la energía mecánica 177
 - 6.6 Trabajo y energía para la fuerza de resorte 181
 - 6.7 Fuerzas no conservativas y el teorema del trabajo y la energía 186
 - 6.8 Energía potencial y estabilidad 190
- Lo que hemos aprendido/Guía de estudio para examen 192
Preguntas de opción múltiple/Preguntas/Problemas 198



7 Momento y colisiones 205



- 7.1 Momento lineal 206
- 7.2 Impulso 208
- 7.3 Conservación del momento lineal 210
- 7.4 Colisiones elásticas en una dimensión 212
- 7.5 Colisiones elásticas en dos o tres dimensiones 216
- 7.6 Colisiones totalmente inelásticas 220
- 7.7 Colisiones parcialmente inelásticas 227
- 7.8 El billar y el caos 228

Lo que hemos aprendido/Guía de estudio para examen 229
Preguntas de opción múltiple/Preguntas/Problemas 235

PARTE 2: OBJETOS EXTENSOS, MATERIA Y MOVIMIENTO CIRCULAR

8 Sistemas de partículas y objetos extensos 246



- 8.1 Centro de masa y centro de gravedad 247
- 8.2 Momento del centro de masa 251
- 8.3 Movimiento de cohetes 256
- 8.4 Cálculo del centro de masa 259

Lo que hemos aprendido/Guía de estudio para examen 266
Preguntas de opción múltiple/Preguntas/Problemas 272

9 Movimiento circular 279



- 9.1 Coordenadas polares 280
- 9.2 Coordenadas angulares y desplazamiento angular 281
- 9.3 Velocidad angular, frecuencia angular y periodo 283
- 9.4 Aceleración angular y centrípeta 286
- 9.5 Fuerza centrípeta 289
- 9.6 Movimiento circular y lineal 293
- 9.7 Más ejemplos de movimiento circular 296

Lo que hemos aprendido/Guía de estudio para examen 300
Preguntas de opción múltiple/Preguntas/Problemas 305

10 Rotación 312



- 10.1 Energía cinética de rotación 313
- 10.2 Cálculo del momento de inercia 314
- 10.3 Rodadura sin deslizamiento 322
- 10.4 Momento de torsión 326
- 10.5 Segunda ley de Newton para la rotación 328
- 10.6 Trabajo de un momento de torsión 332
- 10.7 Momento angular 335
- 10.8 Precesión 341
- 10.9 Momento angular cuantizado 343

Lo que hemos aprendido/Guía de estudio para examen 343
Preguntas de opción múltiple/Preguntas/Problemas 346

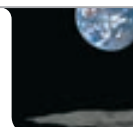
11 Equilibrio estático 354



- 11.1 Condiciones del equilibrio 355
- 11.2 Ejemplos sobre equilibrio estático 357
- 11.3 Estabilidad de estructuras 366

Lo que hemos aprendido/Guía de estudio para examen 370
Preguntas de opción múltiple/Preguntas/Problemas 373

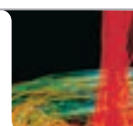
12 Gravitación 381



- 12.1 La ley de gravitación de Newton 382
- 12.2 Gravitación cerca de la superficie terrestre 387
- 12.3 Gravitación dentro de la Tierra 389
- 12.4 Energía potencial gravitacional 391
- 12.5 Las leyes de Kepler y el movimiento planetario 395
- 12.6 Órbitas satelitales 400
- 12.7 Materia oscura 405

Lo que hemos aprendido/Guía de estudio para examen 407
Preguntas de opción múltiple/Preguntas/Problemas 410

13 Sólidos y fluidos 417



- 13.1 Los átomos y la composición de la materia 418
- 13.2 Estados de la materia 420
- 13.3 Tensión, compresión y corte 421
- 13.4 Presión 425
- 13.5 Principio de Arquímedes 430
- 13.6 Movimiento de un fluido ideal 434
- 13.7 Viscosidad 442
- 13.8 Turbulencia y fronteras de la investigación en el flujo de fluidos 444

Lo que hemos aprendido/Guía de estudio para examen 445
Preguntas de opción múltiple/Preguntas/Problemas 449

PARTE 3: OSCILACIONES Y ONDAS

14 Oscilaciones 455



- 14.1 Movimiento armónico simple 456
- 14.2 Movimiento pendular 464
- 14.3 Trabajo y energía en las oscilaciones armónicas 466
- 14.4 Movimiento armónico amortiguado 470
- 14.5 Movimiento armónico forzado y resonancia 477
- 14.6 Espacio de fase 479
- 14.7 Caos 480

Lo que hemos aprendido/Guía de estudio para examen 481
Preguntas de opción múltiple/Preguntas/Problemas 485

15 Ondas 492

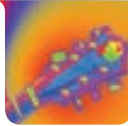


- 15.1 Movimiento ondulatorio 493
- 15.2 Osciladores acoplados 494
- 15.3 Descripción matemática de las ondas 495
- 15.4 Derivación de la ecuación de onda 498
- 15.5 Ondas en espacios bidimensionales y tridimensionales 502
- 15.6 Energía, potencia e intensidad de ondas 505
- 15.7 El principio de superposición e interferencia 508
- 15.8 Ondas estacionarias y resonancia 510
- 15.9 Investigación sobre ondas 513

Lo que hemos aprendido/Guía de estudio para examen 515
Preguntas de opción múltiple/Preguntas/Problemas 519

16 Sonido 524

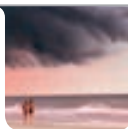
- 16.1 Ondas longitudinales de presión 525
- 16.2 Intensidad de sonido 529
- 16.3 Interferencia del sonido 533
- 16.4 Efecto Doppler 536
- 16.5 Resonancia y música 542
- Lo que hemos aprendido/Guía de estudio para examen 545
- Preguntas de opción múltiple/Preguntas/Problemas 550

**PARTE 4: FÍSICA TÉRMICA****17 Temperatura 556**

- 17.1 Definición de temperatura 557
- 17.2 Rangos de temperatura 559
- 17.3 Medición de la temperatura 563
- 17.4 Expansión térmica 563
- 17.5 Temperatura superficial de la Tierra 571
- 17.6 Temperatura del universo 573
- Lo que hemos aprendido/Guía de estudio para examen 574
- Preguntas de opción múltiple/Preguntas/Problemas 576

**18 El calor y la primera ley de la termodinámica 581**

- 18.1 Definición de calor 582
- 18.2 Equivalente mecánico del calor 583
- 18.3 Calor y trabajo 584
- 18.4 Primera ley de la termodinámica 586
- 18.5 La primera ley para procesos especiales 588
- 18.6 Calores específicos de sólidos y fluidos 589
- 18.7 Calor latente y transiciones de fase 592
- 18.8 Modos de la transferencia de energía térmica 596
- Lo que hemos aprendido/Guía de estudio para examen 605
- Preguntas de opción múltiple/Preguntas/Problemas 608

**19 Gases ideales 614**

- 19.1 Leyes empíricas de gases 615
- 19.2 Ley de los gases ideales 617
- 19.3 Teorema de equipartición 623
- 19.4 Calor específico de un gas ideal 626
- 19.5 Procesos adiabáticos para un gas ideal 630
- 19.6 La teoría cinética de los gases 634
- Lo que hemos aprendido/Guía de estudio para examen 640
- Preguntas de opción múltiple/Preguntas/Problemas 644

**20 La segunda ley de la termodinámica 649**

- 20.1 Procesos reversibles e irreversibles 650
- 20.2 Motores y refrigeradores 652
- 20.3 Motores ideales 654
- 20.4 Motores reales y eficiencia 658
- 20.5 La segunda ley de la termodinámica 664
- 20.6 Entropía 666
- 20.7 Interpretación microscópica de la entropía 669
- Lo que hemos aprendido/Guía de estudio para examen 672
- Preguntas de opción múltiple/Preguntas/Problemas 677

**Apéndice A Matemáticas Primer A-1****Apéndice B Masas de isótopos, energías de enlace y vidas medias A-9****Apéndice C Propiedades de los elementos A-19****Respuestas de problemas y preguntas seleccionadas RES-1***Créditos C-1**Índice I-1*

Prefacio

Física para ingeniería y ciencias, volumen 1, está concebida para usarse en la secuencia de física introductoria basada en cálculo en universidades e institutos superiores. Se puede emplear ya sea en una secuencia introductoria de dos semestres, o en una secuencia de tres semestres. El curso está diseñado para estudiantes de las carreras de ciencias biológicas, ciencias físicas, matemáticas e ingeniería.

Habilidades para la resolución de problemas: aprender a pensar como un científico

Quizás una de las habilidades más importantes que los estudiantes pueden adquirir en su curso de física es la de **resolver problemas y pensar críticamente acerca de una situación**. La física se basa en un núcleo de ideas fundamentales que se pueden aplicar a diversas situaciones y problemas. *Física para ingeniería y ciencias*, volumen 1, de Bauer y Westfall reconoce este hecho, y proporciona un método de resolución de problemas probado en clase por los autores, que se utiliza en todo el texto, el cual utiliza un formato de pasos múltiples.

La sección “Lineamientos para resolución de problemas” ayuda a los estudiantes a mejorar su destreza en la resolución de problemas, al enseñarles cómo desmontar un enunciado de problema en sus componentes clave. Los pasos claves para escribir ecuaciones correctas se describen muy bien y son de gran ayuda para los estudiantes.

—Nina Abramzon, California Polytechnic University, Pomona

Con frecuencia escucho la desalentadora queja de estudiantes: “no sé por dónde empezar para resolver problemas”. Yo creo que el enfoque sistemático de ustedes, una estrategia claramente expuesta, puede ayudar.

—Stephane Coutu, The Pennsylvania State University

Método de resolución de problemas

Problema resuelto

Los **Problemas resueltos** numerados del libro son problemas totalmente trabajados, y cada uno de ellos sigue estrictamente el método de siete pasos que se describe en el capítulo 1:

1. **PIENSE:** Lea cuidadosamente el problema. Pregúntese cuáles cantidades se conocen, cuáles serían útiles pero se desconocen y cuáles se piden en la solución. Escriba estas cantidades y representelas con los símbolos que comúnmente se usan. Convierta a unidades SI, si es necesario.
2. **ESBOCE:** Haga un diagrama de la situación física que le ayude a visualizar el problema. Para muchos estilos de aprendizaje, es esencial una representación visual o gráfica, y ésta es a menudo indispensable para definir las variables.
3. **INVESTIGUE:** Escriba los principios físicos o leyes que se apliquen al problema. Use ecuaciones que representen estos principios y conecte entre sí las cantidades conocidas y desconocidas. A veces, habrá que deducir las ecuaciones combinando dos o más ecuaciones conocidas para obtener la desconocida.

PROBLEMA RESUELTO 6.6 Energía producida por las Cataratas del Niágara

PROBLEMA

Las Cataratas del Niágara vierten un promedio de $5\,520\text{ m}^3$ de agua en una caída de 49.0 m cada segundo. Si toda la energía potencial de esa agua se pudiese convertir en energía eléctrica, ¿cuánta potencia eléctrica podrían generar las Cataratas del Niágara?

SOLUCIÓN

PIENSE

La masa de un metro cúbico de agua es de $1\,000\text{ kg}$. El trabajo realizado por el agua al caer es igual al cambio en su energía potencial gravitacional. La potencia media es el trabajo por unidad de tiempo.

ESBOCE

Un croquis del eje vertical de coordenadas se sobrepone a una foto de las Cataratas del Niágara en la figura 6.22.

INVESTIGUE

La potencia media está dada por el trabajo por unidad de tiempo:

$$\bar{P} = \frac{W}{t}$$

El trabajo que realiza el agua que cae es igual al cambio en la energía potencial gravitacional,

$$\Delta U = W.$$

El cambio en energía potencial gravitacional de una masa dada m de agua al caer una distancia h está dada por

$$\Delta U = mgh.$$

SIMPLIFIQUE

Podemos combinar las tres ecuaciones anteriores para obtener

$$\bar{P} = \frac{W}{t} = \frac{mgh}{t} = \left(\frac{m}{t}\right)gh.$$

(continúa)

CALCULE

Primero calculamos la masa del agua que se mueve en las cataratas por unidad de tiempo, a partir del volumen dado de agua por unidad de tiempo, usando la densidad del agua:

$$\frac{m}{t} = \left(5520 \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \right) \left(\frac{1000 \text{ kg}}{\text{m}^3} \right) = 5.52 \cdot 10^6 \text{ kg/s.}$$

La potencia media es entonces

$$\bar{P} = (5.52 \cdot 10^6 \text{ kg/s}) (9.81 \text{ m/s}^2) (49.0 \text{ m}) = 2653.4088 \text{ MW.}$$

REDONDEE

Redondeamos a tres cifras significativas:

$$\bar{P} = 2.65 \text{ GW.}$$

VUELVA A REVISAR

Nuestro resultado es comparable con la producción de plantas eléctricas grandes, del orden de 1 000 MW (1 GW). La capacidad combinada de generación eléctrica de todas las plantas hidroeléctricas en las Cataratas del Niágara tiene un pico de 4.4 GW durante la temporada de aguas altas en la primavera, lo cual es cercano a nuestra respuesta. Sin embargo, usted puede preguntarse cómo produce electricidad el agua simplemente al caer de las Cataratas del Niágara. La respuesta es que no lo hace. En vez de esto, una gran fracción del agua del Río Niágara se desvía aguas arriba de las cataratas y se envía por túneles, donde mueve generadores de energía eléctrica. El agua que pasa por las cascadas durante el día y en la temporada turística de verano es sólo alrededor de 50% del caudal del Río Niágara. Este flujo se reduce todavía más, hasta 10%, y se desvía más agua para la generación de energía durante la noche y en el invierno.

- SIMPLIFIQUE:** Simplifique algebraicamente el resultado tanto como sea posible. Este paso es especialmente útil cuando se tiene que determinar más de una cantidad.
- CALCULE:** Sustituya con números y unidades en la ecuación simplificada y calcule. Típicamente, se obtienen en la respuesta un número y una unidad física.
- REDONDEE:** Considere el número de cifras significativas que debe contener el resultado. Un resultado obtenido por multiplicación o división se debe redondear al mismo número de cifras significativas de la cantidad de entrada que tenga el menor número de cifras significativas. No redondee en los pasos intermedios, ya que redondear antes de tiempo podría dar una solución errónea. Incluya las unidades adecuadas en la respuesta.
- VUELVA A REVISAR:** Considere el resultado. ¿Parece realista la respuesta (tanto por el número como por las unidades)? Examine los órdenes de magnitud. Pruebe su solución con casos límite.

Ejemplos

Los **ejemplos** más breves y concisos (solamente el planteamiento del problema y la solución) se enfocan en un punto o concepto específico. Los ejemplos más breves también sirven como puente entre los **Problemas resueltos** totalmente con el proceso completo de solución (con todos los siete pasos) y los problemas para tarea en casa.

Práctica para resolución de problemas

La **Práctica para resolución de problemas** proporciona **Problemas resueltos adicionales** que, de nuevo, siguen el formato completo de siete pasos. Esta sección se encuentra inmediatamente antes de los problemas de final de capítulo. También aquí se presentan **Estrategias y lineamientos para resolución de problemas**.

Constituyen una útil herramienta para que los estudiantes mejoren sus habilidades en la solución de problemas. Los autores hicieron un buen trabajo al tratar, en cada capítulo, los pasos más importantes para llegar a la solución de los problemas de fin de capítulo. Los estudiantes que nunca antes tuvieron un curso de física encontrarán estos lineamientos muy benéficos. Me gustó especialmente la conexión entre el lineamiento y el problema resuelto. La descripción detallada de cómo resolver estos problemas ciertamente ayudará a los estudiantes a entender mejor los conceptos.

—Luca Bertello, University of California, Los Angeles

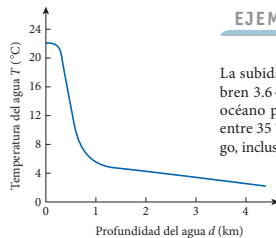


FIGURA 17.22 Temperatura promedio del océano como función de la profundidad bajo la superficie.

EJEMPLO 17.4

Subida del nivel del mar debido a la expansión térmica del agua

La subida en el nivel de los océanos de la Tierra es de preocupación actual. Los océanos cubren $3.6 \cdot 10^8 \text{ km}^2$, un poco más de 70% del área superficial de la Tierra. La profundidad del océano promedio es de 3 700 m. La temperatura superficial del océano varía ampliamente, entre $35 \text{ }^\circ\text{C}$ en verano en el golfo Pérsico y $-2 \text{ }^\circ\text{C}$ en las regiones árticas y antárticas. Sin embargo, incluso si la temperatura superficial del océano supera los $20 \text{ }^\circ\text{C}$, la temperatura del agua cae rápidamente como función de la profundidad y alcanza $4 \text{ }^\circ\text{C}$ a una profundidad de 1 000 m (figura 17.22). La temperatura promedio global de toda el agua del mar es aproximadamente de $3 \text{ }^\circ\text{C}$. La tabla 17.3 lista un coeficiente de expansión de cero para el agua a una temperatura de $4 \text{ }^\circ\text{C}$. De esta manera, es seguro suponer que el volumen del agua oceánica cambia muy poco a una profundidad mayor a 1 000 m. Para los 1 000 m de la parte superior del agua oceánica, supongamos que la temperatura promedio global es de $10.0 \text{ }^\circ\text{C}$ y calculemos el efecto de la expansión térmica.

PROBLEMA

¿Cuánto cambiaría el nivel del mar, sólo como resultado de la expansión térmica del agua, si la temperatura del agua de todos los océanos se incrementara por $\Delta T = 1.0 \text{ }^\circ\text{C}$?

SOLUCIÓN

El coeficiente de expansión térmica del agua a $10.0 \text{ }^\circ\text{C}$ es $\beta = 87.5 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ (de la tabla 17.3), y el cambio en el volumen de los océanos está dado por la ecuación 17.9, $\Delta V = \beta V \Delta T$, o

$$\frac{\Delta V}{V} = \beta \Delta T. \quad (i)$$

Podemos expresar el área superficial total de los océanos como $A = (0.7)4\pi R^2$, donde R es el radio de la Tierra y el factor 0.7 refleja el hecho de que más o menos 70% de la superficie de esta esfera está cubierta de agua. Supongamos que el área superficial de los océanos es A .

PRÁCTICA PARA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Lineamientos de problemas resueltos: energía cinética, trabajo y potencia

1. En todos los problemas que incluyan la energía, el primer paso es identificar claramente el sistema y los cambios en sus condiciones. Si un objeto sufre un desplazamiento, verifique que éste se mida siempre desde el mismo punto del objeto, como la orilla frontal o el centro del objeto. Si la rapidez del objeto cambia, identifique las rapidez inicial y final en puntos específicos. Con frecuencia es útil un diagrama para mostrar la posición y la rapidez del objeto en dos tiempos interesantes diferentes.

2. Tenga cuidado de identificar la fuerza que hace el trabajo. También observe si las fuerzas que hacen el trabajo son constantes o variables, porque se necesitan tratar en forma diferente.

3. Usted puede calcular la suma del trabajo realizado por fuerzas individuales que actúan sobre un objeto, o el trabajo realizado por la fuerza neta que actúa sobre un objeto; el resultado debe ser el mismo. (Usted puede usar esto como una forma de verificar sus cálculos.)

4. Recuerde que el sentido de la fuerza de reposición ejercida por un resorte es siempre opuesto al sentido del desplazamiento del resorte desde su punto de equilibrio.

5. La fórmula para la potencia, $P = \vec{F} \cdot \vec{v}$, es muy útil, pero se aplica sólo a una fuerza constante. Cuando use una definición más general de la potencia, asegúrese de distinguir entre la potencia media, $\bar{P} = \frac{W}{\Delta t}$, y el valor instantáneo de la potencia, $P = \frac{dW}{dt}$.

PROBLEMA RESUELTO 5.2 Levantamiento de ladrillos

PROBLEMA

Una carga de ladrillos en una obra de construcción tiene una masa de 85.0 kg. Una grúa levanta esta carga desde el piso hasta una altura de 50.0 m en 60.0 s a una rapidez baja constante. ¿Cuál es la potencia media de la grúa?

SOLUCIÓN

PIENSE

Subir los ladrillos con una rapidez baja constante significa que la energía cinética es despreciable, de modo que el trabajo en esta situación se realiza sólo contra la gravedad. No hay aceleración y la fricción es despreciable. La potencia media es entonces el trabajo realizado contra la gravedad dividido entre el tiempo necesario para elevar la carga de ladrillos hasta la altura especificada.

ESBOCE

En la figura 5.20 se muestra un diagrama de cuerpo libre de la carga de los ladrillos. Aquí hemos definido el sistema de coordenadas en el que el eje y es vertical y positivo hacia arriba. La tensión, T , que ejerce el cable de la grúa es una fuerza en sentido ascendente, y el peso, mg , de la carga de ladrillos es una fuerza descendente. Como la carga se mueve con rapidez constante, la suma de la tensión y el peso es cero. La carga se mueve verticalmente una distancia h , como se muestra en la figura 5.21.

INVESTIGUE

El trabajo, W , que realiza la grúa está dado por

$$W = mgh.$$

La potencia media, \bar{P} , necesaria para subir la carga en el tiempo dado Δt es

$$\bar{P} = \frac{W}{\Delta t}.$$

SIMPLIFIQUE

Combinando las dos ecuaciones anteriores se obtiene

$$\bar{P} = \frac{mgh}{\Delta t}.$$

CALCULE

Ahora introducimos los números y obtenemos

$$\bar{P} = \frac{(85.0 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2)(50.0 \text{ m})}{60.0 \text{ s}} = 694.875 \text{ W.}$$

(continúa)

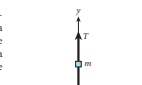


FIGURA 5.20 Diagrama de cuerpo libre de la carga de ladrillos de masa m que levanta una grúa.

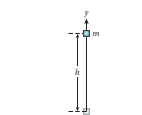


FIGURA 5.21 La masa m se eleva una distancia h .

Preguntas y conjuntos de problemas de final de capítulo

Además de proporcionar lineamientos de solución de problemas, ejemplos y estrategias, *Física para ingeniería y ciencias*, volumen 1, ofrece también una amplia variedad de **preguntas y problemas de fin de capítulo**. Los profesores con frecuencia dicen: “no necesito un montón de problemas, sólo algunos problemas realmente buenos”. Esta obra tiene ambas cosas. Las preguntas y los problemas de fin de capítulo se crearon con la idea de hacerlos interesantes para el lector. Los autores, junto con un panel de excelentes escritores (quienes, quizá sea lo más importante, son también instructores experimentados de física), escribieron las preguntas y los problemas para cada capítulo, asegurándose de proporcionar una amplia variedad en cuanto a nivel, contenido y estilo. Incluido en cada capítulo, hay un conjunto de Preguntas de opción múltiple, Preguntas, Problemas (por sección) y Problemas adicionales (sin “pista” de sección). Un punto así • identifica los problemas ligeramente más desafiantes, y dos puntos •• identifican los problemas aún más desafiantes.

PREGUNTAS DE OPCIÓN MÚLTIPLE

13.1 El agua salada tiene una densidad mayor que el agua dulce. Un bote flota tanto en el agua dulce como en el agua salada. La fuerza de flotación sobre el bote en el agua salada es _____ que en el agua dulce.

- a) igual b) menor c) mayor

13.2 Usted llena un vaso alto con hielo y entonces agrega agua hasta el nivel del borde del vaso, de tal suerte que alguna parte del hielo flota sobre el borde. Cuando se derrite el hielo, ¿qué pasa con el nivel del agua? (Desprecie la evaporación y suponga que el hielo y el agua permanecen a 0°C mientras el hielo se derrite.)

- a) El agua se derrama por los bordes.
b) El nivel del agua cae por debajo del borde.
c) El nivel del agua permanece a nivel del borde.
d) Depende de la diferencia de la densidad entre el agua y el hielo.

13.3 La figura muestra cuatro tanques abiertos idénticos, llenos hasta el borde con agua y puestos en una báscula. Unas bolas flotan en los tanques (2) y (3), pero un objeto se hunde hasta el fondo del tanque (4). ¿Cuál de los siguientes ordenan correctamente los pesos mostrados en las básculas?

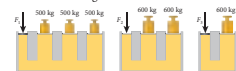


- a) (1) < (2) < (3) < (4) e) (1) < (2) = (3) = (4)
b) (1) < (2) = (3) < (4) d) (1) = (2) = (3) < (4)

13.4 Se encuentra en un bote lleno con grandes piedras a la mitad de un estanque pequeño. Usted comienza a tirar las piedras al agua. ¿Qué le pasa al nivel del agua del estanque?

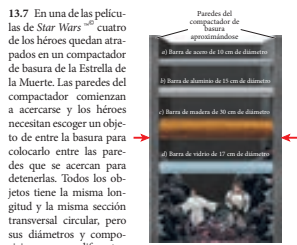
- a) Sube. d) Sube momentáneamente y luego baja cuando las piedras llegan al fondo.
b) Baja. e) No hay suficiente información para decidir.
c) No cambia.

13.5 Ordene jerárquicamente, de mayor a menor, las magnitudes de las fuerzas F_1 , F_2 y F_3 requeridas para equilibrar las masas mostradas en la figura.



13.6 En una tubería horizontal de agua que se estrecha a un radio menor, la velocidad del agua en la sección con el radio menor será mayor. ¿Qué pasa con la presión?

- a) La presión será la misma tanto en la sección más ancha como en la más angosta de la tubería.
b) La presión será mayor en la sección más estrecha de la tubería.
c) La presión será mayor en la sección más ancha de la tubería.
d) Es imposible decir.



13.7 En una de las películas de *Star Wars* cuatro de los héroes quedan atrapados en un compactador de basura de la Estrella de la Muerte. Las paredes del compactador comienzan a acercarse y los héroes necesitan escoger un objeto de entre la basura para colocarlo entre las paredes que se acercan para detenerlas. Todos los objetos tienen la misma longitud y la misma sección transversal circular, pero sus diámetros y composiciones son diferentes.

Suponga que cada objeto está orientado horizontalmente y no se dobla. Tienen el tiempo y la fuerza para sostener sólo uno de estos objetos entre las paredes. ¿Cuál de los objetos mostrados en la figura servirá mejor, esto es, resistirá la mayor fuerza por unidad de compresión?

- 13.8 Muchos altímetros determinan los cambios de altura midiendo los cambios en la presión atmosférica. Un altímetro que está diseñado para ser capaz de detectar cambios de altitud de 100 m cerca del nivel del mar debería ser capaz de detectar cambios de

- a) aproximadamente 1 Pa. d) aproximadamente 1 kPa.
b) aproximadamente 10 Pa. e) aproximadamente 10 kPa.
c) aproximadamente 100 Pa.

13.9 ¿Cuál de las siguientes afirmaciones no se hizo de la derivación de la ecuación de Bernoulli?

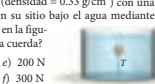
- a) Las líneas de corriente no se cruzan. c) Hay fricción despreciable.
b) No hay turbulencia. d) No hay turbulencia.
e) Hay gravedad despreciable.

13.10 Un vaso de precipitado se llena con agua hasta el borde. Cuando se coloca suavemente un patito de plástico de juguete ocasiona que algo de agua se derrame. El peso del vaso de precipitado con el patito flotando en él es

- a) mayor que el peso antes de poner al patito.
b) menor que el peso antes de poner al patito.
c) igual que el peso antes de poner al patito.
d) mayor o menor que el peso antes de poner al patito, dependiendo del peso del patito.

13.11 Un pedazo de corcho (densidad = 0.33 g/cm^3) con una masa de 10 g se mantiene en su sitio bajo el agua mediante una cuerda, como se muestra en la figura. ¿Cuál es la tensión, T , en la cuerda?

- a) 0.10 N c) 0.30 N e) 200 N
b) 0.20 N d) 100 N f) 300 N



PREGUNTAS

13.12 Usted sabe por experiencia que si el auto en el que está viajando se detiene súbitamente, los objetos pesados en la parte trasera se mueven hacia la parte delantera. ¿Por qué un globo lleno de helio en una situación semejante se mueve, en lugar de esto, hacia la parte trasera del auto?

13.13 Un pedazo de papel se dobla a la mitad y después se coloca sobre una mesa plana, de tal manera que se “levante” en la mitad como se muestra en la figura. Si usted sopla aire entre el papel y la mesa, ¿se moverá el papel hacia arriba o hacia abajo? Explique.

13.14 ¿En qué dirección actúa la fuerza debida al agua que fluye de la regadera sobre la cortina del baño, hacia adentro en la dirección de la ducha o hacia fuera? Explique.

13.15 Indique y discuta cualesquiera fallas en la siguiente afirmación: *El ascensor de coches hidráulico es un dispositivo que funciona sobre la base del principio de Pascal. Semejante dispositivo puede producir grandes fuerzas de salida con pequeñas fuerzas de entrada. De esta manera, con una pequeña cantidad de trabajo realizado por la fuerza de entrada, se produce una cantidad mucho mayor por la fuerza de salida, y se puede levantar el enorme peso de un coche.*

13.16 Dados dos resortes de tamaño y forma idénticos, uno hecho de acero y otro de aluminio, ¿cuál tiene la mayor constante de resorte? (Depende la diferencia más en el módulo de corte o en el módulo volumétrico del material?)

13.17 Un material tiene una mayor densidad que otro. ¿Son los átomos o moléculas individuales del primer material necesariamente más pesados que aquellos del segundo?

PROBLEMAS

Una • y dos •• indican un nivel creciente de dificultad del problema.

Secciones 13.1 y 13.2

13.23 El aire está formado por moléculas de diversos tipos, con una masa molar media de 28.95 g. Un adulto que inhala 0.50 L de aire a nivel del mar, ¿cuántas moléculas inspira?

•13.24 La sal de mesa ordinaria (NaCl) consiste de iones de sodio y cloro dispuestos en una red cristalina cúbica centrada en las caras. Esto es, los cristales de cloruro de sodio consisten de celdas unitarias cúbicas con un ion de sodio en cada esquina y en el centro de cada cara y un ion de cloro en el centro del cubo y en el punto medio de cada arista. La densidad del cloruro de sodio es de $2.165 \cdot 10^3\text{ kg/m}^3$. Calcule el espacio entre los iones de sodio y de cloro adyacentes en el cristal.

Sección 13.3

13.25 Un candelabro de 20 kg se encuentra suspendido del techo por cuatro alambres de acero verticales. Cada alambre tiene una longitud sin carga de 1 m y un diámetro de 2 mm y cada uno soporta la misma carga. Cuando se cuelga el candelabro, ¿cuánto se estiran los cables?

13.18 Las balanzas analíticas se calibran para dar valores correctos de la masa de artículos como objetos de acero con una densidad de $\rho_s = 8000.00\text{ kg/m}^3$. La calibración compensa la fuerza de flotación que surge debido a que las mediciones se realizan en el aire, con una densidad de $\rho_a = 1.205\text{ kg/m}^3$. ¿Qué compensación debe hacerse para medir masas de objetos de un material distinto, de densidad ρ_o ? ¿Tiene alguna importancia la fuerza de flotación del aire?

13.19 Si usted abre el grifo en el lavabo del baño, observará que la corriente parece estrecharse a partir del punto en el cual deja la abertura del grifo hasta el punto en el cual el agua golpea el fondo del lavabo. ¿Por qué ocurre esto?

13.20 En muchos problemas que involucran a la segunda ley de Newton al movimiento de los objetos sólidos, se desprecia la fricción a fin de hacer la solución más fácil. La contraparte de la fricción entre sólidos es la viscosidad de los líquidos. ¿Se tornan los problemas que involucran el flujo de los fluidos más simples si se desprecia la viscosidad? Explique.

13.21 Usted tiene dos esferas de plata idénticas y dos fluidos desconocidos, A y B. Coloca una esfera en el fluido A y se hunde; coloca la otra esfera en el fluido B y flota. ¿Qué puede concluir acerca de la fuerza de flotación del fluido A contra el fluido B?

13.22 El agua fluye de la abertura circular de un grifo de radio r_0 dirigido verticalmente hacia abajo, a velocidad v_0 . Conforme la corriente de agua cae, se estrecha. Encuentre una expresión del radio de la corriente como función de la distancia que ha caído, $r(z)$, donde z se mide hacia abajo a partir de la abertura. Desprecie la fragmentación eventual de la corriente en gotitas y cualquier resistencia debida al arrastre o la viscosidad.

13.26 Encuentre el diámetro mínimo de una cuerda de nailon de 50.0 m de largo que no se estirará más de 1.00 cm cuando se suspenda una carga de 70.0 kg de su extremo inferior. Suponga que $Y_{\text{nailon}} = 3.51 \cdot 10^8\text{ N/m}^2$.

13.27 Un alambre de acero de 2.0 m de largo en un instrumento musical tiene un radio de 0.03 mm. Cuando el cable está bajo una tensión de 90 N, ¿cuánto cambia su longitud?

•13.28 Una barra de longitud L se fija a una pared. La carga sobre la barra se incrementa linealmente (como se muestra por las flechas en la figura) desde cero en el extremo izquierdo a W newton por unidad de longitud en el extremo derecho. Encuentre la fuerza de corte (cortante) en

- a) el extremo derecho, b) el centro y c) el extremo izquierdo.

•13.29 El abismo de Challenger en la Fosa de las Marianas del Océano Pacífico es el punto más profundo conocido en los

La técnica de resolución de problemas, para tomar prestada una frase de mis estudiantes, “no es una alucinación”. Yo soy escéptico cuando otros proponen enfoques “unitalla” para resolución de problemas. He visto demasiados de estos enfoques que simplemente no funcionan desde el punto de vista pedagógico. El enfoque usado por los autores, sin embargo, está hecho de tal manera que los estudiantes se ven realmente forzados a usar su intuición antes de comenzar reflexionando en los primeros principios pertinentes. . .

¡Guau! Hay algunos problemas realmente bonitos al final del capítulo. Mis felicitaciones a los autores. Había una linda diversidad de problemas, y la mayoría de ellos exigían mucho más que un simple “conectar y jugar”. Encontré muchos problemas que yo me sentiría inclinado a asignar.

—Brent Corbin, University of California, Los Angeles

El texto logra un equilibrio muy bueno al proporcionar detalles matemáticos y rigor, junto con una presentación clara e intuitiva de los conceptos físicos. El equilibrio y la variedad de los problemas, tanto problemas resueltos como problemas de fin de capítulo, son extraordinarios. En este libro se encuentran muchas características que son difíciles de encontrar en otros textos estándar, incluyendo el uso correcto de la notación vectorial, la evaluación explícita de las integrales múltiples, por ejemplo en los cálculos de momento de inercia y las intrigantes conexiones con la física moderna.

—Lisa Everett, University of Wisconsin, Madison

Temas contemporáneos: cautivar las imaginaciones de los estudiantes

Física para ingeniería y ciencias, volumen 1, incluye una amplia variedad de temas contemporáneos, así como presentaciones basadas en investigación, diseñadas para ayudar a los estudiantes a apreciar la belleza de la física y a ver cómo los conceptos de la física se relacionan con el desarrollo de nuevas tecnologías en los campos de la ingeniería, la medicina, la astronomía y otros. La sección “El panorama general”, al principio del texto, está diseñada para introducir a los estudiantes a algunas asombrosas nuevas fronteras de la investigación que se están explorando en diversos campos de la física, y a los resultados que se han estado logrando durante los años recientes. Los autores vuelven a estos temas en varios puntos dentro del libro para una exploración más a fondo.

Los autores de este libro también presentan reiteradamente diferentes aspectos del amplio tema de la energía, tratando conceptos de fuentes de energía (fósiles, nucleares, renovables, alternativas, etc.), eficiencia energética y efectos ecológicos de las decisiones sobre suministro de energía. Se tratan las fuentes alternativas de energía y los recursos renovables dentro del marco de posibles soluciones a la crisis energética. Estas discusiones brindan una formidable oportunidad para captar el interés de los estudiantes, y son accesibles en el nivel de física introductoria.

En el texto se encuentran los siguientes temas de investigación de la física contemporánea y los siguientes análisis temáticos sobre energía (en verde):

Capítulo 1

La sección 1.3 tiene una subsección llamada “Metrología” que menciona la nueva definición del kilogramo y el reloj óptico del NIST
La sección 1.4 menciona la investigación de los autores con respecto a las colisiones de los iones pesados

Capítulo 4

La sección 4.2 tiene una subsección sobre la partícula de Higgs
La sección 4.7 tiene una subsección sobre la tribología

Capítulo 5

Sección 5.1 La energía en nuestra vida diaria
Sección 5.7 Potencia y eficiencia de combustible de los autos de Estados Unidos

Capítulo 6

La sección 6.8 tiene una subsección titulada “Avance: física atómica” que explica el *tunneling*
Problema resuelto 6.6. Energía producida por las Cataratas del Niágara

Capítulo 7

Ejemplo 7.5 Física de partículas
La sección 7.8 explica el billar de Sinai y el movimiento caótico

Capítulo 8

El ejemplo 8.3 menciona la propulsión electromagnética y el blindaje contra radiación en el contexto del envío de astronautas a Marte

Capítulo 10

Ejemplo 10.7 Muerte de una estrella
Ejemplo 10.8 *Flybrid*

Capítulo 12

La sección 12.1 tiene una subsección titulada “El Sistema Solar” que menciona la investigación sobre objetos en el Cinturón de Kuiper
Sección 12.7 Materia oscura

Capítulo 13

La sección 13.1 explica brevemente los nanotubos y la nanotecnología
La sección 13.2 explica brevemente los plasmas y los condensados Bose-Einstein
La sección 13.6 tiene una subsección titulada “Aplicaciones de la ecuación de Bernoulli” que explica la elevación y el diseño de alas de avión
Sección 13.8 Turbulencia y fronteras de la investigación en el flujo de fluidos

Capítulo 14

Sección 14.7 Caos

Capítulo 15

La sección 15.5 tiene una subsección titulada “Ondas sísmicas” que menciona la sismología de reflexión
La figura 15.11b) muestra una guitarra en nanoescala
La sección 15.8 incluye la oportunidad de autoexamen 15.4 sobre la cuerda de guitarra en nanoescala
Sección 15.9 Investigación sobre ondas

Capítulo 16

La sección 16.4 tiene una subsección titulada “El cono de Mach” que menciona la creación de ondas de choque por colisiones de núcleos en aceleradores de partículas y tiene un párrafo sobre radiación de Cherenkov

Capítulo 17

La sección 17.2 tiene subsecciones tituladas “Investigación en la frontera de las bajas temperaturas” e “Investigación en la frontera de las altas temperaturas”

Sección 17.5 Temperatura superficial de la Tierra

Sección 17.6 Temperatura del universo

Ejemplo 17.4 Subida del nivel del mar debido a la expansión térmica del agua

Capítulo 18

Ejemplo 18.7 Aislante del techo
Problema resuelto 18.2 Costo de calentar una casa en invierno
Problema resuelto 18.3 Corriente del Golfo
Ejemplo 18.8 La Tierra como un cuerpo negro
Sección 18.8 Modos de la transferencia de energía térmica/
Calentamiento global

La sección 18.8 tiene una subsección titulada “El calor en las computadoras”

Capítulo 19

Ejemplo 19.5 Temperatura del plasma de quark-gluones

Capítulo 20

Ejemplo 20.2 Calentar una casa con una bomba de calor
Ejemplo 20.4 Eficiencia máxima de una planta de energía eléctrica
Problema resuelto 20.1 Eficiencia de un motor de automóvil
Sección 20.4 Motores reales y eficiencia. Automóviles híbridos.
Eficiencia y la crisis de energía
Problema resuelto 20.2 Costo de operar una planta de energía eléctrica
Sección 20.7 Muerte de la entropía

¡Esta idea me parece genial! Ayudaría al instructor a mostrar a los estudiantes que la física es un tema vivo y apasionante. . . porque muestra que la física es una materia que trata de lo que está sucediendo, que es indispensable para descubrir cómo funciona el universo, que es necesaria para desarrollar nuevas tecnologías y cómo pueden beneficiar a la humanidad. . . Los (capítulos) contienen un montón de interesantes temas modernos y los explican con mucha claridad.

—Joseph Kapusta, University of Minnesota

La sección 17.5 sobre la temperatura superficial de la Tierra es excelente y es un ejemplo de lo que *falta* en muchos libros de texto introductorios: ejemplos que sean relevantes y apasionantes para los estudiantes.

—John William Gary, University of California, Riverside

Pienso que la idea de incluir la física moderna o contemporánea en todo el texto es genial. Los estudiantes a menudo abordan la física como una ciencia de conceptos que se descubrieron hace mucho tiempo. Ven a la ingeniería como la ciencia que les ha dado los avances en tecnología que ven actualmente. Sería genial mostrar a los estudiantes dónde exactamente comienzan estos avances, con la física.

—Donna W. Stokes, University of Houston

La característica más fuerte. . . El uso de matemáticas reales, especialmente cálculo, para deducir relaciones cinemáticas, las relaciones entre cantidades en movimiento circular, la dirección de la fuerza gravitacional, la magnitud de la fuerza de mareas, la extensión máxima de un conjunto de bloques apilados. Los problemas resueltos siempre se tratan primero simbólicamente. Con demasiada frecuencia, los libros de texto no dejan que las matemáticas trabajen para ellos.

—Kieran Mullen, University of Oklahoma

Contenido enriquecido: flexibilidad para sus estudiantes y las necesidades del curso

A los instructores que buscan cobertura adicional de ciertos temas y apoyo matemático para éstos, *Física para ingeniería*, volumen 1, les ofrece también flexibilidad. Este libro incluye algunos temas y algunos cálculos que no aparecen en muchos otros textos. Sin embargo, estos temas se han presentado de tal manera que su exclusión no afectará el curso total. Todo el texto está escrito en un nivel adecuado para el estudiante típico de física introductoria. En seguida hay una lista de contenido de cobertura flexible, así como de apoyo matemático adicional.

Capítulo 2

Sección 2.3 Se presenta el concepto de derivada usando un enfoque tanto conceptual como gráfico. Se dan ejemplos de uso de derivada, y se dirige a los estudiantes a un apéndice para otros “repasos”. Éste es un enfoque más extenso que el de otros textos.

Sección 2.4 Se introduce por analogía la aceleración como derivada de la velocidad con respecto al tiempo, y la explicación incluye un ejemplo.

Sección 2.6 Se introduce la integración como la inversa de la diferenciación para determinar el área bajo una curva. Esta presentación, más extensa que en muchos textos, se extiende a dos secciones, con ejemplos múltiples.

Sección 2.7 Se incluyen ejemplos en los que se usa la diferenciación.

Sección 2.8 Se muestra una derivación sobre argumentos de tiempo mínimo para llegar a una solución que es equivalente a la ley de Snell.

Los ejercicios de fin de capítulo relacionados con este tema incluyen las preguntas 20, 22 y 23, y múltiples problemas con uso de cálculo diferencial e integral.

Capítulo 3

Sección 3.1 Se presenta la derivada en el sentido de los componentes de un vector de posición tridimensional dentro de la velocidad tridimensional y luego dentro de la aceleración tridimensional.

Sección 3.3 Se explica la tangencialidad del vector velocidad a la trayectoria.

Sección 3.4 Se determinan la altura máxima y el alcance de un proyectil igualando a cero la derivada.

Sección 3.5 Se explica el movimiento relativo (ecuación 3.27).

El problema 3.38 de fin de capítulo se refiere a la derivada.

Capítulo 4

Sección 4.8 El ejemplo 4.10 sobre el mejor ángulo para tirar de un trineo es un problema de máximos y mínimos.

Capítulo 5

Sección 5.5 Se estudia el trabajo realizado por una fuerza variable usando integrales definidas y la derivación de la ecuación 5.20. También se trata la regla de la cadena.

Sección 5.6 Se explica el trabajo realizado por una fuerza de resorte (ecuación 5.24).

Sección 5.7 Se trata la potencia como derivada del trabajo con respecto al tiempo (ecuación 5.26).

Varios problemas de fin de capítulo complementan la cobertura, tales como los problemas 5.34 a 5.37.

Capítulo 6

Sección 6.3 La determinación del trabajo realizado por una fuerza incluye el uso de integrales.

Sección 6.4 La determinación de la fuerza a partir del potencial incluye el uso de derivadas; también se introducen derivadas parciales y gradiente (por ejemplo, el potencial de Lennard-Jones).

Varias preguntas y varios problemas de fin de capítulo complementan esta cobertura, tales como las preguntas 6.24 y 6.25 y los problemas 6.34, 6.35 y 6.36.

Capítulo 8

El texto presenta las integrales de volumen de modo que se pueden determinar, en un ejemplo resuelto, el volumen de una esfera y el centro de masa de un hemisferio.

Capítulo 9

Se proporcionan derivadas explícitas de vectores unitarios radicales y tangenciales. El texto deriva las ecuaciones de movimiento para aceleración angular constante, repitiendo la acostumbrada derivación de ecuaciones de movimiento para aceleración lineal constante que se presenta en el capítulo 2.

Capítulo 10

La integral de volumen que se introdujo en el capítulo 8 se utiliza para determinar el momento de inercia para diferentes objetos. El texto deduce la expresión para momento angular a fin de determinar la relación entre el momento angular de un sistema de partículas y el par de torsión.

Capítulo 11

Sección 11.3 Se utiliza la condición de estabilidad y se examina la segunda derivada de la energía potencial para determinar el tipo de equilibrio mediante interpretación gráfica de las funciones.

Capítulo 12

Sección 12.1 Se proporciona una cobertura excelente de la derivación de la fuerza gravitatoria de una esfera y dentro de la esfera.

Capítulo 14

Sección 14.4 La subsección titulada “Amortiguamiento pequeño” aplica el conocimiento del estudiante sobre osciladores armónicos simples a la obtención de la derivada de la ecuación del amortiguamiento pequeño mediante la diferenciación. Para el caso de la gran amortiguación, se dirige al estudiante nuevamente a la solución de la ecuación diferencial. El ejemplo 14.6 conduce al estudiante a través de un ejemplo de oscilador armónico amortiguado. La solución de esta ecuación se expresa explícitamente, pero el texto utiliza el cálculo diferencial e integral para llegar a esta respuesta. La subsección “Pérdida de energía en oscilaciones amortiguadas” incluye un cálculo de la tasa de pérdida de energía que usa la definición diferencial de potencia.

Sección 14.5 Una explicación a fondo del movimiento armónico forzado aprovecha la comprensión del estudiante de las ecuaciones diferenciales, analiza gráficamente la solución y luego el resultado.

Varios problemas de fin de capítulo, tales como el 14.55 y el 14.73, complementan esta cobertura.

Capítulo 15

Sección 15.4 Toda esta sección es única entre los textos de física introductoria, ya que utiliza ecuaciones diferenciales parciales para deducir la ecuación de onda.

Varias de las preguntas y varios de los problemas de fin de capítulo que se refieren al contenido de la sección 15.4 necesitan un entendimiento del cálculo diferencial e integral que se usa en esta sección, especialmente 15.30 y 15.31.

Capítulo 16

Sección 16.4 Explica el efecto Doppler como función de la distancia perpendicular.

Deducciones

En el texto se proporcionan deducciones generales como ejemplos para los estudiantes, que finalmente necesitarán desarrollar sus propias deducciones al repasar los problemas resueltos, al trabajar con los ejemplos y al resolver los problemas de fin de capítulo. Las deducciones se identifican en el texto con encabezados numerados para que los instructores puedan incluir este detallado material según sea necesario para acomodarse a las necesidades de sus cursos.

Nuevamente, la deducción que da como resultado la ecuación 6.15 es formidable. Pocos libros de los que he visto muestran a los estudiantes los pasos matemáticos de las deducciones. Éste es un punto fuerte de este libro. Asimismo, en la siguiente sección, me gusta mucho la generalización a tres dimensiones de la relación entre fuerza y energía potencial. Esto es algo que siempre hago en clase, aunque la mayoría de los libros no se acercan a esto.

—James Stone, Boston University

Introducción al cálculo diferencial e integral

En los apéndices se puede encontrar una introducción al cálculo diferencial e integral. Como la secuencia de este curso típicamente se imparte en el primer año de estudio en las universidades, presupone un conocimiento de la física y de las matemáticas anterior. Es preferible que los estudiantes hayan tenido un curso de cálculo diferencial e integral antes de comenzar esta secuencia del curso; pero también se puede tomar el cálculo en paralelo. Para facilitar esto último, el texto contiene una breve introducción en el apéndice, que da los resultados principales del cálculo diferencial e integral sin las rigurosas deducciones.

Construcción del conocimiento: el sistema de aprendizaje del texto

Sinopsis de inicio de capítulo

Al principio de cada capítulo hay una sinopsis que presenta los títulos de las secciones del capítulo. Esta sinopsis también incluye los títulos de los ejemplos y de los problemas resueltos que se encuentran en el capítulo. De un vistazo, los estudiantes y los instructores saben si un tema, ejemplo o problema que desean está en el capítulo.

Lo que aprenderemos/Lo que hemos aprendido

Cada capítulo de *Física para ingeniería y ciencias*, volumen 1, está organizado como un buen seminario de investigación. Alguna vez se dijo: “Di lo que les dirás, luego diles, y luego diles lo que les dijiste”. Cada capítulo comienza con **Lo que aprenderemos**: un rápido resumen de los puntos principales, sin ninguna ecuación. Al final de cada capítulo, **Lo que hemos aprendido/Guía de estudio para examen** contiene los conceptos clave, incluyendo las ecuaciones principales, los símbolos principales y los términos clave. También se da una lista de todos los símbolos que se usan en las fórmulas del capítulo.

LO QUE APRENDEREMOS

- Una fuerza es una cantidad vectorial que mide cómo interactúa un objeto con otros.
- Las fuerzas fundamentales incluyen la atracción gravitacional y la atracción y repulsión electromagnética. En la experiencia diaria, las fuerzas importantes incluyen la tensión, la fuerza normal, la fricción y las fuerzas de resorte.
- La suma de fuerzas múltiples que actúan sobre un objeto es la fuerza neta.
- Los diagramas de cuerpo libre son valiosas herramientas para resolver problemas.
- Las tres leyes de Newton sobre el movimiento rigen el movimiento de los objetos bajo la influencia de fuerzas.
 - La primera ley se aplica a objetos para los cuales las fuerzas externas están equilibradas.
 - La segunda ley describe los casos en que las fuerzas externas no están equilibradas.

- La tercera ley se refiere a fuerzas iguales (en magnitud) y opuestas (en dirección) entre dos cuerpos entre sí.
- La masa gravitacional y la masa inercial son equivalentes.
- La fricción cinética se opone al movimiento de los objetos en movimiento; la fricción de fricción estática se opone al movimiento inminente de los objetos.
- La fricción es importante para en movimientos del mundo real, pero los mecanismos exactos están todavía por descubrir.
- Las aplicaciones de las leyes de Newton a múltiples objetos, múltiples fuerzas aplicadas a estos objetos, y múltiples problemas en física.

LO QUE HEMOS APRENDIDO | GUÍA DE ESTUDIO PARA EXAMEN

- La fuerza neta sobre un objeto es la suma vectorial de las fuerzas que actúan sobre el objeto $\vec{F}_{\text{neto}} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$.
- La masa es una cualidad intrínseca de un objeto que cuantifica tanto su capacidad para resistir la aceleración como la fuerza gravitacional sobre el objeto.
- Un diagrama de cuerpo libre es una abstracción que muestra todas las fuerzas externas que actúan sobre un objeto aislado.
- Las leyes de Newton son las siguientes:
 - Primera ley de Newton. En ausencia de una fuerza neta sobre un objeto, el objeto permanecerá en reposo si estaba en reposo. Si estaba en movimiento, permanecerá en movimiento en línea recta con la misma velocidad.
 - Segunda ley de Newton. Si una fuerza externa, \vec{F}_{neto} , actúa sobre un objeto de masa m , la fuerza producirá una aceleración, \vec{a} , en la misma dirección de la fuerza: $\vec{F}_{\text{neto}} = m\vec{a}$.

- Tercera ley de Newton. Las fuerzas que ejercen dos objetos que interactúan entre sí son siempre exactamente iguales en magnitud y dirección pero con sentidos opuestos: $\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$.
- Ocurren dos tipos de fricción: estática y cinética. Ambos tipos son proporcionales a la fuerza normal, N . La fricción estática describe la fuerza de fricción entre un objeto en reposo sobre una superficie en términos del coeficiente de fricción estática, μ_s . La fuerza de fricción estática, $f_{s,\text{máx}}$, se opone a la fuerza que trata de mover un objeto, y tiene un valor máximo, $f_s \leq \mu_s N = f_{s,\text{máx}}$. La fricción cinética describe la fuerza de fricción entre un objeto en movimiento sobre una superficie en términos del coeficiente de fricción cinética, μ_k . La fricción cinética está dada por $f_k = \mu_k N$. En general, $\mu_s > \mu_k$.

DEDUCCIÓN 5.1

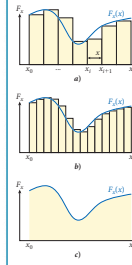


FIGURA 5.14 a) Una serie de rectángulos se aproxima al área bajo la curva obtenida graficando la fuerza como función del desplazamiento; b) una mejor aproximación usando rectángulos de menor anchura; c) el área exacta bajo la curva.

Si usted ya ha tomado cálculo integral, puede saltarse esta sección. Si la ecuación 5.20 es su primera exposición a las integrales, la siguiente derivación es una útil introducción. Derivaremos el caso unidimensional y usaremos nuestro resultado para la fuerza constante como punto inicial.

En el caso de una fuerza constante, podemos visualizar el trabajo como el área bajo la línea horizontal que grafica el valor de la fuerza constante en el intervalo entre x_0 y x . Para una fuerza variable, el trabajo es el área bajo la curva $F(x)$, pero esa área ya no es un simple rectángulo. En el caso de una fuerza variable, necesitamos dividir el intervalo de x_0 a x en muchos pequeños intervalos iguales. Luego aproximamos el área bajo la curva $F(x)$ por una serie de rectángulos y sumamos sus áreas para aproximarnos al trabajo. Como usted puede ver por la figura 5.14a), el área del rectángulo entre x_0 y x_1 está dada por $F(x_0)(x_1 - x_0) = F(x_0) \Delta x$. Obtenemos una aproximación para el trabajo sumando todos los rectángulos:

$$W \approx \sum_{i=1}^n W_i = \sum_{i=1}^n F_i(x_i) \Delta x.$$

Ahora espaciamos menos y menos los puntos x_i usando más de ellos. Este método hace más pequeño Δx y hace que el área total de la serie de rectángulos sea una mejor aproximación del área bajo la curva $F(x)$ como en la figura 5.14b). En el límite, cuando $\Delta x \rightarrow 0$, la suma se acerca a la expresión exacta para el trabajo:

$$W = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\sum_{i=1}^n F_i(x_i) \Delta x \right)$$

El límite de la suma de las áreas es exactamente como se define la integral:

$$W = \int_{x_0}^x F(x) dx.$$

Hemos obtenido este resultado para el caso de movimiento unidimensional. La deducción del caso tridimensional sigue líneas similares, pero es más elaborado en términos de álgebra.

Apéndice A

Matemáticas Primer

1. Álgebra	A-1
1.1 Lo básico	A-1
1.2 Exponentes	A-2
1.3 Logaritmos	A-2
1.4 Ecuaciones lineales	A-3
2. Geometría	A-3
2.1 Formas geométricas en dos dimensiones	A-3
2.2 Formas geométricas en tres dimensiones	A-3
3. Trigonometría	A-3
3.1 Triángulos rectángulos	A-3
3.2 Triángulos generales	A-5
4. Cálculo	A-6
4.1 Derivadas	A-6
4.2 Integrales	A-6
5. Números complejos	A-7
Ejemplo A.1 Conjunto de Mandelbrot	A-8

Introducciones conceptuales

Se proporcionan explicaciones conceptuales en el texto, antes de las explicaciones matemáticas, fórmulas o deducciones, con objeto de dejar claro para el estudiante por qué se necesita la cantidad, por qué es útil y por qué se debe definir exactamente. Los autores pasan entonces de la explicación y definición conceptual a una fórmula y a unos términos exactos.

Esta sección sobre expansión térmica es extraordinaria, y los problemas de ejemplo que la apoyan están muy bien hechos. Esta sección se puede poner a competir con cualquier texto que haya en el mercado, y salir vencedora. Los autores lo hacen muy bien en conceptos básicos.

—Marllin Simon, Auburn University

6.3 Oportunidad de autoexamen

¿Por qué la pelota de color más claro llega al fondo en la figura 6.10 antes que la otra pelota?



FIGURA 6.10 Carrera de dos pelotas que bajan por diferentes inclinaciones, desde la misma altura.

6.3 La pelota de color más claro desciende primero a una elevación inferior y, por lo tanto, convierte primero más de su energía potencial en energía cinética. Mayor energía cinética significa mayor rapidez. Por lo tanto, la pelota de color más claro alcanza rapidez más altas más pronto y puede moverse al extremo inferior de la pista más rápidamente, aun cuando la longitud de su trayectoria sea mayor.

Oportunidades de autoexamen

En seguida de la exposición de los conceptos principales dentro del texto, se incluyen conjuntos de preguntas para animar a los estudiantes a que dialoguen internamente. Estas preguntas ayudan a los estudiantes a pensar de manera crítica acerca de lo que acaban de leer, a decidir si han captado bien el concepto y a elaborar una lista de preguntas de seguimiento para plantear en la clase. Las respuestas para los autoexámenes se encuentran al final de cada capítulo.

Las oportunidades de autoexamen son eficaces para animar a los estudiantes a ubicar lo que han aprendido en este capítulo en el contexto de la comprensión conceptual más amplia que han estado estudiando a lo largo de los capítulos precedentes.

—Nina Abramzon, California Polytechnic University, Pomona

2.2 Ejercicio en clase

El lanzamiento de una pelota verticalmente hacia arriba proporciona un ejemplo de caída libre. En el instante en que la pelota llega a su altura máxima, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

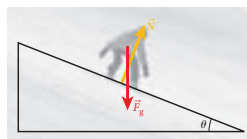
- La aceleración de la pelota apunta hacia abajo, y su velocidad hacia arriba.
- La aceleración de la pelota es cero, y su velocidad señala hacia arriba.
- La aceleración de la pelota apunta hacia arriba, y su velocidad hacia arriba.
- La aceleración de la pelota apunta hacia abajo, y su velocidad es cero.
- La aceleración de la pelota apunta hacia arriba, y su velocidad es cero.
- La aceleración de la pelota es cero y su velocidad apunta hacia abajo.

Ejercicios en clase

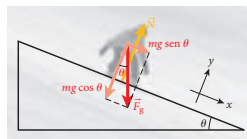
Los ejercicios en clase están diseñados para usarse con la tecnología de sistema de respuesta personal. Aparecerán en el texto de tal manera que los estudiantes puedan comenzar a contemplar los conceptos.



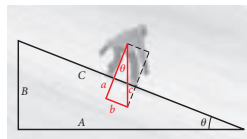
a)



b)



c)



d)

FIGURA 4.16 a) El patinador de tabla sobre nieve es un ejemplo de movimiento en un plano inclinado. b) Diagrama de cuerpo libre del patinador sobre el plano inclinado. c) Diagrama de cuerpo libre del patinador, con un sistema de coordenadas agregado. d) Triángulos semejantes en el problema del plano inclinado.

Programa visual

La familiaridad con el trabajo de artes gráficas en internet y en los juegos de video ha aumentado las exigencias para la presentación gráfica en libros de texto, que debe ser ahora más sofisticada para que resulte atractiva tanto para estudiantes como para profesores. Aquí se dan algunos ejemplos de técnicas e ideas que se implementan en *Física para ingeniería y ciencias*:

- Sobreposiciones de dibujos lineales sobre fotografías conectan conceptos físicos a veces muy abstractos con las realidades y las experiencias cotidianas de los estudiantes.
- Una vista tridimensional de los dibujos lineales añade plasticidad a la presentación. Los autores crearon gráficas matemáticamente exactas en programas de software tales como Mathematica, y luego los artistas gráficos las usaron para asegurar una completa exactitud junto con un estilo visualmente atractivo.



El proceso de desarrollo de 360° es un procedimiento continuo, orientado al mercado, para desarrollar productos asertivos e innovadores, impresos y digitales. Está dedicado a la mejora continua, y se guía por múltiples circuitos de realimentación de los clientes y por diversos puntos de verificación. Este proceso se inicia durante las primeras etapas de la planeación de nuestros nuevos productos, se intensifica durante el desarrollo y la producción, y luego comienza nuevamente en el momento de la publicación, en anticipación de la siguiente edición.

Un principio clave en el desarrollo de cualquier texto sobre física es su capacidad para adaptarse a las especificaciones de enseñanza en forma universal. La única forma de lograr esto es al tener contacto con voces universales, y aprender de sus sugerencias. Confiamos en que nuestro libro tenga el contenido más actual que la industria ofrece, lo cual impulsa nuestro deseo de exactitud al nivel más elevado posible. Para conseguir este objetivo, nos hemos movido por un camino arduo de producción. Los consejos y la mente abierta fueron cruciales en la producción de un texto de calidad superior.

Hemos comprometido a más de 200 profesores y estudiantes para guiarnos en el desarrollo de esta primera edición. Al invertir en esta amplia tarea, McGraw-Hill le ofrece a usted un producto que se ha creado, refinado, probado y validado como una herramienta exitosa para su curso.

Consejo de consultores

Se eligió cuidadosamente a un grupo de prestigiados instructores activos en el curso de física basada en cálculo diferencial e integral y en grupos de investigación que sirvieron como los principales consejeros y consultores para los autores y el equipo editorial con respecto al desarrollo del manuscrito. El consejo de consultores revisó el manuscrito; sirvió como grupo de evaluación para las cuestiones pedagógicas, de medios y de diseño; ayudaron a responder a señalamientos de otros revisores; aprobaron cambios de organización, y asistieron a grupos de enfoque para confirmar que el manuscrito estaba listo para su publicación.

Nina Abramzon, *California Polytechnic University–Pomona*

Rene Bellweid, *Wayne State University*

David Harrison, *University of Toronto*

John Hopkins, *The Pennsylvania State University*

David C. Ingram, *Ohio University–Athens*

Michael Lisa, *The Ohio State University*

Amy Pope, *Clemson University*

Roberto Ramos, *Drexel University*

Colaboradores

Un panel de excelentes escritores creó las preguntas y los problemas adicionales para aumentar la variedad de los ejercicios que se encuentran en cada capítulo:

Carlos Bertulani, *Texas A&M University–Commerce*

Ken Thomas Bolland, *Ohio State University*

John Cerne, *State University of New York–Buffalo**

Ralph Chamberlain, *Arizona State University*

Eugenia Ciocan, *Clemson University**

Fivos Drymiotis, *Clemson University*

Michael Famiano, *Western Michigan University**

Yung Huh, *South Dakota State University*

Pedram Leilabady, *University of North Carolina–Charlotte**

M.A.K. Lodhi, *Texas Tech University*

Charley Myles, *Texas Tech University*

Todd Pedlar, *Luther College**

Corneliu Rablau, *Kettering University*

Roberto Ramos, *Drexel University*

Ian Redmount, *Saint Louis University**

Todd Smith, *University of Dayton**

Donna Stokes, *University of Houston**

Stephen Swingle, *City College of San Francisco*

Marshall Thomsen, *Eastern Michigan University*

Prem Vaishnava, *Kettering University**

John Vasut, *Baylor University**

*Estos colaboradores también fueron autores de preguntas para el banco de pruebas que acompaña a esta obra, junto con David Bannon de la Oregon State University, mientras que Richard Halstein, de Michigan State University, organizó y revisó todas las colaboraciones. Además, Suzanne Willis, de North Illinois University, nos ayudó a compilar nuestro material para el *e-book*. Jack Cuthbert, del Holmes Community College de Ridgeland, compuso los textos de los ejercicios en clase en archivos PowerPoint. Collette March y Deborah Damcott, del Harper College, editaron las clases en PowerPoint, y finalmente, pero no por ello de menor importancia, Rob Hagood, del Washtenaw Community College y Amy Pope de la Clemson University, emplearon horas innumerables revisando y proporcionando observaciones vitales sobre la calidad de nuestro contenido para Connect.

Pruebas en clase

Durante cinco años antes de la producción de este libro, los autores probaron y refinaron los materiales con aproximadamente 4 000 de nuestros estudiantes de la Michigan State University. Recogieron la realimentación por escrito y también llevaron a cabo entrevistas individuales con una muestra representativa de los estudiantes, además de las pruebas en el salón de clase de los ejercicios y de las diapositivas PowerPoint. Varios de los colegas de los autores (Alexandra Gade, Alex Brown, Bernard Pope, Carl Schmidt, Chong-Yu Ruan, C.P. Yuan, Dan Stump, Ed Brown, Hendrik Schatz, Kris Starosta, Lisa Lapidus, Michael Harrison, Michael Moore, Reinhard Schwienhorst, Salemeah Ahmad, S.B. Mahanti, Scott Pratt, Stan Schriber, Tibor Nagy y Thomas Duguet), quienes co compartieron la secuencia de física introductoria en cursos paralelos, también proporcionaron ayuda e ideas invaluable, y sus contribuciones hicieron mucho más fuerte el presente libro.

1a. RONDA: MANUSCRITO DE LOS AUTORES

- ✓ Rondas múltiples de revisión por parte de profesores universitarios de física
- ✓ Revisión independiente de la precisión del texto, de los ejemplos y de los problemas resueltos por una firma profesional que empleó a matemáticos y a físicos
- ✓ Segunda revisión independiente de precisión de los problemas de final de capítulo por el equipo de autores del manual de soluciones

2a. RONDA: PRUEBAS TIPOGRÁFICAS

- ✓ Autores
- ✓ Primera lectura de pruebas de imprenta
- ✓ Tercera revisión de exactitud del texto, de los ejemplos, de los problemas resueltos y de los problemas de fin de capítulo por la misma firma profesional que empleó a matemáticos y a físicos

3a. RONDA: PRUEBAS TIPOGRÁFICAS REVISADAS

- ✓ Autores
- ✓ Segunda lectura de pruebas de imprenta
- ✓ Revisión de precisión de cualquier punto no resuelto por la firma profesional que empleó a matemáticos y a físicos
- ✓ Se hace una cuarta revisión de precisión del contenido de los problemas del final de cada capítulo y de las soluciones, después de que este contenido se introdujo en el sistema de tareas en línea Connect, lo cual permitió corregir cualquier asunto posterior en el texto impreso y los manuales de soluciones en línea
- ✓ Revisiones por profesores de física

4a. RONDA: CONFIRMACIÓN DE LAS PRUEBAS TIPOGRÁFICAS

- ✓ Revisión final por los autores

RONDA FINAL: IMPRESIÓN

Aseguramiento de la exactitud

Los autores y los editores reconocen el hecho de que las inexactitudes pueden causar frustración en los instructores y en los estudiantes. Por lo tanto, durante toda la escritura y la producción de esta primera edición, hemos trabajado diligentemente para eliminar errores e inexactitudes. Ron Fitzgerald, John Klapstein y su equipo de trabajo en MathResources llevaron a cabo una revisión de precisión independiente y trabajaron en todas las preguntas y los problemas de final de capítulo en la versión definitiva del manuscrito. Luego coordinaron la resolución de discrepancias entre revisiones de precisión, lo que asegura la exactitud del texto, de las respuestas del final de libro, y los manuales de soluciones. Luego se hicieron correcciones al manuscrito antes de su composición tipográfica.

Las páginas del texto tipográficamente compuestas se sometieron a doble lectura de revisión contra el manuscrito, para asegurar la corrección de cualesquier errores introducidos al maquetar el manuscrito. Cualquier punto relativo a los ejemplos textuales, a los problemas resueltos y a las soluciones, a las preguntas y a los problemas de final de capítulo, y a las respuestas a problemas se revisaron respecto a su precisión por parte MathResources nuevamente en la etapa de páginas compuestas tipográficamente, después de haber maquetado el texto. Esta última ronda de correcciones se revisó en forma cruzada contra los manuales de soluciones. Los problemas de final de capítulo del texto, junto con sus soluciones, se sometieron a revisión doble por dos firmas independientes a su entrada en el sistema de tareas en línea Connect Physics, y nuevamente, se trataron todos los puntos en el texto y en los manuales de soluciones.



Simposios de desarrollo

McGraw-Hill llevó a cabo cuatro simposios y grupos de enfoque de revisores directamente relacionados con el desarrollo de esta obra. Estos eventos constituyeron una oportunidad para que los editores, los gerentes de marketing y los productores digitales de McGraw-Hill obtuvieran información acerca de las necesidades y los retos de profesores que impartían cursos de física basada en cálculo diferencial e integral, y para confirmar el rumbo de la primera edición de este libro, sus suplementos y sus productos digitales.

Nina Abramzon, *California State Polytechnic University–Pomona*
Ed Adelson, *The Ohio State University*
Mohan Aggarwal, *Alabama A&M University*
Rene Bellweid, *Wayne State University*
Jason Brown, *Clemson University*
Ronald Brown, *California Polytechnic University San Luis Obispo*
Mike Dubson, *University of Colorado–Boulder*
David Elmore, *Purdue University*
Robert Endorf, *University of Cincinnati*
Gus Evrard, *University of Michigan*
Chris Gould, *University of Southern California*
John B. Gruber, *San Jose State University*
John Hardy, *Texas A&M University*
David Harrison, *University of Toronto*
Richard Heinz, *Indiana University*
Satoshi Hinata, *Auburn University*
John Hopkins, *The Pennsylvania State University*
T. William Houk, *Miami University–Ohio*
David C. Ingram, *Ohio University–Athens*
Elaine Kirkpatrick, *Rose-Hulman Institute of Technology*
David Lamp, *Texas Tech University*
Michael McNerney, *Rose-Hulman Institute of Technology*
Bruce Mellado, *University of Wisconsin–Madison*
C. Fred Moore, *University of Texas–Austin*
Jeffrey Morgan, *University of Northern Iowa*
Kiumars Parvin, *San Jose State University*
Amy Pope, *Clemson University*
Earl Prohovsky, *Purdue University*
Roberto Ramos, *Drexel University*
Dubravka Rupnik, *Louisiana State University*
Homeyra Sadaghiani, *California State Polytechnic University–Pomona*

Sergey Savrasov, *University of California–Davis*
Marllin Simon, *Auburn University*
Leigh Smith, *University of Cincinnati*
Donna Stokes, *University of Houston*
Michael Strauss, *University of Oklahoma*
Gregory Tarlé, *University of Michigan*

Revisores del texto

Numerosos docentes participaron en más de 200 revisiones del manuscrito y la tabla de contenido propuesta, para proporcionar realimentación sobre el texto narrativo, el contenido, los elementos pedagógicos, la precisión, la organización, los conjuntos de problemas y calidad general. Esta realimentación la resumió el equipo de trabajo del libro y se usó para guiar la dirección de la versión final del manuscrito.

Nina Abramzon, *California Polytechnic University–Pomona*
Edward Adelson, *Ohio State University*
Albert Altman, *UMASS Lowell*
Paul Avery, *University of Florida*
David T. Bannon, *Oregon State University*
Marco Battaglia, *UC Berkeley and LBNL*
Douglas R. Bergman, *Rutgers, The State University of New Jersey*
Luca Bertello, *University of California–Los Angeles*
Peter Beyersdorf, *San Jose State University*
Helmut Birtz, *Georgia Institute of Technology*
Ken Thomas Bolland, *Ohio State University*
Richard Bone, *Florida International University*
Dieter Brill, *University of Maryland–College Park*
Branton J. Campbell, *Brigham Young University*
Duncan Carlsmith, *University of Wisconsin–Madison*
Neal Cason, *University of Notre Dame*
K. Kelvin Cheng, *Texas Tech University*
Chris Church, *Miami University of Ohio–Oxford*
Eugenia Ciocan, *Clemson University*
Robert Clare, *University of California–Riverside*
Roy Clarke, *University of Michigan*
J. M. Collins, *Marquette University*
Brent A. Corbin, *University of California–Los Angeles*
Stephane Coutu, *The Pennsylvania State University*
William Dawicke, *Milwaukee School of Engineering*

Mike Dennin, *University of California–Irvine*
John Devlin, *University of Michigan–Dearborn*
John DiNardo, *Drexel University*
Fivos R. Drymiotis, *Clemson University*
Michael DuVernois, *University of Hawaii–Manoa*
David Ellis, *The University of Toledo*
Robert Endorf, *University of Cincinnati*
David Ermer, *Mississippi State University*
Harold Evensen, *University of Wisconsin–Platteville*
Lisa L. Everett, *University of Wisconsin–Madison*
Frank Ferrone, *Drexel University*
Leonard Finegold, *Drexel University*
Ray Frey, *University of Oregon*
J. William Gary, *University of California–Riverside*
Stuart Gazes, *University of Chicago*
Benjamin Grinstein, *University of California–San Diego*
John Gruber, *San Jose State University*
Kathleen A. Harper, *Denison University*
Edwin E. Hach, III, *Rochester Institute of Technology*
John Hardy, *Texas A & M University*
Laurent Hodges, *Iowa State University*
John Hopkins, *The Pennsylvania State University*
George K. Horton, *Rutgers University*
T. William Houk, *Miami University–Ohio*
Eric Hudson, *Massachusetts Institute of Technology*
A. K. Hyder, *University of Notre Dame*
David C. Ingram, *Ohio University–Athens*
Diane Jacobs, *Eastern Michigan University*
Rongying Jin, *The University of Tennessee–Knoxville*
Kate L. Jones, *University of Tennessee*
Steven E. Jones, *Brigham Young University*
Teruki Kamon, *Texas A & M University*
Lev Kaplan, *Tulane University*
Joseph Kapusta, *University of Minnesota*
Kathleen Kash, *Case Western Reserve*
Sanford Kern, *Colorado State University*
Eric Kincanon, *Gonzaga University*
Elaine Kirkpatrick, *Rose-Hulman Institute of Technology*
Brian D. Koberlein, *Rochester Institute of Technology*
W. David Kulp, III, *Georgia Institute of Technology*
Fred Kuttner, *University of California–Santa Cruz*
David Lamp, *Texas Tech University*
Andre' LeClair, *Cornell University*
Patrick R. LeClair, *University of Alabama*
Luis Lehner, *Louisiana State University–Baton Rouge*
Michael Lisa, *The Ohio State University*
Samuel E. Lofland, *Rowan University*
Jerome Long, *Virginia Tech*
A. James Mallmann, *Milwaukee School of Engineering*
Pete Markowitz, *Florida International University*
Daniel Marlow, *Princeton University*
Bruce Mason, *Oklahoma University*
Martin McHugh, *Loyola University*
Michael McNerney, *Rose-Hulman Institute of Technology*
David McIntyre, *Oregon State University*
Marina Milner-Bolotin, *Ryerson University–Toronto*
Kieran Mullen, *University of Oklahoma*
Curt Nelson, *Gonzaga University*
Mark Neubauer, *University of Illinois at Urbana–Champaign*
Cindy Neyer, *Tri-State University*
Craig Ogilvie, *Iowa State University*
Bradford G. Orr, *The University of Michigan*
Karur Padmanabhan, *Wayne State University*
Jacqueline Pau, *University of California–Los Angeles*

Leo Piilonen, *Virginia Tech*
Claude Pruneau, *Wayne State University*
Johann Rafelski, *University of Arizona*
Roberto Ramos, *Drexel University*
Lawrence B. Rees, *Brigham Young University*
Andrew J. Rivers, *Northwestern University*
James W. Rohlf, *Boston University*
Philip Roos, *University of Maryland*
Dubravka Rupnik, *Louisiana State University*
Ertan Salik, *California State Polytechnic University–Pomona*
Otto Sankey, *Arizona State University*
Sergey Savrasov, *University of California–Davis*
John Schroeder, *Rensselaer Polytech*
Kunnat Sebastian, *University of Massachusetts–Lowell*
Bjoern Seipel, *Portland State University*
Jerry Shakov, *Tulane University*
Ralph Shiell, *Trent University*
Irfan Siddiqi, *University of California–Berkeley*
Marllin L. Simon, *Auburn University*
Alex Small, *California State Polytechnic University–Pomona*
Leigh Smith, *University of Cincinnati*
Xian-Ning Song, *Richland College*
Jeff Sonier, *Simon Fraser University–Surrey Central*
Chad E. Sosolik, *Clemson University*
Donna W. Stokes, *University of Houston*
James Stone, *Boston University*
Michael G. Strauss, *University of Oklahoma*
Yang Sun, *University of Notre Dame*
Maarij Syed, *Rose-Hulman Institute of Technology*
Douglas C. Tussey, *The Pennsylvania State University*
Somdev Tyagi, *Drexel University*
Erich W. Varnes, *University of Arizona*
Gautam Vemuri, *Indiana University–Purdue University–Indianapolis*
Thad Walker, *University of Wisconsin–Madison*
Fuqiang Wang, *Purdue University*
David J. Webb, *University of California–Davis*
Kurt Wiesenfeld, *Georgia Tech*
Fred Wietfeldt, *Tulane University*
Gary Williams, *University of California–Los Angeles*
Sun Yang, *University of Notre Dame*
L. You, *Georgia Tech*
Billy Younger, *College of the Albemarle*
Andrew Zangwill, *Georgia Institute of Technology*
Jens Zorn, *University of Michigan–Ann Arbor*
Michael Zudov, *University of Minnesota*

Revisores internacionales del texto

El Hassan El Aaoud, *University of Hail, Hail KSA*
Mohamed S. Abdelmonem, *King Fahd University of Petroleum and Minerals, Dhahran, Saudi Arabia*
Sudeb Bhattacharya, *Saha Institute of Nuclear Physics, Kolkata, India*
Shi-Jian Gu, *The Chinese University of Hong Kong, Shatin, N.T., Hong Kong*
Nasser M. Hamdan, *The American University of Sharjah*
Moustafa Hussein, *Arab Academy for Science & Engineering, Egypt*
A.K. Jain, *I.I.T. Roorkee*
Carsten Knudsen, *Technical University of Denmark*
Ajai Kumar, *The University of the South Pacific, Fiji*
Ravindra Kumar Sinha, *Delhi College of Engineering*
Nazir Mustapha, *Al-Imam University*
Reza Nejat, *McMaster University*
K. Porsezian, *Pondicherry University, Puducherry*
Wang Qing-hai, *National University of Singapore*
Kenneth J. Ragan, *McGill University*

Agradecimientos

Reza Nejat, *McMaster University*

K. Porsezian, *Pondicherry University, Puducherry*

Wang Qing-hai, *Universidad Nacional de Singapur*

Kenneth J. Ragan, *McGill University*

Es imposible editar un libro como el que usted tiene en sus manos sin el tremendo trabajo de un increíble número de individuos dedicados. Primero que nada, nos gustaría agradecer al talentoso equipo de mercadotecnia y editorial de McGraw-Hill: Marty Lange, Kent Peterson, Thomas Timp, Ryan Blankenship, Mary Hurley, Liz Recker, Daryl Brufodt, Lisa Nicks, Dan Wallace y, especialmente, Deb Hash nos ayudaron en formas innumerables y lograron reencender nuestro entusiasmo después de cada revisión. Su espíritu de equipo, buen humor e inquebrantable optimismo nos mantuvo en el camino y siempre hizo divertido para nosotros dedicar las horas aparentemente interminables que fueron necesarias para producir el manuscrito.

Los editores de desarrollo, Richard Heinz y David Chelton nos ayudaron a pasar por la cantidad casi infinita de comentarios y sugerencias para mejoras por parte de nuestros revisores. Ellos, así como los revisores y nuestro consejo de asesores, merecen una gran parte del crédito por mejorar la calidad del manuscrito final. Nuestros colegas catedráticos del Departamento de Física y Astronomía en la Michigan State University —Alexandra Gade, Alex Brown, Bernard Pope, Carl Schmidt, Chong-Yu Ruan, C. P. Yuan, Dan Stump, Ed Brown, Hendrik Schatz, Kris Starosta, Lisa Lapidus, Michael Harrison, Michael Moore, Reinhard Schwienhorst, Saleh Ahmad, S. B. Mahanti, Scott Pratt, Stan Schriber, Tibor Nagy y Thomas Duguet— nos ayudaron también en formas innumerables, impartiendo sus clases y secciones con los materiales desarrollados por nosotros y, en este proceso, proporcionando inapreciable realimentación sobre lo que funcionaba bien y lo que necesitaba refinamiento adicional. Les damos las gracias a todos.

Decidimos pedir la participación de un gran número de instructores de física en todo el país en la creación de los problemas

de fin de capítulo, con objeto de asegurar que estos problemas tuvieran la máxima calidad y pertinencia y el máximo valor didáctico. Agradecemos a todos quienes aportaron problemas por compartir con nosotros algo de su mejor trabajo, especialmente a Richard Hallstein, quien se echó a cuestras la tarea de organizar y procesar todas las contribuciones.

En el momento en que entregamos el manuscrito final al editor, entró en acción todo un ejército nuevo de profesionales y añadió otra capa de refinamiento, que transformó un manuscrito en un libro. John Klapstein y el equipo de MathResources trabajó en todos y cada uno de los problemas de tarea en casa, cada ejercicio y cada número y ecuación que escribimos. Los investigadores fotográficos, especialmente Danny Meldung, mejoraron inmensamente la calidad de las imágenes que se usaron en el libro, e hicieron divertido para nosotros el proceso de selección. Pamela Crews y el equipo de Precision Graphics usaron nuestros dibujos originales, pero mejoraron sustancialmente su calidad, aunque permanecieron al mismo tiempo fieles a nuestros cálculos originales que se usaron para producir los dibujos. Nuestra correctora final Jane Hoover y su equipo pusieron todo junto en su forma final, descifraron nuestros garabatos y se aseguraron de que el producto final fuera tan legible como fuera posible. El equipo de diseño y producción de McGraw-Hill, Jayne Klein, David Hash, Carrie Burger, Sandy Ludovissy, Judi David y Mary Jane Lampe, guió el libro y sus materiales auxiliares con pericia a lo largo del proceso de publicación. Todos ellos merecen nuestra enorme gratitud.

Finalmente, no podríamos haber sobrevivido durante los últimos seis años de esfuerzo sin el apoyo de nuestras familias, que tuvieron que aguantarnos trabajando en el libro durante innumerables tardes, fines de semana e incluso durante muchas vacaciones. Esperamos que toda su paciencia y el aliento que nos dieron haya dado frutos, y les agradecemos desde el fondo de nuestros corazones por acompañarnos durante la realización de este libro.

—Wolfgang Bauer

—Gary D. Westfall

El panorama general

Fronteras de la física moderna

Este libro intenta darle una visión de algunos avances recientes en la física. Ejemplos de áreas avanzadas de la investigación son accesibles con el conocimiento disponible en el nivel introductorio. En muchas de las principales universidades, los estudiantes de reciente ingreso y los más avanzados ya participan en investigación de vanguardia en física. Con frecuencia, esta participación no exige nada más que las herramientas que se presentan en este libro, unos pocos días o semanas de lectura adicional, la curiosidad y decisión necesarias para aprender verdades y habilidades nuevas.

Las páginas que siguen introducen algunas de las asombrosas fronteras de la investigación actual en física y describen algunos resultados que se han obtenido durante los últimos años. Esta introducción se limita al nivel cualitativo, obviando todos los detalles matemáticos y técnicos. Los números de capítulo entre paréntesis indican dónde se pueden encontrar exploraciones más a fondo sobre los temas.

Física cuántica

En el 2005 fue el centenario de los históricos escritos de Albert Einstein sobre el movimiento browniano (donde mostró que los átomos son reales; vea los capítulos 13 y 38), sobre la teoría de la relatividad (capítulo 35) y sobre el efecto fotoeléctrico (capítulo 36). Este último escrito introdujo una de las ideas que forman la base de la mecánica cuántica, la física de la materia a la escala de átomos y moléculas. La mecánica cuántica es un producto del siglo xx que condujo, por ejemplo, a la invención de los láseres, que ahora se usan rutinariamente en los reproductores de CD, DVD y Blu-ray, en los lectores de precios e incluso en cirugía oftálmica, entre muchas otras aplicaciones. La mecánica cuántica también ha proporcionado un entendimiento más fundamental de la química: los físicos usan pulsos láser ultracortos menores de 10^{-15} s de duración para comprender cómo se desarrollan los enlaces químicos. La revolución cuántica ha incluido descubrimientos exóticos como la antimateria, y no se ve un final. Durante la última década, se han formado grupos de átomos llamados *condensados de Bose-Einstein* en trampas electromagnéticas; este trabajo ha abierto un campo enteramente nuevo de investigación en física atómica y cuántica (vea los capítulos 36 a 38).

Física de la materia condensada y electrónica

Las innovaciones de la física crearon y siguen impulsando la industria de alta tecnología. Hace poco más de 50 años, se inventó el primer transistor en los Laboratorios Bell, con lo que dio inicio la era de la electrónica. La unidad central de procesamiento (CPU) de una computadora típica de escritorio o portátil contiene ahora más de 100 millones de elementos de transistor. El crecimiento increíble en la potencia y el alcance de aplicaciones de las computadoras durante las últimas décadas se ha hecho posible por la investigación en la física de materia condensada. Gordon Moore, cofundador de Intel, hizo una célebre observación de que la potencia de procesamiento por computadora se duplica cada 18 meses, una tendencia que, según se predice, continuará por lo menos durante otra década o más.

Incluso la capacidad de almacenamiento en computadora crece más rápido que la potencia de procesamiento, con un periodo de duplicación de 12 meses. El premio Nobel de física de 2007 se otorgó a Albert Fert y Peter Grünberg por su descubrimiento, en 1988, de la *magnetoresistencia gigante*. Al cabo de una década para que este descubrimiento se aplicara en los discos duros de computadora, permitiendo capacidades de almacenamiento de cientos de gigabytes (1 gigabyte = 1 mil millones de fragmentos de información), e incluso terabytes (1 terabyte = 1 billón de fragmentos de información).

La capacidad de las redes crece con rapidez incluso mayor que la capacidad de almacenamiento o la potencia de procesamiento, duplicándose cada nueve meses. Ahora puede ir a casi cualquier país del mundo y encontrar puntos de acceso inalámbrico con los cuales puede conectar su laptop o teléfono celular habilitado para WiFi a internet. Con todo, han pasado menos de un par de décadas desde la concepción de la World Wide Web por Tim Berners-Lee, quien a la sazón trabajaba en el laboratorio de física de partículas CERN en Suiza, y desarrolló este nuevo medio para facilitar la colaboración entre físicos de partículas en diferentes partes del mundo.

Los teléfonos celulares y otros potentes dispositivos de comunicación han llegado a las manos de casi todos. La investigación de la física moderna permite una miniaturización progresiva de los dispositivos electrónicos de consumo. Este proceso impulsa una convergencia digital, que hace posible equipar los teléfonos celulares con cámaras digitales, grabadoras de video, capacidad de recibir correo electrónico, buscadores en la red y receptores del sistema de posicionamiento global. Continuamente se agrega más funcionalidad, mientras los precios siguen bajando. Ahora, cuarenta años después del primer alunizaje, muchos teléfonos celulares acumulan más y más capacidad de cómputo que la que usó la nave espacial *Apollo* para el viaje a la Luna.

Computación cuántica

Los investigadores de física todavía están esforzándose por vencer los límites de la computación. En la actualidad, muchos grupos investigan maneras de construir una computadora cuántica. Teóricamente, una computadora cuántica que consiste de N procesadores podría ejecutar 2^N instrucciones de manera simultánea, mientras que una computadora convencional que consiste de N procesadores puede ejecutar sólo N instrucciones al mismo tiempo. Así, una computadora cuántica que consiste de 100 procesadores excedería la capacidad de cómputo de todas las supercomputadoras que existen en la actualidad. Por supuesto, se tienen que resolver muchos problemas de fondo antes de que esta visión se pueda volver realidad; pero, de nuevo, hace 50 años parecía totalmente imposible poner 100 millones de transistores en un chip de computadora del tamaño de una uña de pulgar.

Física computacional

La interacción entre la física y las computadoras funciona en ambos sentidos. Tradicionalmente, las investigaciones de física eran de naturaleza ya sea física o teórica. Los libros de texto parecen favorecer el lado teórico, porque presentan las fórmulas principales de la física; pero, de hecho, analizan las ideas conceptuales que están encapsuladas en las fórmulas. Por otro lado, gran parte de la investigación tiene su origen en el lado experimental, cuando fenómenos observados por primera vez parecen desafiar la descripción teórica. Sin embargo, con el advenimiento de las computadoras, se ha hecho posible una tercera rama de la física: la física computacional. La mayoría de los físicos se apoyan en las computadoras para procesar datos, visualizar información, resolver grandes sistemas de ecuaciones conjugadas o estudiar sistemas para los cuales no se conocen formulaciones analíticas sencillas.

El nuevo campo del caos y la dinámica no lineal es el ejemplo básico de tal estudio. Se afirma que el físico atmosférico Edward Lorenz, del MIT, fue el primero en simular el comportamiento caótico con la ayuda de una computadora, en 1963, cuando resolvió tres ecuaciones conjugadas para un modelo climatológico sencillo, y detectó una dependencia sensible respecto a las condiciones iniciales; aun las diferencias más pequeñas al principio de la simulación daban como resultado desviaciones muy grandes posteriormente. En la actualidad a este comportamiento se le llama a veces *efecto mariposa*, por la idea de que una mariposa que aletea en China puede

cambiar el clima en Estados Unidos unas pocas semanas después. Esta sensibilidad implica que la predicción determinista del clima a largo plazo es imposible.

Complejidad y caos

Con frecuencia los sistemas de muchos elementos muestran un comportamiento muy complejo, aun cuando los elementos individuales sigan reglas muy sencillas de dinámica no lineal. Los físicos han comenzado a estudiar la complejidad en muchos sistemas, que incluye simples montones de arena, congestionamientos de tránsito, el mercado de valores, la evolución biológica, los fractales y el autoensamble de moléculas y nanoestructuras. La ciencia de la complejidad es otro campo que se descubrió apenas durante la última década y está experimentando un rápido crecimiento.

El caos y la dinámica no lineal se explican en el capítulo 7 acerca de la cantidad de movimiento y en el capítulo 14 acerca de las oscilaciones. Los modelos son a veces bastante simples, y los estudiantes de física de primer año pueden hacer contribuciones valiosas. Sin embargo, la solución generalmente exige algo de habilidad en programación de computadoras. La pericia en programación le permitirá contribuir en muchos proyectos avanzados de investigación en física.

Nanotecnología

Los físicos están comenzando a adquirir el conocimiento y las habilidades que se necesitan para manipular la materia átomo por átomo. Durante las últimas dos décadas se inventaron los microscopios de escaneo o barrido, de túnel y de fuerza atómica, que permiten a los investigadores ver átomos individuales (figura 1). En algunos casos se pueden mover átomos individuales en formas controladas. La nanociencia y la nanotecnología se dedican a este tipo de retos, cuya solución es prometedora de grandes avances tecnológicos, desde componentes electrónicos todavía más miniaturizados y, por lo tanto más potentes, hasta el diseño de nuevos medicamentos o incluso la manipulación del ADN para curar algunas enfermedades.

Biofísica

Igual que los físicos penetraron al terreno de los químicos durante el siglo, está teniendo lugar en el siglo XXI una rápida convergencia interdisciplinaria de la física y la biología molecular. Los investigadores ya pueden usar pinzas láser (capítulo 34) para mover biomoléculas individuales. La cristalografía de rayos X (capítulo 34) se ha vuelto suficientemente sofisticada para permitir a los investigadores obtener imágenes de estructuras tridimensionales de proteínas muy complicadas. Además, la biofísica teórica está comenzando a acertar en la predicción de la estructura espacial y la funcionalidad asociada de estas moléculas a partir de la secuencia de aminoácidos que contienen.

La figura 2 muestra un modelo de estructura espacial de la proteína ARN Polimerasa II, con el código de color que representa la distribución de cargas (azul es positivo, rojo es negativo) en la superficie de esta biomolécula. (El capítulo 23, sobre potenciales eléctricos, le ayudará a entender la determinación de distribuciones de carga y sus potenciales para arreglos mucho más sencillos.) También se muestra en la figura un segmento de la molécula de ADN (estructura espiral amarilla en el centro), que indica cómo la ARN Polimerasa II se conecta al ADN y funciona como un agente de escisión.

Fusión nuclear

Hace setenta años, el físico nuclear Hans Bethe y sus colegas determinaron cómo la fusión nuclear en el Sol produce la luz que hace posible la vida en la Tierra. Actualmente, los físicos nucleares están trabajando sobre la forma de utilizar la fusión nuclear en la Tierra para la pro-

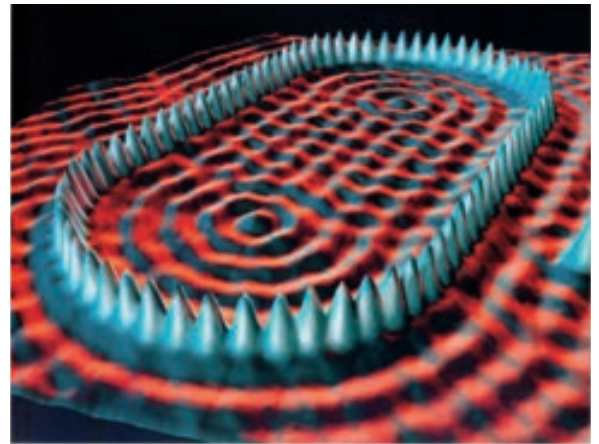


FIGURA 1 Átomos individuales de hierro dispuestos en la forma de un estadio sobre una superficie de cobre. Las ondulaciones dentro del estadio son el resultado de ondas estacionarias formadas por distribuciones de densidad electrónica. Este arreglo se creó y luego se obtuvo su imagen mediante un microscopio de efecto túnel (capítulo 37).

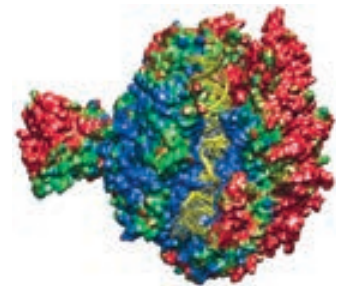
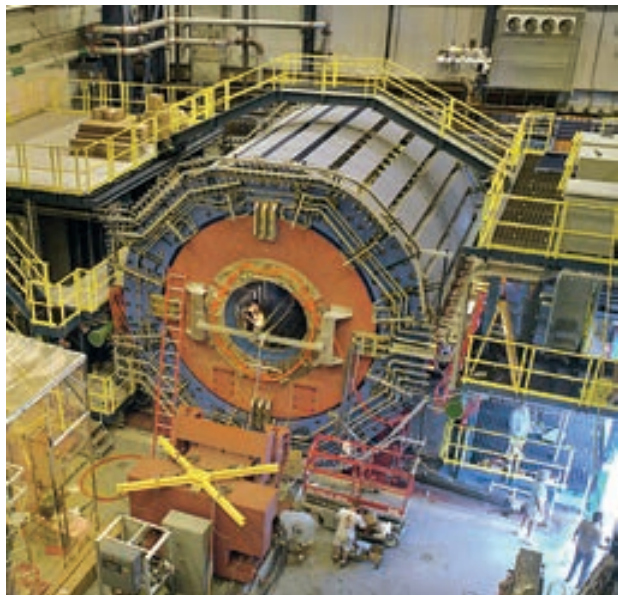
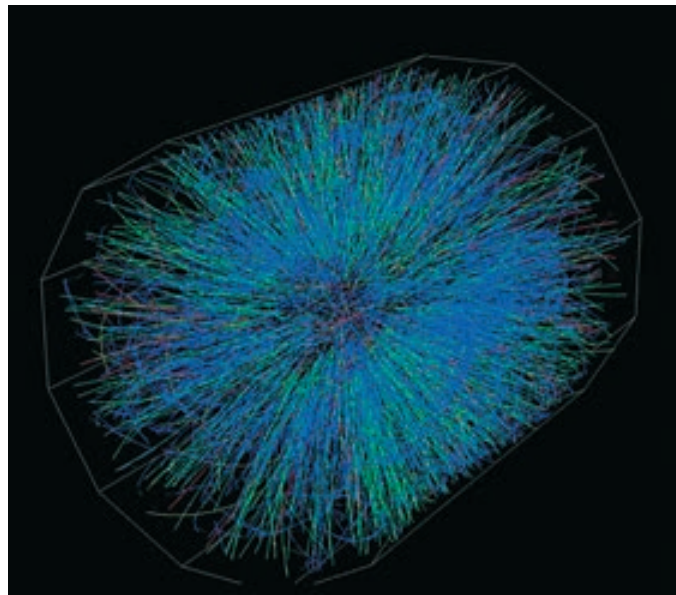


FIGURA 2 Modelo de proteína ARN Polimerasa II.



a)



b)

FIGURA 3 a) El detector STAR en el RHIC durante su construcción. b) Trayectorias reconstruidas electrónicamente de más de 5 000 partículas subatómicas con carga producidas dentro del detector STAR por una colisión de alta energía de dos núcleos de oro.

ducción casi ilimitada de energía. El capítulo 5 introduce el concepto de energía, que se explica en numerosas ocasiones en todo el libro. El reactor internacional de fusión termonuclear (capítulo 40), en la actualidad en construcción en el sur de Francia mediante la colaboración de muchos países industrializados, será un gran avance hacia la respuesta de muchas de las más importantes interrogantes que se necesitan resolver antes de que el uso de la fusión sea técnicamente factible y comercialmente viable.



FIGURA 4 Vista aérea de Ginebra, Suiza, con la ubicación del túnel subterráneo del Gran Colisionador de Hadrones señalada con el círculo rojo.

Física de alta energía y de partículas

Los físicos nucleares y de partículas están sondeando con profundidad cada vez mayor en los constituyentes más pequeños de la materia (capítulos 39 y 40). En el Brookhaven National Laboratory en Long Island, por ejemplo, el Colisionador Relativista de Iones Pesados (Relativistic Heavy Ion Collider: RHIC) estrelló núcleos de oro uno contra otro con objeto de recrear el estado en que se encontraba el universo una pequeña fracción de segundo después de su comienzo, el *Big Bang*. La figura 3a) es una foto del STAR, un detector del RHIC; la figura 3b) muestra un análisis en computadora de las trayectorias que dejaron en el detector STAR las más de 5 000 partículas subatómicas producidas en dicha colisión. Los capítulos 27 y 28 sobre el magnetismo y el campo magnético explican cómo se analizan estas trayectorias con objeto de encontrar las propiedades de las partículas que las produjeron.

Se acaba de terminar un instrumento todavía mayor para la investigación de la física de partículas en el laboratorio del acelerador CERN en Ginebra, Suiza. El Gran Colisionador de Hadrones (Large Hadron Collider: LHC) está ubicado en un túnel circular subterráneo con una circunferencia de 27 km (16.8 mi), que se indica en el círculo rojo de la figura 4. Este nuevo instrumento es la instalación de investigación más



FIGURA 5 Algunos de los 27 radiotelescopios individuales que forman parte del Very Large Array.

costosa que se haya jamás construido, con un costo de más de 8 mil millones de dólares, y se puso en operación en septiembre de 2008. Los físicos de partículas todavía usan esta instalación para tratar de determinar qué es lo que hace que diferentes partículas elementales tengan distintas masas, a fin de averiguar cuáles son los verdaderos constituyentes elementales del universo y, quizá, para buscar dimensiones ocultas adicionales u otros fenómenos extraños.

Teoría de cuerdas

La física de partículas tiene un modelo estándar de todas las partículas y sus interacciones (capítulo 39); pero todavía no se entiende por qué este modelo funciona tan bien. En la actualidad se piensa que la teoría de cuerdas es la posibilidad más viable para un marco que a la larga produzca esta explicación. A veces, la teoría de cuerdas se llama presuntuosamente la *Teoría de todo*. Predice dimensiones espaciales adicionales, lo cual de pronto suena como ciencia ficción; pero muchos físicos están tratando de encontrar maneras para probar de manera experimental esta teoría.

Astrofísica

La física y la astronomía tienen un extenso traslape interdisciplinario en las áreas de investigación de la historia del universo primitivo, modelación de la evolución de las estrellas y estudio del origen de las ondas gravitacionales o de los rayos cósmicos de las más altas energías. Se han construido observatorios cada vez más precisos y sofisticados, tales como el telescopio Very Large Array (VLA) de Nuevo México (figura 5) para estudiar estos fenómenos.

Los astrofísicos siguen haciendo descubrimientos asombrosos para dar nueva forma a nuestro entendimiento del universo. Sólo durante los últimos años se ha descubierto que la mayor parte de la materia del universo no está contenida en las estrellas. Todavía se desconoce la composición de esta *materia oscura* (capítulo 12); pero sus efectos se revelan en las *lentes gravitacionales*, como se muestra en la figura 6, por los arcos observados en el cúmulo de galaxias. Abell 2218, que está a 2 mil millones de años luz de la Tierra, en la constelación Draco. Estos arcos son imágenes de galaxias todavía más distantes, distorsionadas por la presencia de grandes cantidades de materia oscura. Este fenómeno se presenta en más detalle en el capítulo 35 que trata sobre la relatividad.



FIGURA 6 Cúmulo de galaxias Abell 2218, con los arcos creados por el efecto de lente gravitacional debido a la materia oscura.

Simetría, sencillez y elegancia

Desde las partículas subatómicas más pequeñas hasta el universo como un todo, las leyes físicas gobiernan todas las estructuras y la dinámica de núcleos atómicos hasta hoyos negros. Los físicos han descubierto una gran cantidad, pero cada descubrimiento abre un nuevo y provocativo territorio ignoto. Así, seguimos construyendo teorías para explicar todos y cada uno de los fenómenos físicos. El desarrollo de estas teorías está guiado por la necesidad de hacer coincidir los datos experimentales, así como por la convicción de que la simetría, la sencillez y la elegancia son principios clave de diseño. El hecho de que las leyes de la naturaleza se puedan formular en sencillas ecuaciones matemáticas ($F = ma$, $E = mc^2$, y muchas otras, menos famosas) es asombroso.

Esta introducción ha intentado transmitir un poco de lo que son las fronteras de la investigación de la física moderna. Este libro de texto debe ayudarle a construir un fundamento para apreciar, entender y tal vez participar en esta tarea de investigación, que sigue redefiniendo y dando nueva forma a nuestra comprensión del mundo que nos rodea.

Visión general



FIGURA 1.1 Imagen de la región de formación estelar W5, tomada por el Telescopio Espacial Spitzer, usando luz infrarroja.

LO QUE APRENDEREMOS	8
1.1 ¿Por qué estudiar física?	8
1.2 Trabajo con números	9
Notación científica	9
Cifras significativas	10
1.3 Sistema de unidades SI	11
Ejemplo 1.1 Unidades de área de terreno	13
Metrología: Investigación en	
medidas y estándares	14
1.4 Las escalas de nuestro mundo	14
Escalas de longitud	14
Escalas de masa	15
Escalas de tiempo	16
1.5 Estrategia general para	
resolución de problemas	16
Problema resuelto 1.1 Volumen de	
un cilindro	17
Ejemplo 1.2 Volumen de un barril	
de petróleo	19
Problema resuelto 1.2 Vista desde	
la Willis Tower	20
Lineamientos de problemas	
resueltos: límites	21
Lineamientos de problemas	
resueltos: relaciones	21
Ejemplo 1.3 Cambio en volumen	22
Lineamientos de problemas	
resueltos: estimación	22
Ejemplo 1.4 Número de dentistas	23
1.6 Vectores	23
Sistema de coordenadas cartesianas	24
Representación cartesiana de vectores	25
Suma y resta gráfica de vectores	25
Suma vectorial usando componentes	26
Multiplicación de un vector con un escalar	27
Vectores unitarios	27
Longitud y dirección de vectores	27
LO QUE HEMOS APRENDIDO/ GUÍA DE ESTUDIO PARA EXAMEN	28
Práctica para resolución de problemas	29
Problema resuelto 1.3 Caminata	29
Preguntas de opción múltiple	30
Preguntas	31
Problemas	31

LO QUE APRENDEREMOS

- Estudiar física tiene muchas ventajas.
- El uso de notación científica y el número correcto de cifras significativas es importante en física.
- Nos familiarizaremos con el sistema internacional de unidades y las definiciones de las unidades básicas, así como los métodos de conversión entre otros sistemas de unidades.
- Usaremos las escalas disponibles de longitud, masa y tiempo para establecer puntos de referencia a fin de comprender la amplia diversidad de sistemas en la física.
- Presentamos una estrategia de solución de problemas que será útil para analizar y entender los problemas a lo largo de este curso y en aplicaciones científicas y de ingeniería.
- Trabajaremos con vectores: suma y resta de vectores, multiplicación de vectores por escalares, vectores unitarios y longitud y dirección de los vectores.

La espectacular imagen de la figura 1.1 podría estar mostrando cualquiera de las siguientes cosas: un líquido coloreado que se dispersa en un vaso con agua, o quizás actividad biológica en algún organismo, o puede ser incluso una concepción artística de montañas en algún planeta desconocido. Si dijéramos que la vista tiene 70 de ancho, ¿le ayudaría a decidir qué es lo que muestra la imagen? Quizá no. Usted necesita saber si lo que queremos decir, por ejemplo, es 70 metros o 70 millonésimas de pulgada, o 70 mil millas.

De hecho, esta imagen infrarroja tomada por el Telescopio Espacial Spitzer muestra enormes nubes de gas y polvo con una anchura de alrededor de 70 años luz (un año luz es la distancia que recorre la luz en 1 año, alrededor de 10 mil billones de metros). Estas nubes están a una distancia de aproximadamente 6 500 años luz de la Tierra, y contienen estrellas recién formadas incrustadas en las regiones luminosas. La tecnología que nos permite ver imágenes como ésta se ubica a la vanguardia de la astronomía contemporánea, pero está sujeta en forma real a los conceptos básicos de números, unidades y vectores que se presentan en este capítulo.

Los conceptos que se describen en este capítulo no son necesariamente principios de la física, pero nos ayudan a formular y comunicar ideas y observaciones físicas. En todo el curso utilizaremos los conceptos de unidades, notación científica, cifras significativas y cantidades vectoriales. Una vez que haya entendido estos conceptos puede seguir adelante en la explicación de descripciones físicas del movimiento y sus causas.

1.1 ¿Por qué estudiar física?

Quizá su razón para estudiar física se pueda resumir rápidamente como: “¡porque es un requisito para mi carrera!” Aunque esta motivación es en verdad convincente, el estudio de la ciencia y, en especial de la física, ofrece pocas ventajas adicionales.

La física es la ciencia sobre la cual se construyen todas las demás ciencias naturales y de ingeniería. Todos los avances tecnológicos modernos —desde la cirugía láser hasta la televisión, desde las computadoras hasta los refrigeradores, desde los automóviles hasta los aviones— parten directamente de la física básica. Un buen entendimiento de los conceptos esenciales de la física le darán un cimiento sólido sobre el cual puede construir un conocimiento avanzado en todas las ciencias. Por ejemplo, las leyes de la conservación y los principios de simetría de la física también se cumplen para todos los fenómenos científicos y muchos aspectos de la vida diaria.

El estudio de la física le ayudará a comprender las escalas de distancia, masa y tiempo, desde los constituyentes más pequeños dentro de los núcleos de los átomos hasta las galaxias que forman nuestro universo. Todos los sistemas naturales siguen las mismas leyes básicas de la física, lo cual proporciona un concepto unificador para entender cuál es nuestro lugar en el esquema total del universo.

La física está íntimamente conectada con las matemáticas, porque da vida a los conceptos abstractos que se usan en la trigonometría, el álgebra y el cálculo. El pensamiento analítico y las técnicas generales de resolución de problemas que aprenderá aquí seguirán siendo útiles para el resto de su vida.

La ciencia, en especial la física, ayuda a quitar la irracionalidad de nuestras explicaciones del mundo que nos rodea. El pensamiento precientífico recurría a la mitología para explicar los fenómenos naturales. Por ejemplo, las antiguas tribus germánicas creían que el dios Thor provocaba el

trueno al usar su martillo. Puede sonreír al leer este relato, sabiendo que el trueno y el rayo proceden de descargas eléctricas en la atmósfera. Sin embargo, si lee el periódico, verá que aún hoy en día persisten algunas concepciones equivocadas del pensamiento precientífico. Puede ser que no encuentre la respuesta al significado de la vida en este curso, pero, como mínimo, puede salir con algunas herramientas intelectuales que le permitirán eliminar teorías inconsistentes e ilógicas, y conceptos equivocados que contradicen hechos experimentalmente verificables. El progreso científico durante el último milenio ha proporcionado una explicación racional para la mayor parte de lo que sucede en el mundo que nos rodea.

Mediante teorías coherentes y experimentos bien diseñados, la física nos ha ayudado a obtener una comprensión más profunda de nuestro entorno, y nos ha dado una mayor capacidad para controlarlo. Nunca ha sido mayor nuestra necesidad de entender los resultados de nuestras interacciones con el medio ambiente, ya que ahora nos damos cuenta de las consecuencias de la contaminación del agua y del aire, los recursos energéticos limitados y el calentamiento global, los cuales amenazan la existencia de un gran porcentaje de vida en la Tierra. Mucha de la ciencia del ambiente está en función de la física fundamental, que impulsa mucha de la tecnología esencial para el progreso de la química y de las ciencias de la vida. Puede estar llamado a ayudar a decidir la política pública en estas áreas, ya sea como científico, como ingeniero, o simplemente como ciudadano. Es de vital importancia tener una comprensión objetiva de los temas científicos básicos al tomar esas decisiones. Por lo tanto, debe adquirir un conocimiento práctico científico, herramienta esencial para todo ciudadano en nuestra sociedad impulsada por la tecnología.

No se puede convertir al conocimiento científico sin tener el dominio de las herramientas elementales necesarias, igual que es imposible hacer música sin la capacidad de tocar un instrumento. Éste es el propósito principal de este texto: equiparle de manera adecuada para hacer aportes sólidos a los debates y decisiones importantes de nuestro tiempo. De la lectura y el trabajo de este texto saldrá con una apreciación más profunda de las leyes fundamentales que gobiernan nuestro universo y de las herramientas que la humanidad ha desarrollado para descubrirlas, herramientas que trascienden culturas y eras históricas.

1.2 Trabajo con números

Los científicos han establecido reglas lógicas sobre la manera de comunicar entre ellos información cuantitativa. Por ejemplo, si quiere reportar el resultado de una medición de la distancia entre dos ciudades, su propio peso o la duración de una conferencia, tiene que especificar este resultado en múltiplos de una unidad estándar. Por lo tanto, una medición es la combinación de un número y una unidad.

A primera vista, escribir números no parece muy difícil. No obstante, en física, tenemos que lidiar con dos complicaciones: cómo manejar números muy grandes o muy pequeños, y como especificar la precisión.

Notación científica

Si quiere reportar un número muy grande, resulta tedioso escribirlo. Por ejemplo, el cuerpo humano contiene casi 7 000 000 000 000 000 000 000 000 000 átomos. Si utiliza este número con frecuencia, seguro que le gustaría tener una notación más compacta para él. Esto es exactamente lo que es la **notación científica**. Representa un número como el producto de un número mayor que 1 y menor que 10 (llamado *mantisa*) y una potencia (expresada por un exponente) de 10:

$$\text{número} = \text{mantisa} \cdot 10^{\text{exponente}} \quad (1.1)$$

En tal caso, el número de átomos en el cuerpo humano se puede escribir en forma compacta como $7 \cdot 10^{27}$, donde 7 es la mantisa y 27 es el exponente.

Otra ventaja de la notación científica es que facilita la multiplicación y la división de números grandes. Para multiplicar dos números en notación científica, multiplicamos sus mantisas y después sumamos los exponentes. Por ejemplo, si quisiéramos estimar cuántos átomos contiene el cuerpo de todos los habitantes de la Tierra, podríamos hacer este cálculo con relativa facilidad. La Tierra tiene aproximadamente 7 mil millones ($= 7 \cdot 10^9$) de seres humanos. Todo lo que tenemos que hacer para hallar la respuesta es multiplicar $7 \cdot 10^{27}$ por $7 \cdot 10^9$. Hacemos esto multiplicando las dos mantisas y sumando los exponentes:

$$(7 \cdot 10^{27}) \cdot (7 \cdot 10^9) = (7 \cdot 7) \cdot 10^{27+9} = 49 \cdot 10^{36} = 4.9 \cdot 10^{37}. \quad (1.2)$$

1.1 Ejercicio en clase

El área total de la superficie de la Tierra es $A = 4\pi R^2 = 4\pi (6\,370\text{ km})^2 = 5.099 \cdot 10^{14}\text{ m}^2$. Suponiendo que haya 7.0 miles de millones de seres humanos en el planeta, ¿cuál es el área de superficie disponible por persona?

- a) $7.3 \cdot 10^4\text{ m}^2$ c) $3.6 \cdot 10^{24}\text{ m}^2$
 b) $7.3 \cdot 10^{24}\text{ m}^2$ d) $3.6 \cdot 10^4\text{ m}^2$

En el último paso, seguimos la convención común de conservar sólo un dígito frente al punto decimal de la mantisa y ajustar el exponente de acuerdo con esto. (Pero tenga en cuenta que tendremos que ajustar más esta respuesta. ¡Siga leyendo!)

La división con notación científica es igualmente sencilla: si deseamos calcular A/B , dividimos la mantisa de A entre la de B y restamos el exponente de B del de A .

Cifras significativas

Cuando especificamos el número de átomos en el cuerpo humano promedio como $7 \cdot 10^{27}$, intentamos indicar que sabemos que es por lo menos $6.5 \cdot 10^{27}$ pero menor que $7.5 \cdot 10^{27}$. De cualquier modo, si hubiéramos escrito $7.0 \cdot 10^{27}$, habríamos implicado que sabíamos que el verdadero número está en algún lugar entre $6.95 \cdot 10^{27}$ y $7.05 \cdot 10^{27}$. Esta aseveración es más precisa que la anterior.

Como regla general, el número de dígitos que escribe en la mantisa especifica qué tan preciso declara conocerla. Cuantos más dígitos se especifican, se implica mayor precisión (vea la figura 1.2). El número de dígitos en la mantisa se llama número de **cifras significativas**. He aquí algunas reglas sobre el uso de cifras significativas, en cada caso seguido por un ejemplo.

- El número de cifras significativas es el número de dígitos conocido de manera confiable. Por ejemplo, 1.62 tiene 3 cifras significativas; 1.6 tiene 2 cifras significativas.
- Si da un número como un entero, lo especifica con precisión infinita. Por ejemplo, si alguien dice que tiene 3 hijos, significa exactamente 3, ni más ni menos.
- Los ceros precedentes no cuentan como cifras significativas. El número 1.62 tiene el mismo número de cifras significativas que 0.00162. Hay tres cifras significativas en ambos números. Comenzamos a contar cifras significativas desde la izquierda, con el primer dígito que no sea cero.
- Por otra parte, los ceros posteriores, sí cuentan como cifras significativas. El número 1.620 tiene cuatro cifras significativas. ¡Escribir un cero posterior implica mayor precisión!
- Los números en notación científica tienen tantas cifras significativas como su mantisa. Por ejemplo, el número $9.11 \cdot 10^{-31}$ tiene tres cifras significativas porque éstas son las que tiene la mantisa (9.11). La magnitud del exponente no tiene ninguna influencia.
- Usted nunca puede tener más cifras significativas en un resultado que aquellas con las que comenzó en cualquiera de los factores de una multiplicación o división. Por ejemplo, $1.23/3.4461$ no es igual a 0.3569252. Es posible que su calculadora le dé esta respuesta; pero las calculadoras no muestran de manera automática el número correcto de cifras sig-

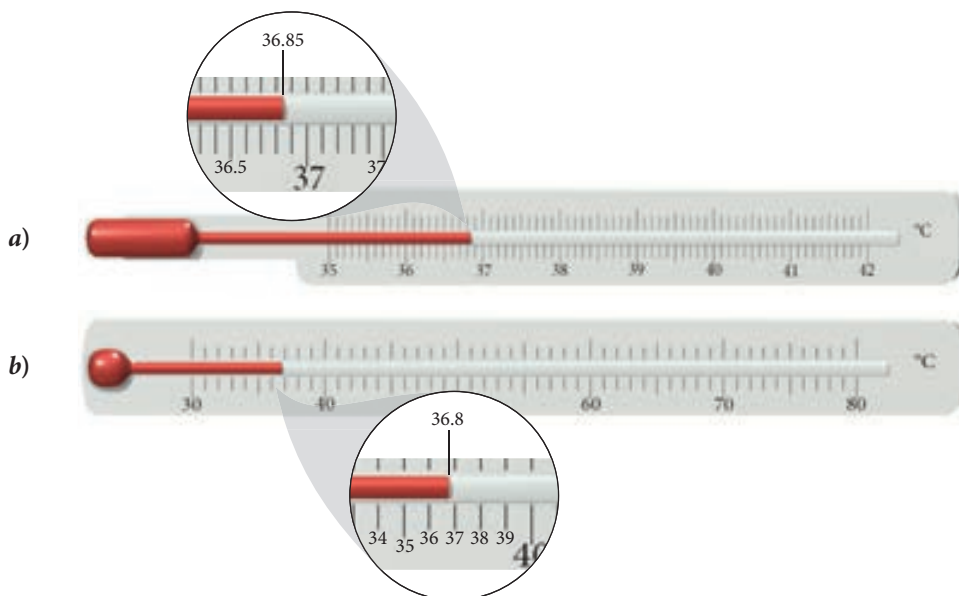


FIGURA 1.2 Dos termómetros miden la misma temperatura. a) El termómetro está marcado en décimas de grado y se pueden leer hasta cuatro cifras significativas (36.85 °C); b) El termómetro está marcado en grados, de modo que sólo se pueden leer hasta tres cifras significativas (36.8 °C).

nificativas. En vez de esto, obtendrá $1.23/3.4461 = 0.357$. Tiene que redondear el resultado de una calculadora hasta el número correcto de cifras significativas, en este caso tres, que es el número de cifras significativas en el numerador.

- Usted puede sumar o restar cuando hay cifras significativas para esa posición en cada número. Por ejemplo, $1.23 + 3.4461 = 4.68$, y no 4.6761 como podría pensar. En especial, esta regla requiere algo de tiempo para acostumbrarse.

Para terminar esta explicación de cifras significativas, reconsideremos el número total de átomos contenidos en los cuerpos de todos los seres humanos de la Tierra. Comenzamos con dos cantidades que se dieron con sólo una cifra significativa. Por lo tanto, el resultado de la multiplicación necesita redondearse de manera adecuada hasta una cifra significativa. En tal caso, el número combinado de átomos en todos los cuerpos humanos se expresa de forma correcta como $5 \cdot 10^{37}$.

1.3 Sistema de unidades SI

Tal vez en la preparatoria recibió una introducción al sistema internacional de unidades y lo comparó con el sistema inglés de unidades que es de uso común en Estados Unidos. Es posible que tenga que circular por una autopista donde las distancias están indicadas tanto en millas como en kilómetros, o ha comprado alimentos en los que el precio estaba indicado en lb y kg.

El sistema internacional de unidades se abrevia con frecuencia SI (de *Système International*). A veces, las unidades de este sistema se llaman *unidades métricas*. El **sistema de unidades SI** es el estándar que se utiliza para el trabajo científico en todo el mundo. Las unidades básicas del sistema SI están dadas en la tabla 1.1.

Las primeras letras de las cuatro unidades básicas proporcionan otro nombre que se utiliza en forma común para el sistema SI: el sistema MKSA. Utilizaremos las primeras tres unidades (metro, kilogramo y segundo) en toda la primera parte de este libro y en toda la mecánica. Las definiciones actuales de las tres unidades básicas son como sigue:

- 1 metro (m) es la distancia que recorre un rayo de luz en el vacío en $1/299\,792\,458$ de segundo. Originalmente, el metro se relacionaba al tamaño de la Tierra (figura 1.3).
- 1 kilogramo (kg) se define como la masa del prototipo internacional del kilogramo. Este prototipo, que se muestra en su elaborado contenedor de almacenamiento en la figura 1.4, se conserva en las afueras de París, Francia, en condiciones ambientales cuidadosamente controladas.
- 1 segundo (s) es el intervalo de tiempo durante el cual ocurren $9\,192\,631\,770$ oscilaciones de la onda electromagnética (vea el capítulo 31) que corresponde a la transición entre dos estados específicos del átomo de cesio-133. Hasta 1967, el estándar para el segundo era $1/86\,400$ de un día solar medio. Sin embargo, la definición atómica es más precisa y reproducible con mayor confiabilidad.

Convención de notación: Es práctica común usar letras latinas para las abreviaciones de unidades y letras cursivas (itálicas) para cantidades físicas. En este libro seguimos esta convención. Por ejemplo, m significa la unidad metro, mientras que *m* se usa para la cantidad física masa. Así, la expresión $m = 17.2 \text{ kg}$ significa que la masa de un objeto es de 17.2 kilogramos.

Tabla 1.1 Nombres y abreviaturas de unidades para las unidades básicas del Sistema Internacional de Unidades SI

Unidad	Abreviatura	Unidad básica para
metro	m	longitud
kilogramo	kg	masa
segundo	s	tiempo
ampere	A	corriente
kelvin	K	temperatura
mol	mol	cantidad de sustancia
candela	cd	intensidad luminosa

1.2 Ejercicio en clase

¿Cuántas cifras significativas están en cada uno de los siguientes números?

- a) 2.150 d) 0.215000
 b) 0.000215 e) $0.215 + 0.21$
 c) 215.00



FIGURA 1.3 Originalmente, el metro se definía como 1 diezmillonésima parte de la longitud del meridiano que pasa por París, desde el Polo Norte hasta el Ecuador.



FIGURA 1.4 Prototipo del kilogramo, almacenado cerca de París, Francia.

Las unidades para todas las demás cantidades físicas se pueden deducir de las siete unidades básicas de la tabla 1.1. Por ejemplo, la unidad de área es m^2 . Las unidades de volumen y densidad de masa son m^3 y kg/m^3 , respectivamente. Las unidades de velocidad y aceleración son m/s y m/s^2 , respectivamente. Algunas unidades deducidas se usaban con tanta frecuencia que resultó conveniente darles sus propios nombres y símbolos. A menudo, el nombre es el de un físico famoso. La tabla 1.2 menciona las 20 unidades SI deducidas, con nombres especiales. En las dos columnas del extremo derecho de la tabla se menciona la unidad con nombre en términos de otras unidades y a continuación en términos de unidades SI básicas. También se incluyen en esta tabla el radián y el esterradián, las unidades adimensionales de ángulo y ángulo sólido (una superficie formada por todos los rayos que se unen en un punto a una curva cerrada), respectivamente.

Puede obtener múltiplos en el SI reconocidos de las unidades básicas y unidades deducidas multiplicándolas por diferentes factores de 10. Estos factores tienen abreviaciones en letras universalmente aceptadas que se usan como prefijos, que se muestran en la tabla 1.3. Por ejemplo, el uso de prefijos estándar (factores de 10) facilita determinar cuántos centímetros (cm) se encuentran en un kilómetro (km):

$$1 \text{ km} = 10^3 \text{ m} = 10^3 \text{ m} \cdot (10^2 \text{ cm} / \text{m}) = 10^5 \text{ cm.} \quad (1.3)$$

En comparación, observe lo tedioso que es calcular cuántas pulgadas hay en una milla:

$$1 \text{ milla} = (5\,280 \text{ pies/milla}) \cdot (12 \text{ pulgadas/pie}) = 63\,360 \text{ pulgadas.} \quad (1.4)$$

Como puede ver, no sólo tiene que memorizar factores particulares de conversión en el sistema inglés, sino, además, los cálculos se vuelven más complicados. Para hacer cálculos en el sistema SI, sólo tiene que saber los prefijos estándar que se muestran en la tabla 1.3 y cómo sumar o restar enteros en las potencias de 10.

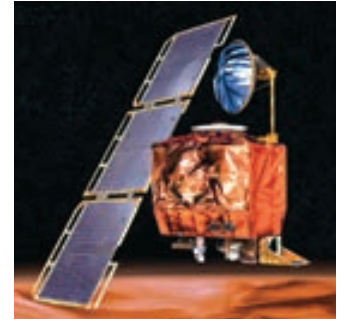
El sistema internacional de unidades se adoptó en 1799, y ahora se usa diariamente en casi todos los países del mundo, con la notable excepción de Estados Unidos. En ese país compran

Tabla 1.2 Unidades deducidas comunes en el SI

Unidad deducida o adimensional	Nombre	Símbolo	Equivalente	Expresiones
Actividad	becquerel	Bq	—	s^{-1}
Actividad catalítica	katal	kat	—	$s^{-1} \text{ mol}$
Ángulo	radián	rad	—	—
Ángulo sólido tridimensional	esterradián	sr	—	—
Campo magnético	tesla	T	Wb/m^2	$\text{kg s}^{-2} \text{ A}^{-1}$
Capacitancia	farad	F	C/V	$\text{m}^{-2} \text{ kg}^{-1} \text{ s}^4 \text{ A}^2$
Carga eléctrica	coulomb	C	—	s A
Conductancia eléctrica	siemens	S	A/V	$\text{m}^{-2} \text{ kg}^{-1} \text{ s}^3 \text{ A}^2$
Dosis absorbida	gray	Gy	J/kg	$\text{m}^2 \text{ s}^{-2}$
Energía	joule	J	N m	$\text{m}^2 \text{ kg s}^{-2}$
Dosis equivalente	sievert	Sv	J/kg	$\text{m}^2 \text{ s}^{-2}$
Flujo luminoso	lumen	lm	cd sr	cd
Flujo magnético	weber	Wb	V s	$\text{m}^2 \text{ kg s}^{-2} \text{ A}^{-1}$
Frecuencia	hertz	Hz	—	s^{-1}
Fuerza	newton	N	—	m kg s^{-2}
Iluminancia	lux	lx	lm/m^2	$\text{m}^{-2} \text{ cd}$
Inductancia	henry	H	Wb/A	$\text{m}^2 \text{ kg s}^{-2} \text{ A}^{-2}$
Potencia	watt	W	J/s	$\text{m}^2 \text{ kg s}^{-3}$
Potencial eléctrico	volt	V	W/A	$\text{m}^2 \text{ kg s}^{-3} \text{ A}^{-1}$
Presión	pascal	Pa	N/m^2	$\text{m}^{-1} \text{ kg s}^{-2}$
Resistencia eléctrica	ohm	Ω	V/A	$\text{m}^2 \text{ kg s}^{-3} \text{ A}^{-2}$
Temperatura	grado Celsius	$^{\circ}\text{C}$	—	K

Tabla 1.3 Prefijos estándar en el SI

Factor	Prefijo	Símbolo	Factor	Prefijo	Símbolo
10^{24}	yota-	Y	10^{-24}	yocto-	y
10^{21}	zeta-	Z	10^{-21}	zepto-	z
10^{18}	exa-	E	10^{-18}	atto-	a
10^{15}	peta-	P	10^{-15}	femto-	f
10^{12}	tera-	T	10^{-12}	pico-	p
10^9	giga-	G	10^{-9}	nano-	n
10^6	mega-	M	10^{-6}	micro-	μ
10^3	kilo-	k	10^{-3}	milli-	m
10^2	hecto-	h	10^{-2}	centi-	c
10^1	deca-	da	10^{-1}	deci-	d

**FIGURA 1.5** El *Mars Climate Orbiter*, una víctima de la conversión equivocada de unidades

leche y gasolina en galones, no en litros. Sus automóviles muestran la velocidad en millas por hora y no en metros por segundo. Cuando van a la maderería, compran una medición de la madera de dos por cuatro (en realidad 1.5 pulgadas por 3.5 pulgadas, pero ésa es otra historia). Este libro indicará unidades inglesas cuando sea correcto, para establecer conexiones con las experiencias cotidianas. Pero usaremos el sistema de unidades SI en todos los cálculos para evitar tener que trabajar con los factores de conversión de unidades inglesas. Sin embargo, algunas veces daremos entre paréntesis los equivalentes en unidades inglesas. Esta concesión sólo será necesaria hasta que ese país se decida adoptar también las unidades SI.

El uso de unidades inglesas puede resultar costoso. El costo puede ir desde un pequeño gasto como el que hacen los mecánicos de automóviles que necesitan comprar dos juegos de llaves de dado, uno métrico y otro inglés, hasta la muy costosa pérdida de la nave espacial *Mars Climate Orbiter* (figura 1.5), en septiembre de 1999. Se ha señalado como culpable de que esta nave espacial se haya estrellado al hecho de que uno de los grupos de ingeniería usó unidades inglesas y el otro unidades SI. Cada grupo confió en las cifras del otro, sin darse cuenta que las unidades no eran las mismas.

El uso de potencias de 10 no es por completo coherente, incluso dentro del propio sistema SI. La notable excepción la constituyen las unidades de tiempo, que no son factores de 10 por la unidad básica (segundo):

- 365 días para un año,
- un día tiene 24 horas,
- una hora contiene 60 minutos, y
- un minuto consiste de 60 segundos.

Los pioneros del sistema métrico trataron de establecer un conjunto por completo coherente de unidades métricas de tiempo; pero estos intentos fallaron. La naturaleza no exactamente métrica de las unidades de tiempo se extiende a algunas unidades deducidas. Por ejemplo, un velocímetro de un sedán europeo no muestra la velocidad en metros por segundo, sino en kilómetros por hora.

EJEMPLO 1.1 Unidades de área de terreno

La unidad de área de terreno que se usa en países que aplican el sistema SI es la hectárea, definida como $10\,000\text{ m}^2$. En Estados Unidos, el área de terreno se da en acres; un acre se define como $43\,560\text{ pie}^2$.

PROBLEMA

Compra un terreno que tiene como dimensiones 2.00 km por 4.00 km. ¿Cuál es el área de su nueva propiedad en hectáreas y acres?

SOLUCIÓN

El área A está dada por

$$A = \text{longitud} \cdot \text{ancho} = (2.00\text{ km})(4.00\text{ km}) = (2.00 \cdot 10^3\text{ m})(4.00 \cdot 10^3\text{ m})$$

$$A = 8.00\text{ km}^2 = 8.00 \cdot 10^6\text{ m}^2.$$

(continúa)

(continuación)

Por lo tanto el área de este terreno en hectáreas es

$$A = 8.00 \cdot 10^6 \text{ m}^2 \frac{1 \text{ hectárea}}{10\,000 \text{ m}^2} = 8.00 \cdot 10^2 \text{ hectárea} = 800. \text{ hectárea.}$$

Para determinar el área del terreno en acres, necesitamos la longitud y la anchura en unidades inglesas

$$\text{longitud} = 2.00 \text{ km} \frac{1 \text{ mi}}{1.609 \text{ km}} = 1.24 \text{ mi} \frac{5\,280 \text{ ft}}{1 \text{ mi}} = 6\,563 \text{ ft}$$

$$\text{ancho} = 4.00 \text{ km} \frac{1 \text{ mi}}{1.609 \text{ km}} = 2.49 \text{ mi} \frac{5\,280 \text{ ft}}{1 \text{ mi}} = 13\,130 \text{ ft.}$$

En este caso el área es

$$A = \text{longitud} \cdot \text{ancho} = (1.24 \text{ mi})(2.49 \text{ mi}) = (6\,563 \text{ ft})(13\,130 \text{ ft})$$

$$A = 3.09 \text{ mi}^2 = 8.61 \cdot 10^7 \text{ ft}^2.$$

En acres, esto es

$$A = 8.61 \cdot 10^7 \text{ ft}^2 \frac{1 \text{ acre}}{43\,560 \text{ ft}^2} = 1\,980 \text{ acres.}$$



FIGURA 1.6 Reloj atómico de fuente de cesio en el NIST.

Metrología: investigación en medidas y estándares

El trabajo de definir los estándares para las unidades básicas del sistema SI no está de ninguna manera terminado. Se dedica una gran cantidad de investigación para refinar tecnologías de medición y llevarlas a mayor precisión. Este campo de investigación se llama **metrología**. En Estados Unidos, el laboratorio que tiene la principal responsabilidad de este trabajo es el National Institute of Standards and Technology (NIST). El NIST trabaja en colaboración con instituciones similares en otros países para depurar los estándares aceptados para las unidades básicas del SI.

Un proyecto actual de investigación es encontrar una definición del kilogramo de acuerdo con cantidades reproducibles en la naturaleza. Esta definición reemplazaría a la actual del kilogramo, que se basa en la masa de un objeto estándar que se guarda en Sèvres, en las afueras de París, como ya vimos. El esfuerzo más prometedor en este sentido parece ser el Proyecto Avogadro, que intenta definir el kilogramo usando cristales de silicio altamente purificado.

La investigación sobre medición de tiempo cada vez más precisa es una de las principales tareas del NIST y de instituciones similares. La figura 1.6 muestra al que en la actualidad es el reloj más preciso en el NIST en Boulder, Colorado: el reloj atómico NIST-F1 de fuente de cesio. ¡Tiene una exactitud de ± 1 segundo en 60 millones de años! Sin embargo, los investigadores del NIST están trabajando en un nuevo reloj óptico que promete ser mil veces más preciso que el NIST-F1.

Se necesita mayor precisión en la medición del tiempo para muchas aplicaciones en nuestra sociedad en términos de la información, donde las señales pueden viajar alrededor del mundo en menos de 0.2 segundos. El Global Positioning System (GPS) es un ejemplo de la tecnología que sería imposible realizar sin la precisión de los relojes atómicos y de la investigación física que interviene en su construcción. El sistema GPS también se apoya en la teoría de la relatividad de Einstein, que estudiaremos en el capítulo 35.

1.4 Las escalas de nuestro mundo

El hecho más asombroso acerca de la física es que sus leyes gobiernan todos los objetos, desde el más pequeño hasta el más grande. Las escalas de los sistemas para los cuales la física tiene poder de predicción abarcan muchos órdenes de magnitud (potencias de 10), como veremos en esta sección.

Nomenclatura: De aquí en adelante, leerá varias veces la expresión “del orden de”. Esta frase significa “dentro de un factor de 2 o 3”.

Escalas de longitud

La *longitud* se define como la medida de distancia entre dos puntos en el espacio. La figura 1.7 muestra algunas escalas de longitud para objetos y sistemas comunes que abarcan 40 órdenes de magnitud.

En promedio, en Estados Unidos, una mujer tiene un estatura de 1.62 m (5 pie 4 pulg) y un hombre mide 1.75 m (5 pie 9 pulg). En estos términos, la estatura humana está en el orden de un metro. Si reduce la escala de longitud para un cuerpo humano por un factor de un millón, llega a un micrómetro. Éste es el tamaño típico de una célula de su cuerpo o de una bacteria.

Si reduce la longitud de su regla de medir por otro factor de 10 000, estará en una escala de 10^{-10} m, el diámetro típico de cada átomo. Éste es el tamaño más pequeño que podemos distinguir con la ayuda de los microscopios más avanzados.

Dentro del átomo está su núcleo, con un diámetro de casi 1/10 000 del átomo, en el orden de 10^{-14} m. Los protones y los neutrones individuales que constituyen el núcleo atómico tienen un diámetro de aproximadamente 10^{-15} m = 1 fm (un femtómetro).

Considerando objetos mayores que nosotros podemos mirar la escala de una ciudad típica, en el orden de kilómetros. El diámetro de la Tierra es sólo un poco mayor de 10 000 km (12 760 km, para ser más precisos). Como se dijo antes, la definición del metro se expresa ahora en términos de la velocidad de la luz. Sin embargo, el metro se definió en forma original como una diezmillonésima parte del meridiano que pasa por París desde el Polo Norte hasta el Ecuador. Si un cuarto de circunferencia tiene una longitud de arco de 10 millones de metros (= 10 000 km), entonces la circunferencia completa sería de manera exacta 40 000 km. Usando la definición moderna del metro, la circunferencia ecuatorial de la Tierra es de 40 075 km, y la circunferencia del meridiano es de 40 008 km.

La distancia de la Tierra a la Luna es de 384 000 km, y la distancia de la Tierra al Sol es mayor por un factor de más o menos 400, o aproximadamente 150 millones km. Esta distancia se llama una *unidad astronómica* y tiene el símbolo AU. Los astrónomos usaban esta unidad antes de que se conociera con precisión la distancia de la Tierra al Sol, pero todavía es cómoda en la actualidad. En unidades SI, una unidad astronómica es

$$1 \text{ AU} = 1.495 \text{ 98} \cdot 10^{11} \text{ m.} \tag{1.5}$$

El diámetro de nuestro Sistema Solar se expresa de manera práctica como alrededor de 10^{13} m o 60 AU.

Ya hemos indicado que la luz viaja en el vacío a una velocidad aproximada de 300 000 km/s. Por lo tanto, la distancia entre la Tierra y la Luna la recorre la luz en sólo un poco más de 1 segundo, y la luz del Sol tarda de manera aproximada 8 minutos en llegar a la Tierra. Con objeto de cubrir escalas de distancia fuera de nuestro Sistema Solar, los astrónomos han introducido la unidad año-luz (que no es SI, pero es práctica), que es la distancia que viaja la luz en 1 año en el vacío:

$$1 \text{ año luz} = 9.46 \cdot 10^{15} \text{ m.} \tag{1.6}$$

La estrella más cercana a nuestro Sol está a un poco más de 4 años luz. La galaxia Andrómeda, la galaxia hermana de nuestra Vía Láctea, está aproximadamente a 2.5 millones de años luz = $2 \cdot 10^{22}$ m.

Por último, el radio del universo visible es aproximadamente de 14 mil millones de años luz = $1.5 \cdot 10^{26}$ m. Por lo tanto, hay alrededor de 41 órdenes de magnitud entre el tamaño de un protón individual y el del universo visible completo.

Escalas de masa

Masa es la cantidad de materia en un objeto. Cuando considera la gama de masas de los objetos físicos, obtiene un intervalo todavía más imponente de órdenes de magnitud (figura 1.8) que para las longitudes.

Los átomos y sus partes tienen masas increíblemente pequeñas. La masa de un electrón es de sólo $9.11 \cdot 10^{-31}$ kg. La masa de un protón es de $1.67 \cdot 10^{-27}$ kg, aproximadamente 2 000 veces mayor que la del electrón. Un átomo individual de plomo tiene una masa de $3.46 \cdot 10^{-25}$ kg.

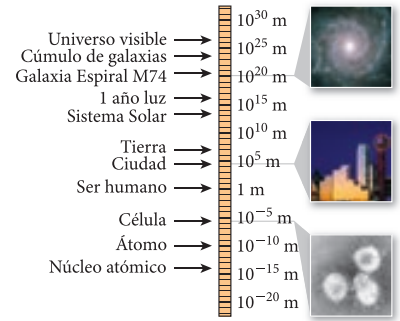


FIGURA 1.7 Extensión de escalas de longitud para sistemas físicos. Las imágenes, de arriba abajo, son: la galaxia Espiral M 74, edificios de Dallas y el virus del SARS.

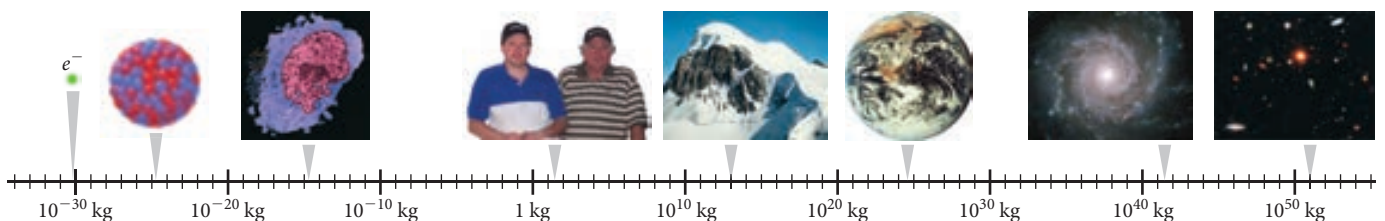


FIGURA 1.8 Extensión de escalas de masa para sistemas físicos.

La masa de una sola célula del cuerpo humano es del orden de 10^{-15} kg a 10^{-14} kg. Hasta una mosca tiene más de 10 000 millones de veces más masa que una célula: aproximadamente 10^{-4} kg.

La masa de un automóvil es del orden de 10^3 kg y la de un avión de pasajeros es del orden de 10^5 kg.

Una típica montaña tiene una masa de 10^{12} kg a 10^{14} kg, y la masa combinada de toda el agua de los océanos de la Tierra se estima en el orden de 10^{19} kg a 10^{20} kg.

La masa de toda la Tierra se puede especificar con aceptable precisión como $6.0 \cdot 10^{24}$ kg. El Sol tiene una masa de $2.0 \cdot 10^{30}$ kg, o más de 300 000 veces la de la Tierra. Nuestra galaxia completa, la Vía Láctea, se estima que contiene 200 000 millones de estrellas y, por lo tanto, una masa de alrededor de $3 \cdot 10^{41}$ kg. En conclusión, el universo entero contiene miles de millones de galaxias. Dependiendo de las suposiciones acerca de la materia oscura, un tema actual de investigación (vea el capítulo 12), la masa del universo como un todo es de alrededor de 10^{51} kg. De cualquier modo, debe tener en cuenta que este número es un estimado y puede estar errado por un factor hasta de 100.

Es interesante que algunos objetos no tengan masa. Por ejemplo, los fotones, las “partículas” de las que está hecha la luz, tienen masa cero.

Escalas de tiempo

El *tiempo* es la duración entre dos eventos. Las escalas humanas de tiempo están en el intervalo de un segundo (por lo general la duración de un latido del corazón humano) a un siglo (la esperanza aproximada de vida de una persona que nazca ahora). A propósito, la esperanza de vida está aumentando a una tasa cada vez más rápida. Durante el Imperio Romano, hace 2 000 años, una persona podía esperar vivir sólo 25 años. En 1850, las tablas actuariales mencionan 39 años como el tiempo de vida media humana. En la actualidad esa cifra es de 80 años. Es decir, fueron necesarios casi 2 000 años para sumar 50% a la esperanza de vida humana; pero en los últimos 150 años, la esperanza de vida se ha duplicado. Ésta es quizá la prueba más directa de que la ciencia tiene beneficios básicos para todos nosotros. La física contribuye a este progreso en el desarrollo de equipo médico más sofisticado de imagen y tratamiento, y la investigación fundamental de hoy se incluirá en la práctica clínica del futuro. La cirugía con láser, la terapia de radiación contra el cáncer, imágenes por resonancia magnética y la tomografía de emisión de positrones son sólo unos pocos ejemplos de los avances tecnológicos que han ayudado a aumentar la esperanza de vida.

En sus investigaciones, los autores de este libro estudian colisiones ultrarrelativistas de iones pesados. Estas colisiones se presentan durante intervalos de tiempo del orden de 10^{-22} s, más de un millón de veces más cortos que los intervalos de tiempo que podemos medir directamente. Durante este curso, aprenderá que la escala de tiempo para la oscilación de la luz visible es de 10^{-15} s, y para sonido audible es de 10^{-3} s.

El intervalo de tiempo más largo que podemos medir *indirectamente* o *inferir* es la edad del universo. La investigación actual estima este número en 13 700 millones de años, pero con una incertidumbre de hasta 200 millones de años.

No podemos dejar este tema sin mencionar un hecho interesante para que lo evalúe durante su próxima hora de clase. Las horas de clase duran típicamente 50 minutos en la mayoría de las universidades. Un siglo, por comparación, tiene $100 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 60 \approx 50\,000\,000$ minutos. De modo que una hora de clase dura alrededor de una millonésima de siglo, lo cual lleva a una unidad de tiempo práctica (que no es del SI), el microsiglo = duración de una hora de clase.

1.5 Estrategia general para resolución de problemas

La física no se reduce a resolver problemas; pero ésta es una gran parte de la misma. En todo momento, mientras esté trabajando en sus encargos de tarea, puede parecer que esto es todo lo que hace. Sin embargo, la repetición y la práctica son partes importantes del aprendizaje.

Un jugador de basquetbol pasa horas practicando los fundamentos del tiro libre. Muchas repeticiones de la misma acción le permiten volverse muy confiable en esta tarea. Usted necesita manifestar la misma actitud respecto a la resolución de problemas de matemáticas y de física: debe practicar buenas técnicas de resolución de problemas. Este trabajo pagará enormes dividendos, no sólo durante el resto de este curso de física, no sólo durante los exámenes, ni siquiera sólo en sus otras clases de ciencias, sino también durante toda su carrera.

¿En qué consiste una buena estrategia para resolver problemas? Cada quien pone en práctica sus propias rutinas, procedimientos y atajos. Sin embargo, hay un programa detallado de acción que debe ayudarle en el inicio:

1. **PIENSE** Lea de manera cuidadosa el problema. Pregúntese cuáles cantidades se conocen, cuáles serían útiles pero se desconocen y cuáles se piden en la solución. Escriba estas cantidades y representelas con los símbolos que comúnmente se usan. Si es necesario convierta a unidades del SI.
2. **ESBOCE** Haga un diagrama de la situación física que le ayude a visualizar el problema. Para muchas personas es esencial una representación visual o gráfica, y con frecuencia es indispensable para definir las variables.
3. **INVESTIGUE** Escriba los principios o leyes físicas que se apliquen a este problema. Use ecuaciones que representen estos principios para conectar entre sí las cantidades conocidas y las desconocidas. En algunos casos, verá de inmediato una ecuación que contenga sólo las cantidades que conoce y la única incógnita que se espera que calcule y nada más. La mayoría de las veces tendrá que hacer un poco de deducciones, combinando dos o más ecuaciones conocidas para obtener la que necesita. Esto exige algo de experiencia, más que cualquiera de los otros pasos indicados en esta lista. Para el principiante, la tarea de deducir una nueva ecuación puede parecer intimidante, pero se sentirá con más confianza cuanto más practique.
4. **SIMPLIFIQUE** ¡Todavía no meta números a su ecuación! En vez de esto, simplifique algebraicamente su resultado tanto como sea posible. Por ejemplo, si su resultado está expresado como una relación, cancele los factores comunes en el numerador y en el denominador. Este paso es de especial ayuda si usted necesita calcular más de una cantidad.
5. **CALCULE** Ponga los números con unidades en la ecuación y póngase a trabajar con la calculadora. Por regla general, obtendrá como respuesta un número y una unidad física.
6. **REDONDEE** Determine el número de cifras significativas que quiere tener en su resultado. Como regla práctica, un resultado obtenido por multiplicación o división se debe redondear hasta el mismo número de cifras significativas que en la cantidad de entrada que se dé con el menor número de cifras significativas. No debe redondear en pasos intermedios, ya que redondear demasiado pronto puede darle una solución errónea.
7. **VUELVA A REVISAR** Deténgase y mire el resultado. Juzgue usted mismo si la respuesta parece realista (tanto por la cantidad como por las unidades). A menudo puede evitar entregar una solución equivocada mediante esta verificación final. A veces las unidades de su respuesta son simplemente incorrectas, y usted sabe que debe haber cometido un error. O a veces el orden de magnitud resulta por completo erróneo. Por ejemplo, si su tarea es calcular la masa del Sol (haremos esto más adelante en este libro), y su respuesta resulta cercana a 10^6 kg (sólo unos pocos miles de toneladas), sabe que debe haber un error en alguna parte.

Pongamos en práctica esta estrategia en el siguiente ejemplo.

PROBLEMA RESUELTO 1.1 Volumen de un cilindro

PROBLEMA

En un laboratorio de física se almacena material de desperdicio nuclear en un cilindro que tiene una altura de $4\frac{13}{16}$ pulgadas y una circunferencia de $8\frac{3}{16}$ pulgadas. ¿Cuál es el volumen de este cilindro, en unidades métricas?

SOLUCIÓN

Con el fin de practicar las habilidades de solución de problemas, realizaremos cada uno de los pasos de la estrategia antes descrita.

(continúa)

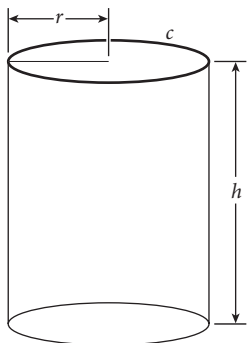


FIGURA 1.9 Diagrama de cilindro recto.

(continuación)

PIENSE

Por la pregunta, sabemos que la altura del cilindro, convertida a cm, es

$$\begin{aligned} h &= 4\frac{13}{16} \text{ in} = 4.8125 \text{ in} \\ &= (4.8125 \text{ in}) \cdot (2.54 \text{ cm/in}) \\ &= 12.22375 \text{ cm.} \end{aligned}$$

Además, la circunferencia del cilindro se especifica como

$$\begin{aligned} c &= 8\frac{3}{16} \text{ in} = 8.1875 \text{ in} \\ &= (8.1875 \text{ in}) \cdot (2.54 \text{ cm/in}) \\ &= 20.79625 \text{ cm.} \end{aligned}$$

Obviamente, las dimensiones dadas se redondearon hasta el más cercano dieciseisavo de pulgada. Por lo tanto, no tiene sentido especificar cinco dígitos después del punto decimal para las dimensiones al convertirlas en centímetros, como parece sugerir la respuesta de nuestra calculadora. Una forma más realista de especificar las cantidades dadas es $h = 12.2 \text{ cm}$ y $c = 20.8 \text{ cm}$, donde los números tienen tres cifras significativas, igual que los números dados originalmente.

ESBOCE

A continuación, trazamos un diagrama como en la figura 1.9. Observe que las cantidades dadas se muestran con sus representaciones simbólicas, no con sus valores numéricos. La circunferencia está representada por el círculo más grueso (ovalado, en realidad, en esta proyección).

INVESTIGUE

Ahora tenemos que encontrar el volumen del cilindro en términos de su altura y su circunferencia. Esta correspondencia por lo general no se menciona en las colecciones de fórmulas geométricas. En vez de esto, el volumen del cilindro se da como el producto del área de su base y su altura:

$$V = \pi r^2 h.$$

Una vez que encontramos un modo de conectar el radio y la circunferencia, tendremos la fórmula que necesitamos. Las áreas de las partes superior e inferior de un cilindro son círculos, y para un círculo sabemos que

$$c = 2\pi r.$$

SIMPLIFIQUE

Recuerde: ¡Todavía no meta números! Para simplificar la tarea numérica, podemos despejar r de la segunda ecuación e insertar el resultado en la primera ecuación:

$$\begin{aligned} c = 2\pi r &\Rightarrow r = \frac{c}{2\pi} \\ V = \pi r^2 h &= \pi \left(\frac{c}{2\pi} \right)^2 h = \frac{c^2 h}{4\pi}. \end{aligned}$$

CALCULE

Ahora es el momento de sacar la calculadora e introducir los números:

$$\begin{aligned} V &= \frac{c^2 h}{4\pi} \\ &= \frac{(20.8 \text{ cm})^2 \cdot (12.2 \text{ cm})}{4\pi} \\ &= 420.026447 \text{ cm}^3. \end{aligned}$$

REDONDEE

Una vez más, la respuesta de la calculadora ha hecho nuestro resultado mucho más preciso de lo que realmente podemos afirmar. Necesitamos redondear. Como las cantidades de entrada están dadas sólo con tres cifras significativas, nuestro resultado necesita redondear a tres cifras significativas. Nuestra respuesta final es $V = 420. \text{ cm}^3$.

VUELVA A REVISAR

Nuestro último paso es verificar que la respuesta sea razonable. Primero vemos la unidad que tenemos para el resultado. Los centímetros cúbicos son una unidad de volumen, de modo

que nuestro resultado pasa la primera prueba. Ahora veamos la magnitud de nuestro resultado. Podría haberse dado cuenta de que la altura y la circunferencia que se dieron para el cilindro se parecen a las correspondientes dimensiones de una lata de bebida gaseosa. Si mira una lata de su bebida favorita, verá que indica el contenido como 12 onzas fluidas y también le da la información de que esto equivale a 355 mL. Como $1 \text{ mL} = 1 \text{ cm}^3$, nuestra respuesta es razonablemente cercana al volumen de una lata de refresco. Observe que esto *no* nos dice que el cálculo sea correcto, pero muestra que no es descabellado.

Suponga que los investigadores deciden que una lata de refresco no es suficientemente grande para guardar el desperdicio en el laboratorio, y la reemplazan por un contenedor cilíndrico mayor, con un altura de 44.6 cm y una circunferencia de 62.5 cm. Si deseamos calcular el volumen de este cilindro de reemplazo, no necesitamos hacer de nuevo todo lo que hicimos en el problema resuelto 1.1. En vez de esto, podemos ir en forma directa a la fórmula algebraica que obtuvimos en el paso Simplifique, y sustituir en ella los nuevos datos, obteniendo así un volumen de $13\,900 \text{ cm}^3$ cuando se representa a 3 cifras significativas. Este ejemplo ilustra el valor de esperar para introducir los números hasta que se haya terminado la simplificación algebraica.

En el problema resuelto 1.1, usted puede ver que seguimos los siete pasos descritos en nuestra estrategia general. Es formidablemente útil entrenar su cerebro para seguir un procedimiento determinado al atacar toda clase de problemas. Esto no es muy diferente de seguir la misma rutina cuando hace tiros libres en el basketbol, donde la repetición frecuente le ayuda a mejorar la memoria muscular indispensable para el triunfo constante, incluso cuando el juego está en riesgo.

Quizá más que nada, una clase de introducción a la física debe capacitarlo para desarrollar métodos que produzcan sus propias soluciones a una variedad de problemas, eliminando la necesidad de aceptar acríticamente respuestas “fidedignas”. El método que usamos en el problema resuelto 1.1 es muy útil, y lo practicaremos de manera reiterada en este libro. De cualquier modo, para ilustrar algún punto sencillo que no requiera todo el conjunto de pasos que se usaron para el problema resuelto, algunas veces usaremos un ejemplo ilustrativo.

EJEMPLO 1.2 Volumen de un barril de petróleo

PROBLEMA

El volumen de un barril de petróleo es de 159 L. Necesitamos diseñar un recipiente cilíndrico que contenga este volumen de petróleo. El recipiente necesita tener una altura de 1.00 m para que quepa en un contenedor de transporte. ¿Cuál es la circunferencia requerida del recipiente cilíndrico?

SOLUCIÓN

Comenzando con la ecuación que obtuvimos en el paso “Simplifique” en el problema resuelto 1.1, podemos relacionar la circunferencia, c , y la altura, h , del recipiente con el volumen, V , del mismo:

$$V = \frac{c^2 h}{4\pi}.$$

Resolviendo para la circunferencia obtenemos

$$c = \sqrt{\frac{4\pi V}{h}}.$$

El volumen en unidades del SI es

$$V = 159 \text{ L} \frac{1000 \text{ mL}}{\text{L}} \frac{1 \text{ cm}^3}{1 \text{ mL}} \frac{\text{m}^3}{10^6 \text{ cm}^3} = 0.159 \text{ m}^3.$$

En ese caso la circunferencia necesaria es

$$c = \sqrt{\frac{4\pi V}{h}} = \sqrt{\frac{4\pi(0.159 \text{ m}^3)}{1.00 \text{ m}}} = 1.41 \text{ m}.$$

Como ya podrá usted haberse dado cuenta del problema anterior y el ejemplo, es indispensable tener un buen dominio del álgebra para triunfar en una clase de introducción a la física. Para

los ingenieros y los científicos, la mayoría de las universidades también exigen cálculo. Pero en muchas escuelas se pueden tomar al mismo tiempo una clase de introducción a la física y una clase de cálculo. Este primer capítulo no contiene cálculo, y los capítulos siguientes harán un repaso de los conceptos pertinentes de cálculo conforme los necesite. No obstante, hay otro campo de las matemáticas que se usa de manera extensa en la introducción a la física: la trigonometría. Prácticamente cada capítulo de este libro usa triángulos rectángulos de alguna manera. Por lo tanto, es buena idea repasar las fórmulas para el seno, el coseno y relativos, así como el indispensable teorema de Pitágoras. Veamos otro problema resuelto, que utiliza conceptos trigonométricos.

PROBLEMA RESUELTO 1.2 Vista desde la Willis Tower

PROBLEMA

No hace falta decir que se puede ver más lejos desde una torre que desde el nivel del suelo; cuánto más alta es la torre, más lejos se puede ver. La Willis Tower de Chicago tiene un piso de observación a 412 m del suelo. ¿A qué distancia se puede ver sobre el Lago Michigan desde este piso de observación con condiciones climatológicas perfectas? (Suponga el nivel de los ojos a 413 m sobre el nivel del lago.)

SOLUCIÓN

PIENSE

Como ya lo hemos hecho antes, éste es el paso más importante en el proceso de solución de problemas. Un poco de preparación en esta etapa puede ahorrar una buena cantidad de trabajo en una etapa posterior. Se especifican condiciones climatológicas perfectas, de modo que la niebla o neblina no es un factor limitante. ¿Qué otra cosa puede determinar la distancia a la que podemos ver? Si el aire está claro, se pueden ver montañas bastante lejanas. ¿Por qué montañas? Porque son muy altas. Pero el paisaje que rodea Chicago es plano. ¿Qué puede entonces limitar el alcance de la visión? Nada, realmente; uno puede ver hasta el horizonte. ¿Y cuál es el factor decisivo para la posición del horizonte? Es la curvatura de la Tierra. Hagamos un diagrama para aclarar esto un poco más.

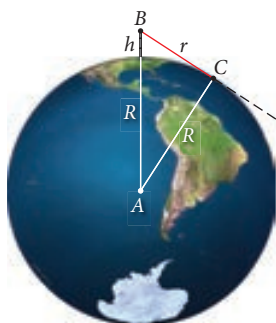


FIGURA 1.10 Distancia de la cuspide de la Willis Tower (B) al horizonte (C).

ESBOCE

Nuestro diagrama no tiene que ser muy elaborado, pero necesita mostrar una versión sencilla de la Willis Tower sobre la superficie de la Tierra. No es importante que el diagrama esté a escala, y decidimos exagerar la altura de la torre en relación con el tamaño de la Tierra. Vea la figura 1.10.

Parece obvio en este diagrama que el punto más lejano (punto C) que se puede ver desde la cuspide de la Willis Tower (punto B) es donde la línea de visión toca la superficie de la Tierra de forma tangencial. Cualquier punto de la superficie de la Tierra que esté más lejos de la Willis Tower queda oculto a la vista (debajo del segmento punteado de línea). Por lo tanto, el alcance de visión está dado por la distancia r entre ese punto de la superficie C y el piso de observación (punto B) en la cuspide de la torre a la altura h . El diagrama también incluye una línea desde el centro de la Tierra (punto A) al pie de la Willis Tower. Tiene la longitud R , que es el radio de la Tierra. Otra línea de la misma longitud, R , se traza al punto donde la línea de visión toca tangencialmente la superficie de la Tierra.

INVESTIGUE

Como puede ver en el diagrama, una línea trazada del centro de la Tierra al punto donde la línea de visión toca la superficie (A a C) formará un ángulo recto con dicha línea de visión (B a C); es decir, los tres puntos A, B y C forman los vértices del triángulo rectángulo. Ésta es la idea clave que nos permite usar la trigonometría y el teorema de Pitágoras para buscar la solución de este problema. Examinando el diagrama en la figura 1.10, encontramos que

$$r^2 + R^2 = (R + h)^2.$$

SIMPLIFIQUE

Recuerde que queremos encontrar la distancia al horizonte, para lo cual usamos el símbolo r en la ecuación anterior. Aislando dicha variable en un lado de nuestra ecuación da

$$r^2 = (R + h)^2 - R^2.$$

Ahora podemos simplificar el cuadrado y obtener

$$r^2 = R^2 + 2hR + h^2 - R^2 = 2hR + h^2.$$

Por último, tomamos la raíz cuadrada y obtenemos nuestra respuesta algebraica final:

$$r = \sqrt{2hR + h^2}.$$

CALCULE

Ahora estamos preparados para insertar números. El valor aceptado para el radio de la Tierra es $R = 6\,370\text{ km} = 6.37 \cdot 10^6\text{ m}$, y $h = 413\text{ m} = 4.13 \cdot 10^2\text{ m}$ se dio en el problema. Esto lleva a

$$r = \sqrt{2(4.13 \cdot 10^2\text{ m})(6.37 \cdot 10^6\text{ m}) + (4.13 \cdot 10^2\text{ m})^2} = 7.25382 \cdot 10^4\text{ m}.$$

REDONDEE

El radio de la Tierra se dio con una precisión de tres dígitos, igual que la elevación del nivel de los ojos del observador. De modo que redondeamos a tres dígitos y damos nuestro resultado final como

$$r = 7.25 \cdot 10^4\text{ m} = 72.5\text{ km}.$$

VUELVA A REVISAR

Siempre verifique primero las unidades. Como el problema pregunta “¿qué tan lejos?”, la respuesta tiene que ser una distancia, que tiene la dimensión de longitud y, por lo tanto, la unidad básica es el metro. Nuestra respuesta pasa la primera verificación. ¿Cómo se ve la magnitud de nuestra respuesta? Como la Willis Tower tiene casi 0.5 kilómetros de altura, esperamos que el alcance de la visión sea por lo menos de varios kilómetros, de modo que un alcance de muchos kilómetros parece razonable. El Lago Michigan tiene un poco más de 80 km de anchura, viendo hacia el este desde Chicago. Nuestra respuesta entonces implica que no puede ver la orilla del Lago Michigan desde la cúspide de la Willis Tower. La experiencia muestra que esto es correcto, lo cual nos da una confianza adicional en nuestra respuesta.

1.3 Ejercicio en clase

¿Cuál es la distancia máxima desde la que un marinero en la punta de un mástil del barco 1, quien está a 34 m arriba de la superficie del mar puede ver a otro marinero que está en la punta de un mástil del barco 2, a 26 m sobre la superficie del mar?

- a) 0.17 km d) 21 km
b) 0.89 km e) 39 km
c) 4.5 km

Lineamientos de problemas resueltos: límites

En el problema resuelto 1.2, encontramos una fórmula muy práctica, $r = \sqrt{2hR + h^2}$, para la distancia a la que se puede ver sobre la superficie de la Tierra desde una elevación h , donde R es el radio de la Tierra. Hay otra prueba que podemos realizar para verificar la validez de esta fórmula. No la hemos incluido en el paso “Vuelva a revisar” porque amerita tratarse por separado. Esta técnica general de resolución de problemas consiste en examinar los límites de la ecuación.

¿Qué significa “examinar los límites”? En términos del problema resuelto 1.2, significa que, en vez de sólo insertar el número dado para h en nuestra fórmula y calcular la solución, regresar a pensar lo que le sucedería a la distancia r , uno puede ver si h es muy grande o muy pequeña. Es evidente, que el más pequeño en que se puede convertir h es cero. En este caso, r se acercaría a cero. Esto sería de esperarse, por supuesto; si su nivel de ojos está al nivel del suelo, no puede ver muy lejos. Por otro lado, examinar lo que pasa si h se vuelve grande en comparación con el radio de la Tierra (vea la figura 1.11). (Sí, es imposible construir una torre de esa altura, pero h también puede representar la altitud de un satélite con respecto al suelo.) En tal caso, esperamos que el alcance de la visión sería simplemente la altura h . Nuestra fórmula también apoya esta predicción porque, cuando h se vuelve grande en comparación con R , el primer término en la raíz cuadrada se puede despreciar, y encontraremos que $\lim_{h \rightarrow \infty} \sqrt{2hR + h^2} = h$.

Lo que hemos explicado mediante este ejemplo es un lineamiento general: si deduce una fórmula, puede verificar su validez sustituyendo valores extremos de las variables en la fórmula y verificando si estos límites están de acuerdo con el sentido común. Con frecuencia la fórmula se simplifica de manera drástica en el límite. Si su fórmula tiene un comportamiento limitante que es correcto, esto no significa necesariamente que la fórmula misma sea correcta, pero da una confianza adicional en su validez.

Lineamientos de problemas resueltos: relaciones

Otra clase de problemas de física pregunta qué le sucede a una cantidad que depende de cierto parámetro si dicho parámetro cambia por un factor dado. Estos problemas ofrecen una excelente

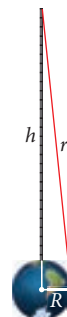


FIGURA 1.11 Alcance de visión en el límite de una h muy alta.

percepción de la esencia de conceptos físicos, y casi no consumen tiempo para resolverlos. En general, esto es verdad *siempre y cuando* se cumplan dos condiciones: primera, tiene que saber qué fórmula usar y, segundo, tiene que saber cómo resolver esta clase de problemas generales. Pero éste es un gran “*siempre y cuando*”. Al estudiar, equipará a su memoria con las fórmulas correctas; pero necesita adquirir la destreza para resolver problemas de este tipo en general.

Aquí va el truco: escriba la fórmula que conecte la cantidad dependiente al parámetro que cambia. Escríbala dos veces, una vez con la cantidad dependiente y los parámetros indexados (o etiquetados) con el número 1 y una vez indexados con el número 2. Después forme relaciones de las cantidades indexadas dividiendo los lados derechos e izquierdos de las dos ecuaciones. En seguida, inserte el factor de cambio para el parámetro (expresado como relación) y haga el cálculo con el fin de encontrar el factor de cambio para la cantidad dependiente (también expresado como una relación).

El siguiente es un ejemplo para demostrar este método.

EJEMPLO 1.3 Cambio en volumen

PROBLEMA

Si el radio de un cilindro aumenta por un factor de 2.73, ¿por qué factor cambia el volumen? Suponga que la altura del cilindro permanece constante.

SOLUCIÓN

La fórmula que conecta el volumen de un cilindro, V , y el radio, r , es

$$V = \pi r^2 h.$$

Por la manera en que se expresa el problema, V es la cantidad dependiente y r es el parámetro del que depende. La altura del cilindro, h , también aparece en la ecuación, pero permanece constante, de acuerdo con el enunciado del problema.

Siguiendo el lineamiento general de resolución de problemas, escribimos la ecuación dos veces, una vez con los subíndices 1 y otra con los subíndices 2:

$$V_1 = \pi r_1^2 h$$

$$V_2 = \pi r_2^2 h.$$

Ahora dividimos la segunda ecuación entre la primera, obteniendo,

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\pi r_2^2 h}{\pi r_1^2 h} = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2.$$

Como puede ver, a h no se le puso subíndice porque permaneció constante en el problema; se canceló en la división.

El problema expresa que el cambio en el radio está dado por:

$$r_2 = 2.73r_1.$$

Sustituimos r_2 en nuestra relación:

$$\frac{V_2}{V_1} = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 = \left(\frac{2.73r_1}{r_1}\right)^2 = 2.73^2 = 7.4529,$$

o bien

$$V_2 = 7.45V_1,$$

donde redondeamos la solución a tres cifras significativas que tenía la cantidad dada en el problema. Así, la respuesta es que el volumen del cilindro aumenta por un factor de 7.45 cuando incrementa su radio por un factor de 2.73.

Lineamientos de problemas resueltos: estimación

A veces no necesita resolver exactamente un problema de física. Cuando todo lo que se pide es un estimado, basta con conocer el orden de magnitud de alguna cantidad. Por ejemplo, para la mayoría de los propósitos, una respuesta de $1.24 \cdot 10^{20}$ km no es muy diferente de $1 \cdot 10^{20}$ km. En tales casos, puede redondear todos los números de un problema hasta la potencia más cercana de 10 y ejecutar la aritmética necesaria. Por ejemplo, el cálculo del problema resuelto 1.1 se reduce a

$$\frac{(20.8 \text{ cm})^2 \cdot (12.2 \text{ cm})}{4\pi} \approx \frac{(2 \cdot 10^1 \text{ cm})^2 \cdot (10 \text{ cm})}{10} = \frac{4 \cdot 10^3 \text{ cm}^3}{10} = 400 \text{ cm}^3,$$

lo cual es bastante parecido a nuestra respuesta de 420 cm^3 . Hasta una respuesta de 100 cm^3 (redondeando 20.8 cm a 10 cm) tiene el orden de magnitud correcto para el volumen. Observe que a menudo se puede redondear el número π a 3 o redondear π^2 a 10. Con la práctica, puede encontrar más trucos de aproximación como éstos, que pueden hacer las estimaciones más sencillas y rápidas.

La técnica para obtener resultados útiles mediante estimación cuidadosa la hizo famosa el físico del siglo xx, Enrico Fermi (1901-1954), quien estimó la energía liberada por la explosión nuclear de Trinity en julio 16 de 1945, cerca de Socorro, Nuevo México, al observar la distancia a la que fue impulsado un trozo de papel por el viento de la explosión. Hay una clase de problemas de estimación que se llaman *problemas Fermi* que pueden dar resultados interesantes cuando se hacen suposiciones razonables acerca de las cantidades que no se conocen con exactitud.

Los estimados son útiles para obtener una percepción de la esencia de un problema antes de dirigirse a métodos más complicados para calcular una respuesta precisa. Por ejemplo, se podría estimar cuántos tacos come la gente y cuántas taquerías hay en un pueblo antes de invertir en un plan comercial completo para construir una taquería. Para practicar las habilidades de valoración, estimemos el número de dentistas que trabajan en Estados Unidos.

EJEMPLO 1.4 Número de dentistas

PROBLEMA

¿Cuántos dentistas ejercen su profesión en Estados Unidos?

SOLUCIÓN

Para hacer este estimado, iniciamos con los siguientes datos y suposiciones: existen casi 300 millones de personas en Estados Unidos. La mitad de ellos hacen visitas periódicas al dentista, principalmente para limpieza rutinaria de dientes. Cada persona que visita de modo regular a un dentista, lo hace dos veces al año. Cada visita tarda $\frac{1}{2}$ hora en promedio, incluido de manera ocasional el arreglo de una caries. Por lo tanto, el número total de horas de atención odontológica que se ejerce en Estados Unidos en un año es

$$(300 \cdot 10^6 \text{ personas})(0.5)(2 \text{ visitas/persona})(0.5 \text{ horas/visita}) = 1.5 \cdot 10^8 \text{ horas.}$$

Suponemos que un dentista trabaja 40 horas por semana y 50 semanas al año. En consecuencia, un dentista trabaja

$$(40 \text{ horas/semana})(50 \text{ semanas/año}) = 2\,000 \text{ horas/año.}$$

Así, el número necesario de dentistas es

$$\text{Número de dentistas} = \frac{1.5 \cdot 10^8 \text{ horas}}{2\,000 \text{ horas}} = 75\,000 \text{ dentistas.}$$

El Bureau of Labor Statistics del Departamento de Trabajo de Estados Unidos reporta que en 2006 recibieron su licencia profesional 161 000 dentistas. En estos términos, nuestro estimado del número de dentistas que ejercen en Estados Unidos estuvo dentro de un factor de 3 del número real.



1.6 Vectores

Los **vectores** son descripciones matemáticas de cantidades que tienen tanto magnitud como dirección. La magnitud de un vector es un número no negativo, combinado a menudo con una unidad física. Muchas cantidades vectoriales son importantes en física y, sin duda, en toda la ciencia. Por eso, antes de comenzar este estudio de la física, necesita estar familiarizado con los vectores y algunas operaciones vectoriales básicas.

Los vectores tienen un punto inicial y un punto final. Por ejemplo, considere un vuelo de Seattle a Nueva York. Para representar el cambio de la posición del avión, podemos dibujar una flecha desde el punto de partida del avión a su destino (figura 1.12). (Las trayectorias reales de vuelos no son líneas exactamente rectas, debido al hecho de que la Tierra es una esfera y a las

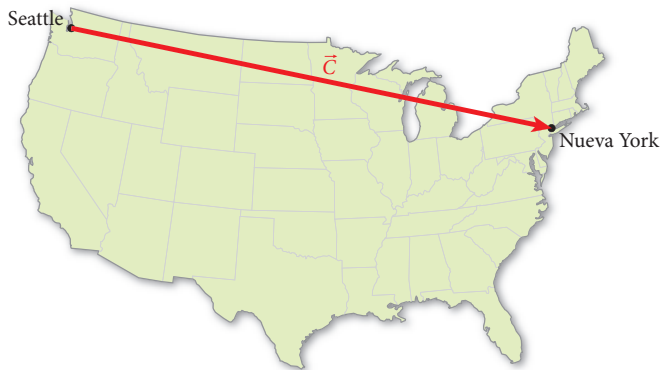


FIGURA 1.12 Trayectoria de vuelo de Seattle a Nueva York, como ejemplo de un vector.

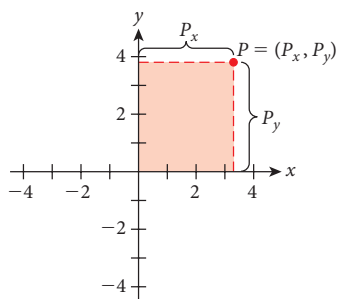


FIGURA 1.13 Representación de un punto P en espacio bidimensional en términos de sus coordenadas cartesianas.

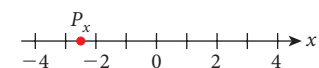


FIGURA 1.14 Representación de un punto P en un sistema unidimensional de coordenadas cartesianas.

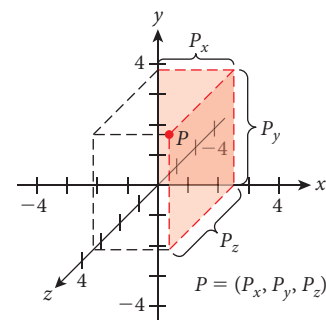


FIGURA 1.15 Representación de un punto P en un espacio tridimensional en términos de sus coordenadas cartesianas.

restricciones del espacio aéreo y los reglamentos de tráfico aéreo; pero una línea recta es una aproximación razonable para nuestro propósito.) Esta flecha representa un *vector de desplazamiento*, que siempre va de un sitio a algún otro. Toda cantidad vectorial tiene una magnitud y una dirección. Si el vector representa una cantidad física como el desplazamiento, también tendrá una unidad física. Una cantidad que se puede representar sin dar una dirección se llama **escalar**. Una cantidad escalar tiene sólo magnitud y posiblemente una unidad física. Ejemplos de cantidades escalares son el tiempo y la temperatura.

Este libro indica una cantidad vectorial mediante una letra con una pequeña flecha horizontal que señala a la derecha encima de la letra. Por ejemplo, en el dibujo del viaje de Seattle a Nueva York (figura 1.12), el vector de desplazamiento tiene el símbolo \vec{C} . En el resto de esta sección, aprenderá a trabajar con vectores: cómo sumarlos y restarlos y cómo multiplicarlos con escalares. Para realizar estas operaciones, es muy útil introducir un sistema de coordenadas en el cual representar los vectores.

Sistema de coordenadas cartesianas

Un **sistema de coordenadas cartesianas** se define como un conjunto de dos o más ejes con ángulos de 90° entre cada par. Se dice que estos ejes son ortogonales entre sí. En un espacio, los ejes de coordenadas se rotulan típicamente x y y . Por lo tanto, especificar de manera individualizada cualquier punto P en el espacio bidimensional dando sus coordenadas P_x y P_y a lo largo de los dos ejes de coordenadas, como se muestra en la figura 1.13. Usaremos la notación (P_x, P_y) para especificar un punto en términos de sus coordenadas. Por ejemplo, en la figura 1.13 el punto P tiene la posición $(3.3, 3.8)$, a causa de que su coordenada x tiene un valor de 3.3, y su coordenada y tiene un valor de 3.8. Observe que cada coordenada es un número y puede tener un valor positivo o negativo, o bien cero.

También podemos definir un sistema de coordenadas unidimensionales, por el cual cualquier punto esté ubicado en una sola línea recta que convencionalmente se llama el eje x . Cualquier punto en este espacio unidimensional se define de manera individual especificando un número, el valor de coordenada x , que también puede ser negativo, cero o positivo (figura 1.14). El punto P en la figura 1.14 tiene la coordenada x , $P_x = -2.5$.

Es claro que los sistemas unidimensionales y bidimensionales son fáciles de trazar, porque la superficie del papel tiene dos dimensiones. En un cierto sistema tridimensional de coordenadas, el tercer eje de coordenadas debería ser perpendicular a los otros dos, y por lo tanto saldría en ángulo recto fuera del plano de la página. Para dibujar un sistema tridimensional de coordenadas, tenemos que recurrir a las convenciones que usan las técnicas para los dibujos en perspectiva. Representamos el tercer eje mediante una línea que está en un ángulo de 45° con respecto a las otras dos (figura 1.15).

En un espacio tridimensional tenemos que especificar tres números para determinar de modo individual las coordenadas de un punto. Utilizamos la notación $P = (P_x, P_y, P_z)$ para este propósito. Es posible construir coordenadas cartesianas con más de tres ejes ortogonales, aunque son casi imposibles de visualizar. Por ejemplo, teorías modernas de cuerdas (descritas en el capítulo 39) generalmente se construyen en espacios de 10 dimensiones. Sin embargo, para los fines de este libro y para casi toda la física, tres dimensiones son suficientes. De hecho, para la mayoría de las aplicaciones, se puede obtener el conocimiento esencial matemático y físico mediante representaciones.

Representación cartesiana de vectores

El ejemplo del vuelo de Seattle a Nueva York establece que los vectores se caracterizan por dos puntos, inicio y final, representados por la cola y la punta de una flecha, respectivamente. Usando la representación cartesiana de puntos, podemos definir la representación cartesiana de un vector de desplazamiento como la diferencia en las coordenadas del punto final y el punto inicial. Como la diferencia entre los dos puntos de un vector es todo lo que importa, podemos desplazar el vector en el espacio tanto como queramos. Mientras no cambiemos ni la longitud ni la dirección de la flecha, el vector sigue siendo matemáticamente el mismo. Considere los dos vectores de la figura 1.16.

La figura 1.16a) muestra el vector de desplazamiento \vec{A} que apunta del punto $P = (-2, -3)$ al punto $Q = (3, 1)$. Con la notación recién introducida, las **componentes** de \vec{A} son las coordenadas del punto Q menos las del punto P , $\vec{A} = (3 - (-2), 1 - (-3)) = (5, 4)$. La figura 1.16b) muestra otro vector del punto $R = (-3, -1)$ al punto $S = (2, 3)$. La diferencia entre estas coordenadas es $(2 - (-3), 3 - (-1)) = (5, 4)$, que es la misma que para el vector \vec{A} que apunta de P a Q .

Por sencillez, podemos cambiar el inicio de un vector al origen del sistema de coordenadas, y las componentes del vector serán los mismos que las coordenadas de su punto final (figura 1.17). Como resultado, vemos que un vector se puede representar en coordenadas cartesianas como

$$\vec{A} = (A_x, A_y) \text{ en espacio bidimensional} \quad (1.7)$$

$$\vec{A} = (A_x, A_y, A_z) \text{ en espacio tridimensional} \quad (1.8)$$

donde A_x , A_y y A_z son números. Observe que la notación para un punto en coordenadas cartesianas es similar a la notación para un vector en coordenadas cartesianas. Ya sea que la notación especifique un punto o un vector, quedará claro por el contexto de la referencia.

Suma y resta gráfica de vectores

Suponga que el vuelo directo de Seattle a Nueva York que se muestra en la figura 1.12 no estaba disponible, y tuvo que hacer una conexión por Dallas (figura 1.18). En tal caso, el vector de desplazamiento \vec{C} para el vuelo de Seattle a Nueva York es la suma de un vector de desplazamiento \vec{A} de Seattle a Dallas y el vector de desplazamiento \vec{B} de Dallas a Nueva York:

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}. \quad (1.9)$$

Este ejemplo muestra un procedimiento general para la suma de vectores de manera gráfica: mueva el inicio del vector \vec{B} a la punta del vector \vec{A} ; después, el vector desde el inicio del vector \vec{A} a la punta del vector \vec{B} es el vector de la suma, o **resultante** de los dos.

Si usted suma dos números reales, el orden no importa: $3 + 5 = 5 + 3$. Esta propiedad se llama la *propiedad conmutativa de la suma*. La suma de vectores también es conmutativa:

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}. \quad (1.10)$$

La figura 1.19 demuestra esta propiedad conmutativa de la suma vectorial, gráficamente. Muestra los mismos vectores que la figura 1.18, pero también el principio del vector \vec{A} movido a la punta del vector \vec{B} (flechas punteadas). Observe que el vector resultante es el mismo que antes.

En seguida, el vector inverso (o revertido o negativo), $-\vec{C}$, del vector \vec{C} es un vector con la misma longitud que \vec{C} pero señalando en la dirección opuesta (figura 1.20). Para el vector que representa el vuelo de Seattle a Nueva York, por ejemplo, el vector inverso es el viaje de regreso. Es claro que, si suma \vec{C} y su vector inverso, $-\vec{C}$, termina en el punto del que partió. Así, encontramos,

$$\vec{C} + (-\vec{C}) = \vec{C} - \vec{C} = (0, 0, 0), \quad (1.11)$$

y la magnitud es cero, $|\vec{C} - \vec{C}| = 0$. Esta identidad en apariencia sencilla muestra que podemos tratar la resta de vectores como la suma de vectores, simplemente sumando el vector inverso. Por ejemplo, el vector \vec{B} en la figura 1.19 se puede obtener como $\vec{B} = \vec{C} - \vec{A}$. Por eso, la suma y la resta de vectores siguen exactamente las mismas reglas que la suma y la resta de números reales.

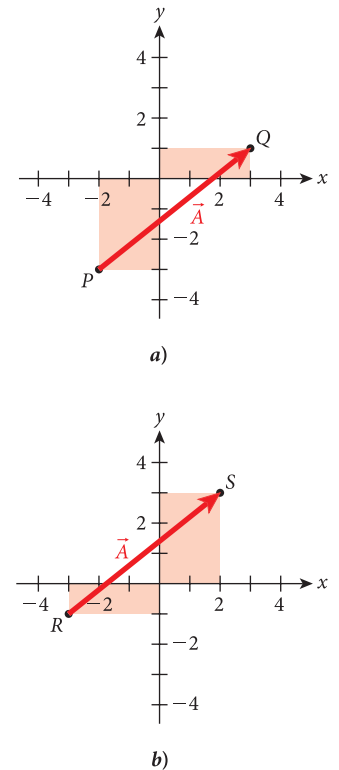


FIGURA 1.16 Representaciones cartesianas de un vector \vec{A} . a) Vector de desplazamiento de P a Q ; b) Vector de desplazamiento de R a S .

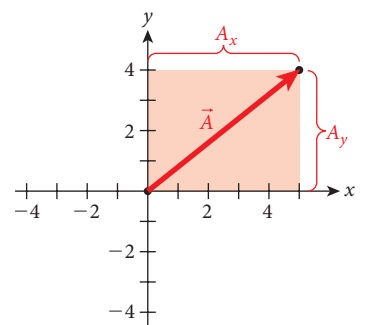


FIGURA 1.17 Componentes cartesianos del vector \vec{A} en dos dimensiones.

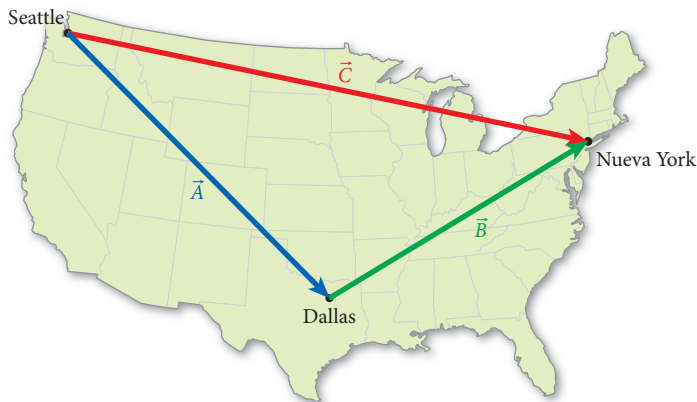


FIGURA 1.18 Vuelo directo vs. vuelo con una escala, como ejemplo de suma vectorial.

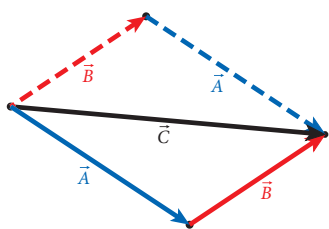


FIGURA 1.19 Propiedad conmutativa de la suma vectorial.

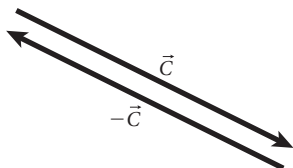


FIGURA 1.20 Vector inverso $-\vec{C}$ de un vector \vec{C} .

Suma vectorial usando componentes

La suma vectorial gráfica ilustra los conceptos muy bien; pero, para fines prácticos, el método de componentes para la suma vectorial es mucho más útil. (Esto se debe a que las calculadoras son más fáciles de usar y mucho más precisas que las reglas y el papel de gráficas.) Consideremos el método de componentes para la suma de vectores tridimensionales. Las ecuaciones para vectores bidimensionales son casos especiales que se presentan al despreciar las componentes z . De modo semejante, la ecuación unidimensional se puede obtener despreciando las componentes y y z .

Si suma dos vectores tridimensionales, $\vec{A}=(A_x, A_y, A_z)$ y $\vec{B}=(B_x, B_y, B_z)$, el vector resultante es

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} = (A_x, A_y, A_z) + (B_x, B_y, B_z) = (A_x + B_x, A_y + B_y, A_z + B_z) \quad (1.12)$$

En otras palabras, las componentes de la suma vectorial son la suma de las componentes de los vectores individuales:

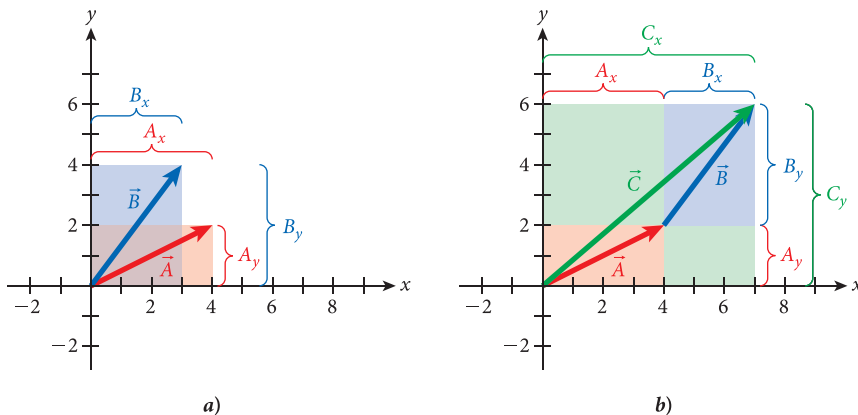
$$\begin{aligned} C_x &= A_x + B_x \\ C_y &= A_y + B_y \\ C_z &= A_z + B_z. \end{aligned} \quad (1.13)$$

La relación entre el método gráfico y el método de componentes se ilustra en la figura 1.21. La figura 1.21a) muestra dos vectores $\vec{A}=(4, 2)$ y $\vec{B}=(3, 4)$ en espacio bidimensional, y la figura 1.21b) muestra el vector de su suma $\vec{C}=(4+3, 2+4)=(7,6)$. La figura 1.21b) muestra claramente que $C_x=A_x+B_x$, porque el todo es igual a la suma de sus partes.

Del mismo modo, podemos tomar la diferencia $\vec{D}=\vec{A}-\vec{B}$, y las componentes cartesianas del vector de la diferencia está dada por

$$\begin{aligned} D_x &= A_x - B_x \\ D_y &= A_y - B_y \\ D_z &= A_z - B_z. \end{aligned} \quad (1.14)$$

FIGURA 1.21 Suma vectorial por componentes. a) Componentes de los vectores \vec{A} y \vec{B} ; b) los componentes del vector resultante de las sumas de las componentes de los vectores individuales.



Multiplicación de un vector con un escalar

¿Qué es $\vec{A} + \vec{A} + \vec{A}$? Si su respuesta a esta pregunta es $3\vec{A}$, ya entendió la multiplicación de un vector y un escalar. El vector que resulta de multiplicar el vector \vec{A} con el escalar 3 es un vector que señala en la misma dirección como el vector original \vec{A} pero es tres veces más largo.

La multiplicación de un vector con un escalar positivo arbitrario —es decir, un número positivo— da por resultado otro vector que señala en la misma dirección, pero tiene una magnitud que es el producto de la magnitud del vector original y el valor del escalar. La multiplicación de un vector por un escalar negativo da por resultado un vector que señala en el sentido opuesto al del original, con una magnitud que es el producto de la magnitud del vector original y la magnitud del escalar.

Una vez más es útil la notación de componente. Para la multiplicación de un vector \vec{A} con un escalar s :

$$\vec{E} = s\vec{A} = s(A_x, A_y, A_z) = (sA_x, sA_y, sA_z). \quad (1.15)$$

En otras palabras, cada componente del vector \vec{A} se multiplica por el escalar para llegar a las componentes del vector producto:

$$\begin{aligned} E_x &= sA_x \\ E_y &= sA_y \\ E_z &= sA_z. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Vectores unitarios

Hay un conjunto de vectores especiales que facilitan mucho las matemáticas asociadas con los vectores. Los llamados **vectores unitarios**, son vectores de magnitud 1 dirigidos a lo largo de los ejes principales de coordenadas del sistema de coordenadas. En dos dimensiones, estos vectores señalan hacia el sentido positivo de x y el sentido positivo de y . En tres dimensiones, un tercer vector unitario señala hacia el sentido positivo de z . Con objeto de distinguir éstos como vectores unitarios, les damos los símbolos \hat{x} , \hat{y} , y \hat{z} . Su representación de componente es

$$\begin{aligned} \hat{x} &= (1, 0, 0) \\ \hat{y} &= (0, 1, 0) \\ \hat{z} &= (0, 0, 1). \end{aligned} \quad (1.17)$$

La figura 1.22a) muestra los vectores unitarios en dos dimensiones y la figura 1.22b) muestra los vectores unitarios en tres dimensiones.

¿Cuál es la ventaja de los vectores unitarios? Podemos escribir cualquier vector como una suma de estos vectores unitarios en vez de usar la notación de componentes; cada vector unitario se multiplica por el correspondiente componente cartesiano del vector:

$$\begin{aligned} \vec{A} &= (A_x, A_y, A_z) \\ &= (A_x, 0, 0) + (0, A_y, 0) + (0, 0, A_z) \\ &= A_x(1, 0, 0) + A_y(0, 1, 0) + A_z(0, 0, 1) \\ &= A_x\hat{x} + A_y\hat{y} + A_z\hat{z}. \end{aligned} \quad (1.18)$$

En dos dimensiones,

$$\vec{A} = A_x\hat{x} + A_y\hat{y}. \quad (1.19)$$

Esta representación con vectores unitarios de un vector general será especialmente útil, más adelante en este libro, para multiplicar dos vectores.

Longitud y dirección de vectores

Si sabemos la representación de componentes de un vector, ¿cómo podemos encontrar su longitud (magnitud) y la dirección en la que está apuntando? Veamos el caso más importante: un vector en dos dimensiones. En dos dimensiones, un vector \vec{A} se puede especificar de manera inequívoca dando los dos componentes cartesianos, A_x y A_y . También podemos especificar el mismo vector dando otros dos números: su longitud A y su ángulo θ con respecto al eje positivo x .

Demos una mirada a la figura 1.23 para ver cómo podemos determinar A y θ a partir de A_x y A_y . La figura 1.23a) muestra el resultado de la ecuación 1.19 en representación gráfica. El vector \vec{A}

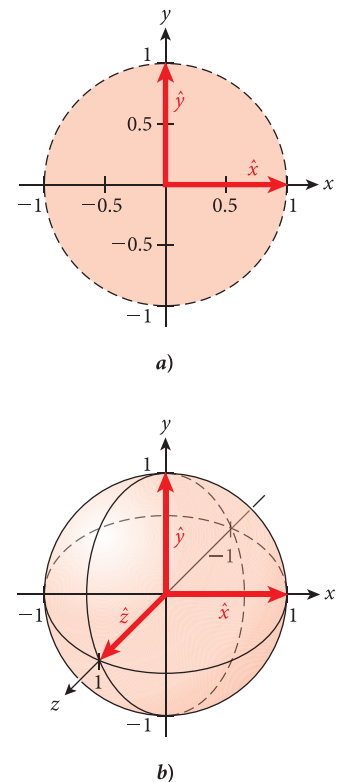


FIGURA 1.22 Vectores cartesianos unitarios en a) dos y b) tres dimensiones.

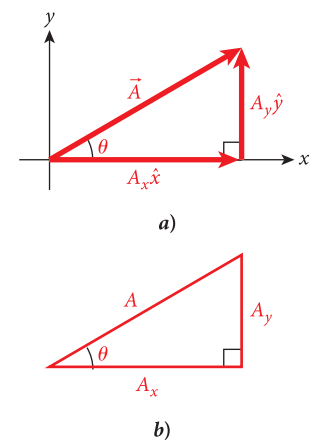
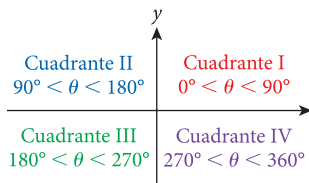


FIGURA 1.23 Longitud y dirección de un vector. a) Componentes cartesianos A_x y A_y ; b) Longitud A y ángulo θ .

1.4 Ejercicio en clase

¿Dentro de cuál cuadrante señalan cada uno de los siguientes vectores?



- a) $A = (A_x, A_y)$ con $A_x = 1.5$ cm, $A_y = -1.0$ cm
- b) un vector de longitud 2.3 cm y ángulo de 131°
- c) el vector inverso de $B = (0.5$ cm, 1.0 cm)
- d) la suma de los vectores unitarios en las direcciones x y y .

es la suma de los vectores $A_x\hat{x}$ y $A_y\hat{y}$. Como los vectores unitarios \hat{x} y \hat{y} son, por definición, ortogonales entre sí, estos vectores forman un ángulo de 90° . Así, los tres vectores \vec{A} , $A_x\hat{x}$, y $A_y\hat{y}$ forman un triángulo rectángulo con longitudes laterales A , A_x y A_y , como se muestra en la figura 1.23b).

Ahora podemos aplicar la trigonometría básica para hallar θ y A . Usando el teorema de Pitágoras da como resultado

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \tag{1.20}$$

Podemos encontrar el ángulo θ por la definición de la función tangente

$$\theta = \tan^{-1} \frac{A_y}{A_x} \tag{1.21}$$

Al usar la ecuación 1.21, debe tener cuidado de que θ esté en el cuadrante correcto. También podemos invertir las ecuaciones 1.20 y 1.21 para obtener los componentes cartesianos de un vector de determinada longitud y dirección:

$$A_x = A \cos \theta \tag{1.22}$$

$$A_y = A \sin \theta. \tag{1.23}$$

Encontrará estas relaciones trigonométricas una y otra vez en toda la introducción a la física. Si necesita volver a familiarizarse con la trigonometría, consulte la cartilla de matemáticas en el apéndice A.

LO QUE HEMOS APRENDIDO | GUÍA DE ESTUDIO PARA EXAMEN

- Los números grandes y pequeños se pueden representar usando notación científica, que consiste en una mantisa y una potencia de diez.
- Los sistemas físicos se describen mediante el sistema de unidades en el SI. Estas unidades están en términos de estándares reproducibles y proporcionan métodos convenientes de ajuste y cálculo. Las unidades básicas del sistema SI incluyen el metro (m), el kilogramo (kg), el segundo (s) y el amperio (A).
- Los sistemas físicos tienen tamaños, masas y escalas de tiempo que varían ampliamente, pero a todos los gobiernan las mismas leyes físicas.
- Un número (con un número específico de cifras significativas) o un conjunto de números (como las componentes de un vector) se debe combinar con unidades para describir cantidades físicas.
- Los vectores en tres dimensiones se pueden especificar por sus tres componentes cartesianos, $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$. Cada uno de estos componentes cartesianos es un número.
- Los vectores se pueden sumar o restar. En componentes cartesianos, $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} = (A_x, A_y, A_z) + (B_x, B_y, B_z) = (A_x + B_x, A_y + B_y, A_z + B_z)$.
- La multiplicación de un vector por un escalar da por resultado otro vector con la misma dirección o dirección opuesta, pero de diferente magnitud, $\vec{E} = s\vec{A} = s(A_x, A_y, A_z) = (sA_x, sA_y, sA_z)$.
- Los vectores unitarios son vectores de longitud 1. Los vectores unitarios en sistemas de coordenadas cartesianas se indican por \hat{x} , \hat{y} , y \hat{z} .
- La longitud y dirección de un vector en dos dimensiones o bidimensional se puede determinar por sus componentes cartesianos: $A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$ y $\theta = \tan^{-1}(A_y / A_x)$.
- Los componentes cartesianos de un vector en dos dimensiones o bidimensional se pueden calcular a partir de la longitud y el ángulo del vector con respecto al eje x : $A_x = A \cos \theta$ y $A_y = A \sin \theta$.

TÉRMINOS CLAVE

notación científica, p. 9
cifras significativas, p. 10
sistema de unidades SI, p. 11

metrología, p. 14
vector, p. 23
escalar, p. 24

sistema de coordenadas cartesianas, p. 24
componentes, p. 25

resultante, p. 25
vectores unitarios, p. 27

PRÁCTICA PARA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

PROBLEMA RESUELTO 1.3 Caminata

Excursiona en los Everglades de Florida con dirección suroeste desde su campamento de base, habiendo recorrido 1.72 km. Llega a la orilla de un río que es demasiado hondo para cruzarlo, por lo cual hace un giro de 90° a la derecha y avanza otros 3.12 km hasta un puente. ¿A qué distancia se encuentra de su campamento?

SOLUCIÓN

PIENSE

Si está excursionando, se está moviendo en un plano de dos dimensiones: la superficie de la Tierra (a causa de que los Everglades son planos y la distancia de la caminata es pequeña en comparación con la distancia sobre la cual cambia significativamente la altitud debido a la curvatura de la Tierra). Así que, podemos usar vectores bidireccionales para caracterizar los diversos segmentos de la caminata. Hacer una caminata en línea recta, después dar una vuelta, seguida de otra caminata en línea recta equivale a un problema de adición de vectores en el que se pide el vector resultante.

ESBOCE

La figura 1.24 presenta un sistema de coordenadas en el que el eje y apunta al norte y el eje x al este, como es convencional. El primer tramo de la caminata, en la dirección suroeste, está indicado por el vector \vec{A} , y el segundo tramo por el vector \vec{B} . La figura también muestra el vector $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$, cuya longitud deseamos determinar.

INVESTIGUE

Si ha trazado el esquema con suficiente exactitud, haciendo que las distancias y las longitudes de los vectores sean proporcionales a las longitudes de los segmentos de la caminata (como se hizo en la figura 1.24), entonces puede medir la longitud del vector \vec{C} para determinar la distancia desde su campamento hasta el final del segundo segmento de la caminata. Sin embargo, las distancias dadas están especificadas con tres cifras significativas, de modo que la respuesta debe tener tres cifras significativas. Por lo tanto, no podemos confiar en el método gráfico, sino usar el método de componentes para suma vectorial.

Para calcular las componentes de los vectores, necesitamos saber sus ángulos relativos al eje positivo de x . Para el vector \vec{A} , que señala al suroeste, este ángulo es $\theta_A = 225^\circ$, como se muestra en la figura 1.25. El vector \vec{B} tiene un ángulo de 90° en relación con \vec{A} , y por esto $\theta_B = 135^\circ$ con respecto al eje positivo de x . Para aclarar este punto, se ha movido el punto de inicio de \vec{B} al origen del sistema de coordenadas en la figura 1.25. (Recuerde: Podemos mover los vectores a discreción. Mientras dejemos iguales la dirección y la longitud del vector, éste no se altera.)

Ahora tenemos todo en su lugar para comenzar nuestro cálculo. Contamos con las longitudes y las direcciones de ambos vectores, lo cual nos permite calcular sus componentes cartesianas. En tal caso, se suman sus componentes para calcular los del vector \vec{C} , a partir de los cuales calculamos la longitud de este vector.

SIMPLIFIQUE

Las componentes del vector \vec{C} son:

$$C_x = A_x + B_x = A \cos \theta_A + B \cos \theta_B$$

$$C_y = A_y + B_y = A \sin \theta_A + B \sin \theta_B.$$

Por lo tanto, la longitud del vector \vec{C} es (compare con la ecuación 1.20):

$$C = \sqrt{C_x^2 + C_y^2} = \sqrt{(A \cos \theta_A + B \cos \theta_B)^2 + (A \sin \theta_A + B \sin \theta_B)^2}.$$

(continúa)

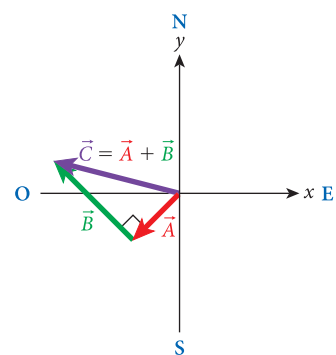


FIGURA 1.24 Caminata con una vuelta de 90° .

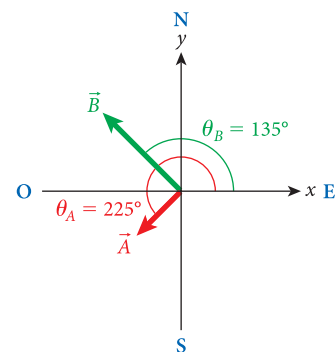


FIGURA 1.25 Ángulos de los dos segmentos de la caminata.

(continuación)

CALCULE

Ahora sólo falta introducir los números para obtener la longitud del vector:

$$C = \sqrt{((1.72 \text{ km}) \cos 225^\circ + (3.12 \text{ km}) \cos 135^\circ)^2 + ((1.72 \text{ km}) \sin 225^\circ + (3.12 \text{ km}) \sin 135^\circ)^2}$$

$$= \sqrt{(1.72 \cdot (-\sqrt{1/2}) + 3.12 \cdot (-\sqrt{1/2}))^2 + (1.72 \cdot (-\sqrt{1/2}) + 3.12 \cdot \sqrt{1/2})^2} \text{ km.}$$

Al ingresar estos números en una calculadora:

$$C = 3.562695609 \text{ km.}$$

REDONDEE

Como las distancias iniciales se dieron con tres cifras significativas, nuestra respuesta final debe también tener (cuando mucho) la misma precisión. Redondeando a tres cifras significativas, se produce nuestra respuesta final:

$$C = 3.56 \text{ km.}$$

VOLVER A REVISAR

Este problema tuvo el propósito de practicar con los conceptos vectoriales. De cualquier modo, si olvida por un momento que los desplazamientos son vectores y observa que forman un triángulo rectángulo, puede de inmediato calcular la longitud del lado C por el teorema de Pitágoras como sigue:

$$C = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{1.72^2 + 3.12^2} \text{ km} = 3.56 \text{ km.}$$

Aquí redondeamos también nuestro resultado a tres cifras significativas, y vemos que coincide con la respuesta obtenida usando el procedimiento más largo de la suma vectorial.

PREGUNTAS DE OPCIÓN MÚLTIPLE

1.1 ¿Cuál de las siguientes es la frecuencia del do agudo?

- a) 376 g b) 483 m/s c) 523 Hz d) 26.5 J

1.2 Si \vec{A} y \vec{B} son vectores y $\vec{B} = -\vec{A}$, ¿cuál de las siguientes opciones es verdad?

- a) La magnitud de \vec{B} es igual al negativo de la magnitud de \vec{A} .
 b) \vec{A} y \vec{B} son perpendiculares.
 c) El ángulo de dirección de \vec{B} es igual al ángulo de dirección de \vec{A} más 180° .
 d) $\vec{A} + \vec{B} = 2\vec{A}$.

1.3 Compare tres unidades SI: milímetro, kilogramo y microsegundo. ¿Cuál es la mayor?

- a) milímetro c) microsegundo
 b) kilogramo d) Las unidades no son comparables.

1.4 ¿Cuál(es) es (son) la(s) diferencia(s) entre 3.0 y 3.0000?

- a) 3.0000 podría ser el resultado de un paso intermedio en un cálculo; 3.0 tiene que ser el resultado de un paso final.
 b) 3.0000 representa una cantidad que se conoce con más precisión que 3.0.
 c) No hay diferencia.
 d) Expresan la misma información, pero se prefiere 3.0 por facilidad de escritura.

1.5 Una rapidez de 7 mm/ μ s es igual a:

- a) 7 000 m/s b) 70 m/s c) 7 m/s d) 0.07 m/s

1.6 Un disco ("puck") de hockey, cuyo diámetro es de aproximadamente 3 pulgadas, se va a usar para determinar el valor

de π con tres cifras significativas, midiendo en forma cuidadosa su diámetro y su circunferencia. Para hacer de manera correcta este cálculo, la medición se debe hacer al más cercano _____.

- a) centésimo de milímetro c) mm e) in
 b) décimo de milímetro d) cm

1.7 ¿Cuál es la suma de $5.786 \cdot 10^3 \text{ m}$ y $3.19 \cdot 10^4 \text{ m}$?

- a) $6.02 \cdot 10^{23} \text{ m}$ c) $8.976 \cdot 10^3 \text{ m}$
 b) $3.77 \cdot 10^4 \text{ m}$ d) $8.98 \cdot 10^3 \text{ m}$

1.8 ¿Cuál es el número de átomos de carbono en 0.5 nanomoles de carbono? Un mol contiene $6.02 \cdot 10^{23}$ átomos.

- a) $3.2 \cdot 10^{14}$ átomos d) $3.2 \cdot 10^{17}$ átomos
 b) $3.19 \cdot 10^{14}$ átomos e) $3.19 \cdot 10^{17}$ átomos
 c) $3 \cdot 10^{14}$ átomos f) $3 \cdot 10^{17}$ átomos

1.9 La resultante de los vectores en dos dimensiones (1.5 m, 0.7 m), (-3.2 m, 1.7 m), y (1.2 m, -3.3 m) se encuentran en el cuadrante _____.

- a) I b) II c) III d) IV

1.10 ¿En cuánto cambia el volumen de un cilindro si el radio se reduce a la mitad y la altura se duplica?

- a) El volumen se reduce a la cuarta parte. d) El volumen se duplica.
 b) El volumen se reduce a la mitad. e) El volumen se cuadruplica.
 c) No hay cambio en el volumen.

PREGUNTAS

1.11 En Europa, el consumo de gasolina de los automóviles se mide en litros por cada 100 km. En Estados Unidos, la unidad que se usa es millas por cada galón.

- ¿Cómo se relacionan estas unidades?
- ¿Cuántas millas por cada galón rinde su automóvil si consume 12.2 litros por cada 100 kilómetros?
- ¿Cuál es el consumo de gasolina de su automóvil en litros por cada 100 kilómetros si da 27.4 millas por cada galón?
- ¿Puede trazar una curva graficando millas por cada galón con litros por cada 100 kilómetros? Si la respuesta es sí, trace la curva.

1.12 Si traza un vector en una hoja de papel, ¿cuántos componentes se necesitan para describirlo? ¿Cuántos componentes tiene un vector en el espacio real? ¿Cuántos componentes tendría un vector en un mundo de cuatro dimensiones?

1.13 Como los vectores en general tienen más de un componente y por eso se usa más de un número para describirlos, evidentemente son más difíciles de sumar y restar que los números simples. En tal caso, ¿por qué trabajar con vectores?

1.14 Si \vec{A} y \vec{B} son vectores especificados en la forma de magnitud-dirección, y se debe encontrar $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$ y expresarlo en la forma de magnitud-dirección, ¿cómo se hace esto? Es decir, ¿cuál es el procedimiento para sumar vectores que están dados en la forma de magnitud-dirección?

1.15 Suponga que resuelve un problema y su calculadora muestra una lectura de 0.0000000036. ¿Por qué no simplemente escribir esto? ¿Hay alguna ventaja en usar la notación científica?

1.16 Como el sistema inglés de unidades es más conocido para la mayoría de personas en Estados Unidos, ¿por qué el trabajo científico en ese país usa el sistema internacional (SI) de unidades?

1.17 Es posible sumar tres vectores de igual longitud y obtener una suma vectorial de cero? Si es posible, dibuje la disposición de los tres vectores. Si no lo es, explique por qué no.

1.18 ¿La masa es una cantidad vectorial? ¿Por qué sí o por qué no?

1.19 Dos moscas se posan en posiciones exactamente opuestas en la superficie de un globo esférico. Si se duplica el volumen del globo, por qué factor cambia la distancia entre las moscas?

1.20 ¿Cuál es la relación del volumen de un cubo de lado r con respecto al volumen de una esfera de radio r ? ¿Su respuesta depende del valor particular de r ?

1.21 Considere una esfera de radio r . ¿Cuál es la longitud de cada lado de un cubo que tenga la misma área superficial que la esfera?

1.22 La masa del Sol es de $2 \cdot 10^{30}$ kg, y contiene más de 99% de toda la masa del Sistema Solar. Los astrónomos estiman que hay de manera aproximada 100 000 millones de estrellas en la Vía Láctea, y aproximadamente 100 000 millones de galaxias en el universo. El Sol y otras estrellas están compuestas de manera predominante de hidrógeno; un átomo de hidrógeno tiene una masa de $2 \cdot 10^{-27}$ kg.

a) Suponiendo que el Sol es una estrella promedio y la Vía Láctea una galaxia promedio, ¿cuál es la masa total del universo?

b) Como el universo consiste sobre todo de hidrógeno, ¿puede usted estimar el número total de átomos en el universo?

1.23 Proverbialmente se dice de una tarea inútil que es “como tratar de vaciar el mar con una cucharita” ¿Qué tan difícil es dicha tarea? Estime el número de cucharaditas llenas de agua en los océanos de la Tierra.

1.24 La población mundial rebasó los 6 500 millones en 2006. Estime la cantidad de superficie de terreno necesaria si cada persona estuviera de pie de modo de no alcanzar a tocar a otra persona. Compare esta área de terreno con Estados Unidos, que tiene 3.5 millones de millas cuadradas, y con el área de su estado (o país).

1.25 Los avances en el campo de la nanotecnología han hecho posible construir cadenas de átomos metálicos individuales unidos cada uno con el siguiente. Los físicos se interesan de modo especial en la capacidad de tales cadenas para conducir electricidad con poca resistencia. Estime cuántos átomos de oro se necesitarían para hacer una cadena suficientemente larga para usarse como collar. ¿Cuántos se necesitarían para hacer una cadena que rodeara la Tierra? Si un mol de una sustancia es equivalente a $6.022 \cdot 10^{23}$ átomos, ¿cuántos moles de oro se necesitarían para cada collar?

1.26 Uno de los estereotipos estándar en los cursos de física es hablar de aproximar una vaca a una esfera. ¿De qué tamaño es la esfera que se aproxima mejor a una vaca lechera promedio? Es decir, estime el radio de una esfera que tenga la misma masa y densidad que una vaca lechera.

1.27 Estime la masa de su cabeza. Suponga que su densidad es la del agua, $1\,000 \text{ kg/m}^3$.

1.28 Estime el número de cabellos en su cabeza.

PROBLEMAS

Una • y dos •• indican el nivel creciente de dificultad del problema.

Sección 1.2

1.29 ¿Cuántas cifras significativas hay en cada uno de los siguientes números?

- 4.01
- 4.010
- 4
- 2.00001
- 0.00001
- 2.1 - 1.10042
- $7.01 \cdot 3.1415$

1.30 Se miden dos fuerzas que actúan sobre el mismo objeto. Una fuerza es de 2.0031 N y la otra fuerza, en la misma dirección, es de 3.12 N. Éstas son las únicas fuerzas que actúan sobre el objeto. Encuentre la fuerza total sobre el objeto *con el número correcto de cifras significativas*.

1.31 Se deben sumar tres cantidades que son resultado de mediciones. Son 2.0600, 3.163 y 1.12. ¿Cuál es su suma *con el número correcto de cifras significativas*?

1.32 Dada la ecuación $w = xyz$, $x = 1.1 \cdot 10^3$, $y = 2.48 \cdot 10^{-2}$, y $z = 6.000$, ¿cuál es el valor de w , en notación científica y con el número correcto de cifras significativas?

1.33 Escriba esta cantidad en notación científica: una diez-millonésima de centímetro.

1.34 Escriba este número en notación científica: ciento cincuenta y tres millones.

Sección 1.3

1.35 ¿Cuántas pulgadas hay en 30.7484 millas?

1.36 ¿Qué prefijos métricos corresponden a las siguientes potencias de 10 ?

a) 10^3 b) 10^{-2} c) 10^{-3}

1.37 ¿Cuántos milímetros hay en un kilómetro?

1.38 Una hectárea es igual a cien áreas, y un área es igual a cien metros cuadrados. ¿Cuántas hectáreas hay en un kilómetro cuadrado?

1.39 La unidad de presión en el sistema SI es el pascal. ¿Cuál sería el nombre SI para una milésima de pascal?

1.40 Se miden las masas de cuatro cubos de azúcar: 25.3 g, 24.7 g, 26.0 g y 25.8 g. Expresé las respuestas a las siguientes preguntas en notación científica, con unidades estándar SI y un número correcto de cifras significativas.

a) Si se molieran los cuatro cubos de azúcar y se recolectara todo el azúcar, ¿cuál sería la masa total, en kilogramos, del azúcar?

b) ¿Cuál es la masa promedio, en kilogramos, de estos cuatro cubos de azúcar?

•**1.41** ¿Cuál es el área superficial de un cilindro recto con altura de 20.5 cm y radio de 11.9 cm?

Sección 1.4

1.42 Usted se para en su flamante báscula digital de baño y lee 125.4 libras. ¿Cuál es su masa en kilogramos?

1.43 La distancia del centro de la Luna al centro de la Tierra es de aproximadamente 356 000 km a 407 000 km. ¿Cuáles son esas distancias en millas? Asegúrese de redondear sus respuestas al número correcto de cifras significativas.

1.44 En el béisbol de ligas mayores, el pitcher lanza desde una distancia de 60 pies y 6 pulgadas de la placa de home. ¿Cuál es la distancia en metros?

1.45 Una pulga brinca en una trayectoria recta a lo largo de una regla comenzando a 0.7 cm y dando saltos sucesivos, que se miden como 3.2 cm, 6.5 cm, 8.3 cm, 10.0 cm, 11.5 cm y 15.5 cm. Expresé las respuestas a las siguientes preguntas en notación científica, con unidades de metros y con el número correcto de cifras significativas. ¿Cuál es la distancia total que cubre la pulga en estos seis saltos? ¿Cuál es la distancia media que cubre la pulga en un solo salto?

•**1.46** Un centímetro cúbico de agua tiene una masa de 1 gramo. Un mililitro es igual a un centímetro cúbico. ¿Cuál es la masa, en kilogramos, de un litro de agua? Una tonelada métrica es igual a mil kilogramos. ¿Cuántos centímetros cúbicos

de agua hay en una tonelada métrica de agua? Si se almacenara una tonelada de agua en un tanque cúbico de paredes delgadas, ¿cuál sería la longitud (en metros) de cada lado del tanque?

•**1.47** El límite de velocidad en un tramo dado de una carretera es de 45 millas por hora. Expresé este límite de velocidad en miliestadios por microquincena. Un estadio es $\frac{1}{8}$ milla, y una quincena es un periodo de dos semanas. (De hecho se usa la microquincena como unidad en un tipo especial de sistema de computación que se llama sistema VMS.)

•**1.48** Hay una rima mnemónica inglesa que dice “A pint’s a pound, the world around” (“Una pinta es una libra en cualquier parte del mundo”). Investigue esta expresión de equivalencia calculando el peso de una pinta de agua, suponiendo que la densidad del agua es de $1\,000\text{ kg/m}^3$ y que el peso de 1.00 kg de una sustancia es de 2.21 libras. El volumen de 1.00 onza fluida es de 29.6 mL.

Sección 1.5

1.49 Si el radio de un planeta es mayor que el de la Tierra por un factor de 8.7, ¿qué tanto más grande es el área superficial del planeta que el de la Tierra?

1.50 Si el radio de un planeta es mayor que el de la Tierra por un factor de 5.8, ¿qué tanto mayor es el volumen del planeta que el de la Tierra?

1.51 ¿Cuántas pulgadas cúbicas hay en 1.56 barriles?

1.52 El tanque de gasolina de un automóvil tiene la forma de una caja rectangular recta con una base cuadrada cuyos lados miden 62 cm. Su capacidad es de 52 L. Si en el tanque quedan sólo 1.5 L de gasolina, ¿qué tan profunda está la gasolina en el tanque, suponiendo que el auto esté estacionado a nivel del suelo?

•**1.53** El volumen de una esfera está dado por la fórmula $\frac{4}{3}\pi r^3$, donde r es el radio de la esfera. La densidad promedio de un objeto es simplemente la relación de su masa a su volumen. Usando los datos numéricos de la tabla 12.1, expresé las respuestas a las siguientes preguntas en notación científica, con unidades SI y el número correcto de cifras significativas.

a) ¿Cuál es el volumen del Sol?

b) ¿Cuál es el volumen de la Tierra?

c) ¿Cuál es la densidad media del Sol?

d) ¿Cuál es la densidad media de la Tierra?

•**1.54** Un tanque tiene la forma de cono invertido, con una altura $h = 2.5\text{ m}$ y radio de la base $r = 0.75\text{ m}$. Si se vierte agua en el tanque a razón de 15 L/s, ¿cuánto tardará en llenarse el tanque?

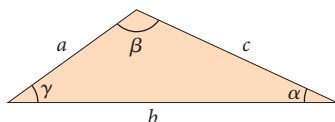
•**1.55** Fluye agua al interior de un tanque cúbico con una proporción de 15 L/s. Si la superficie del agua sube 1.5 cm cada segundo, ¿cuál es la longitud de cada lado del tanque?

••**1.56** La atmósfera tiene un peso que es, efectivamente, alrededor de 15 libras por cada pulgada cuadrada de la superficie de la Tierra. La densidad promedio del aire en la superficie de la Tierra es alrededor de 1.275 kg/m^3 . Si la atmósfera fuese uniformemente densa (no lo es; la densidad varía en forma significativa con la altitud), ¿cuál sería su espesor?

Sección 1.6

1.57 Un vector de posición tiene una longitud de 40.0 m y está a un ángulo de 57.0° sobre el eje x . Encuentre las componentes del vector.

1.58 En el triángulo que se muestra en la figura, las longitudes de los lados son $a = 6.6$ cm, $b = 13.7$ cm, y $c = 9.2$ cm. ¿Cuál es el valor del ángulo γ ? (*Pista:* Vea el apéndice A para la ley de cosenos).



1.59 Escriba los vectores \vec{A} , \vec{B} , y \vec{C} en coordenadas cartesianas.

1.60 Calcule la longitud y la dirección de los vectores \vec{A} , \vec{B} , y \vec{C} .

1.61 Sume gráficamente los vectores \vec{A} , \vec{B} y \vec{C} .

1.62 Determine en forma gráfica el vector de diferencia $\vec{E} = \vec{B} - \vec{A}$.

1.63 Sume los vectores \vec{A} , \vec{B} , y \vec{C} usando el método de componentes, y encuentre su vector de suma \vec{D} .

1.64 Use el método de componentes para determinar la longitud del vector $\vec{F} = \vec{C} - \vec{A} - \vec{B}$.

1.65 Encuentre los componentes de los vectores \vec{A} , \vec{B} , \vec{C} , y \vec{D} , cuyas longitudes están dadas por $A = 75.0$, $B = 60.0$, $C = 25.0$, $D = 90.0$, y sus ángulos son como se muestra en la figura. Escriba los vectores en términos de vectores unitarios.

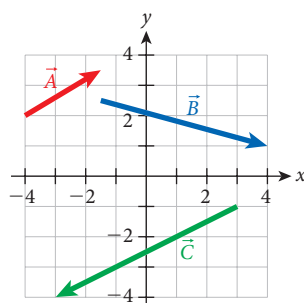
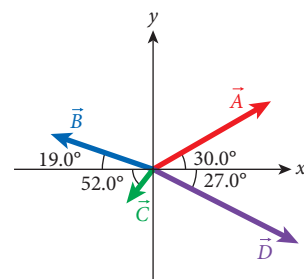


Figura para los problemas 1.59 a 1.64



1.66 Use las componentes de los vectores del problema 1.65 para hallar

- a) la suma $\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D}$ en términos de sus componentes
- b) la magnitud y dirección de la suma $\vec{A} - \vec{B} + \vec{D}$

1.67 Los llanos salinos Bonneville Salt Flats, ubicados en Utah cerca de la frontera con Nevada, no lejos de la carretera interestatal I-80, cubren un área de más de 30 000 acres. Una corredora de carros de carrera en los Flats se dirige primero hacia el norte 4.47 km; luego da un giro agudo y se recorre 2.49 km al suroeste; luego da otro viraje y recorre 3.59 km al este. ¿Qué tan lejos está de su punto de partida?

1.68 Un mapa en la bitácora de un pirata da direcciones para la ubicación de un tesoro enterrado. La ubicación inicial es un viejo roble. De acuerdo con el mapa, la ubicación del tesoro se encuentra dando 20 pasos al norte desde el roble y luego 30 pasos al noroeste. En esta ubicación hay un poste de hierro

clavado en el suelo. Desde el poste, caminar 10 pasos al sur y cavar. ¿Qué tan lejos (en pasos) del roble está el lugar de la excavación?

1.69 La siguiente página de la bitácora del pirata contiene un conjunto de direcciones diferentes de las que se dan en el mapa del problema 1.68. Dicen que la ubicación del tesoro se encuentra dando 20 pasos al norte del viejo roble y luego 30 pasos al noroeste. Después de encontrar el poste de hierro, se debe “caminar 12 pasos al norte y cavar hacia abajo 3 pasos a la caja del tesoro”. ¿Cuál es el vector que apunta de la base del viejo roble a la caja del tesoro? ¿Cuál es la longitud de este vector?

1.70 La órbita de la Tierra tiene un radio de $1.5 \cdot 10^{11}$ m, y la de Venus tiene un radio de $1.1 \cdot 10^{11}$ m. Considere que estas dos órbitas son circunferencias perfectas (aunque en realidad son elipses con una ligera excentricidad). Escriba la dirección y la longitud de un vector de la Tierra a Venus (tome la dirección de la Tierra al Sol como 0°) cuando Venus está a la máxima separación angular en el cielo en relación con el Sol.

1.71 Un amigo camina alejándose de usted una distancia de 550 m y luego hace un viraje agudo en un ángulo desconocido, y camina 178 m adicionales en la nueva dirección. Usted usa un telémetro láser para determinar que su distancia final desde usted es de 432 m. ¿Cuál es el ángulo entre su dirección inicial de partida y la dirección de su ubicación final? ¿En qué ángulo viró? (Hay dos posibilidades.)

Problemas adicionales

1.72 El radio de la Tierra es de 6 378 km. ¿Cuál es su circunferencia con tres cifras significativas?

1.73 Estime el producto de 4 308 229 y 44 a una cifra significativa (muestre su trabajo y no use calculadora), y exprese el resultado en notación científica estándar.

1.74 Encuentre el vector \vec{C} que satisfaga la ecuación $3\hat{x} + 6\hat{y} - 10\hat{z} + \vec{C} = -7\hat{x} + 14\hat{y}$.

1.75 Trace los vectores con las componentes $\vec{A} = (A_x, A_y) = (30.0 \text{ m}, -50.0 \text{ m})$ y $\vec{B} = (B_x, B_y) = (-30.0 \text{ m}, 50.0 \text{ m})$, y encuentre las magnitudes de estos vectores.

1.76 ¿Qué ángulo forma $\vec{A} = (A_x, A_y) = (30.0 \text{ m}, -50.0 \text{ m})$ con el eje positivo x ? ¿Qué ángulo forma con el eje negativo y ?

1.77 Trace los vectores con las componentes $\vec{A} = (A_x, A_y) = (-30.0 \text{ m}, -50.0 \text{ m})$ y $\vec{B} = (B_x, B_y) = (30.0 \text{ m}, 50.0 \text{ m})$, encuentre la magnitud de estos vectores.

1.78 ¿Qué ángulo forma $\vec{B} = (B_x, B_y) = (30.0 \text{ m}, 50.0 \text{ m})$ con el eje positivo x ? ¿Qué ángulo forma con el eje positivo y ?

1.79 Un vector de posición tiene las componentes $x = 34.6$ m y $y = -53.5$ m. Encuentre la longitud del vector y su ángulo con el eje x .

1.80 Calcule la distancia alrededor del Ecuador, el área superficial y el volumen del planeta Marte. El radio de Marte es $3.39 \cdot 10^6$ m.

1.81 Encuentre la magnitud y dirección de cada uno de los siguientes vectores, dados en términos de sus componentes x y y : $\vec{A} = (23.0, 59.0)$, y $\vec{B} = (90.0, -150.0)$.

1.82 Encuentre la magnitud y la dirección de $-\vec{A} + \vec{B}$, donde $\vec{A} = (23.0, 59.0)$, $\vec{B} = (90.0, -150.0)$.

1.83 Encuentre la magnitud y dirección de $-5\vec{A} + \vec{B}$, donde $\vec{A} = (23.0, 59.0)$, $\vec{B} = (90.0, -150.0)$.

1.84 Encuentre la magnitud y dirección de $-7\vec{B} + 3\vec{A}$, donde $\vec{A} = (23.0, 59.0)$, $\vec{B} = (90.0, -150.0)$.

•1.85 Encuentre la magnitud y dirección de a) $9\vec{B} - 3\vec{A}$ y b) $-5\vec{A} + 8\vec{B}$, donde $\vec{A} = (23.0, 59.0)$, $\vec{B} = (90.0, -150.0)$.

•1.86 Expresé los vectores $\vec{A} = (A_x, A_y) = (-30.0 \text{ m}, -50.0 \text{ m})$ y $\vec{B} = (B_x, B_y) = (30.0 \text{ m}, 50.0 \text{ m})$ dando su magnitud y dirección como medidas desde el eje positivo x .

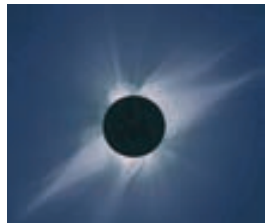
•1.87 La fuerza F que ejerce sobre usted un resorte es directamente proporcional a la distancia x que usted lo estira más allá de su longitud de reposo. Suponga que cuando estira un resorte 8.00 cm, ejerce una fuerza de 200. N sobre usted. ¿Cuánta fuerza ejercerá sobre usted si lo estira 40.0 cm?

•1.88 La distancia que desciende un objeto en caída libre, comenzando desde reposo, es proporcional al cuadrado del tiempo que ha estado cayendo. ¿Por qué factor cambiará la distancia descendida si el tiempo de caída es tres veces más largo?

•1.89 Un piloto decide llevar su pequeño avión para una excursión de domingo por la tarde. Vuela primero 155.3 millas al norte; luego hace un viraje de 90° a su derecha y vuela en línea recta 62.5 millas; luego hace otro giro de 90° a su derecha y vuela 47.5 millas en línea recta.

- ¿A qué distancia de su aeropuerto está en este punto?
- ¿En qué dirección necesita volar a partir de este punto para llegar en línea recta a su base?
- ¿Cuál fue la distancia más lejana de su aeropuerto base a la que estuvo durante el viaje?

•1.90 Como muestra la foto, durante un eclipse total, el Sol y la Luna aparentan ser para el observador casi exactamente del mismo tamaño. Los radios del Sol y de la Luna son $r_S = 6.96 \cdot 10^8 \text{ m}$ y $r_M = 1.74 \cdot 10^6 \text{ m}$ en forma respectiva. La distancia entre la Tierra y la Luna es $d_{EM} = 3.84 \cdot 10^8 \text{ m}$.



Eclipse solar total.

- Determine la distancia de la Tierra al Sol en el momento del eclipse.
- En el inciso a), la suposición implícita es que la distancia del observador al centro de la Luna es igual a la distancia entre los centros de la Tierra y la Luna. ¿Por cuánto es incorrecta esta suposición, si el observador del eclipse se encuentra en el Ecuador a medio día? *Sugerencia:* Expresé esto cuantitativamente, calculando el error relativo como una relación: (distancia supuesta observador a Luna - distancia real observador a Luna)/(distancia real observador a Luna).
- Use la distancia observador a Luna corregida para determinar la distancia corregida de la Tierra al Sol.

•1.91 Un caminante viaja 1.50 km al norte y da vuelta a un rumbo de 20.0° al norte del oeste, viajando otros 1.50 km en este rumbo. En seguida da vuelta al norte nuevamente y camina otros 1.50 km. ¿Qué tan lejos está de su punto original de partida, y cuál es el rumbo en relación con dicho punto inicial?

•1.92 Suponiendo que un mol ($6.02 \cdot 10^{23}$ moléculas) de un gas ideal tiene un volumen de 22.4 L a temperatura y presión estándar (STP) y que el nitrógeno, que constituye de manera aproximada 80.0% del aire que respiramos, es un gas ideal, ¿cuántas moléculas de nitrógeno hay en una respiración promedio de 0.500 L a STP?

•1.93 El 27 de agosto de 2003, Marte se aproximó tanto a la Tierra como no lo hará en más de 50 000 años. Si su tamaño angular (el radio del planeta, medido por el ángulo que subtende el radio) en ese día fue medido por un astrónomo como 24.9 segundos de arco, y se sabe que su radio es de 6 784 km, ¿qué tan cercana fue la distancia de aproximación? Asegúrese de usar un número correcto de cifras significativas en su respuesta.

•1.94 La longitud de un campo de fútbol (americano) es exactamente de 100 yardas, y su anchura es de $53\frac{1}{3}$ yardas. Un quarterback está ubicado de manera exacta en el centro del campo y lanza un pase a un receptor que se encuentra en una esquina del campo. Sea el origen de las coordenadas el centro del campo y el eje x señalando a lo largo del lado más largo del campo, con la dirección y paralela al lado más corto del campo.

- Escriba la dirección y la longitud de un vector que señale del quarterback al receptor.
- Considere las otras tres posibilidades para la ubicación del receptor en las esquinas del campo. Repita el inciso a) para cada una.

•1.95 La circunferencia del Cornell Electron Storage Ring (Anillo de almacenamiento de electrones de Cornell) es de 768.4 m. Expresé el diámetro en pulgadas, con el número correcto de cifras significativas.

••1.96 Aproximadamente 4.0% de lo que usted exhala es dióxido de carbono. Suponga que 22.4 L es el volumen de 1 mol ($6.02 \cdot 10^{23}$ moléculas) de dióxido de carbono, y que usted exhala 0.500 L por cada respiración.

- Estime cuántas moléculas de dióxido de carbono exhala cada día.
- Si cada mol de dióxido de carbono tiene una masa de 44.0 g, ¿cuántos kilogramos de dióxido de carbono exhala usted en un año?

••1.97 La órbita de la Tierra tiene un radio de $1.5 \cdot 10^{11} \text{ m}$, y la de Mercurio un radio de $4.6 \cdot 10^{10} \text{ m}$. Considere que estas órbitas son circunferencias perfectas (aunque en realidad son elipses con una ligera excentricidad). Escriba la dirección y la longitud de un vector de la Tierra a Mercurio (tome la dirección de la Tierra al Sol como 0°) cuando Mercurio está en su máxima separación angular en el cielo con respecto al Sol.

Movimiento en línea recta

2



FIGURA 2.1 Un tren rápido pasa por un cruce de ferrocarril.

LO QUE APRENDEREMOS	36
2.1 Introducción a la cinemática	36
2.2 Vector de posición, vector de desplazamiento y distancia	36
Gráficas de posición	37
Desplazamiento	37
Distancia	38
Problema resuelto 2.1 Segmentos de viaje	38
2.3 Vector velocidad, velocidad media y rapidez	40
Ejemplo 2.1 Dependencia de la velocidad con respecto al tiempo	41
Rapidez	42
Ejemplo 2.2 Rapidez y velocidad	42
2.4 Vector de aceleración	43
2.5 Soluciones en computadora y fórmulas de diferencia	44
Ejemplo 2.3 Récord mundial de 100 m planos	44
2.6 Determinación del desplazamiento y la velocidad a partir de la aceleración	46
2.7 Movimiento con aceleración constante	47
Problema resuelto 2.2 Despegue de avión	48
Ejemplo 2.4 Carreras <i>top fuel</i>	50
Caída libre	51
Ejemplo 2.5 Tiempo de reacción	53
Problema resuelto 2.3 Caída de un melón	54
2.8 Reducción de movimiento en más de una dimensión a una dimensión	56
Ejemplo 2.6 Acuatlón	56
LO QUE HEMOS APRENDIDO/ GUÍA DE ESTUDIO PARA EXAMEN	59
Práctica para resolución de problemas	60
Problema resuelto 2.4 Carrera con ventaja en la salida	60
Problema resuelto 2.5 Automóvil en aceleración	62
Preguntas de opción múltiple	64
Preguntas	64
Problemas	65

LO QUE APRENDEREMOS

- Aprenderemos a describir el movimiento de un objeto que viaja en línea recta o en una dimensión.
- Aprenderemos a definir la posición, el desplazamiento y la distancia.
- Aprenderemos a describir el movimiento de un objeto en línea recta con aceleración constante.
- Un objeto puede estar en caída libre en una dimensión cuando sufre aceleración constante debida a la gravedad.
- Definiremos los conceptos de velocidad instantánea y velocidad media.
- Definiremos los conceptos de aceleración instantánea y aceleración media.
- Aprenderemos a calcular la posición, la velocidad y la aceleración de un objeto que se mueve en línea recta.

Usted puede ver que el tren en la figura 2.1 se está moviendo muy rápido al observar que su imagen es borrosa en comparación con la señal de cruce y el poste de teléfono, que están en reposo. Pero ¿puede usted decir si el tren está acelerando, desacelerando o viajando rápidamente a velocidad constante? Una fotografía puede expresar la velocidad de un objeto porque éste se mueve durante el tiempo de exposición, pero una fotografía no puede mostrar un cambio en la velocidad o aceleración. Con todo, la aceleración es muy importante en física, por lo menos tan importante como la rapidez misma.

En este capítulo veremos los términos que se usan en física para describir el movimiento de un objeto: desplazamiento, velocidad y aceleración. Examinamos el movimiento a lo largo de una línea recta (movimiento unidimensional) en este capítulo, y el movimiento en una trayectoria curva (movimiento en un plano o movimiento bidimensional) en el siguiente capítulo. Una de las mayores ventajas de la física es que sus leyes son universales, de modo que los mismos términos e ideas generales se aplican a una amplia gama de situaciones y podemos usar las mismas ecuaciones para describir el vuelo de una pelota de béisbol o el despegue de un cohete de la Tierra a Marte. En este capítulo usaremos algunas de las técnicas de resolución de problemas que se explicaron en el capítulo 1, así como algunas nuevas.

Conforme avance en este curso, usted verá que casi todo se mueve en relación con otros objetos, en una escala o en otra, ya sea un cometa precipitándose en el espacio a varios kilómetros por segundo o los átomos de un objeto aparentemente estacionario, vibrando millones de veces por segundo. Los términos que introducimos en este capítulo serán parte de su estudio durante el resto del curso y después de éste.

2.1 Introducción a la cinemática

El estudio de la física se divide en varias grandes partes, una de las cuales es la mecánica. La **mecánica**, o estudio del movimiento y sus causas, usualmente se subdivide. En este capítulo y el siguiente, examinaremos el aspecto cinemático de la mecánica. La **cinemática** es el estudio del movimiento de los objetos. Estos objetos pueden ser, por ejemplo, automóviles, pelotas de béisbol, personas, planetas o átomos. Por ahora, dejaremos a un lado la cuestión de lo que causa el movimiento y regresaremos a ella cuando estudiemos las fuerzas.

Tampoco consideraremos la rotación en este capítulo; en vez de esto nos concentraremos sólo en el movimiento de traslación (movimiento sin rotación). Además, haremos caso omiso de la estructura interna de un objeto en movimiento y lo consideraremos como una partícula puntual, o como un objeto puntual. Es decir, para determinar las ecuaciones de movimiento de un objeto imaginamos que está ubicado en un solo punto en el espacio en cada instante de tiempo. ¿Qué punto de un objeto debemos elegir para representar su ubicación? Al inicio simplemente usaremos el centro geométrico, su punto medio (el capítulo 8, sobre sistemas de partículas y objetos extensos, dará una definición más precisa de la **ubicación puntual de un objeto**, que se llama *centro de masa*).

2.2 Vector de posición, vector de desplazamiento y distancia

El movimiento más simple que podemos investigar es el de un objeto que se mueve en una línea recta (movimiento rectilíneo). Los ejemplos de este movimiento incluyen una persona corriendo

100 metros planos, un automóvil recorriendo en un tramo recto de una carretera y una piedra que cae en línea vertical desde un acantilado. En capítulos posteriores consideraremos el movimiento en dos o más dimensiones, y veremos que también se aplican los mismos conceptos que dedujimos para el movimiento unidimensional.

Si un objeto se ubica en un punto específico de una línea, podemos denotar este punto con su **vector de posición**, como se describe en la sección 1.6. En todo este libro usaremos el símbolo \vec{r} para denotar el vector de posición. Como en este capítulo estamos trabajando con movimiento en sólo una dimensión, el vector de posición tiene un solo componente. Si el movimiento es en dirección horizontal, éste es el componente x . (Para movimientos en dirección vertical, usaremos el componente y ; vea la sección 2.7.) Un número, la coordenada x o componente x del vector de posición (con una unidad correspondiente), especifica en forma única el vector de posición en movimiento unidimensional. Algunas maneras válidas de escribir una posición son $x = 4.3$ m, $x = 7\frac{3}{8}$ pulgadas y $x = -2.04$ km; se entiende que estas especificaciones se refieren al componente x del vector de posición. Observe que el componente x del vector de posición puede tener valor positivo o negativo, dependiendo de la ubicación del objeto de estudio y del sentido del eje que elegimos como positivo. El valor del componente x también depende de dónde definimos el origen del sistema de coordenadas: el cero de la línea recta.

La posición de un objeto puede cambiar como función del tiempo, t ; es decir, el objeto se puede mover. Por lo tanto podemos escribir de manera formal el vector de posición en notación de función: $\vec{r} = \vec{r}(t)$. En una dimensión, esto significa que el componente x del vector es una función del tiempo, $x = x(t)$. Si deseamos especificar la posición en algún tiempo específico t_1 , usaremos la notación $x_1 \equiv x(t_1)$.

Gráficas de posición

Antes de seguir adelante, grafiquemos la posición de un objeto como función del tiempo. La figura 2.2a) ilustra el principio que sirve de base para esto mostrando varios cuadros de un video de un automóvil que viaja por un camino recto. Los cuadros de video se tomaron a intervalos de $\frac{1}{3}$ de segundo.

Tenemos la libertad de elegir los orígenes de nuestras mediciones de tiempo y de nuestro sistema de coordenadas. En este caso, elegimos el tiempo del segundo cuadro de video como $t = \frac{1}{3}$ s y la posición del centro del auto en el segundo cuadro como $x = 0$. Ahora podemos trazar nuestros ejes de coordenadas y graficar sobre los cuadros de video (figura 2.2b). Las posiciones del auto como función del tiempo quedan en una línea recta. Nuevamente recuerde que estamos representando el automóvil como un solo punto.

Al trazar gráficas, se acostumbra graficar la variable independiente —en este caso el tiempo, t — sobre el eje horizontal y graficar x , que se llama variable dependiente porque su valor depende del valor de t , en el eje vertical. La figura 2.3 es una gráfica de la posición del auto como función del tiempo dibujada en la forma acostumbrada. [Observe que si la figura 2.2b) se hiciera girar 90° en sentido contrario al de las agujas del reloj y se quitaran las imágenes del automóvil, las dos gráficas serían la misma.]

Desplazamiento

Ahora que hemos especificado el vector de posición, vayamos un paso adelante y definamos el desplazamiento. El **desplazamiento** es simplemente la diferencia entre el vector de posición final, $\vec{r}_2 \equiv \vec{r}(t_2)$, al final de un movimiento y el vector posición inicial, $\vec{r}_1 \equiv \vec{r}(t_1)$. Escribimos el vector de desplazamiento como

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1. \quad (2.1)$$

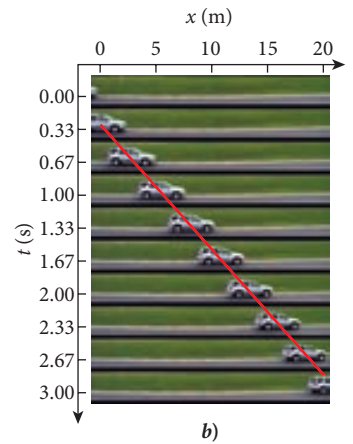
Usamos la notación $\Delta\vec{r}$ para el vector de desplazamiento para indicar que es una diferencia entre dos vectores de posición. Observe que el vector de desplazamiento es independiente de la ubicación del origen del sistema de coordenadas. ¿Por qué? Cualquier cambio de posición del sistema de coordenadas sumará al vector de posición \vec{r}_2 la misma cantidad que suma al vector de posición \vec{r}_1 ; de modo que la diferencia entre los vectores de posición, $\Delta\vec{r}$, no cambiará.

Igual que el vector de posición, el vector de desplazamiento en una dimensión tiene sólo un componente x , que es la diferencia entre los componentes x de los vectores de posición final e inicial:

$$\Delta x = x_2 - x_1. \quad (2.2)$$



a)



b)

FIGURA 2.2 a) Serie de cuadros de video de un automóvil en movimiento, tomados cada $\frac{1}{3}$ de segundo; b) la misma serie, pero con un sistema de coordenadas y una línea roja que conecta las posiciones del centro del automóvil en cada cuadro.

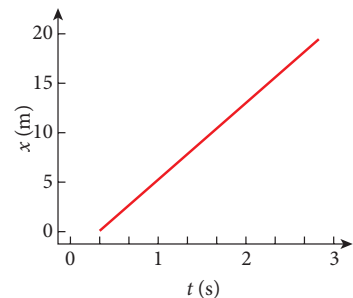


FIGURA 2.3 La misma gráfica que en la figura 2.2b), pero girada de modo que el eje de tiempo sea horizontal, y sin las imágenes del automóvil.

Del mismo modo que los vectores de posición, los vectores de desplazamiento pueden ser positivos o negativos. De manera específica, el vector de desplazamiento $\Delta\vec{r}_{ba}$ para ir del punto a al punto b es exactamente el negativo de $\Delta\vec{r}_{ab}$ para ir del punto b al punto a :

$$\Delta\vec{r}_{ba} = \vec{r}_b - \vec{r}_a = -(\vec{r}_a - \vec{r}_b) = -\Delta\vec{r}_{ab}. \quad (2.3)$$

Y probablemente, en este momento, sea obvio para usted que esta relación también es válida para el componente x del vector de desplazamiento, $\Delta x_{ba} = x_b - x_a = -(x_a - x_b) = -\Delta x_{ab}$.

Distancia

La **distancia**, ℓ , que recorre un objeto en movimiento, es el valor absoluto del vector de desplazamiento:

$$\ell = |\Delta\vec{r}|. \quad (2.4)$$

Para el movimiento unidimensional, esta distancia es también el valor absoluto del componente x del vector de desplazamiento, $\ell = |\Delta x|$. (Para el movimiento multidimensional calculamos la longitud del vector de desplazamiento como se muestra en el capítulo 1.) La distancia siempre es mayor o igual que cero, y se mide en las mismas unidades que la posición y el desplazamiento. Sin embargo, la distancia es una cantidad escalar, no un vector. Si el desplazamiento no es en una línea recta, o si no es todo en la misma dirección, para obtener la distancia total se debe dividir el desplazamiento en segmentos que sean aproximadamente rectos y unidireccionales, luego sumar las distancias de estos segmentos.

PROBLEMA RESUELTO 2.1 Segmentos de viaje

La distancia entre Des Moines y Iowa City es de 170.5 km (106.0 millas) a lo largo de la carretera interestatal 80 y, como usted puede ver en el mapa (figura 2.4), la ruta es una línea recta en buena aproximación. Más o menos a la mitad entre las dos ciudades, donde la I80 cruza la carretera US63, está la ciudad de Malcom, a 89.9 km (54.0 millas) de Des Moines.



FIGURA 2.4 Ruta I80 entre Des Moines y Iowa City.

PROBLEMA

Si viajamos en automóvil de Malcom a Des Moines y luego a Iowa City, ¿cuál es la distancia total y cuál es el desplazamiento total para este viaje?

SOLUCIÓN

PIENSE

Distancia y desplazamiento no son lo mismo. Si el viaje consistiera en un segmento sólo en una dirección, la distancia sería simplemente el valor absoluto del desplazamiento, de acuerdo con la ecuación 2.4. Sin embargo, el viaje se compone de segmentos con un cambio de dirección, de modo que necesitamos tener cuidado. Trataremos cada segmento en forma individual y luego sumaremos los segmentos al final.

ESBOCE

Como la Interestatal I80 es casi una línea recta, basta trazar una línea recta horizontal y hacerla nuestro eje de coordenadas. Introducimos las posiciones de las tres ciudades como x_I (Iowa City), x_M (Malcom), y x_D (Des Moines). Siempre tenemos la libertad de definir el origen de nuestro sistema de coordenadas, de modo que elegimos ponerlo en Des Moines, estableciendo así $x_D = 0$. Como es convencional, definimos la dirección positiva a la derecha, en dirección este. Vea la figura 2.5.

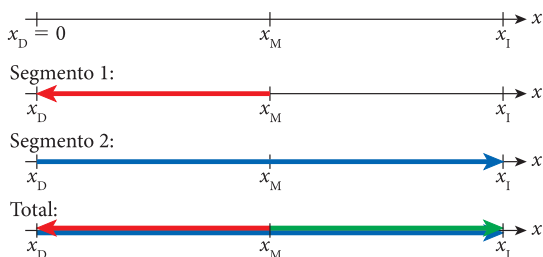


FIGURA 2.5 Sistema de coordenadas y segmentos para el viaje de Des Moines a Iowa City.

También trazamos flechas para los desplazamientos de los dos segmentos del viaje. Representamos el segmento 1 de Malcom a Des Moines mediante una flecha roja, y el segmento 2, de Des Moines a Iowa City, mediante una flecha azul. Finalmente, trazamos un diagrama para el viaje total como la suma de los dos viajes.

INVESTIGUE

Con nuestra asignación de $x_D = 0$, Des Moines es el origen del sistema de coordenadas. De acuerdo con la información que se nos ha dado, Malcom está entonces en $x_M = +89.9$ km y Iowa City está en $x_I = +170.5$ km. Observe que escribimos un signo de + frente a los números para x_M y x_I para recordarnos que éstos son componentes de los vectores de posición, y pueden tener valores positivos o negativos.

Para el primer segmento, el *desplazamiento* está dado por

$$\Delta x_1 = x_D - x_M.$$

De modo que la distancia recorrida en este segmento es

$$\ell_1 = |\Delta x_1| = |x_D - x_M|.$$

Del mismo modo, el desplazamiento y la distancia para el segundo segmento son

$$\Delta x_2 = x_I - x_D$$

$$\ell_2 = |\Delta x_2| = |x_I - x_D|.$$

Para la suma de los dos segmentos, el viaje total, usamos la suma simple para hallar el desplazamiento,

$$\Delta x_{\text{total}} = \Delta x_1 + \Delta x_2,$$

y la distancia total,

$$\ell_{\text{total}} = \ell_1 + \ell_2.$$

SIMPLIFIQUE

Podemos simplificar un poco la ecuación para el desplazamiento total insertando las expresiones de los desplazamientos, para los dos segmentos:

$$\begin{aligned} \Delta x_{\text{total}} &= \Delta x_1 + \Delta x_2 \\ &= (x_D - x_M) + (x_I - x_D) \\ &= x_I - x_M. \end{aligned}$$

Éste es un resultado interesante: para el desplazamiento completo de todo el viaje, no importa para nada que hayamos ido a Des Moines. Todo lo que importa es dónde comenzó el viaje y dónde terminó. El desplazamiento total es el resultado de una suma vectorial unidimensional, como se indica mediante una flecha verde en la parte inferior de la figura 2.5.

CALCULE

Ahora podemos insertar los números para las posiciones de las tres ciudades en nuestro sistema de coordenadas. Entonces obtenemos, para el desplazamiento neto en nuestro viaje,

$$\Delta x_{\text{total}} = x_I - x_M = (+170.5 \text{ km}) - (+89.9 \text{ km}) = +80.6 \text{ km}.$$

Para la distancia total viajada, obtenemos

$$\ell_{\text{total}} = |89.9 \text{ km}| + |170.5 \text{ km}| = 260.4 \text{ km}.$$

(Recuerde que la distancia entre Des Moines y Malcom, o Δx_1 , y la distancia entre Des Moines y Iowa City, Δx_2 , se dieron en el problema, de modo que no tenemos que calcularlos otra vez a partir de las diferencias en los vectores de posición de las ciudades.)

REDONDEE

Los números para las distancias se dieron inicialmente con exactitud de una décima de kilómetro. Como todo nuestro cálculo se redujo a sólo sumar o restar estos números, no es sorprendente que acabemos obteniendo números que también son exactos a una décima de kilómetro. No se necesita ningún redondeo adicional.

(continúa)

2.1 Oportunidad de autoexamen

Suponga que, en el problema resuelto 2.1, hemos elegido poner el origen del sistema de coordenadas en Malcom en vez de en Des Moines. ¿Cambiaría el resultado final de nuestro cálculo? Si sí, ¿cómo? Si no, ¿por qué no?

(continuación)

VUELVA A REVISAR

Como se acostumbra, primero nos aseguramos que las unidades de nuestra respuesta sean correctas. Como estamos buscando cantidades con la dimensión de longitud, está bien que nuestras respuestas tengan las unidades de kilómetros. A primera vista puede ser sorprendente que el desplazamiento neto para el viaje sea de sólo 80.6 km, mucho menor que la distancia total viajada. Éste es un buen momento para recordar que la relación entre el valor absoluto del desplazamiento y la distancia (ecuación 2.4) es válida sólo si el objeto que se mueve *no* cambia de dirección (pero en el ejemplo sí cambió).

La discrepancia es todavía más notable para un viaje de ida y vuelta. En dicho caso, la distancia total viajada es el doble de la distancia entre las dos ciudades; pero el desplazamiento total es cero, porque el punto de inicio y el punto final del viaje son idénticos.

Este resultado es general: si las posiciones inicial y final son las mismas, el desplazamiento total es 0. Aunque esto parece sencillo para el ejemplo del viaje, es un escollo potencial en muchas preguntas de examen. Usted necesita recordar que el desplazamiento es un vector, mientras que la distancia es un valor escalar positivo.

2.3 Vector velocidad, velocidad media y rapidez

Así como la distancia (un número escalar) y el desplazamiento (un vector) significan cosas diferentes en física, sus cambios con respecto al tiempo también son distintos. Aunque las palabras “rapidez” y “velocidad” se usan a menudo en forma equivalente en el lenguaje diario, en física “rapidez” se refiere a un escalar, y “velocidad” a un vector.

Definimos v_x , el componente x del vector velocidad, como el cambio en la posición (es decir, el componente del desplazamiento) en un intervalo dado de tiempo, dividido entre dicho intervalo de tiempo, $\Delta x/\Delta t$. La velocidad puede cambiar de un momento a otro. La velocidad calculada tomando el cociente de desplazamiento y el intervalo de tiempo es el promedio de la velocidad durante dicho intervalo de tiempo, o el componente x de la **velocidad media**, \bar{v}_x :

$$\bar{v}_x = \frac{\Delta x}{\Delta t}. \quad (2.5)$$

Notación: Una barra encima del símbolo es la notación para indicar el promedio de un intervalo finito de tiempo.

En cálculo diferencial e integral, una derivada con respecto al tiempo se obtiene tomando el límite cuando el intervalo de tiempo tiende a cero. Usamos el mismo concepto aquí para definir la **velocidad instantánea**, que por lo general se llama simplemente la **velocidad**, como la derivada de la posición con respecto al tiempo. Para el componente x del vector velocidad, esto implica que

$$v_x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \bar{v}_x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \equiv \frac{dx}{dt}. \quad (2.6)$$

Ahora podemos introducir el vector de velocidad, \vec{v} , como el vector cuyos componentes corresponden a la derivada con respecto al tiempo del vector de posición.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \quad (2.7)$$

con el entendimiento de que la operación de derivación se aplica a cada uno de los componentes del vector. En el caso unidimensional, este vector de velocidad \vec{v} tiene sólo un componente x , v_x , y la velocidad es equivalente a un solo componente de velocidad en la dirección espacial x .

La figura 2.6 presenta tres gráficas de la posición de un objeto con respecto al tiempo. La figura 2.6a) muestra que podemos calcular la velocidad media del objeto encontrando el cambio de posición del objeto entre dos puntos y dividiéndolo entre el tiempo que transcurre para ir de x_1 a x_2 . Es decir, la velocidad media está dada por el desplazamiento, Δx_1 , dividido entre el intervalo de tiempo, Δt_1 , o $\bar{v}_1 = \Delta x_1/\Delta t_1$. En la figura 2.6b), la velocidad promedio, $\bar{v}_2 = \Delta x_2/\Delta t_2$, se determina para un intervalo menor de tiempo, Δt_2 . En la figura 2.6c), la velocidad instantánea, $v(t_3) = dx/dt|_{t=t_3}$, se representa por la pendiente de la línea azul tangente a la curva roja en $t = t_3$.

La velocidad es un vector que apunta en la misma dirección que el vector del desplazamiento infinitesimal, dx . Como la posición $x(t)$ y el desplazamiento $\Delta x(t)$ son funciones del tiempo, tam-

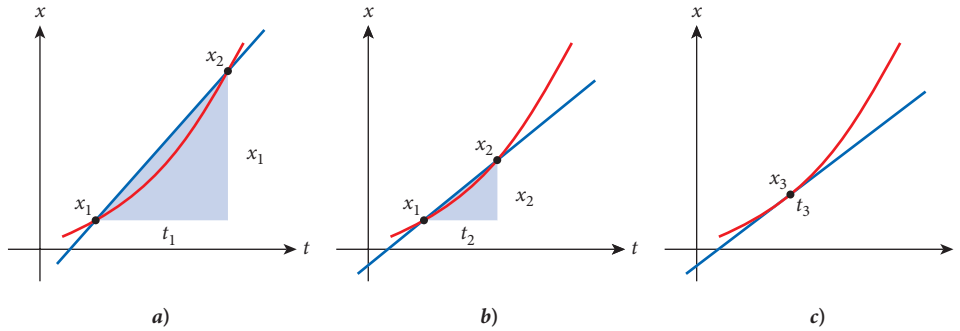


FIGURA 2.6 Velocidad instantánea como límite del cociente entre el desplazamiento y el intervalo de tiempo: a) una velocidad promedio durante un intervalo grande de tiempo; b) una velocidad promedio durante un intervalo menor de tiempo, y c) la velocidad instantánea en un tiempo específico, t_3 .

bién la velocidad es función del tiempo. Como el vector de velocidad se define como la derivada del vector de posición con respecto al tiempo, se aplican todas las reglas de la diferenciación introducidas en el cálculo diferencial e integral. Si necesita un repaso, consulte el apéndice A.

EJEMPLO 2.1 Dependencia de la velocidad con respecto al tiempo

PROBLEMA

Durante el intervalo de tiempo de 0.0 a 10.0 s, el vector de posición de un automóvil en la carretera está dado por $x(t) = a + bt + ct^2$, con $a = 17.2$ m, $b = -10.1$ m/s, y $c = 1.10$ m/s². ¿Cuál es la velocidad del automóvil como función del tiempo? ¿Cuál es la velocidad media del automóvil durante el intervalo?

SOLUCIÓN

De acuerdo con la definición de velocidad en la ecuación 2.6, simplemente tomamos la derivada de la función vector de posición con respecto al tiempo, para llegar a nuestra solución:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(a + bt + ct^2) = b + 2ct = -10.1 \text{ m/s} + 2 \cdot (1.10 \text{ m/s}^2)t.$$

Es instructivo graficar esta ecuación. En la figura 2.7, la posición como función del tiempo se muestra en azul, y la velocidad como función del tiempo se muestra en rojo. Al inicio, la velocidad tiene un valor de -10.1 m/s, y en $t = 10$ s, la velocidad tiene un valor de $+11.9$ m/s.

Observe que la velocidad es inicialmente negativa, en 4.59 s es cero (indicada por la línea punteada vertical en la figura 2.7) y luego es positiva después de 4.59 s. En $t = 4.59$ s, la gráfica de posición $x(t)$ muestra un valor extremo (un mínimo, en este caso), cómo se esperaría por el cálculo diferencial, ya que

$$\frac{dx}{dt} = b + 2ct_0 = 0 \Rightarrow t_0 = -\frac{b}{2c} = -\frac{-10.1 \text{ m/s}}{2 \cdot 2.20 \text{ m/s}^2} = 4.59 \text{ s}.$$

Por la definición de velocidad media sabemos que, para determinar la velocidad media durante un intervalo de tiempo, necesitamos restar la posición al principio del intervalo de la posición al final del intervalo. Insertando $t = 0$ y $t = 10$ s en la ecuación para el vector de posición como función del tiempo, obtenemos $x(t = 0) = 17.2$ m y $x(t = 10 \text{ s}) = 26.2$ m. Por lo tanto,

$$\Delta x = x(t = 10) - x(t = 0) = 26.2 \text{ m} - 17.2 \text{ m} = 9.0 \text{ m}.$$

Entonces obtenemos para la velocidad media durante este intervalo:

$$\bar{v}_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{9.0 \text{ m}}{10 \text{ s}} = 0.90 \text{ m/s}.$$

La pendiente de la línea punteada en la figura 2.7 es la velocidad media durante este intervalo.

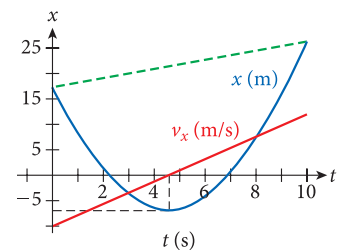


FIGURA 2.7 Gráfica de la posición x y la velocidad v_x como función del tiempo t . La pendiente de la línea punteada representa la velocidad media para el intervalo de tiempo de 0 a 10 s.



FIGURA 2.8 Medición de la velocidad de vehículos que pasan.

Rapidez

La **rapidez** es el valor absoluto del vector de velocidad. Para un objeto en movimiento, la rapidez es siempre positiva. En contextos cotidianos, “rapidez” y “velocidad” se usan de manera indistinta, pero en términos físicos son muy diferentes. La velocidad es un vector, que tiene dirección y sentido. Para movimiento unidimensional, el vector de velocidad puede señalar ya sea en la dirección positiva o en la negativa; en otras palabras, su componente puede tener cualquiera de los dos signos. Rapidez es el valor absoluto del vector de velocidad, y por lo tanto es una cantidad escalar:

$$\text{rapidez} \equiv v = |\vec{v}| = |v_x|. \quad (2.8)$$

La última parte de esta ecuación se basa en el hecho de que el vector velocidad tiene sólo un componente x para movimiento unidimensional.

En la experiencia diaria nos damos cuenta de que la rapidez nunca puede ser negativa: los límites de velocidad (que en realidad son límites de rapidez) siempre se ponen en los señalamientos como números positivos, y el radar que mide la rapidez de los vehículos que pasan siempre muestra números positivos (figura 2.8).

Ya se ha definido la distancia como el valor absoluto del desplazamiento para cada segmento de línea recta en el que el movimiento no cambia de dirección (vea la explicación que sigue a la ecuación 2.4). La rapidez media cuando se viaja una distancia ℓ durante un intervalo de tiempo Δt es

$$\text{rapidez media} \equiv \bar{v} = \frac{\ell}{\Delta t}. \quad (2.9)$$

EJEMPLO 2.2 Rapidez y velocidad

Suponga que una nadadora termina los primeros 50 m de los 100 m en estilo libre en 38.2 s. Una vez que llega al extremo opuesto de la piscina de 50 m de largo, se vuelve y nada de regreso al punto de partida en 42.5 s.

PROBLEMA

¿Cuál es la velocidad media y cuál es la rapidez media de la nadadora para *a*) el tramo desde la salida hasta el lado opuesto de la piscina, *b*) el tramo de regreso y *c*) la distancia total recorrida?

SOLUCIÓN

Comenzamos definiendo nuestro sistema de coordenadas, como se muestra en la figura 2.9. El eje positivo x apunta hacia la parte inferior de la página.

a) Primer tramo del recorrido:

La nadadora comienza en $x_1 = 0$ y nada hasta $x_2 = 50$ m. Tarda $\Delta t = 38.2$ s para realizar este tramo. Su velocidad media para el tramo 1 es entonces, de acuerdo con nuestra definición,

$$\bar{v}_{x1} = \frac{x_2 - x_1}{\Delta t} = \frac{50 \text{ m} - 0 \text{ m}}{38.2 \text{ s}} = \frac{50}{38.2} \text{ m/s} = 1.31 \text{ m/s}.$$

Su rapidez media es la distancia dividida entre el intervalo de tiempo, lo cual, en este caso, es lo mismo que el valor absoluto de su velocidad promedio, o $|\bar{v}_{x1}| = 1.31$ m/s.

b) Segundo tramo del recorrido:

Usamos el mismo sistema de coordenadas para el tramo 2 que para el tramo 1. Esta selección significa que la nadadora comienza en $x_1 = 50$ m y termina en $x_2 = 0$, y tarda $\Delta t = 42.5$ s para recorrerlo. Su velocidad media para este tramo es

$$\bar{v}_{x2} = \frac{x_2 - x_1}{\Delta t} = \frac{0 \text{ m} - 50 \text{ m}}{42.5 \text{ s}} = \frac{-50}{42.5} \text{ m/s} = -1.18 \text{ m/s}.$$

Observe el signo negativo de la velocidad media para este tramo. La rapidez media, nuevamente, es el valor absoluto de la velocidad media, o $|\bar{v}_{x2}| = |-1.18 \text{ m/s}| = 1.18$ m/s.

c) La distancia total recorrida:

Podemos determinar la velocidad media de dos modos, demostrando que ambos dan por resultado la misma respuesta. Primero, como la nadadora comenzó en $x_1 = 0$ y terminó en $x_2 = 0$, la diferencia es 0. Por lo tanto, el desplazamiento neto es 0, y en consecuencia la velocidad media también es 0.

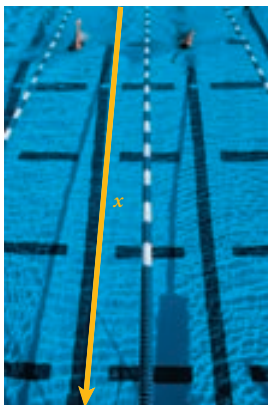


FIGURA 2.9 Selección de un eje x en una piscina.

También podemos determinar la velocidad promedio para toda la distancia cubierta tomando la suma ponderada por tiempo de los componentes de la velocidad media de los tramos individuales:

$$\bar{v}_x = \frac{\bar{v}_{x1} \cdot \Delta t_1 + \bar{v}_{x2} \cdot \Delta t_2}{\Delta t_1 + \Delta t_2} = \frac{(1.31 \text{ m/s})(38.2 \text{ s}) + (-1.18 \text{ m/s})(42.5 \text{ s})}{(38.2 \text{ s}) + (42.5 \text{ s})} = 0.$$

¿Qué es lo que hallamos para la rapidez media? La rapidez media, de acuerdo con nuestra definición, es la distancia total dividida entre el tiempo total. La distancia total es de 100 m, y el tiempo total es de 38.2 s más 42.5 s; es decir, 80.7 s. Por lo tanto,

$$\bar{v} = \frac{\ell}{\Delta t} = \frac{100 \text{ m}}{80.7 \text{ s}} = 1.24 \text{ m/s}.$$

También podemos usar la suma ponderada por tiempo de la rapidez promedio, obteniendo el mismo resultado. Observe que la rapidez promedio de la distancia total cubierta está entre la correspondiente al tramo 1 y la correspondiente al tramo 2. No está exactamente en medio de los dos valores, sino más cercana al valor inferior, debido a que la nadadora usó más tiempo para cubrir el tramo 2.

2.4 Vector aceleración

Así como la velocidad media se define como el desplazamiento entre el intervalo de tiempo, el componente x de la **aceleración media** se define como el cambio de velocidad entre el intervalo de tiempo:

$$\bar{a}_x = \frac{\Delta v_x}{\Delta t}. \quad (2.10)$$

Del mismo modo, el componente x de la **aceleración instantánea** se define como el límite de la aceleración media cuando el intervalo de tiempo tiende a 0:

$$a_x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \bar{a}_x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \equiv \frac{dv_x}{dt}. \quad (2.11)$$

Podemos ahora definir el vector de aceleración como

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}, \quad (2.12)$$

donde, de nuevo, la operación de la derivada actúa en cada una de las componentes, igual que en la definición del vector de velocidad.

La figura 2.10 ilustra esta relación entre velocidad, intervalo de tiempo, aceleración media y aceleración instantánea como límite de la aceleración media (para el intervalo de tiempo decreciente). En la figura 2.10a), la aceleración media está dada por el cambio de velocidad, Δv_1 , dividido entre el intervalo de tiempo Δt_1 : $\bar{a}_1 = \Delta v_1 / \Delta t_1$. En la figura 2.10b), la aceleración promedio se determina para un intervalo de tiempo menor, Δt_2 . En la figura 2.10c), la aceleración instantánea, $a(t_3) = dv/dt|_{t=t_3}$, se representa por la pendiente de la línea azul tangente a la curva roja en $t = t_3$. La figura 2.10 se ve muy parecida a la figura 2.6, y no es una coincidencia. La similitud pone de relieve que las operaciones matemáticas y las relaciones físicas que conectan los vectores de velocidad y aceleración son las mismas que las que conectan los vectores de posición y velocidad.

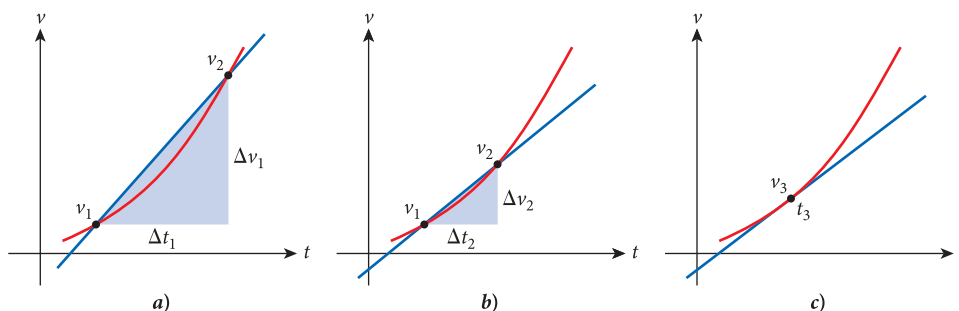


FIGURA 2.10 Aceleración instantánea como el límite del cociente del cambio de velocidad entre el intervalo de tiempo: a) aceleración promedio en un intervalo grande de tiempo; b) aceleración media en un intervalo menor de tiempo; y c) aceleración instantánea en el límite cuando el intervalo de tiempo tiende a cero.

2.1 Ejercicio en clase

Cuando usted maneja un automóvil por un camino recto, puede estar viajando en sentido positivo o negativo, y puede tener una aceleración positiva o negativa. Asocie las siguientes combinaciones de velocidad y aceleración con la lista de resultados.

- a) Velocidad positiva, aceleración positiva.
 - b) Velocidad positiva, aceleración negativa.
 - c) Velocidad negativa, aceleración positiva.
 - d) Velocidad negativa, aceleración negativa.
1. Desacelerando en el sentido positivo.
 2. Acelerando en el sentido negativo.
 3. Acelerando en el sentido positivo.
 4. Desacelerando en el sentido negativo.

La aceleración es la derivada de la velocidad con respecto al tiempo, y la velocidad es la derivada de la posición con respecto al tiempo. La aceleración es, por lo tanto, la segunda derivada de la posición:

$$a_x = \frac{d}{dt} v_x = \frac{d}{dt} \left(\frac{d}{dt} x \right) = \frac{d^2}{dt^2} x. \tag{2.13}$$

No hay una palabra en el lenguaje cotidiano para el valor absoluto de la aceleración.

Observe que con frecuencia hablamos de la *desaceleración* de un objeto como la disminución en la rapidez del objeto en el tiempo, la cual corresponde a una aceleración en la dirección opuesta al movimiento del objeto.

En movimiento unidimensional, una aceleración, que es un cambio de velocidad, implica necesariamente un cambio en la magnitud de la velocidad; es decir, en la rapidez. Sin embargo, en el siguiente capítulo consideraremos el movimiento en más de una dimensión espacial, donde el vector de velocidad también puede cambiar su dirección, no sólo su magnitud. En el capítulo 9, examinaremos el movimiento circular con rapidez constante; en ese caso, hay una aceleración constante que mantiene al objeto en una trayectoria circular, pero deja constante la rapidez.

Como muestra el ejercicio en clase, incluso en una dimensión, una aceleración positiva no significa necesariamente ir más rápido, y una aceleración negativa no significa ir más lento. Mejor dicho, la combinación de velocidad y aceleración determina el movimiento. *Si la velocidad y la aceleración están en el mismo sentido, el objeto se mueve cada vez más rápido; si tienen sentidos opuestos, el objeto se mueve cada vez más lento.* Examinaremos con más detalle esta relación en el siguiente capítulo.

2.5 Soluciones de computadora y fórmulas de diferencia

En algunas situaciones, la aceleración cambia como una función del tiempo, pero la forma funcional exacta no se conoce de antemano. Sin embargo, podemos calcular la velocidad y la aceleración incluso si sólo se conoce la posición para algunos instantes del tiempo. El siguiente ejemplo ilustra este procedimiento.

EJEMPLO 2.3 Récord mundial de 100 m planos

En los Campeonatos Mundiales de Pista y Campo de 1991 en Tokio, Japón, Carl Lewis, de Estados Unidos, estableció un nuevo récord mundial de 100 m planos. La figura 2.11 muestra una lista de los tiempos en los que llegó a las marcas de 10 m, 20 m, etcétera, así como los valores de su velocidad media y su aceleración media, calculados a partir de las fórmulas de las ecuaciones 2.5 y 2.10. En la figura 2.11 es claro que, después de casi 3 s, Lewis llegó a una velocidad media aproximadamente constante entre 11 y 12 m/s.

La figura 2.11 también indica cómo se obtuvieron los valores para la velocidad media y la aceleración media. Tome, por ejemplo, las dos casillas verdes superiores, que contienen los tiempos y las posiciones para dos mediciones. De éstas, obtenemos $\Delta t = 2.96 \text{ s} - 1.88 \text{ s} = 1.08 \text{ s}$ y $\Delta x = 20 \text{ m} - 10 \text{ m} = 10 \text{ m}$. La velocidad media en este intervalo de tiempo es entonces $\bar{v} = \Delta x / \Delta t = 10 \text{ m} / 1.08 \text{ s} = 9.26 \text{ m/s}$. Hemos redondeado este resultado a tres cifras significativas porque los tiempos se dieron con dicha precisión. La presión de las distancias se puede suponer como la menor, ya que estos datos se extrajeron del análisis del video que mostraba los tiempos en los que Lewis cruzó las marcas de la pista.

En la figura 2.11, la velocidad media calculada está ubicada a mitad de camino entre las líneas de tiempo y distancia, lo cual indica que es una buena aproximación para la velocidad instantánea en la parte media de este intervalo de tiempo.

Las velocidades medias para otros intervalos de tiempo se obtuvieron del mismo modo. Usando los números en la segunda y tercera casillas verdes de la figura 2.11, obtuvimos una velocidad media de 10.87 m/s para el intervalo de tiempo de 2.96 a 3.88 s. Con dos valores de la velocidad, podemos usar la fórmula de diferencia para la aceleración a fin de calcular la aceleración media. Aquí suponemos que la velocidad instantánea en un tiempo

$t(\text{s})$	$x(\text{m})$	$\bar{v}_x(\text{m/s})$	$\bar{a}_x(\text{m/s}^2)$
0.00	0	5.32	2.83
1.88	10	9.26	2.66
2.96	20	10.87	1.61
3.88	30	11.24	0.40
4.77	40	11.24	0.77
5.61	50	11.90	-0.17
6.46	60	11.76	0.17
7.30	70	11.90	0.17
8.13	80	12.05	0.17
8.13	80	11.49	-0.65
9.00	90	11.49	0.00
9.87	100	11.49	0.00

FIGURA 2.11 El tiempo, la posición, la velocidad media y la aceleración media durante el récord mundial de 100 m planos de Carl Lewis.

correspondiente a la parte media entre la primera y la segunda casillas verdes (2.42 s) es igual a la velocidad media durante el intervalo entre las dos primeras casillas verdes, o 9.26 m/s. Del mismo modo, tomamos la velocidad instantánea en 3.42 s (en medio de la segunda y tercera casillas) como 10.87 m/s. Entonces, la aceleración media entre 2.42 s y 3.42 s es

$$\bar{a}_x = \Delta v_x / \Delta t = (10.87 \text{ m/s} - 9.26 \text{ m/s}) / (3.42 \text{ s} - 2.42 \text{ s}) = 1.61 \text{ m/s}^2.$$

Por los números de la figura 2.11 obtenidos de esta manera, podemos ver que Lewis hizo la mayor parte de su aceleración entre el inicio de la carrera y la marca de 30 m, donde alcanzó su máxima velocidad entre 11 y 12 m/s. Luego corrió aproximadamente a esa misma velocidad hasta que llegó a la línea de meta. Este resultado se ve más claro en una gráfica de su posición contra el tiempo durante la carrera [figura 2.12a)]. Los puntos rojos representan los datos de la figura 2.11, y la línea recta verde representa una velocidad constante de 11.58 m/s. En la figura 2.12b), se grafica la velocidad de Lewis como función del tiempo. La pendiente de la línea recta verde representa de nuevo una velocidad constante de 11.58 m/s, ajustada a los últimos seis puntos, donde Lewis ya no acelera sino corre a una velocidad constante.

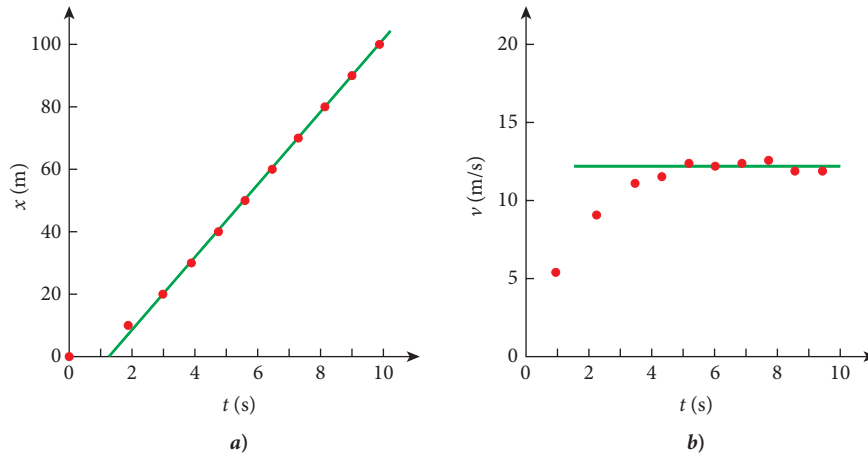


FIGURA 2.12 Análisis de la carrera de 100 m planos de Carl Lewis en 1991; a) su posición como función del tiempo; b) su velocidad como función del tiempo.

El tipo de análisis numérico que trata a las velocidades y aceleraciones como aproximaciones para los valores instantáneos de dichas cantidades es muy común en todos los tipos de aplicaciones científicas y de ingeniería. Es indispensable en situaciones en las que no se conocen las dependencias funcionales precisas con respecto al tiempo y los investigadores deben confiar en aproximaciones numéricas obtenidas mediante las fórmulas de diferencia. La mayoría de las soluciones prácticas de problemas científicos y de ingeniería halladas con ayuda de computadoras usan fórmulas de diferencia como las que aquí se han presentado.

Todo el campo de análisis numérico está dedicado a encontrar mejores aproximaciones numéricas que permitan realizar con computadora cálculos y simulaciones de procesos naturales con mayor precisión y rapidez. Las fórmulas de diferencia similares a las presentadas aquí son tan importantes para el trabajo diario de los científicos e ingenieros como las expresiones analíticas basadas en cálculo diferencial e integral. Esta relevancia es consecuencia de la revolución de las computadoras en la ciencia y la tecnología que, sin embargo, no le resta importancia al contenido del libro de texto. A fin de diseñar una solución válida para un problema de ingeniería o de ciencia, usted tiene que entender los principios físicos básicos que están detrás de dicha solución, sin que importe qué técnicas de cálculo utilice. Este hecho es plenamente reconocido por los animadores y creadores de efectos especiales digitales más avanzados, quienes tienen que tomar clases de física básica para asegurar que los productos de sus simulaciones en computadoras parezcan realistas para el público.

2.6 Determinación del desplazamiento y la velocidad a partir de la aceleración

El hecho de que la integración es la operación inversa de la diferenciación se conoce como el *Teorema fundamental del cálculo diferencial e integral*. Nos permite invertir el proceso de diferenciación que va de desplazamiento a velocidad y a la aceleración y, en vez de esto, integrar la ecuación de velocidad (2.6) para obtener desplazamiento, y la ecuación de aceleración (2.13) para obtener velocidad. Comencemos con la ecuación para el componente x de la velocidad:

$$v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt} \Rightarrow$$

$$\int_{t_0}^t v_x(t') dt' = \int_{t_0}^t \frac{dx(t')}{dt'} dt' = x(t) - x(t_0) \Rightarrow$$

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t v_x(t') dt'. \quad (2.14)$$

Notación: Aquí nuevamente hemos usado la convención de que $x(t_0) = x_0$, es la posición inicial. Además, hemos usado la notación t' en las integrales definidas en la ecuación 2.14. Esta notación prima nos recuerda que la variable de integración es una variable muda, que sirve para identificar la cantidad física que queremos integrar. En todo este libro, reservaremos la notación prima para las variables mudas de integración en las integrales definidas. (Observe que algunos libros usan un signo prima para denotar una derivada espacial; pero, para evitar la confusión, este libro no lo hará.)

Del mismo modo, integramos la ecuación 2.11 para el componente x de la aceleración, a fin de obtener una expresión para el componente x de la velocidad:

$$a_x(t) = \frac{dv_x(t)}{dt} \Rightarrow$$

$$\int_{t_0}^t a_x(t') dt' = \int_{t_0}^t \frac{dv_x(t')}{dt'} dt' = v_x(t) - v_x(t_0) \Rightarrow$$

$$v_x(t) = v_{x0} + \int_{t_0}^t a_x(t') dt'. \quad (2.15)$$

Aquí $v_x(t_0) = v_{x0}$ es el componente inicial de la velocidad en la dirección x . Igual que la operación de derivación se entiende que actúa componente a componente, la integración sigue la misma convención, de modo que podemos escribir las relaciones integrales para los vectores a partir de los componentes en las ecuaciones 2.14 y 2.15. Formalmente, tenemos entonces

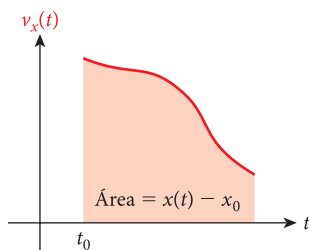
$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_{t_0}^t \vec{v}(t') dt' \quad (2.16)$$

y

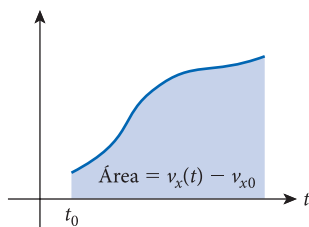
$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \int_{t_0}^t \vec{a}(t') dt'. \quad (2.17)$$

Este resultado significa que, para cualquier dependencia dada del vector de aceleración con respecto al tiempo, podemos calcular el vector velocidad, siempre y cuando se nos dé el valor inicial del vector velocidad. Podemos también calcular el vector de posición si sabemos su valor inicial y la dependencia con respecto al tiempo del vector de velocidad.

En cálculo diferencial e integral, es probable que usted haya aprendido que la interpretación geométrica de la integral definida es un área bajo una curva. Esto es verdad para las ecuaciones 2.14 y 2.15. Podemos interpretar el área bajo la curva de $v_x(t)$ entre t_0 y t como la diferencia en la posición (es decir, el desplazamiento) entre estos dos tiempos, como se muestra en la figura 2.13a). La figura 2.13b) muestra que el área bajo la curva de $a_x(t)$ en el intervalo de tiempo entre t_0 y t es la diferencia de velocidad entre estos dos tiempos.



a)



b)

FIGURA 2.13 Interpretación geométrica de las integrales de a) velocidad y b) aceleración con respecto al tiempo.

2.7 Movimiento con aceleración constante

En muchas situaciones físicas, la aceleración que experimenta un objeto es aproximadamente —o quizás incluso de manera exacta— constante. Podemos deducir ecuaciones útiles para estos casos especiales de movimiento con aceleración constante. Si la aceleración, a_x , es una constante, entonces la integral con respecto al tiempo que se usa en la ecuación de velocidad 2.15 da por resultado

$$\begin{aligned} v_x(t) &= v_{x0} + \int_0^t a_x dt' = v_{x0} + a_x \int_0^t dt' \Rightarrow \\ v_x(t) &= v_{x0} + a_x t, \end{aligned} \quad (2.18)$$

donde hemos tomado el límite inferior de la integral como $t_0 = 0$ por simplicidad. Esto significa que la velocidad es una función lineal del tiempo.

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \int_0^t v_x(t') dt' = x_0 + \int_0^t (v_{x0} + a_x t') dt' \\ &= x_0 + v_{x0} \int_0^t dt' + a_x \int_0^t t' dt' \Rightarrow \\ x(t) &= x_0 + v_{x0} t + \frac{1}{2} a_x t^2. \end{aligned} \quad (2.19)$$

De modo que, con una aceleración constante, la velocidad siempre es una función lineal del tiempo, y la posición es una función cuadrática del tiempo. Se pueden deducir otras tres útiles ecuaciones usando las ecuaciones 2.18 y 2.19 como punto de inicio. Después de enumerar estas tres ecuaciones, trabajaremos en sus deducciones.

La velocidad media en el intervalo de tiempo de 0 a t es el promedio de las velocidades al principio y al final del intervalo de tiempo:

$$\bar{v}_x = \frac{1}{2}(v_{x0} + v_x). \quad (2.20)$$

La velocidad media de la ecuación 2.20 conduce a una forma alternativa de expresar la posición:

$$x = x_0 + \bar{v}_x t. \quad (2.21)$$

Por último, podemos escribir una ecuación para el cuadrado de la velocidad que no contenga de manera explícita el tiempo:

$$v_x^2 = v_{x0}^2 + 2a_x(x - x_0). \quad (2.22)$$

DEDUCCIÓN 2.1

Matemáticamente, para obtener el tiempo medio de una cantidad en cierto intervalo Δt , tenemos que integrar esta cantidad en el intervalo de tiempo y luego dividir entre este último:

$$\begin{aligned} \bar{v}_x &= \frac{1}{t} \int_0^t v_x(t') dt' = \frac{1}{t} \int_0^t (v_{x0} + at') dt' \\ &= \frac{v_{x0}}{t} \int_0^t dt' + \frac{a}{t} \int_0^t t' dt' = v_{x0} + \frac{1}{2} at \\ &= \frac{1}{2} v_{x0} + \frac{1}{2} (v_{x0} + at) \\ &= \frac{1}{2} (v_{x0} + v_x). \end{aligned}$$

Este procedimiento para obtener el promedio para el intervalo de tiempo t_0 a t se ilustra en la figura 2.14. Puede verse que el área del trapecioide formado por la línea azul que representa $v(t)$ y las dos líneas verticales en t_0 y t es igual al área del cuadrado formado por la línea horizontal a \bar{v}_x y las dos líneas verticales. La línea de base para ambas áreas es el eje horizontal t . Se hace más evidente que estas dos áreas son iguales si observa que el triángulo amarillo (parte del cuadrado) y el triángulo anaranjado (parte del trapecioide) son de igual tamaño. [Algebraicamente, el área del cuadrado es $\bar{v}_x(t - t_0)$, y el área del trapecioide es $\frac{1}{2}(v_{x0} + v_x)(t - t_0)$. Haciendo estas dos áreas iguales entre sí nos da de nuevo la ecuación 2.20.]

(continúa)

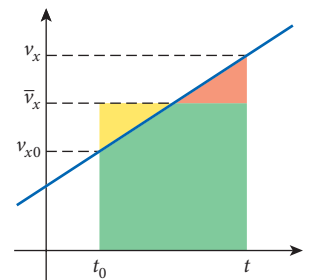


FIGURA 2.14 Gráfica de velocidad contra tiempo para movimiento con aceleración constante.

(continuación)

Para deducir la ecuación para la posición, tomamos $t_0 = 0$ y usamos la expresión $\bar{v}_x = v_{x0} + \frac{1}{2}a_x t$ y multiplicamos ambos miembros por el tiempo:

$$\begin{aligned}\bar{v}_x &= v_{x0} + \frac{1}{2}a_x t \\ \Rightarrow \bar{v}_x t &= v_{x0} t + \frac{1}{2}a_x t^2.\end{aligned}$$

Ahora comparamos este resultado con la expresión que ya obtuvimos para x (ecuación 2.19) y encontramos:

$$x = x_0 + v_{x0} t + \frac{1}{2}a_x t^2 = x_0 + \bar{v}_x t.$$

Para la deducción de la ecuación 2.22 para el cuadrado de la velocidad, despejamos el tiempo de $v_x = v_{x0} + a_x t$ obteniendo $t = (v_x - v_{x0})/a_x$. Luego sustituimos en la expresión para la posición, que es la ecuación 2.19:

$$\begin{aligned}x &= x_0 + v_{x0} t + \frac{1}{2}a_x t^2 \\ &= x_0 + v_{x0} \left(\frac{v_x - v_{x0}}{a_x} \right) + \frac{1}{2}a_x \left(\frac{v_x - v_{x0}}{a_x} \right)^2 \\ &= x_0 + \frac{v_x v_{x0} - v_{x0}^2}{a_x} + \frac{1}{2} \frac{v_x^2 + v_{x0}^2 - 2v_x v_{x0}}{a_x}.\end{aligned}$$

Luego restamos x_0 de ambos lados de la ecuación y multiplicamos por a_x :

$$\begin{aligned}a_x(x - x_0) &= v_x v_{x0} - v_{x0}^2 + \frac{1}{2}(v_x^2 + v_{x0}^2 - 2v_x v_{x0}) \\ \Rightarrow a_x(x - x_0) &= \frac{1}{2}v_x^2 - \frac{1}{2}v_{x0}^2 \\ \Rightarrow v_x^2 &= v_{x0}^2 + 2a_x(x - x_0).\end{aligned}$$

Aquí están las cinco ecuaciones cinemáticas que hemos obtenido para el *caso especial del movimiento con aceleración constante* (donde el tiempo inicial, cuando $x = x_0$, $v = v_0$ es cero):

$$\begin{aligned}i) \quad & x = x_0 + v_{x0} t + \frac{1}{2}a_x t^2 \\ ii) \quad & x = x_0 + \bar{v}_x t \\ iii) \quad & v_x = v_{x0} + a_x t \\ iv) \quad & \bar{v}_x = \frac{1}{2}(v_x + v_{x0}) \\ v) \quad & v_x^2 = v_{x0}^2 + 2a_x(x - x_0)\end{aligned} \tag{2.23}$$

Estas cinco ecuaciones nos permiten resolver muchos tipos de problemas para movimiento en una dimensión con aceleración constante. Sin embargo, recuerde que, si la aceleración no es constante, estas ecuaciones no darán las soluciones correctas.

Muchos problemas de la vida real implican movimiento a lo largo de una línea recta con aceleración constante. En esta situación, las ecuaciones 2.23 proporcionan la base para responder a cualquier pregunta sobre el movimiento. El siguiente problema resuelto y el siguiente ejemplo ilustrarán la utilidad de estas ecuaciones cinemáticas. Sin embargo, recuerde que en física no se trata sólo de encontrar una ecuación adecuada y sustituir en ella los números, sino más bien entender los conceptos. Sólo si entiende las ideas subyacentes a partir de ejemplos específicos será capaz de adquirir la habilidad de resolver problemas más generales.

PROBLEMA RESUELTO 2.2 Despegue de un avión

Mientras un avión se desplaza por la pista para alcanzar la rapidez de despegue, se acelera por sus motores de propulsión a chorro. En un vuelo específico, uno de los autores de este libro midió la aceleración producida por los motores de chorro del avión. La figura 2.15 muestra las mediciones.

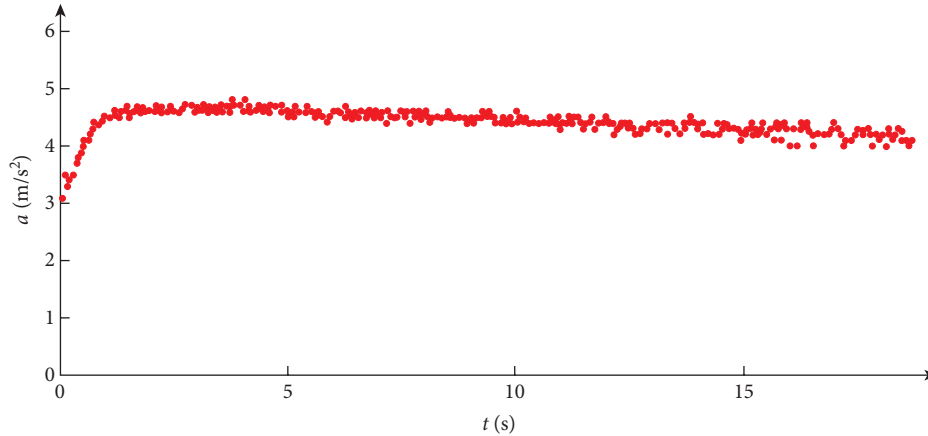


FIGURA 2.15 Datos de la aceleración de un avión de propulsión a chorro antes del despegue.

Puede ver que la suposición de aceleración constante no es muy correcta en este caso. Sin embargo, una aceleración promedio de $a_x = 4.3 \text{ m/s}^2$ en los 18.4 s (medidos con un cronómetro) que tardó en despegar el avión es una buena aproximación.

PROBLEMA

Suponiendo una aceleración constante de $a_x = 4.3 \text{ m/s}^2$ partiendo desde el reposo, ¿cuál es la velocidad de despegue del avión después de 18.4 s? ¿Qué distancia ha recorrido el avión en la pista hasta el momento del despegue?

SOLUCIÓN

PIENSE

Un avión que se mueve en una pista en preparación para el despegue es un ejemplo casi perfecto de movimiento acelerado en una dimensión. Como estamos suponiendo aceleración constante, sabemos que la velocidad aumenta en forma lineal con el tiempo, y el desplazamiento aumenta como la segunda potencia del tiempo. Como el avión comienza desde el reposo, el valor inicial de la velocidad es 0. Como es usual, podemos definir el origen de nuestro sistema de coordenadas en cualquier sitio; es conveniente ubicarlo en el punto en que el avión arranca a partir del reposo.

ESBOCE

El diagrama de la figura 2.16 muestra cómo esperamos que aumenten la velocidad y el desplazamiento para este caso de aceleración constante, donde las condiciones iniciales están definidas en $v_{x0} = 0$ y $x_0 = 0$. Observe que no se han colocado escalas sobre los ejes, porque el desplazamiento, la velocidad y la aceleración se miden en diferentes unidades. Así, los puntos en los que las tres curvas se intersecan son completamente arbitrarios.

INVESTIGUE

Determinar la velocidad de despegue es realmente una sencilla aplicación de la ecuación 2.23iii):

$$v_x = v_{x0} + a_x t.$$

De igual manera, la distancia que el avión recorre en la pista antes de despegar se puede obtener de la ecuación 2.23i):

$$x = x_0 + v_{x0} t + \frac{1}{2} a_x t^2.$$

SIMPLIFIQUE

El avión acelera desde el reposo, de modo que la velocidad inicial es $v_{x0} = 0$, y por nuestra elección del origen del sistema de coordenadas, hemos establecido $x_0 = 0$. Por lo tanto, las ecuaciones para la velocidad de despegue y la distancia se simplifican a

$$v_x = a_x t$$

$$x = \frac{1}{2} a_x t^2.$$

(continúa)

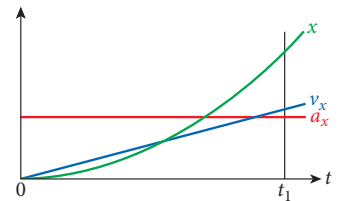


FIGURA 2.16 Aceleración, velocidad y desplazamiento del avión antes del despegue.

(continuación)

CALCULE

Lo único que queda por hacer es introducir los números:

$$v_x = (4.3 \text{ m/s}^2)(18.4 \text{ s}) = 79.12 \text{ m/s}$$

$$x = \frac{1}{2}(4.3 \text{ m/s}^2)(18.4 \text{ s})^2 = 727.904 \text{ m.}$$

REDONDEE

La aceleración se especificó con dos cifras significativas, y el tiempo, con tres. Multiplicar estos dos números debe dar por resultado una respuesta que tenga dos dígitos significativos. Nuestras respuestas finales son, por lo tanto

$$v_x = 79 \text{ m/s}$$

$$x = 7.3 \cdot 10^2 \text{ m.}$$

Observe que el tiempo medido hasta el despegue de 18.4 s, probablemente no tuvo en realidad esa precisión. Si alguna vez ha tratado de determinar el momento en que un avión comienza a acelerar por la pista, habrá notado que es casi imposible determinar ese instante en el tiempo con una exactitud de 0.1 s.

VUELVA A REVISAR

Como este libro ha insistido reiteradamente, la verificación más sencilla de cualquier respuesta a un problema de física es asegurarse de que las unidades son las adecuadas para la situación. Éste es el caso, porque obtuvimos el desplazamiento en unidades de metros, y la velocidad en unidades de metros por segundo. Los problemas resueltos en el resto de este libro algunas veces pueden pasar por alto esta sencilla prueba; sin embargo, si desea hacer una verificación rápida para detectar errores algebraicos en sus cálculos, puede ser valioso ver primero las unidades de la respuesta.

Ahora, veamos si nuestras respuestas tienen los órdenes correctos de magnitud. Un desplazamiento para despegue de 730 m (~0.5 mi) es razonable, porque está en el orden de magnitud de la longitud de una pista de despegue de un aeropuerto. Una velocidad de despegue de $v_x = 79 \text{ m/s}$ se traduce en

$$(79 \text{ m/s})(1 \text{ mi}/1609 \text{ m})(3600 \text{ s}/1 \text{ h}) \approx 180 \text{ mph.}$$

Esta respuesta también parece estar dentro del orden de magnitud correcto.

SOLUCIÓN ALTERNATIVA

Muchos problemas de física se pueden resolver de varias maneras, porque con frecuencia es posible usar más de una relación entre las cantidades conocidas y las desconocidas. En este caso, una vez que obtuvimos la velocidad final, podríamos usar esta información y despejar x de la ecuación de cinemática 2.23v). Esto da como resultado

$$v_x^2 = v_{x0}^2 + 2a_x(x - x_0) \Rightarrow$$

$$x = x_0 + \frac{v_x^2 - v_{x0}^2}{2a_x} = 0 + \frac{(79 \text{ m/s})^2}{2(4.3 \text{ m/s}^2)} = 7.3 \cdot 10^2 \text{ m.}$$

De modo que llegamos a la misma respuesta para la distancia de una manera diferente, lo cual nos da una confianza adicional de que nuestra solución tiene sentido.

El problema resuelto 2.2 fue relativamente sencillo. Resolverlo significó un poco más que introducir números. Sin embargo, muestra que las ecuaciones de cinemática que obtuvimos se pueden aplicar a situaciones reales y producir respuestas que tienen un significado físico. El siguiente breve ejemplo, esta vez de deportes motorizados, trata de los mismos conceptos de velocidad y aceleración, pero bajo una visión un poco diferente.



FIGURA 2.17 Auto de carreras top fuel NHRA.

EJEMPLO 2.4 Carreras top fuel

Acelerando desde el reposo, un auto de carreras top fuel (figura 2.17) puede llegar a 333.2 mph (= 148.9 m/s), al final de un cuarto de milla (= 402.3 m), récord establecido en 2003. Para este ejemplo, supondremos aceleración constante.

PROBLEMA 1

¿Cuál es el valor de la aceleración constante del auto de carreras?

SOLUCIÓN 1

Como los valores inicial y final de la velocidad están dados y la distancia se conoce, buscamos una relación entre estas tres cantidades y la aceleración, que es la incógnita. En este caso, conviene más usar la ecuación de cinemática 2.23v) y despejar la aceleración, a_x :

$$v_x^2 = v_{x0}^2 + 2a_x(x - x_0) \Rightarrow a_x = \frac{v_x^2 - v_{x0}^2}{2(x - x_0)} = \frac{(148.9 \text{ m/s})^2}{2(402.3 \text{ m})} = 27.6 \text{ m/s}^2.$$

PROBLEMA 2

¿Cuánto tarda el auto de carreras en recorrer un cuarto de milla desde el arranque?

SOLUCIÓN 2

Como la velocidad final es de 148.9 m/s, la velocidad promedio es [usando la ecuación 2.23iv)]: $\bar{v}_x = \frac{1}{2}(148.9 \text{ m/s} + 0) = 74.45 \text{ m/s}$. Relacionando esta velocidad media con la posición y el tiempo mediante la ecuación 2.23ii), obtenemos:

$$x = x_0 + \bar{v}_x t \Rightarrow t = \frac{x - x_0}{\bar{v}_x} = \frac{402.3 \text{ m}}{74.45 \text{ m/s}} = 5.40 \text{ s}.$$

Observe que podríamos haber obtenido el mismo resultado usando la ecuación de cinemática 2.23iii), porque ya calculamos la aceleración en la solución 1.

Sin embargo, si es aficionado a las carreras top fuel, sabe que el verdadero récord de tiempo para el cuarto de milla es un poco inferior a 4.5 s. La razón por la que nuestra respuesta calculada es mayor es que nuestra suposición de aceleración constante no es del todo correcta. La aceleración del auto al principio de la carrera es en realidad mayor que el valor que calculamos arriba, y la aceleración real hacia el final de la carrera es menor que nuestro valor.

Caída libre

La aceleración debida a la fuerza de gravedad es constante, hasta una buena aproximación, cerca de la superficie de la Tierra. Si esta aseveración es verdadera, debe tener consecuencias observables. Supongamos que es verdadera y averigüemos las consecuencias para el movimiento de objetos bajo la influencia de la atracción gravitacional de la Tierra. Luego compararemos nuestros resultados con observaciones experimentales y veremos si tiene sentido que la aceleración por efecto de la gravedad sea constante.

La aceleración causada por la gravedad cerca de la superficie de la Tierra tiene un valor $g = 9.81 \text{ m/s}^2$. Llamamos eje y al eje vertical y definimos la dirección positiva hacia arriba. Entonces, el vector de aceleración \vec{a} tiene sólo un componente y diferente de cero, que está dado por

$$a_y = -g. \quad (2.24)$$

Esta situación es una aplicación específica de movimiento con aceleración constante, que ya explicamos antes en esta sección. Modificamos las ecuaciones 2.23 sustituyendo la aceleración de la ecuación 2.24. También usamos y en vez de x para indicar que el desplazamiento tiene lugar en la dirección y . Obtenemos:

$$\begin{aligned} i) \quad & y = y_0 + v_{y0}t - \frac{1}{2}gt^2 \\ ii) \quad & y = y_0 + \bar{v}_y t \\ iii) \quad & v_y = v_{y0} - gt \\ iv) \quad & \bar{v}_y = \frac{1}{2}(v_y + v_{y0}) \\ v) \quad & v_y^2 = v_{y0}^2 - 2g(y - y_0) \end{aligned} \quad (2.25)$$

El movimiento bajo la sola influencia de una aceleración gravitacional se llama **caída libre**, y las ecuaciones 2.25 nos permiten resolver problemas para objetos en caída libre.

2.2 Ejercicio en clase

El lanzamiento de una pelota verticalmente hacia arriba proporciona un ejemplo de caída libre. En el instante en que la pelota llega a su altura máxima, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

- a) La aceleración de la pelota apunta hacia abajo, y su velocidad hacia arriba.
- b) La aceleración de la pelota es cero, y su velocidad señala hacia arriba.
- c) La aceleración de la pelota apunta hacia arriba, y su velocidad hacia arriba.
- d) La aceleración de la pelota apunta hacia abajo, y su velocidad es cero.
- e) La aceleración de la pelota apunta hacia arriba, y su velocidad es cero.
- f) La aceleración de la pelota es cero y su velocidad apunta hacia abajo.

2.3 Ejercicio en clase

Se lanza hacia arriba una pelota con una velocidad v_1 , como se muestra en la figura 2.19. La pelota alcanza una altura máxima de $y = h$. ¿Cuál es la relación de la velocidad de la pelota, v_2 , en $y = h/2$ en la figura 2.19b), con respecto a la velocidad inicial ascendente de la pelota, v_1 , en $y = 0$ en la figura 2.19a)?

- a) $v_2/v_1 = 0$
- b) $v_2/v_1 = 0.50$
- c) $v_2/v_1 = 0.71$
- d) $v_2/v_1 = 0.75$
- e) $v_2/v_1 = 0.90$

Ahora consideremos un experimento que probó la suposición de aceleración gravitacional constante. Los autores subieron a la parte superior de un edificio de 12.7 m de altura y dejaron caer una computadora desde el reposo ($v_{y0} = 0$) bajo condiciones controladas. La caída de la computadora se grabó con una cámara digital de video. Como la cámara graba a 30 cuadros por segundo, conocemos la información de tiempo. La figura 2.18 muestra 14 cuadros, igualmente espaciados en el tiempo, de este experimento, con el tiempo desde que se soltó el objeto marcado en el eje horizontal para cada cuadro. La curva amarilla sobrepuesta en los cuadros tiene la forma

$$y = 12.7 \text{ m} - \frac{1}{2}(9.81 \text{ m/s}^2)t^2,$$

que es lo que esperamos para las condiciones iniciales $y_0 = 12.7 \text{ m}$, $v_{y0} = 0$ y la suposición de una aceleración constante $a_y = -9.81 \text{ m/s}^2$. Como se puede ver, la caída de la computadora sigue esta curva de manera casi perfecta. Esta concordancia, por supuesto, no es una prueba concluyente, pero es un fuerte indicio de que la aceleración de la gravedad es constante cerca de la superficie de la Tierra, y de que tiene el valor expresado.

Además, el valor de la aceleración gravitacional es el mismo para todos los objetos. Ésta no es de ninguna manera una aseveración trivial. Objetos de diferentes tamaños y masas, si se sueltan desde la misma altura, deben tocar el suelo al mismo tiempo. ¿Concuerda esto con nuestra experiencia diaria? Bueno, ¡no del todo! En una demostración común en clase se sueltan, desde la misma altura, una pluma y una moneda. Es fácil observar que la moneda llega al suelo primero, mientras que la pluma baja flotando lentamente. Esta diferencia se debe a la resistencia del aire. Si este experimento se realiza en un tubo de vidrio en el que se le ha hecho vacío, la moneda y la pluma caen con la misma rapidez. Regresaremos a la resistencia del aire en el capítulo 4 pero, por ahora, podemos concluir que la aceleración gravitacional cerca de la superficie de la Tierra es constante, tiene el valor absoluto $g = 9.81 \text{ m/s}^2$, y es la misma para todos los objetos siempre y cuando podamos depreciar la resistencia del aire. En el capítulo 4 veremos las condiciones bajo las cuales se justifica la suposición de que la resistencia del aire es nula.

Para ayudarle a entender la respuesta al ejercicio en clase, considere lanzar una pelota verticalmente hacia arriba, como se ilustra en la figura 2.19. En la figura 2.19a), la pelota se lanza hacia arriba con una velocidad \vec{v} . Cuando se suelta la pelota, experimenta sólo la fuerza de gravedad y por lo tanto se acelera hacia abajo con la aceleración debida a la gravedad, que está dada por $\vec{a} = -g\hat{y}$. Mientras la pelota viaja hacia arriba, la aceleración debida a la gravedad actúa para desacelerar la pelota. En la figura 2.19b), la pelota se está moviendo hacia arriba y ha llegado a la mitad de su altura máxima, h . La pelota se ha desacelerado, pero su aceleración sigue siendo la misma. La pelota llega a su altura máxima en la figura 2.19c). Aquí, la velocidad de la pelota es cero, pero la aceleración sigue siendo $\vec{a} = -g\hat{y}$. La pelota comienza ahora a moverse hacia abajo, y la aceleración debida a la gravedad actúa para acelerar su movimiento. En la figura 2.19d), la velocidad de la pelota es hacia abajo y la aceleración sigue siendo la misma. Al final, la pelota regresa a $y = 0$ en la figura 2.19e). La velocidad de la pelota tiene ahora la misma magnitud que cuando se lanzó inicialmente hacia arriba, pero su sentido es hacia abajo. La aceleración sigue siendo la misma. Observe que la aceleración permanece constante y hacia abajo, aun cuando la velocidad cambia de ascendente a cero y a descendente.

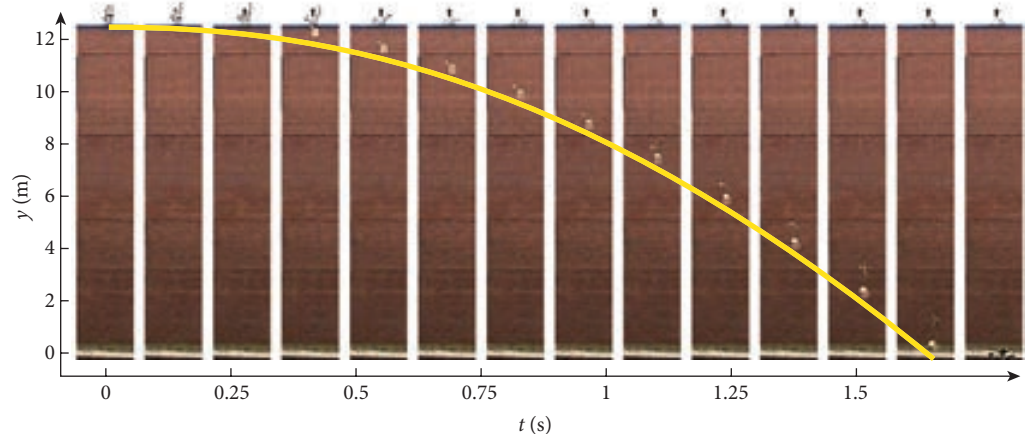


FIGURA 2.18 Experimento de caída libre: soltar una computadora desde la parte superior de un edificio.

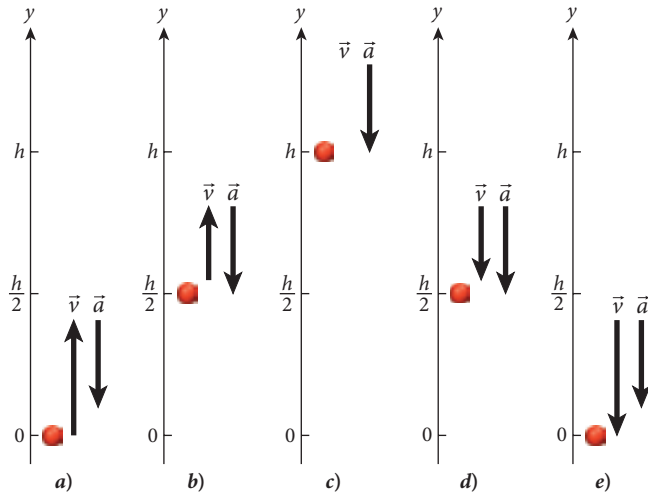


FIGURA 2.19 Los vectores de velocidad y aceleración de una pelota lanzada en forma vertical hacia arriba en el aire. a) La pelota se lanza inicialmente hacia arriba en $y = 0$. b) La pelota subiendo en una altura de $y = h/2$. c) La pelota a su altura máxima de $y = h$. d) La pelota bajando a $y = h/2$. e) La pelota bajando a su posición inicial a $y = 0$.

EJEMPLO 2.5 Tiempo de reacción

Una persona tarda en reaccionar ante cualquier estímulo externo. Por ejemplo, al principio de una carrera de 100 m planos en una competencia de pista y campo, el árbitro de arranque dispara una pistola. Hay una pequeña demora antes de que los corredores salgan de los bloques de salida, debido a su tiempo finito de reacción. De hecho, se cuenta como salida en falso si un corredor sale de los bloques antes de 0.1 s después del disparo. Cualquier salida antes de este lapso de tiempo indica que el corredor “se ha saltado el disparo”.

Sin embargo, existe una prueba sencilla que se muestra en la figura 2.20, que usted puede realizar para determinar su tiempo de reacción. Su compañero de prueba sostiene una regla y usted se prepara para atraparla cuando su compañero la suelte, como se muestra en el cuadro izquierdo de la figura. Puede determinar su tiempo de reacción por la distancia h que la regla cae después de ser soltada, hasta el momento en que usted la atrapa (como se muestra en el cuadro derecho).

PROBLEMA

Si la regla cae 0.20 m antes de que usted la atrape, ¿cuál es su tiempo de reacción?

SOLUCIÓN

Esta situación es un caso de caída libre. Para estos problemas, la solución de modo invariable se encuentra en una de las ecuaciones 2.25. En el problema que queremos resolver aquí, la incógnita es el tiempo.

Se nos da el desplazamiento, $h = y_0 - y$. También sabemos que la velocidad inicial de la regla es cero porque se suelta desde el reposo. Podemos usar la ecuación de cinemática 2.25i): $y = y_0 + v_{y0}t - \frac{1}{2}gt^2$. Con $h = y_0 - y$ y $v_{y0}=0$, la ecuación se convierte en

$$\begin{aligned} y &= y_0 - \frac{1}{2}gt^2 \\ \Rightarrow h &= \frac{1}{2}gt^2 \\ \Rightarrow t &= \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0.20 \text{ m}}{9.81 \text{ m/s}^2}} = 0.20 \text{ s.} \end{aligned}$$

Su tiempo de reacción fue de 0.20 s. Este tiempo de reacción es típico. Como comparación, cuando Usain Bolt estableció el récord mundial de 9.69 s para los 100 m planos en agosto de 2008, se midió su tiempo de reacción como de 0.165 s.

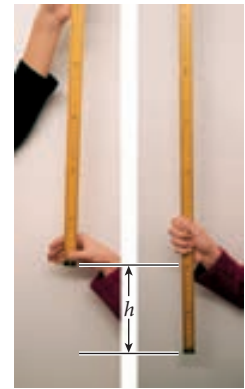


FIGURA 2.20 Sencillo experimento para medir el tiempo de reacción.

2.2 Oportunidad de autoexamen

Trace una gráfica del tiempo de reacción como función de la distancia de caída de la regla. Discuta si este método es más preciso para los tiempos de reacción de alrededor de 0.1 s o para los de alrededor de 0.3 s.

Vamos a considerar otro caso de caída libre, esta vez con dos objetos en movimiento.

2.4 Ejercicio en clase

Si el tiempo de reacción de la persona B, determinado por el método de la regla, es el doble del de la persona A, entonces el desplazamiento h_B medido para la persona B relativo al desplazamiento h_A para la persona A es

- a) $h_B = 2h_A$
- b) $h_B = \frac{1}{2}h_A$
- c) $h_B = \sqrt{2}h_A$
- d) $h_B = 4h_A$
- e) $h_B = \sqrt{\frac{1}{2}}h_A$

PROBLEMA RESUELTO 2.3 Caída de un melón

Suponga que usted deja caer un melón, a partir del reposo, desde la primera plataforma de observación de la Torre Eiffel. La altura inicial h desde la cual se suelta el melón es de 58.3 m sobre la cabeza de su amigo francés Pierre, que está parado en el suelo exactamente debajo de usted. En el mismo instante en que usted suelta el melón, Pierre dispara una flecha en forma vertical hacia arriba con una velocidad inicial de 25.1 m/s (por supuesto, Pierre se asegura de que el área alrededor de él esté libre y se retira de la trayectoria del melón rápidamente después de tirar la flecha).

PROBLEMA

a) ¿Cuánto tiempo después de que usted suelta el melón será alcanzado por la flecha? b) ¿A qué altura sobre la cabeza de Pierre tiene lugar la colisión?

SOLUCIÓN

PIENSE

A primera vista, este problema parece complicado. Lo resolveremos usando el conjunto completo de pasos, y luego examinaremos un atajo que podríamos haber tomado. Obviamente, el melón está en caída libre; sin embargo, como la flecha se dispara hacia arriba, también la flecha está en caída libre, sólo que tiene una velocidad inicial ascendente.

ESBOCE

Establecemos nuestro sistema de coordenadas con el eje y apuntando verticalmente hacia arriba como es convencional, y ubicamos el origen del sistema de coordenadas en la cabeza de Pierre (figura 2.21). De modo que la flecha se lanza desde una posición inicial $y = 0$, y el melón desde $y = h$.

INVESTIGUE

Usamos el subíndice m para el melón y a para la flecha. Partimos de la ecuación general de caída libre, $y = y_0 + v_{y0}t - \frac{1}{2}gt^2$, y usamos las condiciones iniciales dadas para el melón ($v_{y0} = 0$, $y_0 = h = 58.3$ m) y para la flecha ($v_{y0} = v_{a0} = 25.1$ m/s, $y_0 = 0$) para establecer las dos ecuaciones de movimiento en caída libre:

$$y_m(t) = h - \frac{1}{2}gt^2$$

$$y_a(t) = v_{a0}t - \frac{1}{2}gt^2.$$

La observación clave es que en t_c , el momento en que chocan el melón y la flecha, sus coordenadas son idénticas:

$$y_a(t_c) = y_m(t_c).$$

SIMPLIFIQUE

Insertando t_c en las dos ecuaciones de movimiento e igualándolas se obtiene

$$h - \frac{1}{2}gt_c^2 = v_{a0}t_c - \frac{1}{2}gt_c^2 \Rightarrow$$

$$h = v_{a0}t_c \Rightarrow$$

$$t_c = \frac{h}{v_{a0}}.$$

Ahora podemos insertar este valor del tiempo de colisión en cualquiera de las dos ecuaciones de caída libre y obtener la altura sobre la cabeza de Pierre a la que ocurre el impacto. Seleccionamos la ecuación del melón:

$$y_m(t_c) = h - \frac{1}{2}gt_c^2.$$

CALCULE

a) Todo lo que queda por hacer es insertar los números dados para la altura a la que se suelta el melón y la velocidad inicial de la flecha, obteniendo

$$t_c = \frac{58.3 \text{ m}}{25.1 \text{ m/s}} = 2.32271 \text{ s}$$

para el tiempo de impacto.

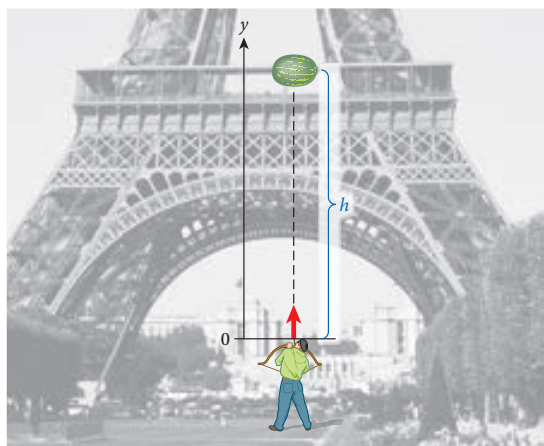


FIGURA 2.21 La caída del melón (¡ni el melón ni la persona se dibujan a escala!)

b) Usando el número que obtuvimos para el tiempo, encontramos la posición en la que ocurre el impacto:

$$y_m(t_c) = 58.3 \text{ m} - \frac{1}{2}(9.81 \text{ m/s}^2)(2.32271 \text{ s})^2 = 31.8376 \text{ m}.$$

REDONDEE

Como los valores iniciales de la altura a la que se suelta el melón y la velocidad de la flecha se dieron con tres cifras significativas, tenemos que limitar nuestras respuestas finales a tres dígitos. Así, la flecha chocará con el melón después de 2.32 s, y sucederá en una posición 31.8 m arriba de la cabeza de Pierre.

VUELVA A REVISAR

¿Podríamos haber obtenido las respuestas de una manera más fácil? Sí, si no hubiéramos percatado de que tanto el melón como la flecha caen bajo la influencia de la misma aceleración gravitacional y, por lo tanto, su movimiento en caída libre no tiene influencia sobre la distancia entre ambos objetos. Esto significa que el tiempo que tardan en encontrarse es simplemente la distancia entre ellos dividida por su diferencia inicial de velocidades. De modo que podríamos haber escrito $t = h/v_{a0}$ y habríamos terminado. Sin embargo, para pensar de este modo en términos de movimiento relativo se necesita algo de práctica, y volveremos a esto con más detalle en el siguiente capítulo.

La figura 2.22 muestra la gráfica completa de las posiciones de la flecha y del melón como funciones del tiempo. Las porciones punteadas de ambas gráficas indican a dónde habrían ido la flecha y el melón si no hubieran chocado.

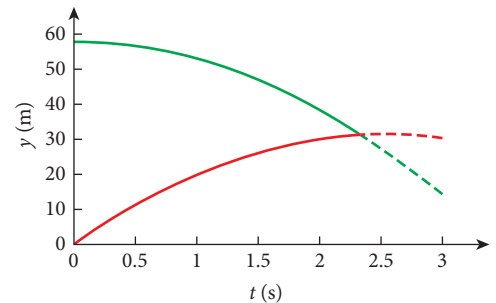


FIGURA 2.22 Posiciones, en función del tiempo, para la flecha (curva roja) y para el melón (curva verde).

PREGUNTA ADICIONAL

¿Cuáles son las velocidades del melón y de la flecha en el momento del impacto?

SOLUCIÓN

Obtenemos la velocidad tomando la derivada de la posición con respecto al tiempo. Para la flecha y el melón obtenemos

$$y_m(t) = h - \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow v_m(t) = \frac{dy_m(t)}{dt} = -gt$$

$$y_a(t) = v_{a0}t - \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow v_a(t) = \frac{dy_a(t)}{dt} = v_{a0} - gt.$$

Ahora, insertando el tiempo del impacto, 2.32 s, obtenemos las respuestas. Observe que, a diferencia de las posiciones de la flecha y del melón, ¡las velocidades de los dos objetos no son iguales inmediatamente antes del contacto!

$$v_m(t_c) = -(9.81 \text{ m/s}^2)(2.32 \text{ s}) = -22.8 \text{ m/s}$$

$$v_a(t_c) = (25.1 \text{ m/s}) - (9.81 \text{ m/s}^2)(2.32 \text{ s}) = 2.34 \text{ m/s}.$$

Además, debe observar que la diferencia entre las dos velocidades sigue siendo de 25.1 m/s, como era al inicio de las trayectorias.

Terminamos este problema graficando (figura 2.23) las velocidades como función del tiempo. Puede ver que la flecha comienza con una velocidad de 25.1 m/s mayor que la del melón. Al avanzar el tiempo, la flecha y el melón experimentan el mismo cambio de velocidad bajo la influencia de la gravedad, lo cual significa que sus velocidades conservan la misma diferencia inicial.

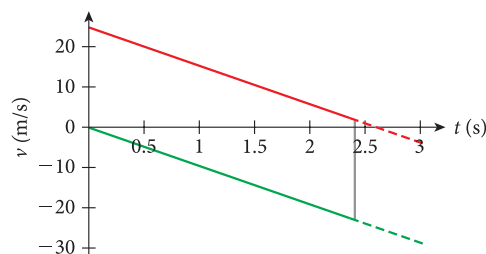


FIGURA 2.23 Velocidades de la flecha (curva roja) y del melón (curva verde) como función del tiempo.

2.5 Ejercicio en clase

Si el melón del problema resuelto 2.3 se lanza de manera vertical hacia arriba con una velocidad inicial de 5 m/s al mismo tiempo en que la flecha se dispara hacia arriba, ¿cuánto tarda en ocurrir el impacto?

- 2.32 s
- 2.90 s
- 1.94 s
- No hay impacto antes de que el melón choque con el suelo.

2.3 Oportunidad de autoexamen

Como puede ver por la respuesta al problema resuelto 2.3, la velocidad de la flecha es de sólo 2.34 m/s cuando choca con el melón. Esto significa que, cuando la flecha golpea al melón, su velocidad inicial ha disminuido sustancialmente debido al efecto de la gravedad. Suponga que la velocidad inicial de la flecha es de 5.0 m/s menor. ¿Cuál sería la diferencia? ¿Todavía impactaría la flecha al melón?

2.8 Reducción de movimiento en más de una dimensión a una dimensión

La cinemática no sólo se ocupa del movimiento en una dimensión espacial. También podemos investigar casos más generales, en los que los objetos se mueven en dos o tres dimensiones espaciales. Haremos esto en los próximos capítulos. Sin embargo, en algunos casos, el movimiento en más de una dimensión se puede reducir a un movimiento en una dimensión. Consideremos un caso muy interesante de movimiento en dos dimensiones para el cual cada segmento se puede describir como movimiento en una línea recta.

EJEMPLO 2.6 Acuatlón

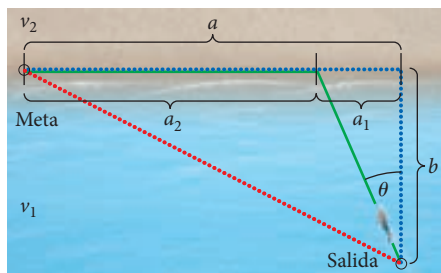


FIGURA 2.24 Geometría de una trayectoria de acuatlón.

El triatlón es una competencia deportiva que inventó el San Diego Track Club en la década de 1970, y se convirtió en un evento en los Juegos Olímpicos de Sydney en 2000. De manera típica, consiste en un nadar de 1.5 km, seguido de un recorrido de 40 km en bicicleta y, finalmente, una carrera de 10 km a pie. Para poder competir, los atletas deben nadar la distancia de 1.5 km en menos de 20 minutos, recorrer los 40 km en bicicleta en menos de 70 minutos y correr una carrera de 10 km en menos de 35 minutos.

Sin embargo, para este ejemplo, consideraremos una competencia en la que se premia el pensamiento además de la proeza atlética. La competencia consiste en sólo dos tramos: un nadar seguido de una carrera. (Esta competencia se llama a veces acuatlón.) Los atletas comienzan a una distancia $b = 1.5$ km de la orilla, y la línea de meta está a una distancia $a = 3$ km a la izquierda sobre la orilla (figura 2.24). Suponga que usted puede nadar con una velocidad $v_1 = 3.5$ km/h y puede correr por la arena con una velocidad $v_2 = 14$ km/h.

PROBLEMA

¿Qué ángulo θ dará como resultado el menor tiempo final en estas condiciones?

SOLUCIÓN

Es claro que la línea punteada roja marca la distancia más corta entre la salida y la meta. Esta distancia es $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1.5^2 + 3^2}$ km = 3.354 km. Como toda esta trayectoria es en el agua, el tiempo para toda la carrera de esta forma sería

$$t_{\text{rojo}} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{v_1} = \frac{3.354 \text{ km}}{3.5 \text{ km/h}} = 0.958 \text{ h.}$$

Como usted puede correr más rápido que nadar, podemos también probar la ruta indicada por la línea punteada azul: nadar perpendicularmente hasta la orilla y luego correr. Esto tarda

$$t_{\text{azul}} = \frac{b}{v_1} + \frac{a}{v_2} = \frac{1.5 \text{ km}}{3.5 \text{ km/h}} + \frac{3 \text{ km}}{14 \text{ km/h}} = 0.643 \text{ h.}$$

De modo que la ruta azul es mejor que la roja. Pero ¿es la mejor? Para responder a esta pregunta, necesitamos explorar el intervalo de ángulo de 0 (ruta azul) a $\tan^{-1}(3/1.5) = 63.43^\circ$ (ruta roja). Consideremos la ruta verde, con un ángulo arbitrario θ con respecto a la línea recta a la orilla (es decir, la normal a la línea de la orilla). En la ruta verde, usted tiene que nadar una distancia de $\sqrt{a_1^2 + b^2}$ y luego correr una distancia de a_2 , como se indica en la figura 2.24. El tiempo total para esta ruta es

$$t = \frac{\sqrt{a_1^2 + b^2}}{v_1} + \frac{a_2}{v_2}.$$

Para determinar el tiempo mínimo, podemos expresar el tiempo en términos de la distancia a_1 solamente, tomar la derivada de dicho tiempo con respecto a dicha distancia, igualar dicha derivada a cero y despejar la distancia. Usando a_1 , podemos entonces calcular el ángulo θ en que tiene que nadar el atleta. Podemos expresar la distancia a_2 en términos de las distancias dadas a y a_1 :

$$a_2 = a - a_1.$$

Podemos entonces expresar el tiempo para toda la carrera en términos de a_1 :

$$t(a_1) = \frac{\sqrt{a_1^2 + b^2}}{v_1} + \frac{a - a_1}{v_2}. \quad (2.26)$$

Tomando la derivada con respecto a a_1 e igualando a cero el resultado, obtenemos

$$\frac{dt(a_1)}{da_1} = \frac{a_1}{v_1 \sqrt{a_1^2 + b^2}} - \frac{1}{v_2} = 0.$$

Reacomodando resulta

$$\frac{a_1}{v_1 \sqrt{a_1^2 + b^2}} = \frac{1}{v_2},$$

que podemos reescribir como

$$\frac{v_1 \sqrt{a_1^2 + b^2}}{a_1} = v_2.$$

Elevando al cuadrado ambos miembros y reacomodando los términos obtenemos

$$v_1^2 (a_1^2 + b^2) = a_1^2 v_2^2 \Rightarrow a_1^2 v_1^2 + b^2 v_1^2 = a_1^2 v_2^2 \Rightarrow b^2 v_1^2 = a_1^2 (v_2^2 - v_1^2).$$

Despejando a_1 da

$$a_1 = \frac{b v_1}{\sqrt{v_2^2 - v_1^2}}.$$

En la figura 2.24 podemos ver que $\tan \theta = a_1/b$, de modo que podemos escribir

$$\tan \theta = \frac{a_1}{b} = \frac{\frac{b v_1}{\sqrt{v_2^2 - v_1^2}}}{b} = \frac{v_1}{\sqrt{v_2^2 - v_1^2}}.$$

Podemos simplificar este resultado buscando en el triángulo el ángulo θ en la figura 2.25. El teorema de Pitágoras nos dice que la hipotenusa del triángulo es

$$\sqrt{v_1^2 + v_2^2 - v_1^2} = v_2.$$

Podemos entonces escribir

$$\text{sen } \theta = \frac{v_1}{v_2}.$$

Este resultado es muy interesante porque ¡las distancias a y b no aparecen en él en absoluto! En vez de esto, el seno del ángulo óptimo es simplemente la relación de las velocidades en agua y en tierra. Para los valores dados de las dos velocidades, el ángulo es

$$\theta_m = \text{sen}^{-1} \frac{3.5}{14} = 14.48^\circ.$$

Insertando $a_1 = b \tan \theta_m$ en la ecuación 2.26, encontramos $t(\theta_m) = 0.629$ h. Este tiempo es aproximadamente 49 segundos más corto que el que corresponde a nadar perpendicularmente hacia la orilla y luego correr (ruta azul).

Estrictamente hablando, no hemos demostrado de manera suficiente que este ángulo dé como resultado el tiempo mínimo. Para lograr esto, necesitamos también demostrar que la segunda derivada del tiempo con respecto al ángulo es mayor que cero. Sin embargo, como sí determinamos un valor extremo, y como su valor es menor que los de los límites, sabemos que este valor extremo es un verdadero mínimo.

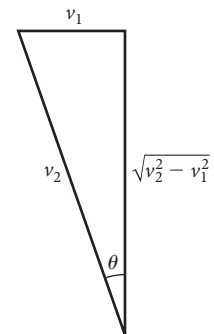


FIGURA 2.25 Relación entre v_1 , v_2 , y θ .

(continúa)

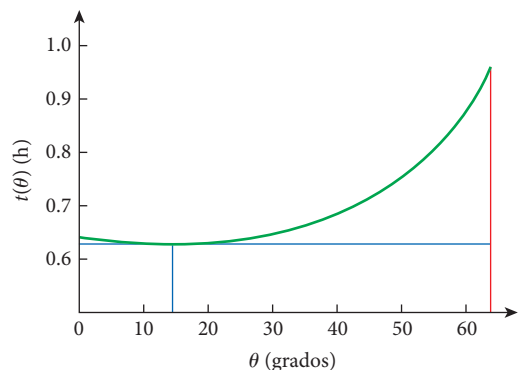


FIGURA 2.26 Duración de la carrera como función del ángulo inicial.

(continuación)

Finalmente, la figura 2.26 grafica el tiempo, en horas, necesario para completar la carrera, para todos los ángulos entre 0° y 63.43° , indicados por la curva verde. Esta gráfica se obtiene sustituyendo $a_1 = b \tan \theta$ en la ecuación 2.26, lo cual nos da

$$t(\theta) = \frac{\sqrt{(b \tan \theta)^2 + b^2}}{v_1} + \frac{a - b \tan \theta}{v_2} = \frac{b \sec \theta}{v_1} + \frac{a - b \tan \theta}{v_2},$$

usando la identidad $\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$. Una línea roja vertical marca el ángulo máximo, correspondiente a un nado en línea recta desde la salida hasta la meta. La línea azul vertical marca al ángulo óptimo que calculamos, y la línea azul horizontal marca la duración de la carrera para este ángulo.

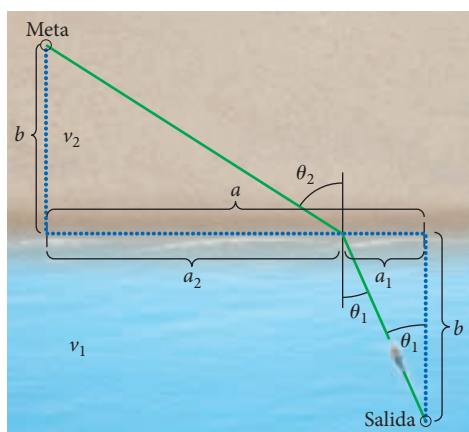


FIGURA 2.27 Acuatlón modificado con la meta alejada de la orilla.

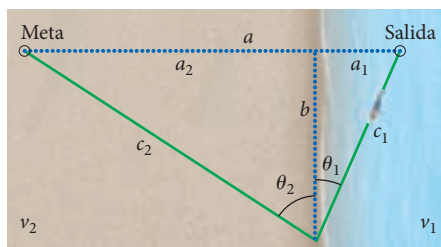


FIGURA 2.28 Igual que la figura anterior, pero con el ángulo inferior reflejado a lo largo del eje horizontal.

Una vez terminado el ejemplo 2.6, podemos plantear una pregunta más complicada: si la línea de meta no está en la orilla, sino a una distancia perpendicular b de la orilla, como se muestra en la figura 2.27, ¿cuáles son los ángulos θ_1 y θ_2 que necesita elegir un contendiente para lograr el tiempo mínimo?

Procedemos de un modo muy similar al que usamos en el ejemplo 2.6. Sin embargo, ahora tenemos que darnos cuenta de que el tiempo depende de dos ángulos, θ_1 y θ_2 , los cuales no son independientes entre sí. Podemos apreciar mejor la relación entre ambos cambiando la orientación del triángulo inferior en la figura 2.27, como se muestra en la figura 2.28.

Ahora vemos que los dos triángulos rectángulos a_1bc_1 y a_2bc_2 tienen un lado común, b , que nos ayuda a relacionar entre sí los dos ángulos. Podemos expresar el tiempo para completar la carrera como

$$t = \frac{\sqrt{a_1^2 + b^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{a_2^2 + b^2}}{v_2}.$$

Nuevamente observando que $a_2 = a - a_1$, podemos escribir

$$t(a_1) = \frac{\sqrt{a_1^2 + b^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(a - a_1)^2 + b^2}}{v_2}.$$

Tomando la derivada del tiempo para completar la carrera con respecto a a_1 e igualando a cero el resultado, obtenemos

$$\frac{dt(a_1)}{da_1} = \frac{a_1}{v_1 \sqrt{a_1^2 + b^2}} - \frac{a - a_1}{v_2 \sqrt{(a - a_1)^2 + b^2}} = 0.$$

Podemos reacomodar esta ecuación para obtener

$$\frac{a_1}{v_1 \sqrt{a_1^2 + b^2}} = \frac{a - a_1}{v_2 \sqrt{(a - a_1)^2 + b^2}} = \frac{a_2}{v_2 \sqrt{a_2^2 + b^2}}.$$

Al observar la figura 2.28, y refiriéndonos a nuestro resultado anterior de la figura 2.25, podemos ver que

$$\text{sen } \theta_1 = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + b^2}}$$

y

$$\text{sen } \theta_2 = \frac{a_2}{\sqrt{a_2^2 + b^2}}.$$

Podemos insertar estos dos resultados en la ecuación anterior y, por último, para encontrar el tiempo más corto para terminar la carrera, necesitamos que

$$\frac{\text{sen } \theta_1}{v_1} = \frac{\text{sen } \theta_2}{v_2}. \tag{2.27}$$

Podemos ver ahora que nuestro resultado anterior, donde forzamos a la carrera a tener lugar a lo largo de la orilla, es un caso especial de este resultado más general, ecuación 2.27, con $\theta_2 = 90^\circ$.

Igual que para dicho caso especial, encontramos que la relación entre los ángulos no depende de los valores de las distancias a y b , sino sólo de las velocidades con las que se puede mover el contendiente en el agua y en la tierra. Los ángulos todavía están relacionados con a y con b por la restricción general de que el competidor tiene que ir desde la salida hasta la meta. Sin embargo, para la ruta de tiempo mínimo, el cambio de dirección en el límite entre agua y tierra, como se expresa por los dos ángulos θ_1 y θ_2 , está determinado de manera exclusiva por la relación entre las velocidades v_1 y v_2 .

La condición inicial específica que la distancia perpendicular b del punto de salida a la línea de la orilla sea igual que la distancia perpendicular entre la línea de la orilla y la meta. Hicimos esto para conservar el álgebra relativamente breve. Sin embargo, en la fórmula final, usted ve que ya no hay referencias a b ; se ha cancelado. Así, la ecuación 2.27 es válida incluso en el caso de que las dos distancias perpendiculares tengan valores diferentes. La relación de ángulos para la ruta de tiempo mínimo está determinada de manera exclusiva por las dos velocidades en los dos medios diferentes.

Es interesante encontrar la misma relación entre dos ángulos y dos velocidades cuando estudiamos la luz al cambiar de dirección en la interfaz entre dos medios por los cuales se mueve con velocidades diferentes. En el capítulo 32, veremos que la luz también se mueve por la ruta de tiempo mínimo, y el resultado que se obtiene en la ecuación 2.27 se conoce como la ley de Snell.

Por último, hacemos una observación que puede parecer trivial, pero no lo es: si un contendiente saliera desde el punto marcado “Meta” en la figura 2.27 y terminara en el punto marcado “Salida”, tendría que tomar exactamente la misma ruta que acabamos de calcular para el sentido inverso. La ley de Snell se aplica en ambas direcciones.

LO QUE HEMOS APRENDIDO | GUÍA DE ESTUDIO PARA EXAMEN

- x es el componente x del vector de posición. Desplazamiento es el cambio de posición: $\Delta x = x_2 - x_1$.
- Distancia es el valor absoluto de desplazamiento, $\ell = |\Delta x|$, y es un escalar positivo para movimiento en una dirección.
- La velocidad media de un objeto en un intervalo de tiempo está dada por $\bar{v}_x = \frac{\Delta x}{\Delta t}$.
- El componente x del vector de velocidad (instantánea) es la derivada del componente x del vector de posición como función al tiempo, $v_x = \frac{dx}{dt}$.
- La rapidez es el valor absoluto de la velocidad: $v = |v_x|$.
- El componente x del vector de aceleración (instantánea) es la derivada del componente x del vector de velocidad, como función del tiempo, $a_x = \frac{dv_x}{dt}$.
- Para aceleraciones constantes, el movimiento en una dimensión, está descrito por cinco ecuaciones cinemáticas:
 - i) $x = x_0 + v_{x0}t + \frac{1}{2}a_x t^2$
 - ii) $x = x_0 + \bar{v}_x t$
 - iii) $v_x = v_{x0} + a_x t$
 - iv) $\bar{v}_x = \frac{1}{2}(v_x + v_{x0})$
 - v) $v_x^2 = v_{x0}^2 + 2a_x(x - x_0)$
 donde x_0 es la posición inicial, v_{x0} es la velocidad inicial, y el tiempo inicial t_0 se toma como $t_0 = 0$.
- Para situaciones que involucran caída libre (aceleración constante), reemplazamos la aceleración a con $-g$, y x con y para obtener
 - i) $y = y_0 + v_{y0}t - \frac{1}{2}gt^2$
 - ii) $y = y_0 + \bar{v}_y t$
 - iii) $v_y = v_{y0} - gt$
 - iv) $\bar{v}_y = \frac{1}{2}(v_y + v_{y0})$
 - v) $v_y^2 = v_{y0}^2 - 2g(y - y_0)$
 donde y_0 es la posición inicial, v_{y0} es la velocidad inicial, y el eje y apunta hacia arriba.

TÉRMINOS CLAVE

mecánica, p. 36
cinemática, p. 36
vector de posición, p. 37

desplazamiento, p. 37
distancia, p. 38
velocidad media, p. 40

velocidad instantánea, p. 40
rapidez, p. 42
aceleración media, p. 43

aceleración instantánea, p. 43
caída libre, p. 51

NUEVOS SÍMBOLOS

$\Delta x = x_2 - x_1$, desplazamiento en una dimensión

$\bar{v}_x = \frac{\Delta x}{\Delta t}$, velocidad media en una dimensión para intervalo de tiempo Δt

$v_x = \frac{dx}{dt}$, velocidad instantánea en una dimensión

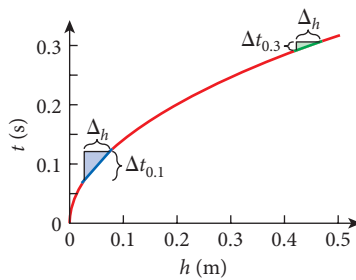
$\bar{a}_x = \frac{\Delta v}{\Delta t}$, aceleración media en una dimensión para un intervalo de tiempo Δt

$a_x = \frac{dv_x}{dt}$, aceleración instantánea en una dimensión

RESPUESTAS A LAS OPORTUNIDADES DE AUTOEXAMEN

2.1 El resultado no cambiaría, porque un corrimiento del origen del sistema de coordenadas no influye en los desplazamientos netos o distancias netas.

2.2



Este método es más preciso para tiempos de reacción más largos, porque la pendiente de la curva disminuye como fun-

ción de la altura, h . (En la gráfica, la pendiente en 0.1 s está indicada por la línea azul, y en 0.3 s por la línea verde.) Así, una incertidumbre dada, Δh , al medir la altura, produce una incertidumbre menor, Δt , en el valor del tiempo de reacción para valores tiempo de reacción más largos.

2.3 La flecha todavía alcanzaría al melón, pero en el momento del impacto, la flecha ya tendría velocidad negativa y por lo tanto estaría moviéndose nuevamente hacia abajo. Por lo tanto, el melón alcanzaría a la flecha. El choque ocurriría un poco más tarde, después de $t = 58.3 \text{ m} / (20.1 \text{ m/s}) = 2.90 \text{ s}$. La altitud de la colisión sería bastante más baja, en $y_m(t_c) = 58.3 \text{ m} - \frac{1}{2}(9.81 \text{ m/s}^2)(2.90 \text{ s})^2 = 1.70 \text{ m}$ sobre la cabeza de Pierre.

PRÁCTICA PARA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

PROBLEMA RESUELTO 2.4 Carrera con ventaja en la salida

Cheri tiene un nuevo Dodge Charger con motor Hemi, y ha retado a Vince, dueño de un VW GTI, a una carrera en una pista local. Vince sabe que el Charger de Cheri puede acelerar de 0 a 60 mph en 5.3 s, mientras que su VW necesita 7.0 s. Vince pide una ventaja de salida y Cheri accede a concederle exactamente 1.0 s.

PROBLEMA

¿Qué distancia ha avanzado Vince en la pista cuando Cheri inicia la carrera? ¿En cuánto tiempo alcanza Cheri a Vince? ¿A qué distancia de la salida se encuentran cuando esto sucede? (suponga que durante la carrera, la aceleración para cada vehículo permanece constante).

SOLUCIÓN

PIENSE

Esta carrera es un buen ejemplo de movimiento unidimensional con aceleración constante. La tentación es revisar las ecuaciones 2.23 y ver cuál de ellas podemos aplicar. Sin embargo, aquí debemos tener un poco más de cuidado, porque la demora entre Vince y Cheri añade una complicación. De hecho, si trata de resolver este problema usando directamente la ecuación cinemática, no obtendrá la respuesta correcta. En vez de esto, este problema exige una definición cuidadosa de las coordenadas de tiempo para cada auto.

ESBOCE

Para nuestro diagrama graficamos tiempo en el eje horizontal y posición en el eje vertical. Ambos autos se mueven con aceleración constante partiendo del reposo, de modo que esperamos que sus rutas sean parábolas simples en este diagrama.

Como el auto de Cheri tiene mayor aceleración, su parábola (curva azul en la figura 2.29) tiene la mayor curvatura y mayor pendiente ascendente. Por lo tanto, queda claro que Cheri alcanzará a Vince en algún punto, pero no queda todavía claro dónde está este punto.

INVESTIGUE

Planteamos de manera cuantitativa el problema. Llamamos Δt a la demora para el arranque de Cheri, y usamos los subíndices C para el Charger de Cheri y V para el VW de Vince. Ponemos el origen del sistema de coordenadas en la línea de salida. Así, ambos autos tienen la posición inicial $x_C(t=0) = x_V(t=0) = 0$. Como ambos vehículos están en reposo al inicio, sus velocidades iniciales son cero. La ecuación de movimiento para el VW de Vince es

$$x_V(t) = \frac{1}{2} a_V t^2.$$

Aquí usamos el símbolo a_V para la aceleración del VW. Podemos calcular su valor por el tiempo de aceleración de 0 a 60 mph dado en el planteamiento inicial del problema, pero pospondremos este paso hasta que sea necesario introducir los números.

Para obtener la ecuación de movimiento para el Charger de Cheri, debemos tener cuidado, porque ella está obligada a esperar Δt segundos después de que Vince haya salido. Podemos considerar este retraso como un tiempo corrido: $t' = t - \Delta t$. Una vez que t llega al valor de Δt , el tiempo t' tiene el valor 0, y luego Cheri puede arrancar. De modo que su ecuación de movimiento es

$$x_C(t) = \frac{1}{2} a_C t'^2 = \frac{1}{2} a_C (t - \Delta t)^2 \quad \text{para } t \geq \Delta t.$$

Igual que a_V la aceleración constante a_C para el Charger de Cheri se evaluará más adelante.

SIMPLIFIQUE

Cuando Cheri alcance a Vince, las coordenadas de ambos vehículos tendrán el mismo valor. Llamaremos al tiempo en el que esto sucede t_* , y la coordenada en que esto ocurre, $x_* = x(t_*)$. Como las dos coordenadas son las mismas, tenemos

$$x_* = \frac{1}{2} a_V t_*^2 = \frac{1}{2} a_C (t_* - \Delta t)^2.$$

Podemos despejar t_* de esta ecuación dividiendo por el factor común de $\frac{1}{2}$ y luego tomando la raíz cuadrada de ambos lados de la ecuación:

$$\begin{aligned} \sqrt{a_V} t_* &= \sqrt{a_C} (t_* - \Delta t) \Rightarrow \\ t_* (\sqrt{a_C} - \sqrt{a_V}) &= \Delta t \sqrt{a_C} \Rightarrow \\ t_* &= \frac{\Delta t \sqrt{a_C}}{\sqrt{a_C} - \sqrt{a_V}}. \end{aligned}$$

¿Por qué aquí usamos la raíz positiva y descartamos la negativa? La raíz negativa daría por resultado una solución físicamente imposible: nos interesa el tiempo que ambos autos necesitan *después* de la salida, no un valor negativo que implicaría un tiempo antes de la salida.

CALCULE

Ahora podemos obtener una respuesta numérica para cada una de las ecuaciones. Primero, calculemos los valores de las aceleraciones constantes de los vehículos desde 0 a 60 mph a partir de las especificaciones dadas. Usamos $a = (v_x - v_{x0})/t$ y obtenemos

$$\begin{aligned} a_V &= \frac{60 \text{ mph}}{7.0 \text{ s}} = \frac{26.8167 \text{ m/s}}{7.0 \text{ s}} = 3.83095 \text{ m/s}^2 \\ a_C &= \frac{60 \text{ mph}}{5.3 \text{ s}} = \frac{26.8167 \text{ m/s}}{5.3 \text{ s}} = 5.05975 \text{ m/s}^2. \end{aligned}$$

De nuevo posponemos el redondeo de nuestros resultados hasta que hayamos completado todos los pasos de nuestros cálculos. Sin embargo, con los valores de las aceleraciones, podemos calcular inmediatamente la distancia que viaja Vince durante el tiempo $\Delta t = 1.0 \text{ s}$:

$$x_V(1.0 \text{ s}) = \frac{1}{2} (3.83095 \text{ m/s}^2) (1.0 \text{ s})^2 = 1.91548 \text{ m}.$$

(continúa)

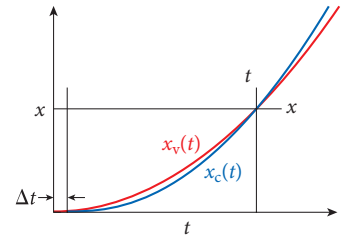


FIGURA 2.29 Posición contra tiempo para la carrera entre Cheri y Vince.

(continuación)

Ahora podemos calcular el tiempo en que Cheri alcanza a Vince:

$$t_{=} = \frac{\Delta t \sqrt{a_c}}{\sqrt{a_c} - \sqrt{a_v}} = \frac{(1.0 \text{ s})\sqrt{5.05975 \text{ m/s}^2}}{\sqrt{5.05975 \text{ m/s}^2} - \sqrt{3.83095 \text{ m/s}^2}} = 7.70055 \text{ s.}$$

En este tiempo, ambos autos han viajado hasta el mismo punto. De modo que podemos colocar este valor en cualquiera de las dos ecuaciones de movimiento para hallar esta posición:

$$x_{=} = \frac{1}{2} a_v t_{=}^2 = \frac{1}{2} (3.83095 \text{ m/s}^2) (7.70055 \text{ s})^2 = 113.585 \text{ m.}$$

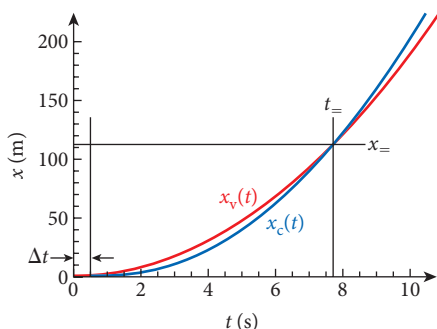


FIGURA 2.30 Gráfica de los parámetros y ecuaciones de movimiento para la carrera entre Cheri y Vince.

REDONDEE

Los datos iniciales se especificaron sólo con una precisión de 2 cifras significativas. Redondeando nuestros resultados a la misma precisión, llegamos finalmente a nuestras respuestas. A Vince se le da una ventaja de arranque de 1.9 m, y Cheri lo alcanzará después de 7.7 s. En ese tiempo ambos habrán avanzado $1.1 \cdot 10^2 \text{ m}$ en la carrera.

VUELVA A REVISAR

A usted le puede parecer extraño que el auto de Vince se haya movido sólo 1.9 m, o aproximadamente la mitad de la longitud del auto, durante el primer segundo. ¿Nos hemos equivocado en nuestro cálculo? La respuesta es no; desde el reposo, los automóviles se mueven sólo una distancia comparativamente corta durante el primer segundo de aceleración. El siguiente problema resuelto contiene prueba visible de esta afirmación.

La figura 2.30 muestra una gráfica de las ecuaciones de movimiento para ambos autos, esta vez con las unidades correspondientes.

PROBLEMA RESUELTO 2.5 Automóvil en aceleración

PROBLEMA

Se le entrega a usted la secuencia de imágenes que se muestra en la figura 2.31, y se le dice que hay un intervalo de tiempo de 0.333 s entre cuadros sucesivos. ¿Puede determinar lo rápido que estaba acelerando este auto (Ford 2007 Escape Hybrid, longitud 174.9 in) a partir del reposo? Asimismo, ¿puede dar un estimado del tiempo que tarda este auto en pasar de 0 a 60 mph?

SOLUCIÓN

PIENSE

La aceleración se mide en dimensiones de longitud por unidad de tiempo al cuadrado. Para hallar un número para el valor de la aceleración, necesitamos conocer las escalas de tiempo y longitud de la figura 2.31. La escala de tiempo es sencilla, porque se nos ha dado la información de que transcurre un tiempo de 0.333 s entre cuadros sucesivos. Podemos obtener la escala de longitud por las dimensiones especificadas del vehículo. Por ejemplo, si nos enfocamos en la longitud del auto y la comparamos con el ancho total del cuadro, podemos determinar la distancia que recorrió el auto entre el primer cuadro y el último (que están a 3.000 s uno de otro).

ESBOCE

Trazamos líneas verticales amarillas sobre la figura 2.31, como se muestra en la figura 2.32. Ponemos el centro del auto en la línea entre las ventanas frontal y trasera (la ubicación exacta es irrelevante, siempre que sea constante). Ahora podemos usar una regla y medir la distancia perpendicular entre las dos líneas amarillas, indicada por la flecha amarilla de dos puntas en la figura. También podemos medir la longitud del auto, como se indica por la flecha roja de dos puntas.

INVESTIGUE

Dividiendo la longitud de la flecha amarilla de dos puntas por la longitud de la flecha roja, obtenemos una relación de 3.474. Como las dos líneas amarillas verticales marcan la posición del centro del auto en 0.000 s y 3.000 s, sabemos que el auto recorrió una distancia de 3.474 longitudes de auto en ese intervalo de tiempo. La longitud del auto se dio como

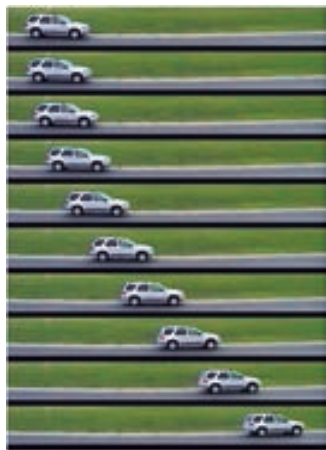


FIGURA 2.31 Secuencia de video de un auto acelerando a partir del reposo.

174.9 in = 4.442 m. De modo que la distancia total recorrida es $d = 3.474 \cdot \ell_{\text{auto}} = 3.474 \cdot 4.442 \text{ m} = 15.4315 \text{ m}$ (recuerde que, al final, redondeamos hasta el número correcto de cifras significativas).

SIMPLIFIQUE

Tenemos dos modos alternativos de proceder. El primero es más complicado. Podríamos medir la posición del auto en cada cuadro y luego usar fórmulas de diferencia como las del ejemplo 2.3. El otro modo, mucho más rápido, es suponer aceleración constante y luego usar las posiciones del auto sólo en el primer cuadro y en el último. Usaremos el segundo modo, pero al final necesitamos volver a revisar que nuestra suposición de aceleración constante se justifique.

Para aceleración constante desde el arranque a partir del reposo, tenemos simplemente

$$x = x_0 + \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow$$

$$d = x - x_0 = \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow$$

$$a = \frac{2d}{t^2}.$$

Ésta es la aceleración que queremos determinar. Una vez que tenemos la aceleración, podemos dar un estimado del tiempo para pasar de 0 a 60 mph usando $v_x = v_{x0} + at \Rightarrow t = (v_x - v_{x0})/a$. Arranque desde reposo significa que $v_{x0} = 0$, y por lo tanto tenemos

$$t(0 - 60 \text{ mph}) = \frac{60 \text{ mph}}{a}.$$

CALCULE

Insertamos los números para la aceleración:

$$a = \frac{2d}{t^2} = \frac{2 \cdot (15.4315 \text{ m})}{(3.000 \text{ s})^2} = 3.42922 \text{ m/s}^2.$$

Entonces, para el tiempo necesario para pasar de 0 a 60 mph, obtenemos

$$t(0 - 60 \text{ mph}) = \frac{60 \text{ mph}}{a} = \frac{(60 \text{ mph})(1 \text{ 609 m/mi})(1 \text{ h}/3 \text{ 600 s})}{3.42922 \text{ m/s}^2} = 7.82004 \text{ s}.$$

REDONDEE

La longitud del auto establece nuestra escala de longitud, y se nos dio con cuatro cifras significativas. El tiempo se dio con tres cifras significativas. ¿Nos da esto derecho a presentar nuestros resultados con tres cifras significativas? La respuesta es no, porque también hicimos mediciones en la figura 2.32, que tienen quizás una exactitud de sólo dos dígitos en el mejor de los casos. Además, puede haber distorsiones de campo visual o de lente en la secuencia de imágenes: en los primeros cuadros, usted ve un poco del frente del auto, y en los últimos un poco de la parte trasera. Tomando esto en cuenta, nuestros resultados se deben presentar con dos cifras significativas. De modo que nuestra respuesta final para la aceleración es

$$a = 3.4 \text{ m/s}^2.$$

Para el tiempo necesario para pasar de 0 a 60 mph, damos

$$t(0 - 60 \text{ mph}) = 7.8 \text{ s}.$$

VUELVA A REVISAR

Los números encontrados para la aceleración y el tiempo necesario para pasar de 0 a 60 mph son razonables para automóviles y pequeñas SUV; vea también el problema resuelto 2.4. Por lo tanto, tenemos la confianza de no equivocarnos por órdenes de magnitud.

Lo que debemos también volver a revisar; sin embargo, es la suposición de que la aceleración es constante. Para aceleración constante partiendo de reposo, los puntos $x(t)$ deben caer en una parábola $x(t) = \frac{1}{2}at^2$. Por lo tanto, si graficamos x en el eje horizontal y t en el vertical, como en la figura 2.33, los puntos $t(x)$ deben seguir una dependencia de raíz cuadrada: $t(x) = \sqrt{2x/a}$. Esta dependencia funcional se muestra en la curva roja de la figura 2.33. Podemos ver que la curva toca el mismo punto del auto en cada cuadro, lo cual nos da confianza de que la suposición de aceleración constante es razonable.

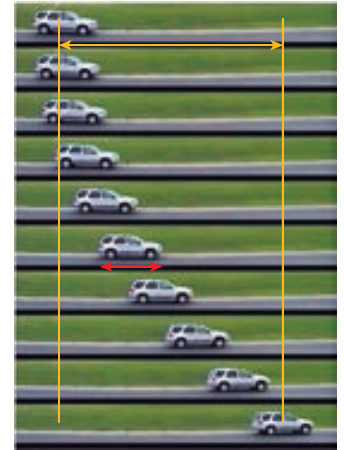


FIGURA 2.32 Determinación de la escala de longitud para la figura 2.31.

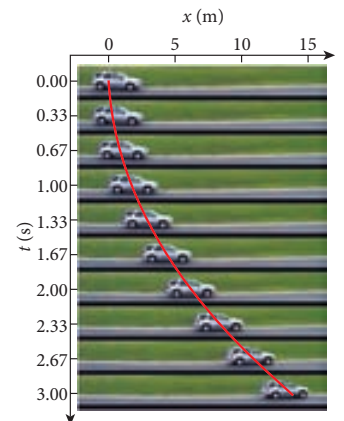


FIGURA 2.33 Análisis gráfico del problema del auto que acelera.

PREGUNTAS DE OPCIÓN MÚLTIPLE

2.1 Dos atletas saltan verticalmente hacia arriba. Al dejar el suelo, Adam tiene la mitad de la velocidad inicial de Bob. En comparación con Adam, Bob salta

- a) 0.50 veces más alto. d) tres veces más alto.
 b) 1.41 veces más alto. e) cuatro veces más alto.
 c) el doble de alto.

2.2 Dos atletas saltan verticalmente hacia arriba. Al dejar el suelo, Adam tiene la mitad de la velocidad inicial de Bob. En comparación con Adam, Bob permanece en el aire

- a) 0.50 veces más tiempo. d) tres veces más tiempo.
 b) 1.41 veces más tiempo. e) cuatro veces más tiempo.
 c) el doble de tiempo.

2.3 Un auto viaja hacia el oeste a 20.0 m/s. Determine la velocidad del auto después de 3.00 s si su aceleración es de 1.0 m/s^2 al oeste. Suponga que la aceleración permanece constante.

- a) 17.0 m/s oeste c) 23.0 m/s oeste e) 11.0 m/s sur
 b) 17.0 m/s este d) 23.0 m/s este

2.4 Un auto viaja hacia el oeste a 20.0 m/s. Determine su velocidad después de 37.00 s si su aceleración constante es de 1.0 m/s^2 al este. Suponga que la aceleración permanece constante.

- a) 17.0 m/s oeste c) 23.0 m/s oeste e) 11.0 m/s sur
 b) 17.0 m/s este d) 23.0 m/s este

2.5 Un electrón, partiendo del reposo y moviéndose con una aceleración constante, viaja 1.0 cm en 2.0 ms. ¿Cuál es la magnitud de la aceleración?

- a) 25 km/s^2 c) 15 km/s^2 e) 5.0 km/s^2
 b) 20 km/s^2 d) 10 km/s^2

2.6 Un automóvil viaja a 22.0 m/s al norte durante 30.0 min, y luego en sentido opuesto, a 28.0 m/s durante 15.0 min. ¿Cuál es el desplazamiento total del automóvil?

- a) $1.44 \cdot 10^4 \text{ m}$ b) $6.48 \cdot 10^4 \text{ m}$ c) $3.96 \cdot 10^4 \text{ m}$
 d) $9.98 \cdot 10^4 \text{ m}$

2.7 ¿Cuál de estas afirmaciones es verdadera?

1. Un objeto puede tener aceleración cero y estar en reposo.
2. Un objeto puede tener aceleración diferente de cero y estar en reposo.
3. Un objeto puede tener aceleración cero y estar en movimiento.

- a) Sólo 1 b) 1 y 3 c) 1 y 2 d) 1, 2 y 3

2.8 Un auto que se mueve a 60 km/h tarda 4.0 s en detenerse. ¿Cuál fue su desaceleración media?

- a) 2.4 m/s^2 b) 15 m/s^2 c) 4.2 m/s^2 d) 41 m/s^2

2.9 Usted suelta una roca desde un peñasco. Si se desprecia la resistencia del aire, ¿cuál (es) de la(s) siguiente(s) afirmación(es) es (son) verdadera(s)?

1. La velocidad de la roca aumentará.
2. La velocidad de la roca disminuirá.
3. La aceleración de la roca aumentará.
4. La aceleración de la roca disminuirá.

- a) 1 b) 1 y 4 c) 2 d) 2 y 3

2.10 Un auto viaja a 22.0 mph durante 15.0 min y a 35.0 mph durante 30.0 min. ¿Qué distancia viaja en total?

- a) 23.0 m b) $3.70 \cdot 10^4 \text{ m}$ c) $1.38 \cdot 10^3 \text{ m}$ d) $3.30 \cdot 10^2 \text{ m}$

PREGUNTAS

2.11 Considere tres patinadoras en hielo. Anna se mueve en la dirección x positiva sin invertir el sentido. Bertha se mueve en la dirección x negativa sin invertir el sentido. Christine se mueve en la dirección positiva x y luego invierte el sentido de su movimiento. ¿Para cuál de estas tres patinadoras la magnitud de su velocidad media es menor que la rapidez promedio a lo largo de un intervalo de tiempo?

2.12 Usted lanza una pelota verticalmente hacia arriba. ¿Cómo están orientados los vectores de velocidad y aceleración de la pelota, uno respecto al otro, durante el ascenso y el descenso de la pelota?

2.13 Después de que usted aplica los frenos, la aceleración de su auto está en sentido opuesto al de su velocidad. Si la aceleración de su auto permanece constante, describa el movimiento de su auto.

2.14 Dos autos viajan a la misma velocidad, y los conductores pisan los frenos al mismo tiempo. La desaceleración de un auto es el doble de la del otro. ¿Por qué factor se compara el tiempo necesario para detenerse de un automóvil con respecto a otro?

2.15 Si la aceleración de un objeto es cero y su velocidad es diferente de cero, ¿qué puede usted decir del movimiento del objeto? Grafique velocidad contra tiempo y aceleración contra tiempo para su explicación.

2.16 ¿La aceleración de un objeto puede ser en dirección opuesta a su movimiento? Explique.

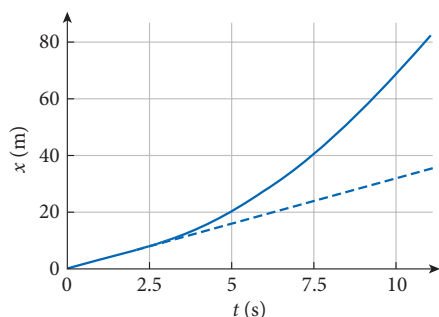
2.17 Usted y un amigo están de pie al borde de un peñasco cubierto de nieve. Al mismo tiempo, cada uno deja caer una bola de nieve al precipicio. Su bola de nieve pesa el doble de la de su amigo. Despreciando la resistencia del aire, a) ¿cuál bola de nieve llegará primero al suelo? b) ¿cuál bola de nieve tendrá la mayor velocidad?

2.18 Usted y un amigo están de pie al borde de un peñasco cubierto de nieve. Al mismo tiempo, usted lanza de manera vertical hacia arriba una bola de nieve con una velocidad de 8.0 m/s en el borde del peñasco, y su amigo lanza una bola de nieve verticalmente hacia abajo con la misma velocidad. Su bola de nieve pesa el doble de la de su amigo. Despreciando la resistencia del aire, ¿cuál bola de nieve llegará primero al suelo, y cuál tendrá la mayor velocidad?

2.19 Un auto desacelera hasta detenerse por completo. La figura muestra una secuencia de imágenes de este proceso. El tiempo entre cuadros sucesivos es de 0.333 s, y el auto es el mismo que el del problema resuelto 2.5. Suponiendo aceleración constante, ¿cuál es el valor de ésta? ¿Puede dar un estimado del error de su respuesta? ¿Está justificada la suposición de aceleración constante?



2.20 Un auto se mueve por un camino con velocidad constante. Después de un tiempo $t = 2.5$ s, el conductor acelera con aceleración constante. La posición del automóvil como función del tiempo se muestra en la curva azul de la figura.



a) ¿Cuál es el valor de la velocidad constante del auto antes de 2.5 s? (Pista: La línea punteada azul es la trayectoria que tendría el auto en ausencia de la aceleración.)

b) ¿Cuál es la velocidad del auto en $t = 7.5$ s? Use una técnica para graficar (por ejemplo, dibuje una pendiente).

c) ¿Cuál es el valor de la aceleración constante?

2.21 Usted deja caer una roca desde el borde de un peñasco de altura h . Su amiga lanza verticalmente hacia abajo una roca desde la misma altura, con una velocidad v_0 , en un tiempo t , después de que usted dejó caer su roca. Ambas rocas llegan al suelo al mismo tiempo. ¿Cuánto tiempo después de que usted dejó caer su roca, su amiga lanzó la suya? Expresé su respuesta en términos de v_0 , g , y h .

2.22 La posición de una partícula como función del tiempo está dada como $x(t) = \frac{1}{4}x_0e^{3\alpha t}$, donde α es una constante positiva.

a) ¿En qué tiempo está la partícula en $2x_0$?

b) ¿Cuál es la rapidez de la partícula como función del tiempo?

c) ¿Cuál es la aceleración de la partícula como función del tiempo?

d) ¿Cuáles son las unidades SI para α ?

2.23 La posición en función del tiempo de un objeto está dada como $x = At^4 - Bt^3 + C$.

a) ¿Cuál es la velocidad instantánea como función del tiempo?

b) ¿Cuál es la aceleración instantánea como función del tiempo?

2.24 Una llave de tuercas se lanza verticalmente hacia arriba con una velocidad v_0 . ¿Cuánto tiempo después del lanzamiento está a la mitad de su altura máxima?

PROBLEMAS

Una • y dos •• indican el nivel creciente en la dificultad del problema.

Sección 2.2

2.25 Un auto viaja al norte a 30.0 m/s durante 10.0 min. Luego viaja al sur a 40.0 m/s durante 20.0 min. ¿Cuál es la distancia total que viaja el auto y cuál es su desplazamiento?

2.26 Usted va en bicicleta en línea recta desde su casa hasta una tienda a 1 000. m de distancia. Al regreso, se detiene en la casa de un amigo que está a la mitad del camino.

a) ¿Cuál es su desplazamiento?

b) ¿Cuál es la distancia total recorrida? Después de hablar con su amigo, usted sigue el camino a su casa. Al llegar a su casa,

c) ¿Cuál fue su desplazamiento?

d) ¿Qué distancia recorrió?

Sección 2.3

2.27 Corriendo por una pista rectangular de 50 m \times 40 m usted completa una vuelta en 100 s. ¿Cuál es su velocidad media para la vuelta?

2.28 Un electrón se mueve en la dirección positiva x una distancia de 2.42 m en $2.91 \cdot 10^{-8}$ s, rebota en un protón en movi-

miento y luego se mueve en sentido opuesto una distancia de 1.69 m en $3.43 \cdot 10^{-8}$ s.

a) ¿Cuál es la velocidad media del electrón en todo el intervalo de tiempo?

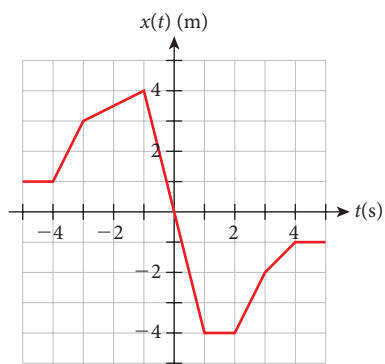
b) ¿Cuál es la rapidez media del electrón en todo el intervalo de tiempo?

2.29 La gráfica describe la posición de una partícula en una dimensión como función del tiempo. Responda a las siguientes preguntas:

a) ¿En qué intervalo de tiempo tiene la partícula su velocidad máxima? ¿Cuál es esa velocidad?

b) ¿Cuál es la velocidad media en el intervalo de tiempo entre -5 s y +5 s?

c) ¿Cuál es la rapidez media en el intervalo de tiempo entre -5 s y +5 s?



- d) ¿Cuál es la relación entre la velocidad en el intervalo de 2 s a 3 s y la velocidad en el intervalo de 3 s a 4 s?
 e) ¿En qué tiempo la velocidad de la partícula es cero?

2.30 La posición de una partícula que se mueve a lo largo del eje x está dada por $x = (11 + 14t - 2.0t^2)$, donde t está en segundos y x en metros. ¿Cuál es la velocidad media durante el intervalo de tiempo de $t = 1.0$ s a $t = 4.0$ s?

•**2.31** La posición de una partícula que se mueve a lo largo del eje x está dada por $x = 3.0t^2 - 2.0t^3$, donde x está en metros y t en segundos. ¿Cuál es la posición de la partícula cuando alcanza su velocidad máxima en el sentido positivo de x ?

2.32 La tasa de deslizamiento continental es del orden de 10.0 mm/año. ¿Aproximadamente cuánto tiempo tardaron Norteamérica y Europa en llegar a su actual separación cerca de 3 000 mi?

2.33 Usted y un amigo viajan en automóvil a la playa durante el inicio de la primavera. Usted viaja 16.0 km al este y luego 80.0 km al sur en un tiempo total de 40.0 minutos. a) ¿Cuál es la rapidez media del viaje? b) ¿Cuál es la velocidad media?

•**2.34** La trayectoria de un objeto está dada por la ecuación

$$x(t) = (4.35 \text{ m}) + (25.9 \text{ m/s})t - (11.79 \text{ m/s}^2)t^2$$

- a) ¿En cuánto tiempo su posición $x(t)$ es máxima?
 b) ¿Cuál es este valor máximo?

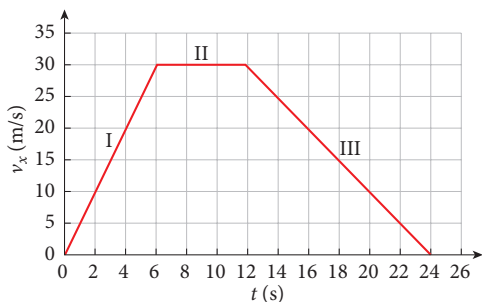
Sección 2.4

2.35 Un ladrón de bancos huye en un automóvil y llega a una intersección con una rapidez de 45 mph. Apenas pasada la intersección, se da cuenta de que necesitaba dar vuelta. Entonces pisa el freno, se detiene por completo y luego acelera en reversa. Alcanza una velocidad de 22.5 mph en reversa. El tiempo considerando la desaceleración y la reaceleración en sentido opuesto, fue de 12.4 s. ¿Cuál es la aceleración media durante este tiempo?

2.36 Un automóvil viaja al oeste a 22.0 m/s. Después de 10.0 s, su velocidad es de 17.0 m/s en la misma dirección. Encuentre la magnitud y la dirección de la aceleración media del vehículo.

2.37 El automóvil de su amigo arranca desde el reposo y viaja 0.500 km en 10.0 s. ¿Cuál es la magnitud de la aceleración constante que se requiere para hacer esto?

2.38 Un compañero de usted encontró en los datos de desempeño de su nuevo auto la gráfica de velocidad contra tiempo que se muestra en la figura.



- a) Encuentre la aceleración media del auto durante cada uno de los segmentos I, II y III.
 b) ¿Cuál es la distancia total que recorrió el auto de $t = 0$ s a $t = 24$ s?

•**2.39** La velocidad de una partícula que se mueve a lo largo del eje x está dada, para $t > 0$, por $v_x = (50.0t - 2.0t^3)$ m/s, donde t está en segundos. ¿Cuál es la aceleración de la partícula (después de $t = 0$) cuando alcanza su máximo desplazamiento en la dirección positiva del eje x ?

•**2.40.** El récord mundial de 2007 para los 100 m planos masculinos fue de 9.77 s. El corredor que ocupó el tercer lugar cruzó la línea de meta en 10.07 s. Cuando el ganador cruzó la línea de meta, ¿a qué distancia detrás de él venía el corredor que quedó en tercer lugar?

a) Calcule una respuesta suponiendo que cada corredor corrió a su rapidez media durante toda la carrera.

b) Calcule otra respuesta usando el resultado del ejemplo 2.3, considerando que un *sprinter* de clase mundial corre a una rapidez de 12 m/s después de una fase inicial de aceleración. Si ambos corredores en esta carrera alcanzan dicha velocidad, ¿a qué distancia de retraso va el corredor de tercer lugar cuando el ganador llega a la meta?

•**2.41** La posición de un objeto como función del tiempo está dada como $x = At^3 + Bt^2 + Ct + D$. Las constantes son $A = 2.1 \text{ m/s}^3$, $B = 1.0 \text{ m/s}^2$, $C = -4.1 \text{ m/s}$ y $D = 3 \text{ m}$.

- a) ¿Cuál es la velocidad del objeto en $t = 10.0$ s?
 b) ¿En qué tiempo(s) el objeto está en reposo?
 c) ¿Cuál es la aceleración del objeto en $t = 0.50$ s?

d) Grafique la aceleración como función del tiempo para el intervalo de tiempo de $t = -10.0$ s a $t = 10.0$ s.

Sección 2.5

••**2.42** Un jet de combate Tomcat F-14 está despegando de la plataforma del portaaviones USS *Nimitz*, con la ayuda de una catapulta de vapor. La ubicación del jet a lo largo de la plataforma de vuelo se mide a intervalos de 0.20 s. Estas mediciones se tabulan como sigue:

t (s)	0.00	0.20	0.40	0.60	0.80	1.00	1.20	1.40	1.60	1.80	2.00
x (m)	0.0	0.70	3.0	6.6	11.8	18.5	26.6	36.2	47.3	59.9	73.9

Use fórmulas de diferencia para calcular la velocidad media del jet y la aceleración media para cada intervalo de tiempo. Después de terminar este análisis, ¿puede decir si el Tomcat F-14 aceleró con aceleración aproximadamente constante?

Sección 2.6

2.43 Una partícula parte del reposo en $x = 0$ y se mueve durante 20 s con una aceleración de $+2.0 \text{ cm/s}^2$. Para los siguientes 40 s, la aceleración de la partícula es de -4.0 cm/s^2 . ¿Cuál es la posición de la partícula al final de este movimiento?

2.44 Un auto que se mueve en la dirección x tiene una aceleración a_x que varía con el tiempo como se muestra en la figura. En el momento $t = 0$ s, el auto está ubicado en $x = 12$ m y tiene una velocidad de 6 m/s en la dirección x positiva. ¿Cuál es la velocidad del auto en $t = 5.0$ s?



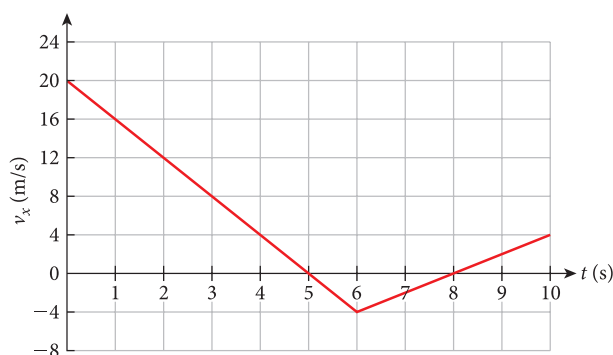
2.45 La velocidad como función del tiempo en un carro de un juego en un parque de diversiones está dada como $v = At^2 + Bt$ con las constantes $A = 2.0$ m/s³ y $B = 1.0$ m/s². Si el carro arranca en el origen, ¿cuál es su posición en $t = 3.0$ s?

2.46 Un objeto parte del reposo y tiene una aceleración dada por $a = Bt^2 - \frac{1}{2}Ct$, donde $B = 2.0$ m/s⁴ y $C = -4.0$ m/s³.

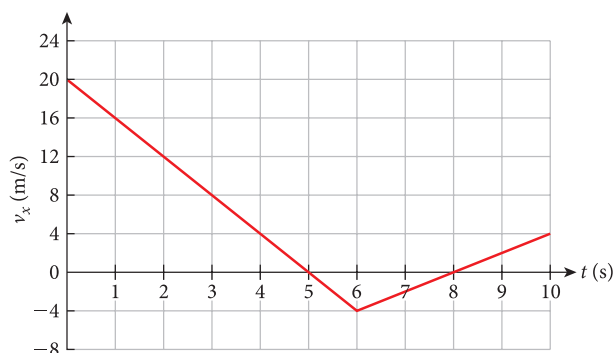
a) ¿Cuál es la velocidad del objeto después de 5.0 s?

b) ¿A qué distancia se ha movido el objeto después de $t = 5.0$ s?

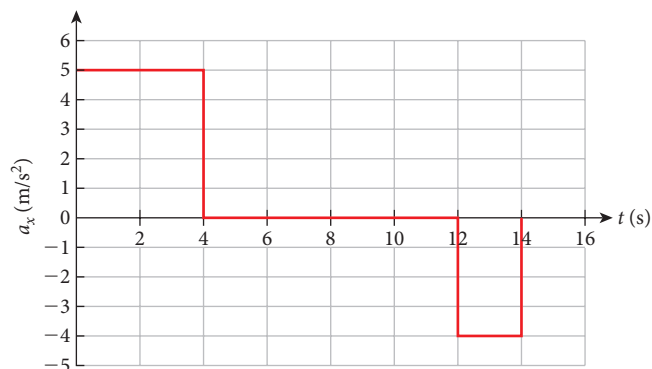
2.47 Un auto se mueve a lo largo del eje x y su velocidad, v_x , varía con el tiempo como se muestra en la figura. Si $x_0 = 2.0$ m en $t_0 = 2.0$ s, ¿cuál es la posición del auto en $t = 10.0$ s?



2.48 Un auto se mueve a lo largo del eje x y su velocidad, v_x , varía con el tiempo como se muestra en la figura. ¿Cuál es el desplazamiento, Δx , del automóvil de $t = 4$ s a $t = 9$ s?



2.49 Una motocicleta parte del reposo y acelera como se muestra en la figura. Determine a) la rapidez de la motocicleta en $t = 4.00$ s y en $t = 14.0$ s y b) la distancia recorrida en los primeros 14.0 s.



Sección 2.7

2.50 ¿Cuánto tiempo tarda un auto en acelerar desde el reposo hasta 22.2 m/s si la aceleración es constante y el auto avanza 243 m durante el periodo de aceleración?

2.51 Un auto desacelera desde una rapidez de 31.0 m/s hasta una rapidez de 12.0 m/s en una distancia de 380 m.

a) ¿Cuánto tarda este proceso, suponiendo aceleración constante?

b) ¿Cuál es el valor de la aceleración?

2.52 Una corredora con una masa de 57.5 kg parte del reposo y acelera con una aceleración constante de 1.25 m/s² hasta alcanzar una velocidad de 6.3 m/s. Luego, continúa corriendo con esta velocidad constante.

a) ¿Qué distancia ha corrido después de 59.7 s?

b) ¿Cuál es la velocidad de la corredora en este instante?

2.53 Un jet de combate aterriza en la plataforma de un portaaviones. Toca la plataforma con una rapidez de 70.4 m/s y se detiene por completo en una distancia de 197.4 m. Si este proceso tiene lugar con desaceleración constante, ¿cuál es la rapidez del jet 44.2 m antes de la ubicación final en que se detiene por completo?

2.54 Se dispara una bala a través de una tabla de 10.0 cm de espesor, en una línea de movimiento perpendicular a la cara de la tabla. Si la bala penetra con una rapidez de 400. m/s y sale con una de 200. m/s, ¿cuál es la aceleración cuando pasa a través de la tabla?

2.55 Un auto parte del reposo y acelera a 10.0 m/s². ¿Qué distancia recorre en 2.00 s?

2.56 Un avión parte del reposo y acelera a 12.1 m/s². ¿Cuál es su velocidad al final de la pista de despegue de 500. m?

2.57 Partiendo del reposo, una lancha aumenta su rapidez a 5.00 m/s con aceleración constante.

a) ¿Cuál es la rapidez media de la lancha?

b) Si la lancha tarda 4.00 s en alcanzar esta velocidad, ¿qué distancia ha recorrido?

2.58 Se lanza una pelota verticalmente hacia arriba con una rapidez inicial de 26.4 m/s. ¿Cuánto tarda en regresar al punto de partida?

2.59 Se lanza una piedra hacia arriba, desde el nivel del suelo, con una velocidad inicial de 10.0 m/s.

- ¿Cuál es la velocidad de la piedra después de 0.50 s?
- ¿A qué altura sobre el nivel del suelo está la piedra después de 0.50 s?

2.60 Se lanza una piedra hacia abajo con una velocidad inicial de 10.0 m/s. La aceleración de la piedra es constante y tiene el valor de la aceleración en caída libre, 9.81 m/s^2 . ¿Cuál es la velocidad de la piedra después de 0.500 s?

2.61 Se lanza una pelota directamente hacia abajo, con una velocidad inicial de 10.0 m/s, desde una altura de 50.0 m. ¿Cuánto tiempo tarda en llegar al suelo?

2.62 Se lanza un objeto de manera vertical hacia arriba y tiene una rapidez de 20.0 m/s cuando llega a dos tercios de su altura máxima por arriba del punto de lanzamiento. Determine la altura máxima.

2.63 ¿Cuál es la velocidad a la mitad de la trayectoria de una pelota que puede alcanzar una altura y cuando se lanza con una velocidad inicial v_0 ?

•**2.64** El corredor 1 está de pie, inmóvil, en una pista recta. El corredor 2 lo rebasa, corriendo a una rapidez constante de 5.1 m/s. Exactamente al pasar el corredor 2, el corredor 1 acelera con una aceleración constante de 0.89 m/s^2 . ¿A qué distancia alcanza el corredor 1 al corredor 2?

•**2.65** Una chica va en bicicleta. Cuando llega a una esquina, se detiene a tomar agua de su botella. En ese momento, pasa un amigo a una rapidez constante de 8.0 m/s.

- Después de 20 s, la chica se monta nuevamente en su bicicleta y viaja con una aceleración constante de 2.2 m/s^2 . ¿Cuánto tiempo tarda en alcanzar a su amigo?
- Si la chica hubiese estado en su bicicleta pedaleando con una rapidez de 1.2 m/s cuando pasó su amigo, ¿qué aceleración constante habría necesitado para alcanzarlo en la misma cantidad de tiempo?

•**2.66** Un motociclista corre con una rapidez constante de 36.0 m/s cuando pasa frente a un coche patrulla estacionado al lado del camino. El radar, colocado en la ventana trasera del coche patrulla, mide la velocidad de la moto. En el instante en que la motocicleta pasa frente al coche patrulla, el oficial de policía comienza a perseguirla con una aceleración constante de 4.0 m/s^2 .

- ¿Cuánto tarda el policía en alcanzar al motociclista?
- ¿Cuál es la rapidez del coche patrulla cuando alcanza a la moto?
- ¿A qué distancia estará el coche patrulla de su posición inicial?

•**2.67** Dos vagones de tren están en una vía recta horizontal. Un vagón parte del reposo y se pone en movimiento con una aceleración constante de 2.00 m/s^2 . Este vagón se mueve hacia el segundo, que está a 30.0 m de distancia, con una rapidez constante de 4.00 m/s.

a) ¿Dónde chocarán los vagones?

b) ¿Cuánto tardarán los vagones en chocar?

•**2.68** El planeta Mercurio tiene una masa que es 5% la de la Tierra, y su aceleración gravitacional es $g_{\text{mercurio}} = 3.7 \text{ m/s}^2$.

a) ¿Cuánto tarda una roca que se suelta desde una altura de 1.75 m en tocar el suelo de Mercurio?

b) ¿Cómo se compara este resultado con el tiempo que tarda la misma roca en tocar el suelo de la Tierra, si se suelta desde la misma altura?

c) ¿Desde qué altura tendría usted que soltar la roca en la Tierra para que el tiempo de caída en ambos planetas fuera el mismo?

•**2.69** Bill Jones tiene una mala noche en su liga de juego de bolos. Cuando llega a casa, lanza con enojo su bola de boliche por la ventana de su departamento, desde una altura de 63.17 m arriba del suelo. John Smith ve la bola pasar por su ventana cuando está a 40.95 m sobre el nivel del suelo. ¿Cuánto tiempo pasa desde el momento en que John Smith ve pasar la bola frente a su ventana y el momento en que la bola toca el suelo?

•**2.70** Imagínese en el castillo del abismo de Helm del *Señor de los Anillos*. Usted está en la cúspide del muro del castillo soltando rocas sobre monstruos de todas clases que están a 18.35 m debajo de usted. En el momento en que suelta una roca, un arquero que está ubicado exactamente debajo de usted dispara una flecha de manera vertical hacia arriba con una velocidad inicial de 47.4 m/s. La flecha impacta la roca en el aire. ¿Cuánto tiempo después de que usted soltó la roca sucede esto?

•**2.71** Se lanza un objeto verticalmente hacia arriba de modo que tiene una velocidad de 25 m/s cuando alcanza un cuarto de su altura máxima sobre el punto de partida. ¿Con qué velocidad se lanza el objeto?

•**2.72** En un hotel de lujo, la parte posterior del ascensor es de vidrio para permitirle gozar de una linda vista en el trayecto. El ascensor viaja a una rapidez media de 1.75 m/s. Un muchacho en el piso 15, 80.0 m arriba del nivel del suelo, suelta una piedra en el mismo instante en el que el ascensor inicia su recorrido del primero al quinto piso. Suponga que el ascensor viaja a su rapidez media durante todo el trayecto, y desprecie las dimensiones del mismo.

a) ¿Cuánto tiempo después de haberse soltado la piedra la ve usted?

b) ¿Cuánto tarda la piedra en llegar al nivel del suelo?

••**2.73** Usted arroja un globo de agua directamente hacia abajo por la ventana de su dormitorio, 80.0 m arriba de la cabeza de su amigo. En un tiempo de 2.00 s después de que soltó el globo, sin darse cuenta de que está lleno de agua, su amigo dispara un dardo hacia arriba desde su lanzadardos, que está a la misma altura que su cabeza, directamente hacia el globo, con una velocidad inicial de 20.0 m/s.

a) ¿Cuánto tiempo después de que usted suelta el globo lo reventará el dardo?

b) ¿Cuánto tiempo después de que el dardo revienta el globo tendrá su amigo que quitarse de la trayectoria del agua que

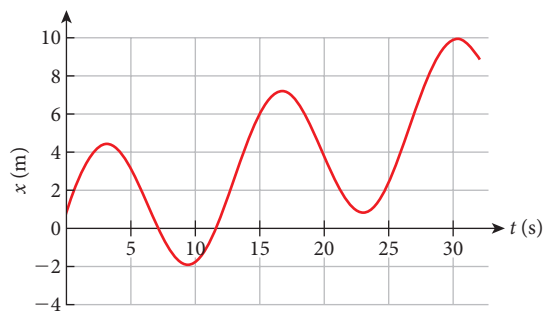
cae? Suponga que el globo se rompe instantáneamente al tocarlo el dardo.

Problemas adicionales

2.74 Una corredora con masa de 56.1 kg parte del reposo y acelera con una aceleración constante de 1.23 m/s^2 hasta que alcanza una velocidad de 5.10 m/s. Luego continúa corriendo a esta velocidad constante. ¿Cuánto tarda en recorrer 173 m?

2.75 Un jet toca pista con una rapidez de 142.4 mph. Después de 12.4 s, el jet se detiene por completo. Suponiendo una aceleración constante, ¿a qué distancia del punto en que tocó pista se detiene el jet?

2.76 En la gráfica de posición como función del tiempo, marque los puntos donde la velocidad es cero, y los puntos donde la aceleración es cero.



2.77 Se lanza un objeto hacia arriba con una rapidez de 28.0 m/s. ¿Cuánto tarda en alcanzar su altura máxima?

2.78 Se lanza un objeto hacia arriba con una rapidez de 28.0 m/s. ¿A qué altura sobre el punto de lanzamiento se encuentra después de 1.00 s?

2.79 Se lanza un objeto hacia arriba con una rapidez de 28.0 m/s. ¿Qué altura máxima alcanza sobre el punto de lanzamiento?

2.80 La distancia mínima necesaria para que un auto frene hasta detenerse desde una velocidad de 100.0 km/s es de 40.0 m en pavimento seco. ¿Cuál es la distancia mínima necesaria para que este auto frene hasta detenerse desde una velocidad de 130.0 km/s en pavimento seco?

2.81 Un auto que se mueve a 60.0 km/h se detiene en $t = 4.0 \text{ s}$. Suponga una desaceleración uniforme.

- ¿Qué distancia recorre el auto hasta que se detiene?
- ¿Cuál es la desaceleración?

2.82 Usted conduce a 29.1 m/s cuando un camión que va delante de usted se detiene a una distancia de 200.0 m de su defensa. Sus frenos están en malas condiciones y usted desacelera a una razón constante de 2.4 m/s^2 .

- ¿Cuánto se acerca usted a la defensa del camión?
- ¿Cuánto tarda en detenerse?

2.83 Un tren que viaja a 40.0 m/s va directamente hacia un tren que está detenido en la misma vía. El tren en movimiento desacelera a razón de 6.0 m/s^2 , y el tren estacionado está a una

distancia de 100.0 m. ¿A qué distancia del tren estacionado estará el tren en movimiento cuando se detenga?

2.84 Un auto que va a 25.0 m/s frena y desacelera uniformemente a razón de 1.2 m/s^2 .

- ¿Cuánto avanza en 3.0 s?
- ¿Cuál es su velocidad al final de este intervalo de tiempo?
- ¿Cuánto tarda el auto en detenerse?
- ¿Qué distancia avanza el auto antes de detenerse?

2.85 La rapidez más alta en la historia de las carreras NASCAR fue de 212.809 mph (alcanzada por Bill Elliott en 1987, en Talladega). Si el auto de carreras desacelera desde esa velocidad a razón de 8.0 m/s^2 , ¿qué tan lejos avanzaría antes de detenerse?

2.86 Usted vuela en una aerolínea comercial en su viaje de Houston, Texas, a Oklahoma City, Oklahoma. El piloto anuncia que el avión está directamente sobre Austin, Texas, volando a una rapidez constante de 245 mph, y que volará de manera directa hacia Dallas, Texas, que está a 362 km. ¿Cuánto tiempo pasará antes de que usted esté directamente sobre Dallas, Texas?

2.87 La posición de un auto de carreras en una pista recta está dada como $x = at^3 + bt^2 + c$, donde $a = 2.0 \text{ m/s}^3$, $b = 2.0 \text{ m/s}^2$, y $c = 3.0 \text{ m}$.

- ¿Cuál es la posición del auto en $t = 4.0 \text{ s}$ y $t = 9.0 \text{ s}$?
- ¿Cuál es la rapidez media entre $t = 4.0 \text{ s}$ y $t = 9.0 \text{ s}$?

2.88 Una chica está de pie al borde de un acantilado a 100. m arriba del suelo. Extiende el brazo y lanza una piedra directamente hacia arriba con una rapidez de 8.00 m/s.

- ¿Cuánto tarda la piedra en tocar el suelo?
- ¿Cuál es la velocidad de la piedra justo antes de tocar el suelo?

2.89 Se instala una doble trampa de velocidad en la carretera. Un coche patrulla está oculto detrás de un letrero del camino, y otro a cierta distancia bajo un puente. Al pasar un sedán frente al primer coche patrulla, se mide su velocidad como 105.9 mph. Como el conductor tiene un detector de radares, se da cuenta de que se ha medido su rapidez, y trata de desacelerar de manera gradual sin pisar los frenos para no alertar a la policía de que sabía que iba demasiado rápido. Sólo quitar el pie del acelerador produce una desaceleración constante. Exactamente 7.05 s después, el sedán pasa por el segundo coche patrulla. Ahora se mide su velocidad como de sólo 67.1 mph, apenas por debajo del límite de velocidad local en autopistas.

- ¿Cuál es el valor de la desaceleración?
- ¿A qué distancia está un coche patrulla del otro?

2.90 Durante una prueba realizada en una pista de aeropuerto, un nuevo auto de carreras alcanza una rapidez de 258.4 mph partiendo del reposo. El auto acelera con aceleración constante y alcanza esta marca de velocidad a una distancia de 612.5 m del punto de partida. ¿Cuál fue la velocidad después de la cuarta parte, la mitad y las tres cuartas partes de la distancia?

- 2.91** La posición vertical de una pelota suspendida por una banda de caucho está dada por la ecuación

$$y(t) = (3.8 \text{ m})\sin(0.46 t/s - 0.31) - (0.2 \text{ m/s})t + 5.0 \text{ m}$$

- a) ¿Cuáles son las ecuaciones para la velocidad y la aceleración de la pelota?

- b) ¿Para qué tiempos entre 0 y 30 s es cero la aceleración?

- 2.92** La posición de una partícula que se mueve a lo largo del eje x varía con el tiempo de acuerdo con la expresión $x = 4t^2$, donde x está en metros y t en segundos. Evalúe la posición de la partícula

- a) en $t = 2.00 \text{ s}$.

- b) en $2.00 \text{ s} + \Delta t$.

- c) Evalúe el límite de $\Delta x/\Delta t$ cuando Δt tiende a cero, para determinar la velocidad en $t = 2.00 \text{ s}$.

- 2.93** En 2005, el huracán Rita impactó contra varios estados del sur de Estados Unidos. En el pánico por escapar a la ira del huracán, miles de personas trataron de huir de Houston, Texas, en automóviles. Un auto lleno de estudiantes que viajaba a Tyler, Texas, 199 millas al norte de Houston, tuvo una rapidez promedio de 3.0 m/s durante una cuarta parte del tiempo, luego 4.5 m/s durante otra cuarta parte del tiempo, y de 6.0 m/s durante el resto del viaje.

- a) ¿Cuánto tardaron los estudiantes en llegar a su destino?

- b) Trace una gráfica de posición contra tiempo para el viaje.

- 2.94** Se lanza una pelota verticalmente hacia arriba a una rapidez de 15.0 m/s . Ignore la resistencia del aire.

- a) ¿Cuál es la altura máxima que alcanzará la pelota?

- b) ¿Cuál es la rapidez de la pelota cuando llega a 5.00 m ?

- c) ¿Cuánto tardará en llegar a 5.00 m sobre su posición cuando va subiendo?

- d) ¿Cuánto tardará en llegar a 5.00 m sobre su posición cuando va descendiendo?

- 2.95** El Hotel Bellagio de Las Vegas, Nevada, es bien conocido por sus fuentes musicales, que usan 192 Hyper-Shooters para lanzar agua a cientos de pies hacia arriba, al ritmo de la música. Uno de los Hyper-Shooters lanza agua verticalmente hacia arriba a una altura de 240 pies.

- a) ¿Cuál es la rapidez inicial del agua?

- b) ¿Cuál es la rapidez del agua cuando está a la mitad de la altura en su descenso?

- c) ¿Cuánto tarda el agua en caer de regreso a su punto de partida desde la mitad de su altura máxima?

- 2.96** Usted está tratando de mejorar su puntería disparando a una lata colocada encima de un poste de una barda. Usted yerra y la bala, moviéndose a $200. \text{ m/s}$, se incrusta 1.5 cm en el poste y se detiene. Si se supone aceleración constante, ¿cuánto tarda en detenerse la bala?

- 2.97** Usted conduce con una rapidez constante de 13.5 m/s durante 30.0 s . Luego acelera durante 10.0 s hasta una velocidad de 22.0 m/s . Luego desacelera hasta detenerse en 10.0 s . ¿Qué distancia ha recorrido?

- 2.98** Se deja caer una pelota desde una azotea de un edificio. Rebota en el suelo y luego se atrapa a su altura original 5.0 s después.

- a) ¿Cuál era la rapidez de la pelota justo antes de tocar el suelo?

- b) ¿Qué altura tenía el edificio? Usted está observando desde una ventana 2.5 m arriba del suelo. La abertura de la ventana mide 1.2 m desde la parte superior a la inferior.

- c) ¿En qué tiempo después de que se soltó la pelota la vio usted por primera vez desde su ventana?

Movimiento en dos y tres dimensiones

3



FIGURA 3.1 Secuencia de exposición múltiple de una pelota rebotando.

LO QUE APRENDEREMOS	72
3.1 Sistemas de coordenadas tridimensionales	72
3.2 Velocidad y aceleración en un plano	73
3.3 Movimiento ideal de proyectil	74
Ejemplo 3.1 Tiro al mono	75
Forma de trayectoria de un proyectil	76
Dependencia del vector de velocidad con respecto al tiempo	77
3.4 Altura máxima y alcance de un proyectil	78
Problema resuelto 3.1 Lanzamiento de una pelota de béisbol	79
Ejemplo 3.2 Bateo de una pelota de béisbol	81
Problema resuelto 3.2 <i>Hang time</i> "Tiempo de vuelo"	82
3.5 Movimiento realista de proyectil	83
3.6 Movimiento relativo	84
Ejemplo 3.3 Avión en viento cruzado	86
Ejemplo 3.4 Manejando bajo la lluvia	87
LO QUE HEMOS APRENDIDO/ GUÍA DE ESTUDIO PARA EXAMEN	87
Práctica para resolución de problemas	88
Problema resuelto 3.3 Tiempo de vuelo	89
Problema resuelto 3.4 Venado en movimiento	90
Preguntas de opción múltiple	92
Preguntas	93
Problemas	94

LO QUE APRENDEREMOS

- Usted aprenderá a manejar el movimiento en dos y tres dimensiones usando métodos desarrollados para movimiento unidimensional.
- Usted determinará la trayectoria parabólica del movimiento ideal de proyectil.
- Usted podrá calcular la altura máxima y el alcance máximo de una trayectoria ideal de proyectil en términos del vector de velocidad inicial y de la posición inicial.
- Usted aprenderá a describir el vector de velocidad de un proyectil en cualquier tiempo durante su vuelo.
- Usted apreciará que las trayectorias realistas de objetos como pelotas de béisbol se afectan por la fricción del aire y no son exactamente parabólicas.
- Usted aprenderá a transformar vectores de velocidad de un marco de referencia a otro.

Todo mundo ha visto una pelota que rebota; pero ¿ha observado en detalle la trayectoria que sigue? Si usted pudiera hacer más lento el movimiento de la pelota, como en la foto de la figura 3.1, vería el arco simétrico de cada rebote, que se vuelve más pequeño hasta que la pelota se detiene. Esta trayectoria es característica del movimiento bidimensional conocido como *movimiento de proyectil*. Usted puede ver la misma forma parabólica en fuentes de agua, fuegos artificiales, tiros de basquetbol..., cualquier clase de movimiento aislado donde la fuerza de la gravedad es constante de manera relativa y el objeto en movimiento es suficientemente denso para ignorar la resistencia del aire (una fuerza que tiende a hacer más lentos los movimientos a través del aire).

Este capítulo hace extensiva la explicación del capítulo 2 sobre desplazamiento, velocidad y aceleración al movimiento bidimensional. Las definiciones de estos vectores en dos dimensiones son muy similares a las definiciones unidimensionales; pero podemos aplicarlas a una mayor variedad de situaciones de la vida real. El movimiento bidimensional es todavía más restringido que el movimiento general en tres dimensiones, pero se aplica a una amplia gama de movimientos comunes e importantes que consideraremos a lo largo de este curso.

3.1 Sistemas de coordenadas tridimensionales

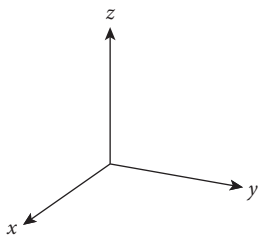


FIGURA 3.2 Un sistema de mano derecha de coordenadas cartesianas xyz .

Después de haber estudiado el movimiento en una dimensión, abordaremos en seguida problemas más complicados en dos y tres dimensiones espaciales. Para describir este movimiento, trabajaremos en coordenadas cartesianas. En un sistema tridimensional de coordenadas cartesianas, decidimos que los ejes x y y estén en el plano horizontal, y que el eje z apunte de manera vertical hacia arriba (figura 3.2). Los tres ejes de coordenadas están a 90° uno de otro (ortogonales), como se necesita para un sistema de coordenadas cartesianas.

La convención que se sigue, sin excepción en este libro, es que el sistema de coordenadas cartesianas cumple con la regla de la **mano derecha**. Esta convención significa que usted puede obtener la orientación relativa de los tres ejes de coordenadas usando su mano derecha. Para determinar las direcciones positivas de los tres ejes, mantenga su mano derecha con el pulgar apuntando hacia arriba y el dedo índice hacia el frente; estos dos dedos tendrán naturalmente entre sí un ángulo de 90° . Luego saque su dedo medio de manera que esté en ángulo recto tanto con el índice como con el pulgar (figura 3.3). Los tres ejes se asignan a los dedos como se muestra en la figura 3.3a): el pulgar es x , el índice es y y el dedo medio es z . Usted puede girar su mano derecha en cualquier

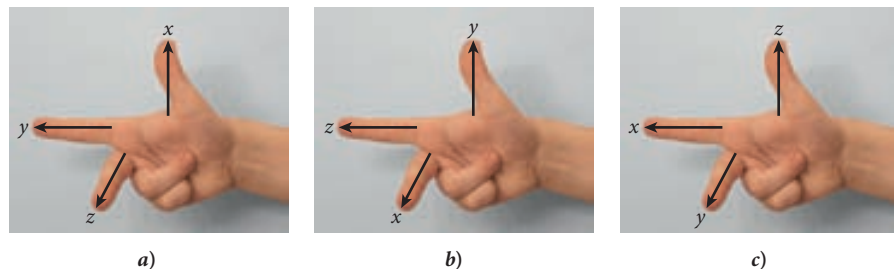


FIGURA 3.3 Tres posibles formas de realizar el sistema de coordenadas cartesianas de la mano derecha.

dirección, pero la orientación relativa entre los tres dedos sigue siendo la misma. Si lo desea, puede cambiar las letras de los dedos, como se muestra en la figura 3.3b) y en la figura 3.3c). Sin embargo, z siempre tiene que seguir a y , y y tiene que seguir a x . La figura 3.3 muestra todas las combinaciones posibles de la asignación del uso de la regla de la mano derecha de los ejes a los dedos. En realidad, usted sólo tiene que recordar una de ellas, porque su mano siempre se puede orientar en el espacio tridimensional de tal manera que las asignaciones de ejes a sus dedos se puedan alinear con los ejes esquemáticos de coordenadas que se muestran en la figura 3.2.

Con este sistema de coordenadas cartesianas, un vector de posición se puede escribir en forma de componentes como

$$\vec{r} = (x, y, z) = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}. \quad (3.1)$$

Un vector de velocidad es

$$\vec{v} = (v_x, v_y, v_z) = v_x\hat{x} + v_y\hat{y} + v_z\hat{z}. \quad (3.2)$$

Para vectores unidimensionales, la derivada respecto del tiempo del vector de posición define el vector de velocidad. Éste es el caso también para más de una dimensión:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}) = \frac{dx}{dt}\hat{x} + \frac{dy}{dt}\hat{y} + \frac{dz}{dt}\hat{z}. \quad (3.3)$$

En el último paso de esta ecuación, usamos las reglas de suma y producto de la diferenciación, así como el hecho de que los vectores unitarios son vectores constantes (direcciones fijas a lo largo de los ejes de coordenadas y magnitud constante de 1). Comparando las ecuaciones 3.2 y 3.3, vemos que

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}. \quad (3.4)$$

El mismo procedimiento nos lleva del vector de velocidad al vector de aceleración tomando otra derivada con respecto al tiempo:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\hat{x} + \frac{dv_y}{dt}\hat{y} + \frac{dv_z}{dt}\hat{z}. \quad (3.5)$$

Podemos, por lo tanto, escribir los componentes cartesianos del vector de aceleración:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt}, \quad a_z = \frac{dv_z}{dt}. \quad (3.6)$$

3.2 Velocidad y aceleración en un plano

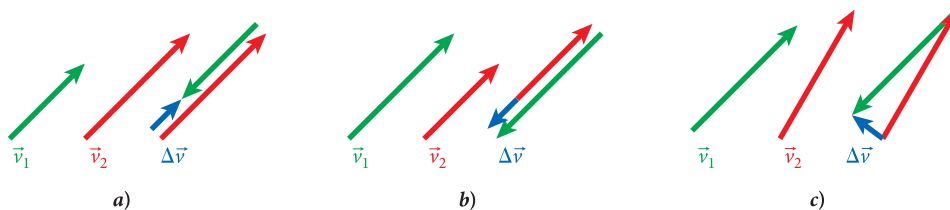
La diferencia más notable entre la velocidad a lo largo de una línea y la velocidad en dos o más dimensiones es que esta última puede cambiar tanto de dirección como de magnitud. Como la aceleración se define como cambio en la velocidad —cualquier cambio en la velocidad— dividido entre un intervalo de tiempo, puede haber aceleración incluso cuando la magnitud de la velocidad no cambia.

Considere, por ejemplo, una partícula que se mueve en dos dimensiones (es decir, en un plano). En el tiempo t_1 , la partícula tiene una velocidad \vec{v}_1 , y en un tiempo posterior t_2 , la partícula tiene una velocidad \vec{v}_2 . El cambio en la velocidad de la partícula es $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$. La aceleración media \vec{a}_{prom} , para el intervalo de tiempo $\Delta t = t_2 - t_1$ está dada por

$$\vec{a}_{\text{prom}} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1}. \quad (3.7)$$

La figura 3.4 muestra tres casos diferentes para el cambio en la velocidad de una partícula que se mueve en dos dimensiones en un intervalo dado de tiempo. La figura 3.4a) muestra las velocidades inicial y final de la partícula; éstas tienen la misma dirección, pero la magnitud de la velocidad final es mayor que la de la velocidad inicial. El cambio resultante en la velocidad y la aceleración media tienen la misma dirección que las velocidades. La figura 3.4b) muestra de nuevo las velocidades inicial y final apuntando en el mismo sentido, pero la magnitud de la velocidad final es menor que la magnitud de la velocidad inicial. El cambio resultante en la velocidad y la acele-

FIGURA 3.4 En el tiempo t_1 , una partícula tiene una velocidad \vec{v}_1 . En un tiempo posterior t_2 , la partícula tiene una velocidad \vec{v}_2 . La aceleración promedio está dada por $\vec{a}_{\text{prom}} = \Delta\vec{v} / \Delta t = (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) / (t_2 - t_1)$. a) Un intervalo de tiempo correspondiente a $|\vec{v}_2| > |\vec{v}_1|$, con \vec{v}_2 y \vec{v}_1 en la misma dirección y sentido. b) Un intervalo de tiempo correspondiente a $|\vec{v}_2| < |\vec{v}_1|$, con \vec{v}_2 y \vec{v}_1 en la misma dirección y sentido. c) Un intervalo de tiempo con $|\vec{v}_2| = |\vec{v}_1|$, pero con \vec{v}_2 en una dirección diferente a la de \vec{v}_1 .



ración media tienen sentido opuesto al de las velocidades. La figura 3.4c) ilustra el caso en que las velocidades inicial y final tienen la misma magnitud, pero la dirección del vector velocidad final es diferente de la dirección del vector velocidad inicial. Aun cuando las magnitudes de los vectores de velocidad inicial y final sean las mismas, el cambio en velocidad y la aceleración media no son cero, y pueden estar en una dirección que no está relacionada de manera obvia con las direcciones de la velocidad inicial o final.

Por lo tanto, en dos dimensiones, un vector de aceleración tiene lugar si el vector de velocidad de un objeto cambia de magnitud o de dirección. Cada vez que un objeto viaja a lo largo de una trayectoria curva, en dos o tres dimensiones, debe tener aceleración. Examinaremos los componentes de la aceleración en más detalle en el capítulo 9, cuando expliquemos el movimiento circular.

3.3 Movimiento ideal de proyectil

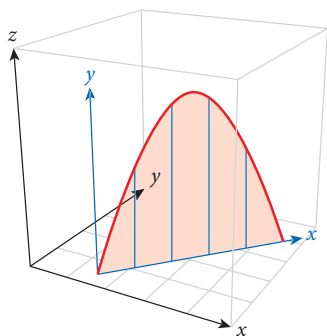


FIGURA 3.5 Trayectoria en tres dimensiones reducida a una trayectoria en dos dimensiones.

En algunos casos especiales de movimiento tridimensional, la proyección horizontal de la trayectoria o ruta de vuelo es una línea recta. Esta situación ocurre siempre que las aceleraciones en el plano horizontal xy sean cero, de modo que el objeto tiene componentes constantes de la velocidad, v_x y v_y , en el plano horizontal. Este caso se muestra en la figura 3.5 para una pelota de béisbol lanzada al aire. En este caso, podemos asignar nuevos ejes de coordenadas de tal manera que el eje x señale a lo largo de la proyección horizontal de la trayectoria, y el eje y sea el eje vertical. En este caso especial el movimiento en tres dimensiones se puede describir efectivamente como un movimiento en dos dimensiones espaciales. Una gran cantidad de problemas de la vida real cae en esta categoría, de manera especial en problemas relacionados con el movimiento de proyectiles ideales.

Un **proyectil ideal** es cualquier objeto que se lanza con alguna velocidad inicial y luego se mueve sólo bajo la influencia de la aceleración de la gravedad, que se asume constante en el sentido vertical hacia abajo. Un tiro libre de basquetbol (figura 3.6) es un buen ejemplo de movimiento de proyectil ideal, como también lo es el vuelo de una bala o la trayectoria de un automóvil que salta del piso. El **movimiento de proyectil ideal** ignora la resistencia del aire y la velocidad del viento, la rotación del proyectil y otros efectos que influyen en el vuelo de proyectiles en la vida real. Para situaciones realistas en las que se mueve en el aire una pelota de golf o de tenis o de béisbol, la trayectoria real no está bien descrita por el movimiento de proyectil ideal, y exige un análisis más elaborado. Explicaremos estos efectos en la sección 3.5, pero no entraremos en detalles cuantitativos.

Comencemos con el movimiento de proyectil ideal, sin efectos debidos a la resistencia del aire ni a ninguna otra fuerza fuera de la gravedad. Trabajamos con dos componentes cartesianos: x en la dirección horizontal y y en la dirección vertical (hacia arriba). Por lo tanto, el vector de posición para el movimiento del proyectil es

$$\vec{r} = (x, y) = x\hat{x} + y\hat{y}, \tag{3.8}$$

y el vector de velocidad es

$$\vec{v} = (v_x, v_y) = v_x\hat{x} + v_y\hat{y} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) = \frac{dx}{dt}\hat{x} + \frac{dy}{dt}\hat{y}. \tag{3.9}$$

Dada nuestra elección de sistema de coordenadas con un eje y vertical, la aceleración debida a la gravedad actúa hacia abajo, en la dirección y negativa; y no hay aceleración en la dirección horizontal:

$$\vec{a} = (0, -g) = -g\hat{y}. \tag{3.10}$$

Para este caso especial de aceleración constante sólo en la dirección y y con aceleración cero en la dirección x , tenemos un problema de caída libre en la dirección vertical y movimiento con velo-



FIGURA 3.6 Fotografía de un lanzamiento libre con la trayectoria parabólica del balón de basquetbol sobrepuesta.

cidad constante en la dirección horizontal. Las ecuaciones cinemáticas para la dirección x son las correspondientes a un objeto que se mueve con velocidad constante:

$$x = x_0 + v_{x0}t \quad (3.11)$$

$$v_x = v_{x0}. \quad (3.12)$$

Del mismo modo que en el capítulo 2, usamos la notación $v_{x0} \equiv v_x(t=0)$ para el valor inicial del componente x de la velocidad. Las ecuaciones cinemáticas para la dirección y son las del movimiento en caída libre en una dimensión:

$$y = y_0 + v_{y0}t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (3.13)$$

$$y = y_0 + \bar{v}_y t \quad (3.14)$$

$$v_y = v_{y0} - gt \quad (3.15)$$

$$\bar{v}_y = \frac{1}{2}(v_y + v_{y0}) \quad (3.16)$$

$$v_y^2 = v_{y0}^2 - 2g(y - y_0). \quad (3.17)$$

Por congruencia, escribimos $v_{y0} \equiv v_y(t=0)$. Con estas siete ecuaciones para los componentes x y y , podemos resolver cualquier problema relacionado con el movimiento de un proyectil ideal. Observe que, como el movimiento bidimensional queda descompuesto en movimientos unidimensionales separados, estas ecuaciones se pueden escribir en forma de componentes, sin usar los vectores unitarios.

EJEMPLO 3.1 Tiro al mono

Muchas demostraciones de clase ilustran el hecho de que el movimiento en la dirección x y el movimiento en la dirección y son definitivamente independientes uno del otro, como se supone en la deducción de las ecuaciones para el movimiento de proyectil. En la figura 3.7 se muestra una demostración popular, que se llama “tiro al mono”. La demostración se basa en una narración. Un mono se ha escapado del zoológico y ha trepado a un árbol. La guardiana del zoológico quiere disparar al mono un dardo tranquilizador con objeto de atraparlo, pero sabe que el mono se soltará de la rama de donde se está agarrando al sonido del disparo. Su reto es, entonces, darle al mono en el aire, mientras está cayendo.

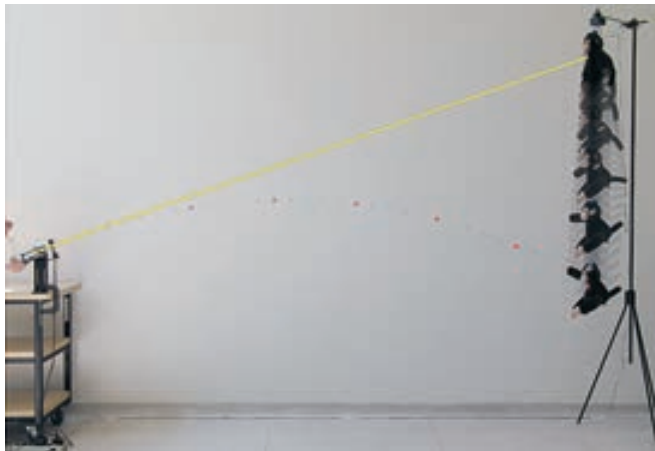
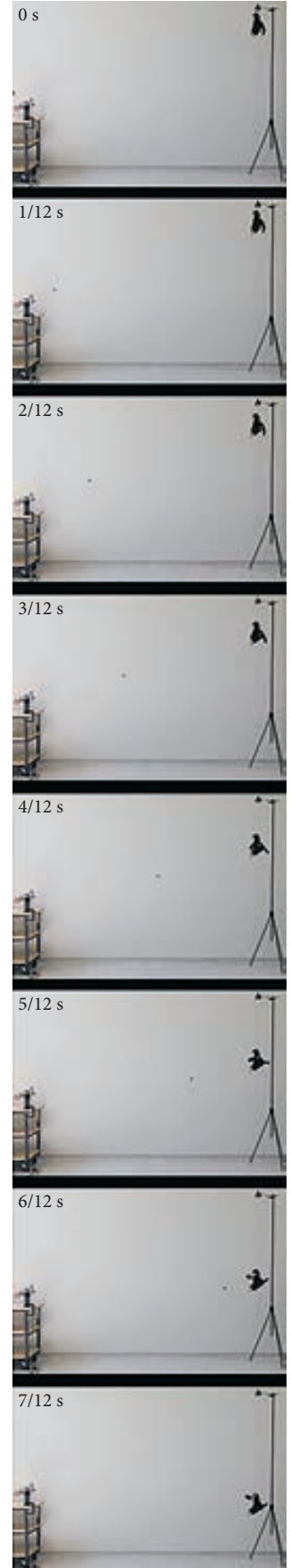


FIGURA 3.7 La demostración del tiro al mono. En el lado derecho hay algunas de las tomas individuales del video, con información cronológica en la esquina superior izquierda de cada cuadro. A la izquierda, estas tomas se han combinado en una sola imagen con una línea amarilla sobrepuesta que indica la línea inicial de mira del lanzador de proyectiles.



(continúa)

(continuación)

PROBLEMA

¿A dónde debe apuntar la guardiana para atinar al mono mientras cae?

SOLUCIÓN

La guardiana debe apuntar directamente al mono, como se muestra en la figura 3.7, suponiendo que es despreciable el tiempo que tarda el sonido del disparo en llegar al mono y que la rapidez del dardo es suficientemente alta para cubrir la distancia horizontal al árbol. Tan pronto como el dardo sale del arma, entra en caída libre, igual que el mono. Como tanto el mono como el dardo están en caída libre, caen con la misma aceleración, independientemente del movimiento del dardo en la dirección x y de la velocidad inicial del dardo. El dardo y el mono se encontrarán en un punto justo debajo del punto en que el mono se soltó de la rama.

EXPLICACIÓN

Cualquier buen tirador puede decirle que, para un blanco fijo, usted necesita corregir su puntería para tener en cuenta el movimiento en caída libre del proyectil en su camino hacia el blanco. Como usted puede deducir de la figura 3.7, ni siquiera una bala disparada con un rifle de alto poder volaría en línea recta, sino caería bajo la influencia de la aceleración gravitacional. Sólo en una situación como la de la demostración del tiro al mono, donde el blanco entra en caída libre tan pronto como el proyectil sale del cañón, se puede apuntar directamente al blanco sin hacer correcciones por la caída libre del proyectil.

Forma de la trayectoria de un proyectil

Examinemos ahora la **trayectoria** de un proyectil en dos dimensiones. Para encontrar y como función de x , despejamos el tiempo t de la ecuación $x = x_0 + v_{x0}t$, y luego sustituimos t en la ecuación $y = y_0 + v_{y0}t - \frac{1}{2}gt^2$:

$$\begin{aligned}
 y &= y_0 + v_{y0}t - \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow \\
 y &= y_0 + v_{y0} \frac{x - x_0}{v_{x0}} - \frac{1}{2}g \left(\frac{x - x_0}{v_{x0}} \right)^2 \Rightarrow \\
 y &= \left(y_0 - \frac{v_{y0}x_0}{v_{x0}} - \frac{gx_0^2}{2v_{x0}^2} \right) + \left(\frac{v_{y0}}{v_{x0}} + \frac{gx_0}{2v_{x0}^2} \right) x - \frac{g}{2v_{x0}^2} x^2. \quad (3.18)
 \end{aligned}$$

De modo que la trayectoria está dada por una ecuación de la forma general $y = c + bx + ax^2$, con las constantes a , b y c . Ésta es la forma de una ecuación para una parábola en el plano xy . Se acostumbra igualar a cero el componente x de la posición inicial de la parábola: $x_0 = 0$. En este caso, la ecuación de la parábola queda

$$y = y_0 + \frac{v_{y0}}{v_{x0}}x - \frac{g}{2v_{x0}^2}x^2. \quad (3.19)$$

La trayectoria del proyectil está completamente determinada por tres constantes dadas. Estas constantes son la altura inicial de salida del proyectil, y_0 , y los componentes x y y del vector de velocidad inicial, v_{x0} y v_{y0} , como se muestra en la figura 3.8.

También podemos expresar el vector de velocidad inicial \vec{v}_0 , en términos de su magnitud v_0 y de su dirección, θ_0 . Expresar \vec{v}_0 de esta manera implica la transformación

$$\begin{aligned}
 v_0 &= \sqrt{v_{x0}^2 + v_{y0}^2} \\
 \theta_0 &= \tan^{-1} \frac{v_{y0}}{v_{x0}}. \quad (3.20)
 \end{aligned}$$

En el capítulo 1 explicamos esta transformación de coordenadas cartesianas a longitud y ángulo del vector, así como la transformación inversa

$$\begin{aligned}
 v_{x0} &= v_0 \cos \theta_0 \\
 v_{y0} &= v_0 \sin \theta_0. \quad (3.21)
 \end{aligned}$$

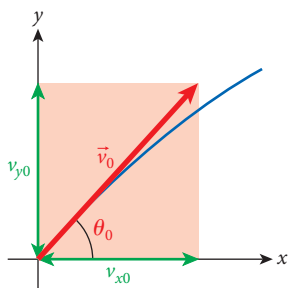


FIGURA 3.8 Vector de velocidad inicial \vec{v}_0 y sus componentes, v_{x0} y v_{y0} .

Expresada en términos de la magnitud y la dirección del vector de velocidad inicial, la ecuación para la trayectoria del proyectil se vuelve

$$y = y_0 + (\tan \theta_0)x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta_0} x^2. \quad (3.22)$$

La fuente que se muestra en la figura 3.9 está en el aeropuerto Detroit Metropolitan Wayne County (DTW). Usted puede ver en forma clara que el agua disparada por muchos tubos traza trayectorias parabólicas casi perfectas.

Observe que, como una parábola es simétrica, un proyectil tarda el mismo tiempo y viaja la misma distancia desde su punto de lanzamiento hasta la altura máxima de su trayectoria que desde el punto máximo de su trayectoria de regreso hasta el nivel de lanzamiento. Asimismo, la rapidez de un proyectil a una altura dada mientras sube al punto más alto de su trayectoria es la misma que su rapidez a la misma altura mientras baja.



FIGURA 3.9 Una fuente donde el agua sigue trayectorias parabólicas.

Dependencia del vector de velocidad con respecto al tiempo

Por la ecuación 3.12 sabemos que el componente x de la velocidad es constante en el tiempo: $v_x = v_{x0}$. Esto significa que un proyectil cubrirá la misma distancia horizontal en cada intervalo de tiempo de la misma duración. Así, en un video del movimiento de proyectil, como el del basquetbolista que lanza un tiro libre como en la figura 3.6, o la trayectoria del dardo en la demostración de tiro al mono en la figura 3.7, el desplazamiento horizontal del proyectil permanecerá constante de un cuadro de video al siguiente.

El componente y del vector de velocidad cambia de acuerdo con la ecuación 3.15, $v_y = v_{y0} - gt$; es decir, el proyectil cae con aceleración constante. Típicamente, el movimiento del proyectil comienza con un valor positivo, v_{y0} . El ápice (punto más alto) se alcanza en el punto donde $v_y = 0$ y el proyectil se mueve sólo en la dirección vertical. En el ápice, el componente y de la velocidad es cero, y cambia de signo de positivo a negativo.

Podemos indicar los valores instantáneos de los componentes x y y del vector de velocidad en una gráfica de y contra x para la trayectoria de vuelo de un proyectil (figura 3.10). Los componentes x , v_x , del vector de velocidad se muestran con flechas verdes y los componentes y , v_y , con flechas rojas. Observe que las longitudes idénticas de las flechas verdes demuestran el hecho de que v_x permanece constante. Cada flecha azul es la suma vectorial de los componentes x y y de la velocidad y representa el vector de velocidad instantánea a lo largo de la trayectoria. Observe que la dirección del vector de velocidad es siempre tangente a la trayectoria. Esto se debe a que la pendiente del vector de velocidad es

$$\frac{v_y}{v_x} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{dy}{dx},$$

que también es la pendiente punto a punto de la trayectoria de vuelo. En el ápice de la trayectoria, las flechas verde y azul son idénticas porque el vector de velocidad tiene sólo componente x ; es decir, apunta en la dirección horizontal.

Aunque el componente horizontal del vector de velocidad es igual a cero en el ápice de la trayectoria, la aceleración gravitacional tiene el mismo valor constante que en cualquier otra parte de la trayectoria. Tenga cuidado con el error común de que la aceleración gravitacional es igual a cero en el ápice de la trayectoria. La aceleración gravitacional tiene el mismo valor constante en cualquier punto a lo largo de la trayectoria.

Por último, exploremos la dependencia funcional del valor absoluto del vector de velocidad con respecto al tiempo y/o con respecto a la coordenada y . Comenzamos con la dependencia de $|\vec{v}|$ con respecto a y . Usamos el hecho de que el valor absoluto de un vector está dado como la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de sus componentes. Entonces usamos la ecuación cinemática 3.12 para el componente x , y la ecuación cinemática 3.17 para el componente y . Obtenemos

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_{x0}^2 + v_{y0}^2 - 2g(y - y_0)} = \sqrt{v_0^2 - 2g(y - y_0)}. \quad (3.23)$$

Observe que el ángulo inicial de lanzamiento no aparece en esta ecuación. El valor absoluto de la velocidad, la rapidez, depende sólo del valor inicial de la velocidad y de la diferencia entre la

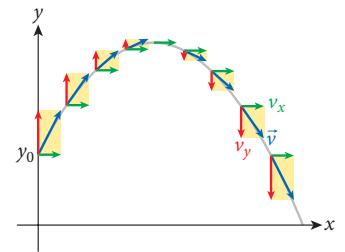


FIGURA 3.10 Gráfica de una trayectoria parabólica donde se muestran el vector de velocidad y sus componentes cartesianos a intervalos constantes de tiempo.

3.1 Ejercicio en clase

En el ápice (o punto más alto) de la trayectoria de cualquier proyectil, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

- La aceleración es cero.
- El componente x de la aceleración es cero.
- El componente y de la aceleración es cero.
- La rapidez es cero.
- El componente x de la velocidad es cero.
- El componente y de la velocidad es cero.

3.1 Oportunidad de autoexamen

¿Cuál es la dependencia de $|\vec{v}|$ con respecto a la coordenada x ?

coordenada y y la altura inicial de lanzamiento. Así, si lanzamos un proyectil desde una cierta altura sobre el suelo y queremos saber la rapidez con la que toca el suelo, no importa si el proyectil se dispara en forma vertical hacia arriba, o de manera horizontal, o directamente hacia abajo. El capítulo 5 explica el concepto de energía cinética, y entonces se hará evidente la razón para este hecho aparentemente extraño.

3.4 Altura máxima y alcance de un proyectil

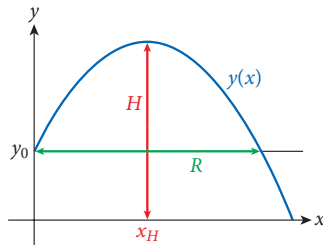


FIGURA 3.11 La altura máxima (en rojo) y el alcance (en verde) de un proyectil.

Cuando lanzamos un proyectil, por ejemplo, cuando lanzamos una pelota, a menudo nos interesa el **alcance** (R); es decir, qué distancia horizontal viajará el proyectil antes de regresar a su posición vertical original, y la **altura máxima** (H) que alcanzará. Estas cantidades, R y H , se ilustran en la figura 3.11. Encontramos que la altura máxima que alcanza el proyectil es

$$H = y_0 + \frac{v_{y0}^2}{2g}. \quad (3.24)$$

Más adelante deduciremos esta ecuación. También deduciremos la ecuación para el alcance:

$$R = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta_0, \quad (3.25)$$

donde v_0 es el valor absoluto del vector de velocidad inicial y θ_0 es el ángulo de lanzamiento. El alcance máximo, para un valor fijo de v_0 dado, se alcanza cuando $\theta_0 = 45^\circ$.

DEDUCCIÓN 3.1

Investiguemos primero la altura máxima. Para determinar su valor, obtenemos una expresión para la altura, la diferenciamos, igualamos a cero el resultado y despejamos la altura máxima. Supongamos que v_0 es la rapidez inicial y θ_0 es el ángulo de lanzamiento. Tomamos la derivada de la función de trayectoria $y(x)$, ecuación 3.22, con respecto a x :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \left(y_0 + (\tan \theta_0)x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta_0} x^2 \right) = \tan \theta_0 - \frac{g}{v_0^2 \cos^2 \theta_0} x.$$

Ahora buscamos el punto x_H donde la derivada es cero:

$$\begin{aligned} 0 &= \tan \theta_0 - \frac{g}{v_0^2 \cos^2 \theta_0} x_H \\ \Rightarrow x_H &= \frac{v_0^2 \cos^2 \theta_0 \tan \theta_0}{g} = \frac{v_0^2}{g} \sin \theta_0 \cos \theta_0 = \frac{v_0^2}{2g} \sin 2\theta_0. \end{aligned}$$

En la segunda línea que antecede, usamos las identidades trigonométricas $\tan \theta = \sin \theta / \cos \theta$ y $2 \sin \theta \cos \theta = \sin 2\theta$. Ahora insertamos este valor para x en la ecuación 3.22 y obtenemos la altura máxima, H :

$$\begin{aligned} H \equiv y(x_H) &= y_0 + x_H \tan \theta_0 - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta_0} x_H^2 \\ &= y_0 + \frac{v_0^2}{2g} \sin 2\theta_0 \tan \theta_0 - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta_0} \left(\frac{v_0^2}{2g} \sin 2\theta_0 \right)^2 \\ &= y_0 + \frac{v_0^2}{g} \sin^2 \theta_0 - \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \theta_0 \\ &= y_0 + \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \theta_0. \end{aligned}$$

Como $v_{y0} = v_0 \sin \theta_0$, también podemos escribir

$$H = y_0 + \frac{v_{y0}^2}{2g},$$

que es la ecuación 3.24.

El alcance, R , de un proyectil se define como la distancia horizontal entre el punto de lanzamiento y el punto donde el proyectil llega a la misma altura desde la cual partió, $y(R) = y_0$. Insertando $x = R$ en la ecuación 3.22:

$$y_0 = y_0 + R \tan \theta_0 - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta_0} R^2$$

$$\Rightarrow \tan \theta_0 = \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta_0} R$$

$$\Rightarrow R = \frac{2v_0^2}{g} \sin \theta_0 \cos \theta_0 = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta_0,$$

que es la ecuación 3.25.

Observe que el alcance, R , es el doble del valor de la coordenada x , x_H , en la cual el proyectil alcanza su altura máxima: $R = 2x_H$.

Por último, consideramos cómo maximizar el alcance del proyectil. Una manera de lograr el mayor alcance es maximizar la velocidad inicial, porque el alcance aumenta conforme lo hace el valor absoluto de la velocidad inicial, v_0 . La pregunta es entonces, dada una velocidad inicial, ¿cuál es la dependencia del alcance con respecto al ángulo de lanzamiento θ_0 ? Para responder a esta pregunta, tomamos la derivada del alcance (ecuación 3.25) con respecto al ángulo de lanzamiento:

$$\frac{dR}{d\theta_0} = \frac{d}{d\theta_0} \left(\frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta_0 \right) = 2 \frac{v_0^2}{g} \cos 2\theta_0.$$

Luego igualamos a cero esta derivada y encontramos el ángulo para el cual se obtiene el valor máximo. El ángulo entre 0 y 90° para el cual $\cos 2\theta_0 = 0$ es 45° . De modo que el alcance máximo de un proyectil ideal está dado por

$$R_{\text{máx}} = \frac{v_0^2}{g}. \quad (3.26)$$

Podríamos haber obtenido este resultado de manera directa por la fórmula del alcance porque, de acuerdo con dicha fórmula (ecuación 3.25), el alcance tiene un valor máximo cuando $\sin 2\theta_0$ tiene su valor máximo igual a 1, cuando $2\theta_0 = 90^\circ$, o $\theta_0 = 45^\circ$.

La mayor parte de deportes que utilizan pelotas brindan numerosos ejemplos de movimiento de proyectil. En seguida consideramos algunos ejemplos en los que los efectos de la resistencia del aire y la rotación del proyectil no dominan el movimiento, de modo que los resultados obtenidos son razonablemente cercanos a lo que acontece en la realidad. En la siguiente sección veremos qué efectos pueden tener sobre el proyectil la resistencia del aire y la rotación.

3.2 Oportunidad de autoexamen

Otra manera de llegar a una fórmula para el alcance utiliza el hecho de que el proyectil tarda tanto tiempo en llegar al ápice de la trayectoria como en bajar, debido a la simetría de la parábola. Podemos calcular el tiempo para llegar al ápice, donde $v_{y0} = 0$, y luego multiplicar este tiempo por dos y entonces, usando el componente horizontal de la velocidad, hallar el alcance. ¿Puede usted deducir la fórmula para calcular el alcance de esta manera?

PROBLEMA RESUELTO 3.1 Lanzamiento de una pelota de béisbol

Al escuchar una transmisión por radio de un partido de béisbol, a menudo usted escucha la frase “line drive” o “frozen rope” para una pelota bateada con mucha fuerza y a un ángulo pequeño con respecto al suelo. Algunos cronistas usan incluso el término “frozen rope” (cuerda congelada) también para describir un lanzamiento especialmente fuerte de segunda o tercera base a primera. Este lenguaje figurado implica movimiento en línea recta; pero sabemos que la trayectoria real de la pelota es una parábola.

PROBLEMA

¿Cuál es la altura máxima que alcanza una pelota de béisbol si se lanza de segunda base a primera y de tercera base a primera, liberada desde una altura de 6.0 ft, con una rapidez inicial de 90 mph y atrapada a la misma altura?

SOLUCIÓN

PIENSE

Las dimensiones de un *infield* de béisbol se muestran en la figura 3.12 (en este problema, necesitaremos realizar muchas conversiones de unidades. Por lo general, este libro usa unidades SI;

(continúa)

(continuación)

pero el béisbol está lleno de unidades inglesas). El *infield* de béisbol es un cuadrado con lados de 90 ft de largo. Ésta es la distancia entre segunda y primera base, y obtenemos $d_{12} = 90 \text{ ft} = 90 \cdot 0.3048 \text{ m} = 27.4 \text{ m}$. La distancia de tercera a primera base es la longitud de la diagonal del cuadrado del infield: $d_{13} = d_{12}\sqrt{2} = 38.8 \text{ m}$.

Una rapidez de 90 mph (la rapidez de una buena pelota rápida de Ligas Mayores) equivale a

$$v_0 = 90 \text{ mph} = 90 \cdot 0.4469 \text{ m/s} = 40.2 \text{ m/s}.$$

Como sucede con la mayoría de los problemas de trayectoria, hay muchas formas de resolver este problema. La más sencilla se desprende de nuestras consideraciones sobre alcance y altura máxima. Podemos igualar la distancia base a base con el alcance del proyectil, porque la pelota se lanza y se atrapa a la misma altura, $y_0 = 6 \text{ ft} = 6 \cdot 0.3048 \text{ m} = 1.83 \text{ m}$.

ESBOCE

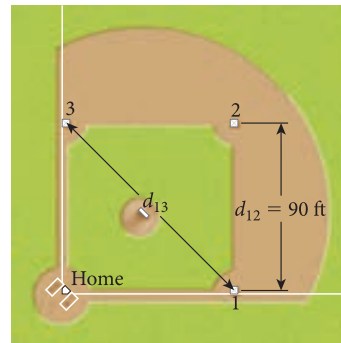


FIGURA 3.12 Dimensiones de un *infield* de béisbol.

INVESTIGUE

Para obtener el ángulo inicial de lanzamiento de la pelota, usamos la ecuación 3.25, definiendo el alcance igual a la distancia entre primera y segunda base:

$$d_{12} = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta_0 \Rightarrow \theta_0 = \frac{1}{2} \sin^{-1} \left(\frac{d_{12}g}{v_0^2} \right).$$

Sin embargo, ya tenemos una ecuación para la altura máxima:

$$H = y_0 + \frac{v_0^2 \sin^2 \theta_0}{2g}.$$

SIMPLIFIQUE

Sustituyendo nuestra expresión para el ángulo de lanzamiento en la ecuación para altura máxima, obtenemos

$$H = y_0 + \frac{v_0^2 \sin^2 \left(\frac{1}{2} \sin^{-1} \left(\frac{d_{12}g}{v_0^2} \right) \right)}{2g}.$$

CALCULE

Estamos listos para sustituir valores:

$$H = 1.83 \text{ m} + \frac{(40.2 \text{ m/s})^2 \sin^2 \left(\frac{1}{2} \sin^{-1} \left(\frac{(27.4 \text{ m})(9.81 \text{ m/s}^2)}{(40.2 \text{ m/s})^2} \right) \right)}{2(9.81 \text{ m/s}^2)} = 2.40367 \text{ m}.$$

REDONDEE

La precisión inicial especificada era de dos dígitos significativos. De modo que redondeamos nuestro resultado final a

$$H = 2.4 \text{ m}.$$

De modo que un lanzamiento a 90 mph de segunda a primera base está a $2.39 \text{ m} - 1.83 \text{ m} = 0.56 \text{ m}$; es decir, casi 2 ft arriba del punto de lanzamiento cuando ha recorrido la mitad de su trayectoria. Este número es todavía mayor para el lanzamiento de tercera a primera base, para el cual encontramos un ángulo inicial de 6.8° y una altura máxima de 3.0 m, es decir, 1.2 m (casi 4 ft) arriba de la línea recta que conecta los puntos de lanzamiento y atrapada.

VUELVA A REVISAR

El sentido común dice que el lanzamiento más largo de tercera base a primera necesita tener una mayor altura máxima que el lanzamiento de segunda base a primera, y nuestras respuestas están de acuerdo con esto. Si usted ve un juego de béisbol desde las gradas o en la televisión, estas alturas calculadas pueden parecer demasiado grandes. Sin embargo, si usted ve el juego desde el nivel del suelo, verá que los otros jugadores en el *infield* realmente tienen que lograr que la pelota no levante para hacer un buen lanzamiento a primera base.

Consideremos un ejemplo más del béisbol y calculemos la trayectoria de una pelota bateada (vea la figura 3.13).

EJEMPLO 3.2 Bateo de una pelota de béisbol

Durante el vuelo de una pelota de béisbol bateada, en especial un jonrón, la resistencia del aire tiene un impacto bastante notable. Por ahora, sin embargo, la ignoraremos. La sección 3.5 explicará el efecto de la resistencia del aire.

PROBLEMA

Si la pelota sale del bate con un ángulo de lanzamiento de 35° y una rapidez inicial de 110 mph, ¿qué tan lejos volará? ¿Cuánto tiempo permanecerá en el aire? ¿Cuál será su rapidez en el ápice de su trayectoria? ¿Cuál será su rapidez al tocar tierra?

SOLUCIÓN

De nuevo necesitamos convertir primero a unidades SI: $v_0 = 110 \text{ mph} = 49.2 \text{ m/s}$. Primero encontramos el alcance:

$$R = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta_0 = \frac{(49.2 \text{ m/s})^2}{9.81 \text{ m/s}^2} \sin 70^\circ = 231.5 \text{ m}.$$

Esta distancia es alrededor de 760 pies, lo cual sería un jonrón incluso en el parque de béisbol más grande. Sin embargo, este cálculo no tiene en cuenta la resistencia del aire. Si tomáramos en cuenta la fricción debida a la resistencia del aire, la distancia se reduciría aproximadamente a 400 pies (vea la sección 3.5 sobre movimiento de proyectil realista).

Para hallar el tiempo que permanece la pelota en el aire, podemos dividir el alcance entre el componente horizontal de la velocidad, suponiendo que la pelota se batea aproximadamente a nivel del suelo.

$$t = \frac{R}{v_0 \cos \theta_0} = \frac{231.5 \text{ m}}{(49.2 \text{ m/s}) (\cos 35^\circ)} = 5.74 \text{ s}.$$

Ahora calcularemos las rapidez en el ápice de la trayectoria y en el aterrizaje. En el ápice, la velocidad tiene sólo un componente horizontal, que es $v_0 \cos \theta_0 = 40.3 \text{ m/s}$. Cuando la pelota toca tierra, podemos calcular su rapidez usando la ecuación 3.23: $|\vec{v}| = \sqrt{v_0^2 - 2g(y - y_0)}$. Como suponemos que la altura a la que aterriza la pelota es la misma desde la que se lanzó, vemos que la rapidez es la misma en el punto de aterrizaje que en el de lanzamiento, 49.2 m/s.

Una pelota real de béisbol no seguiría del todo la trayectoria aquí calculada. Si en vez de la pelota lanzáramos una pequeña bola de acero de las que se usan en los rodamientos de bolas, con el mismo ángulo y la misma rapidez, despreciar la resistencia del aire daría muy buena aproximación, y los parámetros de la trayectoria que acabamos de determinar se podrían verificar en dicho experimento. La razón de que cómodamente podamos despreciar la resistencia del aire para la bola de acero es que tiene una densidad de masa mucho mayor y una superficie menor que una pelota de béisbol, de modo que los efectos de arrastre (que dependen del área de la sección transversal) que presenta el objeto en movimiento son pequeños en comparación con los efectos de la gravedad.



FIGURA 3.13 El movimiento de una pelota de béisbol bateada se puede tratar como movimiento de proyectil.

El béisbol no es el único deporte que puede proporcionar ejemplos de movimiento de proyectil. Consideremos un ejemplo del fútbol americano.

PROBLEMA RESUELTO 3.2 *Hang Time* ("Tiempo de vuelo")

Cuando un equipo de fútbol americano se ve forzado a despejar por patada el balón hacia el oponente, es muy importante patearla tan lejos como sea posible, pero también es importante tener un tiempo suficientemente largo con el balón en el aire de modo que el equipo que cubre el despeje tenga tiempo de correr hacia abajo en el campo y taclear al receptor inmediatamente después de la atrapada.

PROBLEMA

¿Cuál es el ángulo inicial y cuál la rapidez inicial con la que un balón de fútbol americano se tiene que despejar para que su tiempo en el aire sea de 4.41 s y viaje a una distancia horizontal de 49.8 m (= 54.5 yd)?

SOLUCIÓN

PIENSE

Un despeje es un caso especial de movimiento de proyectil para el cual el valor inicial y el valor final de la coordenada vertical son iguales a cero. Si sabemos el alcance del proyectil, podemos calcular el tiempo de vuelo a partir del hecho de que el componente horizontal del vector de velocidad permanece con un valor constante; por lo tanto, el tiempo en el aire debe ser simplemente el alcance dividido entre este componente horizontal del vector de velocidad. Las ecuaciones para el tiempo de vuelo y el alcance nos dan dos ecuaciones para las dos incógnitas, v_0 y θ_0 , que estamos buscando.

ESBOCE

Éste es uno de los pocos casos en los que un diagrama no parece proporcionar información adicional.

INVESTIGUE

Ya hemos visto (ecuación 3.25) que el alcance de un proyectil está dado por

$$R = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta_0.$$

Como ya se mencionó, el tiempo en el aire se puede calcular muy fácilmente dividiendo el alcance entre el componente horizontal de la velocidad:

$$t = \frac{R}{v_0 \cos \theta_0}.$$

Así, tenemos dos ecuaciones para las dos incógnitas, v_0 y θ_0 . (Recuerde que R y t se dieron en el planteamiento del problema.)

SIMPLIFIQUE

Despejamos v_0^2 de ambas ecuaciones, e igualamos:

$$\begin{aligned} R = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta_0 &\Rightarrow v_0^2 = \frac{gR}{\sin 2\theta_0} \Rightarrow \frac{gR}{\sin 2\theta_0} = \frac{R^2}{t^2 \cos^2 \theta_0} \\ t = \frac{R}{v_0 \cos \theta_0} &\Rightarrow v_0^2 = \frac{R^2}{t^2 \cos^2 \theta_0} \end{aligned}$$

Ahora podemos despejar θ_0 . Usando $\sin 2\theta_0 = 2 \sin \theta_0 \cos \theta_0$, encontramos

$$\begin{aligned} \frac{g}{2 \sin \theta_0 \cos \theta_0} &= \frac{R}{t^2 \cos^2 \theta_0} \\ \Rightarrow \tan \theta_0 &= \frac{gt^2}{2R} \\ \Rightarrow \theta_0 &= \tan^{-1} \left(\frac{gt^2}{2R} \right). \end{aligned}$$

En seguida, sustituimos esta expresión en cualquiera de las dos ecuaciones con las que comenzamos. Seleccionamos la ecuación para el tiempo de vuelo, de donde despejamos v_0 :

$$t = \frac{R}{v_0 \cos \theta_0} \Rightarrow v_0 = \frac{R}{t \cos \theta_0}.$$

CALCULE

Sólo falta insertar los números en las ecuaciones que hemos obtenido:

$$\theta_0 = \tan^{-1} \left(\frac{(9.81 \text{ m/s}^2)(4.41 \text{ s})^2}{2(49.8 \text{ m})} \right) = 62.4331^\circ$$

$$v_0 = \frac{49.8 \text{ m}}{(4.41 \text{ s})(\cos 62.4331^\circ)} = 24.4013 \text{ m/s}.$$

REDONDEE

El alcance y el tiempo de vuelo se especificaron con tres cifras significativas, de modo que expresamos nuestro resultado final con esta precisión:

$$\theta_0 = 62.4^\circ$$

y

$$v_0 = 24.4 \text{ m/s}.$$

VUELVA A REVISAR

Sabemos que el alcance máximo se alcanza con un ángulo de lanzamiento de 45° . El balón despejado se lanza aquí con un ángulo inicial que es considerablemente mayor, de 62.4° . Por lo tanto, el balón no va tan lejos como podría con el valor de la rapidez inicial que calculamos. En vez de esto, va más alto y así incrementa el tiempo de vuelo. Si usted observa a los buenos pateadores de despeje colegiales o profesionales practicar sus habilidades durante los juegos de fútbol americano, verá que tratan de patear el balón con un ángulo inicial mayor de 45° , de acuerdo con lo que hemos encontrado en nuestros cálculos.

3.2 Ejercicio en clase

Se podría obtener el mismo alcance que en el problema resuelto 3.2 con la misma rapidez inicial de 24.4 m/s pero un ángulo de lanzamiento diferente de 62.4° . ¿Cuál es el valor de este ángulo?

- a) 12.4° c) 45.0°
b) 27.6° d) 55.2°

3.3 Ejercicio en clase

¿Cuál es el tiempo en el aire para el otro ángulo de lanzamiento hallado en el ejercicio en clase 3.2?

- a) 2.30 s c) 4.41 s
b) 3.14 s d) 5.14 s

3.5 Movimiento realista de proyectil

Si usted está familiarizado con el tenis, el golf o el béisbol, sabe que el modelo parabólico para el movimiento de un proyectil es sólo una aproximación bastante gruesa a la trayectoria de cualquier pelota real. Sin embargo, ignorando algunos factores que afectan a los proyectiles reales, pudimos enfocarnos en los principios físicos que son de suma importancia en el movimiento de proyectiles. Ésta es una técnica usual en la ciencia: ignorar algunos factores presentes en una situación real con objeto de trabajar con menos variables y lograr una comprensión de un concepto básico. Luego volver y considerar cómo afectan al modelo los factores ignorados. Consideremos en forma breve los factores más importantes que afectan al movimiento de proyectiles reales: la resistencia del aire, la rotación del proyectil y las propiedades superficiales del proyectil.

El primer efecto modificador que necesitamos tomar en cuenta es la resistencia del aire. Típicamente, podemos marcar con parámetros la resistencia del aire como una aceleración dependiente de la velocidad. El análisis general rebasa el alcance de este libro; sin embargo, las trayectorias resultantes se llaman *curvas balísticas*.

La figura 3.14 muestra las trayectorias de pelotas de béisbol lanzadas con un ángulo inicial de 35° con respecto a la horizontal, a rapidezces iniciales de 90 y 110 mph. Compare la trayectoria que se muestra para la rapidez de lanzamiento de 110 mph con el resultado que calculamos en el ejemplo 3.2: el alcance real de esta pelota es sólo un poco más de 400 ft, mientras nosotros encontramos 760 ft al ignorar la resistencia del aire. Obviamente, para un “fly” largo, no es válido despreciar la resistencia del aire.

Otro efecto importante que el modelo parabólico ignora es la rotación del proyectil al moverse en el aire. Cuando un quarterback lanza una “espiral” en el fútbol americano, por ejemplo, la rotación es primordial para la estabilidad del movimiento durante el vuelo, y evita que el balón gire punta a punta. En el tenis, una pelota con rotación superior cae mucho más rápido que una pelota

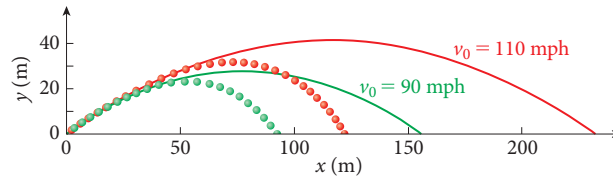


FIGURA 3.14 Trayectorias de pelotas de béisbol lanzadas inicialmente con un ángulo de 35° sobre la horizontal con rapidez de 90 mph (verde) y 110 mph (roja). Las curvas continuas desprecian la resistencia del aire y el retrogiro; las curvas punteadas reflejan la resistencia del aire y el retrogiro.

sin rotación notable, dados los mismos valores iniciales de rapidez y ángulo de lanzamiento. Al contrario, una pelota de tenis con rotación inferior o retrogiro, “flota” más profundo en la cancha. En el golf, a veces se desea el retrogiro, porque provoca un ángulo más agudo de aterrizaje y por lo tanto ayuda a que la pelota se detenga más cerca de su punto de aterrizaje que una pelota golpeada sin retrogiro. Dependiendo de la magnitud y la dirección de la rotación, el giro lateral de una pelota de golf puede causar una desviación de la trayectoria rectilínea a lo largo del campo (*draws* y *fades* para los buenos jugadores o *hooks* y *slices* para el resto de nosotros).

En béisbol, la rotación lateral es lo que permite al lanzador tirar curvas. Dicho sea de paso, no existe la “pelota rápida ascendente” en béisbol. Sin embargo, los lanzamientos con un severo retrogiro no caen tan rápido como el bateador espera, y por eso algunas veces se perciben como si se elevaran: una ilusión óptica. En la gráfica de trayectorias balísticas de pelotas de béisbol en la figura 3.14, se supuso un retrogiro inicial de 2 000 rpm.

El curvado y prácticamente todos los demás efectos del giro sobre la trayectoria de una pelota en movimiento son el resultado de las moléculas de aire que rebotan con mayores rapidez en el lado de la pelota (y la capa límite de moléculas de aire) que está girando en la dirección del movimiento de vuelo (y por lo tanto tiene una velocidad mayor relativa a las moléculas de aire que ingresan). En cambio, son menores del lado de la pelota que está girando en la dirección contraria al movimiento. Volveremos a este tema en el capítulo 13 sobre movimiento de fluidos.

Las propiedades superficiales de los proyectiles también tienen efectos importantes sobre sus trayectorias. Las pelotas de golf tienen hoyuelos que las hacen volar más lejos. Pelotas que en otros aspectos son idénticas a las típicas de golf pero tienen una superficie lisa se pueden impulsar sólo a la mitad de distancia. Este efecto superficial es también la razón por la que si a un lanzador de béisbol se le encuentra papel lija en su guante, esto provoca la expulsión de ese jugador, porque una pelota que se hace áspera en partes de su superficie se mueve en forma diferente que otra que no ha sufrido este proceso.

3.6 Movimiento relativo

Para estudiar el movimiento, nos hemos permitido correr el origen del sistema de coordenadas para elegir de manera adecuada los valores para x_0 y y_0 . En general, x_0 y y_0 son constantes que se pueden elegir libremente. Si esta elección se hace de manera inteligente, puede hacer más manejable un problema. Por ejemplo, cuando calculamos la trayectorias del proyectil, $y(x)$, establecimos $x_0 = 0$ para simplificar nuestros cálculos. La libertad de elegir valores para x_0 y y_0 se basa en el hecho de que nuestra capacidad para describir cualquier clase de movimiento no depende de la ubicación del origen del sistema de coordenadas.

Hasta aquí, hemos examinado situaciones físicas en las que hemos conservado el origen del sistema de coordenadas en una ubicación fija durante el movimiento del objeto que queremos considerar. Sin embargo, en algunas situaciones físicas, es poco práctico elegir un sistema de coordenadas con un origen fijo. Considere, por ejemplo, un avión jet que aterriza en un portaaviones que avanza a toda máquina al mismo tiempo. Usted quiere describir el movimiento del avión en un sistema de coordenadas fijo al portaaviones, aunque éste se esté moviendo. La razón por la cual esto es importante es que el avión necesita llegar al reposo *en relación con* el portaaviones en alguna ubicación fija de la plataforma. El marco de referencia desde el cual vemos el movimiento produce una gran diferencia en la manera en que describimos el movimiento, dando lugar al efecto que se conoce como **velocidad relativa**.

Otro ejemplo de una situación para la cual no podemos despreciar el movimiento relativo es un vuelo trasatlántico de Detroit, Michigan, a Frankfurt, Alemania, que dura 8 h y 10 min. Usando

el mismo avión en sentido opuesto, de Frankfurt a Detroit, el vuelo dura 9 h y 10 min: una hora más. La principal razón para esta diferencia es que el viento predominante a grandes altitudes, la corriente de chorro, tiende a soplar de oeste a este con rapidez tan altas como 67 m/s (150 mph). Aun cuando la rapidez del avión relativa al aire que le rodea es la misma en ambas direcciones, el aire se mueve con su propia rapidez. Así, para entender la diferencia en los tiempos de vuelo es importante la relación del sistema de coordenadas del aire dentro de la corriente de chorro con el sistema de coordenadas en el que Detroit y Frankfurt permanecen fijas.

Como un ejemplo más fácil de analizar de un sistema móvil de coordenadas, consideremos el movimiento en un andador móvil, como los que se encuentran igualmente en terminales de aeropuertos. Este sistema es un ejemplo de movimiento relativo unidimensional. Suponga que la superficie del andador se mueve con cierta velocidad v_{wt} relativa a la terminal. Usamos los subíndices w para andador (walkway) y t para terminal. Entonces un sistema de coordenadas que esté fijo en la superficie del andador tiene exactamente una velocidad v_{wt} relativa al sistema de coordenadas fijo en la terminal. El hombre que se muestra en la figura 3.15 está caminando a una velocidad v_{mw} medida en el sistema de coordenadas del andador, y tiene una velocidad $v_{mt} = v_{mw} + v_{wt}$ con respecto a la terminal. Las dos velocidades v_{mw} y v_{wt} se suman como vectores, ya que los desplazamientos correspondientes se suman como vectores. (Mostraremos esto en forma explícita cuando generalicemos a las tres dimensiones.) Por ejemplo, si el andador se mueve con $v_{wt} = 1.5$ m/s y el hombre se mueve con $v_{mw} = 2.0$ m/s, entonces el hombre avanzará por la terminal con una velocidad $v_{mt} = v_{mw} + v_{wt} = 2.0$ m/s + 1.5 m/s = 3.5 m/s.

Se puede lograr un estado de no movimiento relativo a la terminal caminando en dirección opuesta al movimiento del andador con una velocidad que es exactamente la negativa de la del andador. Los niños tratan con frecuencia de hacer esto. Si una niña caminara con $v_{mw} = -1.5$ m/s sobre este andador, su velocidad sería cero con respecto a la terminal.

Es esencial para esta explicación del movimiento relativo que los dos sistemas de coordenadas tengan una velocidad relativa entre sí que sea constante en el tiempo. En este caso, podemos demostrar que las aceleraciones medidas en ambos sistemas de coordenadas son idénticas: $v_{wt} = \text{const.} \Rightarrow dv_{wt}/dt = 0$. A partir de $v_{mt} = v_{mw} + v_{wt}$, podemos entonces obtener:

$$\frac{dv_{mt}}{dt} = \frac{d(v_{mw} + v_{wt})}{dt} = \frac{dv_{mw}}{dt} + \frac{dv_{wt}}{dt} = \frac{dv_{mw}}{dt} + 0 \Rightarrow a_t = a_w. \quad (3.27)$$

Por lo tanto, las aceleraciones medidas en ambos sistemas de coordenadas son efectivamente iguales. Este tipo de suma de velocidades también se conoce como la **transformación de Galileo**. Antes de pasar a los casos de dos y tres dimensiones, observe que este tipo de transformación es válido sólo para rapidezces que sean pequeñas en comparación con la rapidez de la luz. Una vez que la rapidez se acerca a la de la luz, debemos usar una transformación diferente, que explicaremos con detalle en el capítulo 35 sobre la teoría de la relatividad.

Ahora generalicemos este resultado a más de una dimensión espacial. Suponemos que tenemos dos sistemas de coordenadas, x_1, y_1, z_1 y x_m, y_m, z_m . (Aquí usamos los subíndices l para el sistema de coordenadas que está en reposo en el laboratorio y m para el que se está moviendo.) En el tiempo $t = 0$, suponga que los orígenes de ambos sistemas de coordenadas están ubicados en el mismo punto, con sus ejes exactamente paralelos uno al otro. Como se indica en la figura 3.16, el origen del sistema móvil de coordenadas x_m, y_m, z_m se mueve con una velocidad de traslación constante \vec{v}_{ml} (flecha azul) relativa al origen del sistema de coordenadas del laboratorio x_1, y_1, z_1 . Después de un tiempo t , el origen del sistema móvil de coordenadas x_m, y_m, z_m está ubicado en el punto $\vec{r}_{ml} = \vec{v}_{ml}t$.

Ahora podemos describir el movimiento de cualquier objeto en cualquiera de los dos sistemas de coordenadas. Si el objeto está ubicado en la coordenada \vec{r}_l en el sistema de coordenadas x_1, y_1, z_1 , y en la coordenada \vec{r}_m en el sistema de coordenadas x_m, y_m, z_m , entonces los vectores de posición se relacionan entre sí mediante una suma vectorial simple:

$$\vec{r}_l = \vec{r}_m + \vec{r}_{ml} = \vec{r}_m + \vec{v}_{ml}t. \quad (3.28)$$

Se aplica una relación similar para las velocidades del objeto medidas en los dos sistemas de coordenadas. Si el objeto tiene velocidad \vec{v}_{ol} en el sistema de coordenadas x_1, y_1, z_1 , y velocidad \vec{v}_{om} en el sistema de coordenadas x_m, y_m, z_m , estas dos velocidades se relacionan mediante:

$$\vec{v}_{ol} = \vec{v}_{om} + \vec{v}_{ml}. \quad (3.29)$$

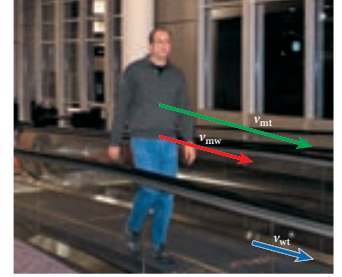


FIGURA 3.15 Un hombre camina sobre un andador móvil, demostrando el movimiento relativo unidimensional.

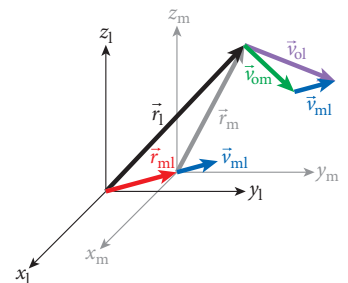


FIGURA 3.16 Transformación de marco de referencia de un vector de velocidad y un vector de posición en algún tiempo específico.

Esta ecuación se puede obtener tomando la derivada de la ecuación 3.28 con respecto al tiempo, porque \vec{v}_{ml} es constante. Observe que los dos subíndices interiores en el lado derecho de esta ecuación son los mismos (y serán así en cualquier aplicación de esta ecuación). Esto hace la ecuación entendible en un nivel intuitivo, porque dice que la velocidad del objeto en el marco del laboratorio (subíndice ol) es igual a la suma de la velocidad con la que se mueve el objeto relativa al marco móvil (subíndice om) y la velocidad con la que se mueve el marco móvil relativa al marco del laboratorio (subíndice ml).

Tomando otra derivada con respecto al tiempo se obtienen las aceleraciones. De nuevo, como \vec{v}_{ml} es constante y por lo tanto tiene una derivada igual a cero, obtenemos, igual que en el caso unidimensional,

$$\vec{a}_l = \vec{a}_m. \quad (3.30)$$

La magnitud y la dirección de la aceleración para un objeto son las mismas en ambos sistemas de coordenadas.

EJEMPLO 3.3 Avión en viento cruzado

Los aviones se mueven en relación con el aire que los rodea. Suponga que un piloto dirige su avión en la dirección noreste. El avión se mueve con una rapidez de 160 m/s relativa al viento, y el viento está soplando a 32.0 m/s en dirección este-oeste (medida con un instrumento que está en un punto fijo en tierra).

PROBLEMA

¿Cuál es el vector de velocidad —rapidez y dirección— del avión respecto a la tierra? ¿A qué distancia fuera de ruta lleva el viento a este avión en 2.0 h?

SOLUCIÓN

La figura 3.17 muestra un diagrama vectorial de las velocidades. El avión se dirige rumbo al noreste, y la flecha amarilla representa su vector de velocidad relativa al viento. El vector de velocidad del viento está representado en anaranjado y señala rumbo oeste. La suma vectorial gráfica da por resultado la flecha verde que representa la velocidad del avión relativa al suelo. Para resolver este problema, aplicamos la transformación básica de la ecuación 3.29 contenida en la ecuación

$$\vec{v}_{pg} = \vec{v}_{pw} + \vec{v}_{wg}.$$

Aquí \vec{v}_{pw} es la velocidad del avión (*plane*) con respecto al viento (*wind*) y tiene estos componentes:

$$v_{pw,x} = v_{pw} \cos\theta = 160 \text{ m/s} \cdot \cos 45^\circ = 113 \text{ m/s}$$

$$v_{pw,y} = v_{pw} \sin\theta = 160 \text{ m/s} \cdot \sin 45^\circ = 113 \text{ m/s}.$$

La velocidad del viento con respecto al suelo, \vec{v}_{wg} , tiene estos componentes:

$$v_{wg,x} = -32 \text{ m/s}$$

$$v_{wg,y} = 0.$$

En seguida obtenemos los componentes de la velocidad del avión relativa al sistema de coordenadas fijo en tierra, \vec{v}_{pg} :

$$v_{pg,x} = v_{pw,x} + v_{wg,x} = 113 \text{ m/s} - 32 \text{ m/s} = 81 \text{ m/s}$$

$$v_{pg,y} = v_{pw,y} + v_{pw,y} = 113 \text{ m/s}.$$

El valor absoluto del vector de velocidad y su dirección en el sistema de coordenadas fijo en tierra es por lo tanto

$$v_{pg} = \sqrt{v_{pg,x}^2 + v_{pg,y}^2} = 139 \text{ m/s}$$

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{v_{pg,y}}{v_{pg,x}} \right) = 54.4^\circ.$$

Ahora necesitamos encontrar la desviación de ruta debida al viento. Para encontrar esta cantidad, podemos multiplicar los vectores de velocidad del avión en cada sistema de coordenadas por el tiempo transcurrido de $2 \text{ h} = 7200 \text{ s}$ y luego tomar la diferencia vectorial

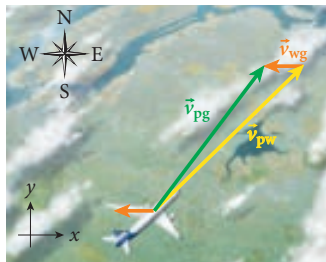


FIGURA 3.17 La velocidad de un avión con respecto al viento (amarilla), la velocidad del viento con respecto al suelo (anaranjada) y la velocidad resultante del avión con respecto al suelo (verde).

y, por último, obtener la magnitud de la diferencia vectorial. La respuesta se puede obtener más fácilmente si usamos la ecuación 3.29 multiplicada por el tiempo transcurrido para reflejar que la desviación de ruta, \vec{r}_T , debida al viento es la velocidad del viento, \vec{v}_{wg} , por 7 200 s:

$$|\vec{r}_T| = |\vec{v}_{wg}|t = 32.0 \text{ m/s} \cdot 7\,200 \text{ s} = 230.4 \text{ km.}$$

EXPLICACIÓN

La Tierra misma se mueve una cantidad considerable en 2 h, como resultado de su propia rotación y de su movimiento alrededor del Sol, y usted podría tener en cuenta estos movimientos. Que la Tierra se mueve es verdad, pero es irrelevante para el presente ejemplo. El avión, el aire y el suelo participan todos en este movimiento de rotación y traslación por la órbita terrestre, que está sobrepuesto al movimiento relativo de los objetos descritos en este problema. Por lo tanto, simplemente realizamos nuestros cálculos en un sistema de coordenadas en el que la Tierra está en reposo y no girando.

Otra consecuencia interesante del movimiento relativo se puede ver cuando se observa la lluvia dentro de un vehículo en movimiento. Usted puede haberse preguntado por qué la lluvia parece venir casi de manera directa a usted mientras conduce. El siguiente ejemplo responde a esta pregunta.

EJEMPLO 3.4 Manejando bajo la lluvia

Supongamos que la lluvia está cayendo directamente hacia abajo sobre un auto, como se indica por las líneas blancas en la figura 3.18. Un observador estacionario fuera del auto podría medir las velocidades de la lluvia (flecha azul) y del auto en movimiento (flecha roja).

Sin embargo, si usted está sentado dentro del auto en movimiento, el mundo exterior del observador estacionario (incluyendo la calle, así como la lluvia) se mueve con una velocidad relativa de $\vec{v} = -\vec{v}_{\text{auto}}$. La velocidad de este movimiento relativo tiene que sumarse a todos los eventos externos como se observan desde el interior del auto en movimiento. Este movimiento da como resultado el factor de velocidad \vec{v}'_{lluvia} para la lluvia tal como se observa desde el interior del auto en movimiento (figura 3.19); matemáticamente, este vector es una suma, $\vec{v}'_{\text{lluvia}} = \vec{v}_{\text{lluvia}} - \vec{v}_{\text{auto}}$, donde \vec{v}_{lluvia} y \vec{v}_{auto} son los vectores de velocidad de la lluvia y del auto como los mide el observador estacionario, fijo en tierra.



FIGURA 3.18 Los vectores de velocidad de un auto en movimiento y de la lluvia cayendo en forma vertical sobre el auto, vistos por un observador estacionario.



FIGURA 3.19 El vector velocidad \vec{v}'_{lluvia} de la lluvia como se observa desde el interior del auto en movimiento.

LO QUE HEMOS APRENDIDO | GUÍA DE ESTUDIO PARA EXAMEN

- En dos o tres dimensiones, cualquier cambio en la magnitud o dirección de la velocidad de un objeto produce una aceleración.
- El movimiento de proyectil de un objeto se puede separar en un movimiento en la dirección x , descrita por las ecuaciones

$$(1) \quad x = x_0 + v_{x0}t$$

$$(2) \quad v_x = v_{x0}$$

y movimiento en la dirección y , descrito por

$$(3) \quad y = y_0 + v_{y0}t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$(4) \quad y = y_0 + \bar{v}_y t$$

$$(5) \quad v_y = v_{y0} - gt$$

$$(6) \quad \bar{v}_y = \frac{1}{2}(v_y + v_{y0})$$

$$(7) \quad v_y^2 = v_{y0}^2 - 2g(y - y_0)$$

- La relación entre las coordenadas x y y para el movimiento de proyectil ideal se puede describir por una parábola dada por la fórmula $y = y_0 + (\tan \theta_0)x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta_0}x^2$,

donde y_0 es la posición vertical inicial, v_0 es la rapidez inicial del proyectil, y θ_0 es el ángulo inicial de lanzamiento del proyectil con respecto a la horizontal.

- El alcance R de un proyectil está dado por

$$R = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta_0.$$

- La altura máxima H que alcanza un proyectil ideal está dada por $H = y_0 + \frac{v_{y0}^2}{2g}$, donde v_{y0} es el componente vertical de la velocidad inicial.

- Las trayectorias de proyectiles no son parábolas cuando se toma en cuenta la resistencia del aire. En general, las trayectorias de proyectiles realistas no alcanzan la altura máxima predicha, y tienen un alcance significativamente menor.
- La velocidad \vec{v}_{ol} de un objeto con respecto a un marco de referencia de laboratorio estacionario se puede calcular usando una transformación galileana de velocidades, $\vec{v}_{ol} = \vec{v}_{om} + \vec{v}_{ml}$, donde \vec{v}_{om} es la velocidad del objeto con respecto a un marco móvil de referencia y \vec{v}_{ml} es la velocidad constante del marco móvil de referencia con respecto al marco del laboratorio.

TÉRMINOS CLAVE

sistema de coordenadas de mano derecha, p. 72
proyectil ideal, p. 74
movimiento de proyectil ideal, p. 74

trayectoria, p. 76
alcance, p. 78
altura máxima, p. 78

velocidad relativa, p. 84
transformación de Galileo, p. 85

NUEVOS SÍMBOLOS

\vec{v}_{ol} , velocidad relativa de un objeto con respecto al marco de referencia de un laboratorio

RESPUESTAS A LAS OPORTUNIDADES DE AUTOEXAMEN

3.1 Use la ecuación 3.23 y $t = (x - x_0)/v_{x0} = (x - x_0)/(v_0 \cos \theta_0)$ para hallar

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_0^2 - 2g(x - x_0)(\tan \theta_0) + g^2(x - x_0)^2/(v_0 \cos \theta_0)^2}$$

3.2 El tiempo para llegar al ápice es $v_y = v_{y0} - gt_{\text{top}} = 0 \Rightarrow t_{\text{top}} = v_{y0}/g = v_0 \sin \theta/g$. El tiempo total de vuelo es $t_{\text{total}} = 2t_{\text{top}}$ debido a la simetría de la trayectoria parabólica del proyectil. El alcance es el producto del tiempo total de vuelo y el componente horizontal de la velocidad: $R = t_{\text{total}}v_{x0} = 2t_{\text{top}}v_0 \cos \theta = 2(v_0 \sin \theta/g)v_0 \cos \theta = v_0^2 \sin(2\theta)/g$.

PRÁCTICA PARA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Lineamientos de problemas resueltos

1. En todos los problemas con marcos de referencia móviles es importante distinguir claramente qué objeto tiene qué movimiento en qué marco y en relación con qué. Es conveniente usar subíndices de dos letras, la primera de las cuales indica un objeto y la segunda el objeto en relación con el cual se mueve. La situación del andador móvil descrita al principio de la sección 3.6 es un buen ejemplo de este uso de subíndices.

2. En todos los problemas que se refieren al movimiento de proyectil ideal, el movimiento en la dirección x es independiente del movimiento en la dirección y . Para resolverlos, usted puede usar casi siempre las siete ecuaciones cinemáticas (3.11 a 3.17), que describen el movimiento con velocidad constante en la dirección horizontal y el movimiento en caída libre con aceleración constante en la dirección vertical. En general, usted debe evitar la aplicación de fórmulas como recetas de cocina; pero, en situaciones de examen, estas siete ecuaciones cinemáticas pueden ser su primera línea de defensa. Recuerde siempre, sin embargo, que estas ecuaciones funcionan sólo en situaciones en las que el componente de aceleración horizontal es cero y el componente de aceleración vertical es constante.

PROBLEMA RESUELTO 3.3 Tiempo de vuelo

Usted puede haber participado en una Olimpiada de Ciencias en la escuela secundaria o preparatoria. En uno de los eventos de la Olimpiada de Ciencias, la meta es acertar a un blanco horizontal a una distancia fija con una pelota de golf lanzada por una catapulta. Los equipos contendientes construyen sus propias catapultas. Su equipo ha construido una capaz de lanzar una pelota de golf con una rapidez inicial de 17.2 m/s, de acuerdo con varias pruebas realizadas antes de la competencia.

PROBLEMA

Si el blanco está ubicado a la misma altura que la elevación desde la cual se lanza la pelota de golf y a una distancia horizontal de 22.42 m, ¿cuánto tiempo permanecerá en el aire la pelota antes de llegar al blanco?

SOLUCIÓN

PIENSE

Primero vamos a eliminar lo que no funciona. No podemos simplemente dividir la distancia entre la catapulta y el blanco entre la velocidad inicial, porque esto implicaría que el vector de velocidad inicial está en la dirección horizontal. Como el proyectil está en caída libre en dirección vertical durante su vuelo, con certeza erraría el blanco. De modo que tenemos que dirigir la pelota de golf con un ángulo mayor que cero con respecto a la horizontal. Pero, ¿a qué ángulo debemos apuntar?

Si la pelota de golf, como se dijo, se lanza desde la misma altura a la que está el blanco, entonces la distancia horizontal entre la catapulta y el blanco es igual al alcance. Como también conocemos la rapidez inicial, podemos calcular el ángulo de lanzamiento. Conocer el ángulo y la rapidez inicial nos permite determinar el componente horizontal del vector velocidad. Como este componente horizontal no cambia en el tiempo, el tiempo de vuelo se obtiene al dividir el alcance entre el componente horizontal de la velocidad.

ESBOCE

No necesitamos un diagrama en este caso porque simplemente mostraría una parábola, como para todo movimiento de proyectil. Sin embargo, no sabemos todavía el ángulo inicial, de modo que necesitaremos un diagrama más adelante.

INVESTIGUE

El alcance del proyectil está dado por la ecuación 3.25:

$$R = \frac{v_0^2}{g} \operatorname{sen} 2\theta_0.$$

Si sabemos el valor de este alcance y la velocidad inicial, podemos hallar el ángulo:

$$\operatorname{sen} 2\theta_0 = \frac{gR}{v_0^2}.$$

Una vez que tenemos el valor del ángulo, podemos usarlo para calcular el componente horizontal de la velocidad inicial:

$$v_{x0} = v_0 \cos \theta_0.$$

Por último, como se observó antes, obtenemos el tiempo de vuelo como la relación entre el alcance y el componente horizontal de la velocidad:

$$t = \frac{R}{v_{x0}}.$$

SIMPLIFIQUE

Si despejamos el ángulo de la ecuación $\operatorname{sen} 2\theta_0 = Rg/v_0^2$, vemos que tiene dos soluciones: una para un ángulo menor a 45° y otra para un ángulo mayor a 45° . La figura 3.20 grafica la función $\operatorname{sen} 2\theta_0$ (en rojo) para todos los valores posibles de un ángulo inicial θ_0 y muestra dónde cruza la curva la gráfica de gR/v_0^2 (línea horizontal azul). Llamamos a las dos soluciones θ_a y θ_b .

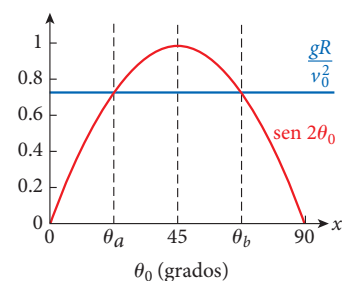


FIGURA 3.20 Dos soluciones para el ángulo inicial.

(continúa)

(continuación)

Algebraicamente, estas soluciones están dadas como

$$\theta_{a,b} = \frac{1}{2} \text{sen}^{-1} \left(\frac{Rg}{v_0^2} \right).$$

Sustituyendo este resultado en la fórmula para el componente horizontal de la velocidad, se obtiene

$$t = \frac{R}{v_{x0}} = \frac{R}{v_0 \cos \theta_0} = \frac{R}{v_0 \cos \left(\frac{1}{2} \text{sen}^{-1} \left(\frac{Rg}{v_0^2} \right) \right)}.$$

CALCULE

Al sustituir los valores obtenemos

$$\theta_{a,b} = \frac{1}{2} \text{sen}^{-1} \left(\frac{(22.42 \text{ m})(9.81 \text{ m/s}^2)}{(17.2 \text{ m/s})^2} \right) = 24.0128^\circ \text{ o } 65.9872^\circ$$

$$t_a = \frac{R}{v_0 \cos \theta_a} = \frac{22.42 \text{ m}}{(17.2 \text{ m/s})(\cos 24.0128^\circ)} = 1.42699 \text{ s}$$

$$t_b = \frac{R}{v_0 \cos \theta_b} = \frac{22.42 \text{ m}}{(17.2 \text{ m/s})(\cos 65.9872^\circ)} = 3.20314 \text{ s}.$$

REDONDEE

El alcance se especificó con cuatro cifras significativas y la rapidez inicial con tres. Por lo tanto, también presentamos nuestros resultados finales con tres cifras significativas:

$$t_a = 1.43 \text{ s}, \quad t_b = 3.20 \text{ s}.$$

Observe que ambas soluciones son válidas en este caso, y el equipo puede elegir cualquiera de las dos.

VUELVA A REVISAR

Volvamos al procedimiento que no funciona: tomar simplemente la distancia de la catapulta al blanco y dividirla entre la rapidez. Este procedimiento incorrecto da como resultado $t_{\min} = d/v_0 = 1.30 \text{ s}$. Escribimos t_{\min} para simbolizar este valor a fin de indicar que es un límite inferior que representa el caso en el que el vector velocidad señala de manera horizontal y en el que despreciamos el movimiento en caída libre del proyectil. Así, t_{\min} sirve como un límite inferior absoluto, y es confortante observar que el tiempo más corto que obtuvimos antes es un poco mayor que este valor mínimo posible pero no realista.

PROBLEMA RESUELTO 3.4 Venado en movimiento

La guardiana del zoológico que capturó al mono en el ejemplo 3.1 tiene que capturar ahora un venado. Encontramos que ella tenía que apuntar en forma directa al mono para la captura anterior. Ella decide otra vez apuntar directamente a su objetivo, indicado por el blanco en la figura 3.21.



FIGURA 3.21 La flecha roja indica la velocidad del venado en el marco de referencia de la guardiana del zoológico.

PROBLEMA

¿Dónde impactará el dardo tranquilizador si el venado (*deer*) está a una distancia $d = 25 \text{ m}$ de la guardiana y corre de derecha a izquierda con una rapidez de $v_d = 3.0 \text{ m/s}$? El dardo tranquilizador sale horizontalmente del rifle con una rapidez $v_0 = 90 \text{ m/s}$.

SOLUCIÓN

PIENSE

El venado se mueve al mismo tiempo que el dardo cae, lo cual introduce dos complicaciones. Lo más fácil es analizar sobre este problema en el marco móvil de referencia del venado.

En ese marco, el componente horizontal lateral del movimiento del dardo tiene una velocidad constante de $-\vec{v}_d$. El componente vertical del movimiento es, nuevamente, un movimiento de caída libre. El desplazamiento total del dardo es entonces la suma vectorial de los desplazamientos causados por estos dos movimientos.

ESBOCE

Dibujamos los dos desplazamientos en el marco de referencia del venado (figura 3.22). La flecha azul es el desplazamiento debido al movimiento de caída libre, y la flecha roja es el movimiento lateral horizontal del dardo en el marco de referencia del venado. La ventaja de dibujar los desplazamientos en este marco móvil de referencia es que el blanco está fijo en el venado y se mueve con él.

INVESTIGUE

Primero, necesitamos calcular el tiempo que tarda el dardo tranquilizador en moverse 25 m en la línea de mira directa del rifle al venado. Como el dardo sale del rifle en dirección horizontal, el componente inicial horizontal hacia delante del vector de velocidad del dardo es de 90 m/s. Para el movimiento del proyectil, el componente horizontal de la velocidad es constante. Por lo tanto, para el tiempo que tarda el dardo en cruzar la distancia de 25 m, tenemos

$$t = \frac{d}{v_0}.$$

Durante este tiempo, el dardo cae, bajo la influencia de la gravedad, y su desplazamiento vertical es

$$\Delta y = -\frac{1}{2}gt^2.$$

También durante este tiempo, el venado tiene un desplazamiento lateral horizontal en el marco de referencia de la guardiana de $x = -v_d t$ (el venado se mueve a la izquierda, por lo cual el componente horizontal de la velocidad tiene valor negativo). Por lo tanto, el desplazamiento del dardo en el marco de referencia del venado es (vea figura 3.22)

$$\Delta x = v_d t.$$

SIMPLIFIQUE

Sustituyendo la expresión para el tiempo en las ecuaciones para los dos desplazamientos se obtiene

$$\Delta x = v_d \frac{d}{v_0} = \frac{v_d}{v_0} d$$

$$\Delta y = -\frac{1}{2}gt^2 = -\frac{d^2 g}{2v_0^2}.$$

CALCULE

Ahora estamos listos para introducir los números:

$$\Delta x = \frac{(3.0 \text{ m/s})}{(90 \text{ m/s})}(25 \text{ m}) = 0.8333333 \text{ m}$$

$$\Delta y = -\frac{(25 \text{ m})^2(9.81 \text{ m/s}^2)}{2(90 \text{ m/s})^2} = -0.378472 \text{ m}.$$

REDONDEE

Redondeando nuestros resultados a dos cifras significativas, obtenemos:

$$\Delta x = 0.83 \text{ m}$$

$$\Delta y = -0.38 \text{ m}.$$

El efecto neto es la suma vectorial de los desplazamientos lateral horizontal y vertical, como se indica por la flecha verde diagonal en la figura 3.22: el dardo errará el venado y dará en el suelo detrás de éste.

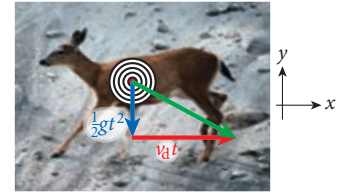


FIGURA 3.22 Desplazamiento del dardo tranquilizador en el marco de referencia del venado.

(continúa)

(continuación)

VUELVA A REVISAR

¿Dónde debe apuntar la guardiana? Si quiere acertar el tiro al venado mientras corre, debe apuntar de manera aproximada 0.38 m arriba y 0.83 m a la izquierda del objetivo deseado. Un dardo disparado en esta dirección le dará al venado, pero no en el centro del blanco. ¿Por qué? Apuntando así, el vector inicial de velocidad no apunta en la dirección horizontal. Esto prolonga el tiempo de vuelo, como vimos en el problema resuelto 3.3. Un tiempo de vuelo más largo se traduce en un mayor desplazamiento en las direcciones tanto x como y . Esta corrección es pequeña, pero calcularla es un poco laborioso para mostrarla aquí.

PREGUNTAS DE OPCIÓN MÚLTIPLE

3.1 Una flecha se dispara en forma horizontal con una rapidez de 20 m/s desde la cúspide de una torre de 60 m de altura. El tiempo para llegar al suelo será de

- a) 8.9 s c) 3.5 s e) 1.0 s
b) 7.1 s d) 2.6 s

3.2 Se lanza un proyectil desde la parte superior de un edificio con una velocidad inicial de 30 m/s a un ángulo de 60° arriba de la horizontal. La magnitud de esta velocidad en $t = 5$ s después del lanzamiento es

- a) -23.0 m/s c) 15.0 m/s e) 50.4 m/s
b) 7.3 m/s d) 27.5 m/s

3.3 Se lanza una pelota a un ángulo entre 0 y 90° con respecto a la horizontal. Sus vectores de velocidad y aceleración son paralelos entre sí a

- a) 0° c) 60° e) ninguno de los anteriores
b) 45° d) 90°

3.4 Un jardinero de béisbol lanza la pelota a primera base, ubicada a 80 m del jardinero, con una velocidad de 45 m/s. ¿A qué ángulo sobre la horizontal debe lanzar la pelota para que el hombre de primera base atrape la pelota en 2 s a la misma altura?

- a) 50.74° c) 22.7° e) 12.6°
b) 25.4° d) 18.5°

3.5 Una bola de 50 g rueda de un mostrador y cae en el suelo a 2 m desde la base del mostrador. Otra bola de 100 g rueda del mismo mostrador con la misma rapidez y cae al suelo a _____ de la base del mostrador.

- a) menos de 1 m c) 2 m e) más de 4 m
b) 1 m d) 4 m

3.6 Para una rapidez inicial dada de un proyectil ideal, hay _____ ángulo(s) de lanzamiento para los cuales el alcance del proyectil es el mismo.

- a) Sólo uno
b) Dos diferentes
c) Más de dos, pero un número finito de
d) Sólo uno si el ángulo es 45° ; pero de otro modo, dos diferentes
e) Un número infinito de

3.7 Un barco crucero se mueve hacia el sur en aguas calmas con una rapidez de 20.0 km/h, mientras un pasajero en la cubierta camina hacia el este con una rapidez de 5.0 km/h. La velocidad del pasajero con respecto a la Tierra es

- a) 20.6 km/h, a un ángulo de 14.04° al este del sur.
b) 20.6 km/h, a un ángulo de 14.04° al sur del este.
c) 25.0 km/h, al sur.
d) 25.0 km/h, al este.
e) 20.6 km/h, al sur.

3.8 Se disparan dos balas de cañón de diferentes cañones a ángulos $\theta_{01} = 20^\circ$ y $\theta_{02} = 30^\circ$, respectivamente. Suponiendo movimiento de proyectil ideal, la relación de las rapidezces de lanzamiento, v_{01}/v_{02} , para la cual las dos balas tienen el mismo alcance es

- a) 0.742 m c) 1.212 m e) 2.222 m
b) 0.862 m d) 1.093 m

3.9 La aceleración debida a la gravedad en la Luna es de 1.62 m/s², aproximadamente un sexto del valor en la Tierra. Para una velocidad inicial dada v_0 y un ángulo dado de lanzamiento θ_0 , la relación del alcance de un proyectil ideal en la Luna respecto al alcance del mismo proyectil en la Tierra, $R_{\text{Luna}}/R_{\text{Tierra}}$, es

- a) 6 m c) 12 m e) 1 m
b) 3 m d) 5 m

3.10 Una pelota de béisbol sale del bate a un ángulo $\theta_0 = 30^\circ$ con respecto al eje positivo de x , y con una rapidez inicial de 40 m/s, y se atrapa a la misma altura a la cual se bateó. Suponiendo movimiento de proyectil ideal (eje y positivo hacia arriba), la velocidad de la pelota cuando se atrapa es

- a) $(20.00 \hat{x} + 34.64 \hat{y})$ m/s.
b) $(-20.00 \hat{x} + 34.64 \hat{y})$ m/s.
c) $(34.64 \hat{x} - 20.00 \hat{y})$ m/s.
d) $(34.64 \hat{x} + 20.00 \hat{y})$ m/s.

3.11 En movimiento de proyectil ideal, la velocidad y aceleración del proyectil en su máxima altura son, respectivamente

- a) horizontal, vertical hacia abajo. c) cero, cero.
b) horizontal, cero. d) cero, vertical hacia abajo.
e) cero, horizontal.

3.12 En movimiento de proyectil ideal, cuando se elige que el eje positivo de y sea vertical hacia arriba, el componente y de la aceleración del objeto durante la parte ascendente del movimiento y el componente y de la aceleración durante la parte descendente del movimiento son, respectivamente,

- a) positivo, negativo. c) positivo, positivo.
b) negativo, positivo. d) negativo, negativo.

3.13 En movimiento de proyectil ideal, cuando se elige que el eje positivo de y sea vertical hacia arriba, el componente y de la velocidad del objeto durante la parte ascendente del movimiento y el componente y de la velocidad durante la parte descendente del movimiento son, respectivamente,

- a) positivo, negativo. c) positivo, positivo.
b) negativo, positivo. d) negativo, negativo.

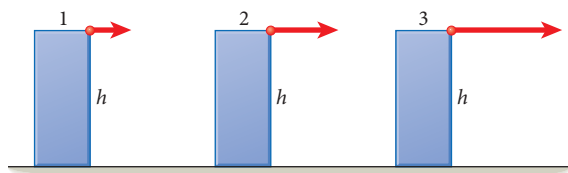
PREGUNTAS

3.14 Se lanza una pelota desde el suelo a un ángulo entre 0 y 90° . ¿Qué de lo siguiente permanece constante: x , y , v_x , v_y , a_x , a_y ?

3.15 Un pasajero de un tren que se está moviendo con velocidad constante lanza una pelota en forma vertical hacia arriba. ¿Dónde aterriza la pelota: de nuevo en sus manos, frente a él o detrás de él? ¿Cambia su respuesta si el tren acelera en la dirección de la velocidad? Si su respuesta es afirmativa, ¿cómo?

3.16 Se lanza una roca a un ángulo de 45° bajo la horizontal desde la parte superior de un edificio. Inmediatamente después del lanzamiento, ¿su aceleración será mayor, igual o menor que la aceleración debida a la gravedad?

3.17 Tres bolas de diferentes masas se lanzan de manera horizontal desde la misma altura con diferentes rapidezces iniciales, como se muestra en la figura. Ordene, del menor al mayor, los tiempos que tardan las bolas en tocar el suelo.



3.18 A fin de alcanzar una altura máxima para la trayectoria de un proyectil, ¿qué ángulo elegiría usted entre 0 y 90° , suponiendo que puede lanzar el proyectil con la misma rapidez inicial independientemente del ángulo de lanzamiento? Explique su razonamiento.

3.19 Un avión viaja con rapidez horizontal constante v , a una altitud h sobre un lago cuando se abre una escotilla en la parte inferior del avión y cae un paquete. El avión sigue volando de manera horizontal a la misma altitud y a la misma velocidad. Desprecie la resistencia del aire.

- a) ¿Cuál es la distancia entre el paquete y el avión cuando el paquete toca la superficie del lago?
b) ¿Cuál es el componente horizontal del vector de velocidad del paquete cuando toca el lago?
c) ¿Cuál es la rapidez del paquete cuando toca el lago?

3.20 Se disparan en secuencia dos balas de cañón al aire, con la misma velocidad al salir del cañón y con el mismo ángulo de lanzamiento. Con base en su trayectoria y alcance, ¿cómo puede usted decir cuál de ellas está hecha de plomo y cuál de madera? Si las mismas balas de cañón fuesen lanzadas en el vacío, ¿cuál sería la respuesta?

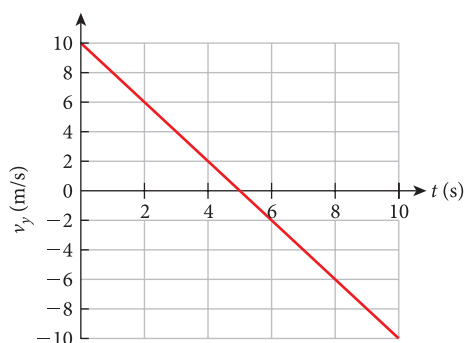
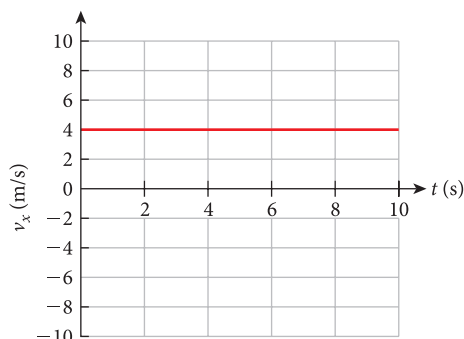
3.21 Nunca se debe saltar de un vehículo en movimiento (tren, auto, autobús, etc.). Sin embargo, suponiendo que se realiza tal salto, desde el punto de vista de la física, ¿cuál sería la mejor dirección para saltar con objeto de minimizar el impacto del aterrizaje? Explique.

3.22 Un bote (*boat*) viaja con una rapidez de v_{BW} relativa al agua (*water*) en un río de anchura D . La rapidez con que fluye el agua es v_W .

a) Pruebe que el tiempo necesario para cruzar el río a un punto exactamente opuesto al punto de partida y luego regresar es $T_1 = 2D / \sqrt{v_{BW}^2 - v_W^2}$.

b) También pruebe que el tiempo que tarda el bote en viajar una distancia D aguas abajo y luego regresar es $T_1 = 2Dv_B / (v_{BW}^2 - v_W^2)$.

3.23 Un disco de hockey movido por cohetes se mueve en una mesa horizontal de hockey de aire sin fricción. En las gráficas que siguen se presentan los componentes x y y de su velocidad como función del tiempo. Suponiendo que en $t = 0$ el disco está en $(x_0, y_0) = (1, 2)$, trace una gráfica detallada de la trayectoria $y(x)$.



3.24 En un movimiento tridimensional, las coordenadas x , y y z del objeto como función del tiempo están dadas por

$$x(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}t, \quad y(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}t \quad \text{y} \quad z(t) = -4.9t^2 + \sqrt{3}t.$$

Describa el movimiento y la trayectoria del objeto en un sistema de coordenadas xyz .

3.25 Un objeto se mueve en el plano xy . Las coordenadas x y y del objeto como función del tiempo están dadas por las siguientes ecuaciones: $x(t) = 4.9t^2 + 2t + 1$ y $y(t) = 3t + 2$. ¿Cuál es el vector de velocidad del objeto como función del tiempo? ¿Cuál es el vector de aceleración en el tiempo $t = 2$ s?

3.26 El movimiento de una partícula se describe por las dos ecuaciones paramétricas siguientes:

$$x(t) = 5 \cos(2\pi t)$$

$$y(t) = 5 \sin(2\pi t)$$

donde las posiciones están dadas en metros y t es el tiempo en segundos.

a) Dibuje una gráfica de la trayectoria de la partícula (es decir, una gráfica de y contra x).

b) Determine las ecuaciones que describen los componentes x y y de la *velocidad*, v_x y v_y , como funciones del tiempo.

c) Dibuje una gráfica de la rapidez de la partícula como función del tiempo.

3.27 En un experimento para prueba de concepto en un sistema de defensa antibalística, se dispara un misil desde el suelo de un campo de tiro hacia un blanco estacionario en el suelo. El sistema detecta el misil por radar, analiza su movimiento parabólico en tiempo real y determina que se disparó desde una distancia $x_0 = 5\,000$ m, con una rapidez inicial de 600 m/s a un ángulo de lanzamiento $\theta_0 = 20^\circ$. El sistema de defensa calcula entonces la demora necesaria medido desde el lanzamiento del misil y dispara un pequeño cohete situado a $y_0 = 500$ m con una velocidad inicial de v_0 m/s con un ángulo de lanzamiento $\alpha_0 = 60^\circ$ en el plano yz para interceptar al misil. Determine la rapidez inicial v_0 del cohete interceptor y la demora necesaria.

3.28 Se lanza un proyectil con un ángulo de 45° sobre la horizontal. ¿Cuál es el cociente de su alcance horizontal a su máxima altura? ¿Cómo cambia la respuesta si la rapidez inicial del proyectil es el doble?

3.29 En un movimiento de proyectil, el alcance horizontal y la altura máxima alcanzada por el proyectil son iguales.

a) ¿Cuál es el ángulo de lanzamiento?

b) Si todo lo demás permanece igual, ¿cómo se debe cambiar el ángulo de lanzamiento, θ_0 , de un proyectil para reducir a la mitad el alcance del proyectil?

3.30 Un disco de hockey de aire tiene un cohete modelo fijado de manera rígida. El disco se empuja desde una esquina a lo largo del lado largo de la mesa de hockey de aire de 2.00 m de longitud, con el cohete apuntando a lo largo del lado corto de la mesa, y al mismo tiempo se dispara el cohete. Si el empuje del cohete imparte al disco una aceleración de 2.00 m/s² y la mesa tiene una anchura de 1.00 m, ¿con qué velocidad inicial mínima debe empujarse el disco para enviarlo al lado corto opuesto de la mesa sin que rebote en ninguno de los lados largos de la mesa? Dibuje la trayectoria del disco para tres velocidades iniciales: $v < v_{\min}$, $v = v_{\min}$ y $v > v_{\min}$. Desprecie la fricción y la resistencia del aire.

3.31 En un campo de batalla, un cañón dispara una bala hacia arriba de una cuesta, desde el nivel del suelo, con una velocidad inicial v_0 a un ángulo θ_0 sobre la horizontal. El suelo mismo hace un ángulo α sobre la horizontal ($\alpha < \theta_0$). ¿Cuál es el alcance R de la bala, medido a lo largo del suelo inclinado? Compare su resultado con la ecuación para el alcance en suelo horizontal (ecuación 3.25).

3.32 Dos nadadores con una afición sentimental por la física participan en una peculiar carrera que modela un famoso experimento de óptica: el experimento de Michelson-Morley. La carrera tiene lugar en un río de 50.0 m de anchura que fluye a razón constante de 3.00 m/s. Ambos nadadores parten del mismo punto de una ribera y nadan a la misma rapidez de 5.00 m/s *con respecto a la corriente*. Uno de los nadadores nada directamente a través del río al punto más cercano en la ribera opuesta, y luego se vuelve y regresa al punto de partida. El otro nadador nada *a lo largo* de la ribera, primero aguas arriba una distancia exactamente igual a la anchura del río, y luego aguas abajo de regreso al punto de partida. ¿Quién llega primero al punto de partida?

PROBLEMAS

Una • y dos •• indican nivel creciente de dificultad.

Sección 3.2

3.33 ¿Cuál es la magnitud de la velocidad media de un objeto si éste se mueve de un punto con coordenadas $x = 2.0$ m, $y = -3.0$ m a un punto con coordenadas $x = 5.0$ m, $y = -9.0$ m en un intervalo de tiempo de 2.4 s?

3.34 Un hombre que busca a su perro conduce primero 10 mi al noreste, luego 12 mi directo al sur y, finalmente, 8 mi en una

dirección 30° al norte del oeste. ¿Cuál es la magnitud y cuál es la dirección de su desplazamiento resultante?

3.35 Durante una excursión en su velero, usted navega 2.00 km al este, 4.00 km al sureste, y una distancia adicional con un rumbo desconocido. Su posición final está 6.00 km directamente al este del punto de partida. Encuentre la magnitud y la dirección del tercer tramo de su viaje.

3.36 Un camión viaja 3.02 km al norte y luego da un giro de 90° a la izquierda y viaja otros 4.30 km. El viaje completo tarda 5.00 min.

a) Con respecto a un sistema bidimensional de coordenadas sobre la superficie de la Tierra tal que el eje y apunta al norte, ¿cuál es el vector de desplazamiento neto del camión para este viaje?

b) ¿Cuál es la magnitud de la velocidad media para este viaje?

•3.37 Un conejo corre en un jardín de tal manera que los componentes x y y de su desplazamiento, como funciones del tiempo, están dados por $x(t) = -0.45t^2 - 6.5t + 25$ y $y(t) = 0.35t^2 + 8.3t + 34$. (Tanto x como y están en metros, y t en segundos.)

a) Calcule la posición del conejo (magnitud y dirección) en $t = 10$ s.

b) Calcule la velocidad del conejo en $t = 10$ s (magnitud y dirección).

c) Determine el vector de aceleración en $t = 10$ s.

••3.38 Algunos autos de alquiler tienen instalada una unidad GPS, que permite a la empresa arrendadora verificar dónde está usted en todo momento y así saber también su velocidad en cualquier tiempo. Un empleado de la empresa conduce uno de estos autos de alquiler en el lote de la empresa, y durante el intervalo de tiempo de 0 a 10 s, se encuentra que tiene un vector de posición como función del tiempo de

$$\vec{r}(t) = \left((24.4 \text{ m}) - t(12.3 \text{ m/s}) + t^2(2.43 \text{ m/s}^2), \right. \\ \left. (74.4 \text{ m}) + t^2(1.80 \text{ m/s}^2) - t^3(0.130 \text{ m/s}^3) \right)$$

a) ¿Cuál es la distancia de este carro desde el origen del sistema de coordenadas en $t = 5.00$ s?

b) ¿Cuál es el vector de velocidad como función del tiempo?

c) ¿Cuál es la rapidez en $t = 5.00$ s?

Crédito extra: ¿puede usted trazar una gráfica de la trayectoria del auto en el plano xy ?

Sección 3.3

3.39 Una esquiadora se lanza en un salto con una velocidad horizontal de 30.0 m/s (sin componente vertical de velocidad). ¿Cuáles son las magnitudes de los componentes horizontal y vertical de su velocidad en el instante antes de que aterrice 2.00 s después?

3.40 Un arquero dispara una flecha desde una altura de 1.14 m sobre el suelo con una velocidad inicial de 47.5 m/s y un ángulo inicial de 35.2° sobre la horizontal. ¿En qué tiempo después de soltar la flecha del arco estará la flecha volando exactamente horizontal?

3.41 Un balón de fútbol americano se despeja con una velocidad inicial de 27.5 m/s y un ángulo inicial de 56.7°. ¿Cuál es su *hang time* (el tiempo hasta que vuelve a tocar tierra)?

3.42 Usted sirve una pelota de tenis desde una altura de 1.8 m sobre el suelo. La pelota sale de su raqueta con una rapidez de 18.0 m/s a un ángulo de 7.00° sobre la horizontal. La distancia horizontal de la línea de base de la cancha a la red es de 11.83 m, y la red tiene una altura de 1.07 m. Desprecie los efectos del giro impartido a la pelota, así como de la resistencia del aire. ¿La pelota libra la red? Si la respuesta es afirmativa, ¿por cuánto? Si no, ¿por cuánto erró?

3.43 Desde dos edificios se tiran piedras de manera horizontal con la misma velocidad. Una piedra aterriza al doble de la distancia de su edificio que la otra piedra. Determine el cociente de las alturas de los dos edificios.

3.44 Usted está practicando lanzamiento de dardos en su dormitorio. Está de pie a 3.0 m de la pared en que está colgada la tabla. El dardo sale de su mano con una velocidad horizontal en un punto que está a 2.0 m sobre el nivel del suelo. El dardo da en la tabla en un punto a 1.65 m del suelo. Calcule:

a) el tiempo de vuelo del dardo;

b) la rapidez inicial del dardo;

c) la velocidad del dardo cuando llega a la tabla.

•3.45 Un jugador de fútbol americano patea el balón con una rapidez de 22.4 m/s a un ángulo de 49° sobre la horizontal desde una distancia de 39 m de la línea de gol.

a) Por cuánto libra el balón o deja de librar la barra del marco de gol si la barra está a 3.05 m de altura?

b) ¿Cuál es la velocidad vertical del balón en el momento en que llega al marco de gol?

•3.46 Un objeto disparado a un ángulo de 35.0° sobre la horizontal tarda 1.50 s en viajar los últimos 15.0 m de su distancia vertical y los últimos 10.0 m de su distancia horizontal. ¿Con qué velocidad se lanzó el objeto?

•3.47 Se usa una banda transportadora para mover arena de un lugar a otro en una fábrica. El transportador está inclinado en un ángulo de 14.0° de la horizontal, y la arena se mueve sin deslizamiento a razón de 7.00 m/s. La arena se recolecta en un tambor grande que está 3.00 m debajo del extremo de la banda transportadora. Determine la distancia horizontal entre el extremo de la banda transportadora y la parte media del tambor recolector.

•3.48 El auto de su amigo está estacionado en un acantilado que da hacia el mar, sobre una cuesta que forma un ángulo de 17.0° bajo la horizontal. Los frenos fallan y el auto rueda cuesta abajo desde el reposo una distancia de 29.0 m hacia el borde del acantilado, que está a 55.0 m de altura sobre el mar y, desgraciadamente, continúa más allá del borde y cae en el mar.

a) Encuentre la posición del auto relativa a la base del acantilado cuando éste llega al mar.

b) Determine cuánto tiempo tarda el auto en caer.

•3.49 Se lanza un objeto con una rapidez de 20.0 m/s desde la parte superior de una torre alta. La altura y del objeto como función del tiempo t transcurrido desde el lanzamiento es $y(t) = -4.9t^2 + 19.32t + 60$, donde h está en metros y t en segundos. Determine:

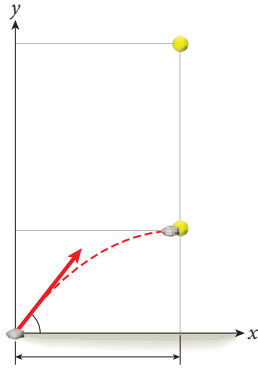
a) la altura H de la torre;

b) el ángulo de lanzamiento;

c) la distancia horizontal que recorre el objeto antes de tocar el suelo.

•3.50 Se lanza un proyectil a un ángulo de 60° sobre la horizontal a nivel del suelo. El cambio en su velocidad entre el lanzamiento y el instante anterior a tocar tierra se encuentra que es $\Delta\vec{v} \equiv \vec{v}_{\text{aterriz}} - \vec{v}_{\text{lanzam}} = -20\hat{y}$ m/s. ¿Cuál es la velocidad inicial del proyectil? ¿Cuál es la velocidad final inmediatamente antes de tocar tierra?

••3.51 La figura muestra las trayectorias de una pelota de tenis que tira su amiga desde la ventana de su departamento, y de la piedra que usted tira desde el suelo en el mismo instante. La piedra y la pelota chocan $x = 50.0$ m, $y = 10.0$ m y $t = 3.00$ s. Si la pelota se soltó desde una altura de 54.0 m, determine la velocidad de la piedra, al inicio y en el momento del choque con la pelota.



Sección 3.4

3.52 Para una competencia en una feria científica, un grupo de estudiantes de preparatoria construyen una máquina de disparar pelotas que puede lanzar una pelota de golf desde el origen con una velocidad de 11.2 m/s y un ángulo inicial de 31.5° con respecto a la horizontal.

- a) ¿Dónde caerá la pelota de regreso al suelo?
- b) ¿A qué altura estará en el punto más alto de su trayectoria?
- c) ¿Cuál es el vector de velocidad de la pelota (en componentes cartesianas) en el punto más alto de su trayectoria?
- d) ¿Cuál es el vector de aceleración de la pelota (en componentes cartesianas) en el punto más alto de su trayectoria?

3.53 Si usted quiere usar una catapulta para lanzar rocas y el alcance máximo que necesita para estos proyectiles es de 0.67 km, ¿qué rapidez inicial deben tener sus proyectiles al salir de la catapulta?

3.54 ¿Cuál es la altura máxima sobre el suelo que puede alcanzar un proyectil de 0.79 kg de masa lanzado desde el nivel del suelo si usted puede impartirle una rapidez inicial de 80.3 m/s?

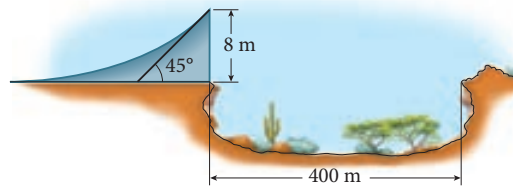
•3.55 Durante uno de los juegos, se le pidió a usted despejar el balón para su equipo de fútbol americano. Usted pateó el balón a un ángulo de 35.0° con una velocidad de 25.0 m/s. Si su tiro va directo a lo largo del campo, determine la velocidad media a la cual tiene que correr el corredor del equipo rival que está a 70.0 m de usted, para atrapar el balón a la misma altura desde la que usted lo lanzó. Suponga que el corredor comienza a correr cuando el balón sale de su pie y que la resistencia del aire es despreciable.

•3.56 Por prueba y error, una rana aprende que puede saltar una distancia horizontal máxima de 1.3 m. Si, en el transcurso de una hora, la rana pasa 20% del tiempo descansando y 80% del tiempo realizando saltos idénticos de dicha longitud máxima, en una línea recta, ¿cuál es la distancia que recorre la rana?

•3.57 Un malabarista de circo realiza un acto con pelotas que lanza con su mano derecha y las atrapa con la izquierda. Lanza cada pelota con un ángulo de 75° y cada una alcanza una altura máxima de 90 cm sobre el punto de lanzamiento. Si el malabarista tarda 0.2 s en atrapar una pelota con su mano izquierda, pasarla a su mano derecha y volverla a lanzar al aire, ¿cuál es el máximo número de pelotas que puede manejar?

••3.58 En un juego de video antiguo, se lanza una pelota desde la esquina de un plano inclinado liso. El plano inclinado forma un ángulo de 30.0° con la horizontal y tiene una anchura de $w = 50.0$ cm. El lanzador de resorte forma un ángulo de 45.0° con la orilla inferior del plano inclinado. El objetivo es meter la pelota en un pequeño agujero en la esquina opuesta del plano inclinado. ¿Con qué velocidad inicial debe usted lanzar la pelota para conseguir este objetivo?

••3.59 Un temerario imitador trata de revivir el intento de Evel Knievel, en 1974, de saltar sobre el Cañón del Snake River en una motocicleta impulsada por cohete. El cañón tiene una anchura $L = 400$ m, y ambos bordes están a la misma altura. La altura de la rampa de lanzamiento en un borde del cañón es $h = 8.00$ m sobre el borde, y el ángulo de la parte final de la rampa es de 45.0° con respecto a la horizontal.



a) ¿Cuál es la mínima rapidez de lanzamiento necesaria para que el imitador libre la anchura del cañón? Desprecie la resistencia del aire y el viento.

b) Famoso después de su exitoso primer salto, pero todavía recuperándose de las heridas que sufrió en el golpe causado por el fuerte rebote al aterrizar, el temerario decide saltar nuevamente, pero agrega una rampa de aterrizaje con una pendiente que iguale el ángulo de su velocidad en el aterrizaje. Si la altura de la rampa de aterrizaje en el borde opuesto es de 3.00 m, ¿cuál es la nueva rapidez de lanzamiento necesaria, a qué distancia del borde de lanzamiento y a qué altura debe estar la orilla de la rampa de aterrizaje?

Sección 3.5

3.60 Se golpea una pelota de golf con un ángulo inicial de 35.5° respecto a la horizontal y una velocidad inicial de 83.3 mph. Toca tierra a una distancia de 86.8 m del lugar de lanzamiento. ¿En cuánto se redujo el alcance por los efectos de la resistencia del viento, el giro y demás comparado con el valor ideal?

Sección 3.6

3.61 Usted camina en un andador móvil en un aeropuerto. La longitud del andador es de 59.1 m. Si su velocidad relativa al andador es de 2.35 m/s y el andador se mueve con una velocidad de 1.77 m/s, ¿cuánto tardará usted en llegar al otro extremo del andador?

3.62 El capitán de un bote quiere viajar directamente a través de un río que fluye hacia el este con una rapidez de 1.00 m/s. Parte de la ribera sur del río y se dirige a la ribera norte. El bote tiene una velocidad de 6.10 m/s con respecto al agua. ¿Con qué rumbo (en grados) debe timonear el capitán el bote? Observe que 90° es este, 180° es sur, 270° es oeste y 360° es norte.

3.63 El capitán de un bote quiere viajar directamente a través de un río que fluye hacia el este. Parte de la ribera sur del río y se dirige a la ribera norte. El bote tiene una rapidez de 5.57 m/s con respecto al agua. El capitán timonea el bote en la dirección 315° . ¿Con qué rapidez fluye el agua? Observe que 90° es este, 180° es sur, 270° es oeste y 360° es norte.

•**3.64** El indicador de rapidez de aire de un avión que despegó de Detroit indica 350. km/h, y la brújula indica que se lleva rumbo este a Boston. Sopla un viento uniforme con rumbo norte a 40.0 km/h. Calcule la velocidad del avión respecto a la tierra. Si el piloto quiere volar directamente a Boston (rumbo este), ¿qué debe indicar la brújula?

•**3.65** Usted quiere cruzar una sección recta de un río que tiene una corriente uniforme de 5.33 m/s y una anchura de 127 m. Su lancha de motor puede generar una rapidez de 17.5 m/s. Suponga que alcanza rapidez máxima de inmediato (es decir, desprecie el tiempo que tarda en acelerar la lancha a velocidad máxima).

a) Si usted quiere atravesar en forma directa el río con un ángulo de 90° relativo a la ribera, ¿a qué ángulo relativo a la ribera debe usted enfilar su lancha?

b) ¿Cuánto tardará en cruzar el río de esta manera?

c) ¿En qué dirección debe apuntar su lancha para lograr un tiempo mínimo de cruce?

d) ¿Cuál es el tiempo mínimo para cruzar el río?

e) ¿Cuál es la rapidez mínima de su lancha que todavía le permitirá cruzar el río con un ángulo de 90° relativo a la ribera?

•**3.66** Durante una larga espera en un aeropuerto, un padre, de profesión físico, y su hija de 8 años prueban un juego con un andador mecánico. Han medido el andador y vieron que mide 42.5 m de longitud. El padre tiene un cronómetro y le mide el tiempo a su hija. Primero, la hija camina con una rapidez constante en la misma dirección del andador. Tarda 15.2 s en llegar al extremo del andador. Luego se vuelve y camina con la misma rapidez anterior, relativa al andador, y esta vez en sentido opuesto. El tramo de retorno tarda 70.8 s. ¿Cuál es la rapidez del andador relativa a la terminal, y con qué rapidez caminaba la niña?

•**3.67** Un avión tiene una rapidez de aire de 126.2 m/s y está volando al norte, pero el viento sopla del noreste al suroeste a 55.5 m/s. ¿Cuál es la rapidez real del avión con respecto al suelo?

Problemas adicionales

3.68 Se dispara un cañón desde una colina a una altura de 116.7 m a un ángulo de 22.7° con respecto a la horizontal. Si la velocidad de salida del cañón es de 36.1 m/s, ¿cuál es la rapidez de una bala de 4.35 kg cuando toca tierra 116.7 m abajo?

3.69 Una pelota de béisbol se lanza con una velocidad de 31.1 m/s a un ángulo de $\theta = 33.4^\circ$ sobre la horizontal. ¿Cuál es el componente horizontal de la velocidad de la pelota en el punto más alto de la trayectoria?

3.70 Se tira de manera horizontal una piedra desde la parte superior de un edificio con una rapidez inicial de $v = 10.1$ m/s. Si aterriza a una distancia $d = 57.1$ m de la base del edificio, ¿qué altura tiene el edificio?

3.71 Un auto se mueve a una rapidez de 19.3 m/s constante y cae lluvia a 8.9 m/s en forma directa hacia abajo. ¿Qué ángulo θ (en grados) forma la lluvia con respecto a la horizontal como la observa el conductor?

3.72 Usted pasa el salero y el pimentero a su amigo en el otro extremo de una mesa que tiene una altura de 0.85 m deslizando sobre la mesa. Ambos erraron el blanco y salieron de la mesa, con velocidades de 5 m/s y 2.5 m/s, respectivamente.

a) Compare los tiempos que duraron los frascos en llegar al suelo.

b) Compare la distancia que cada frasco viaja desde la orilla de la mesa hasta el punto donde toca el suelo.

3.73 Un helicóptero en vuelo horizontal a una elevación constante de 500. m soltó una caja que contenía víveres para un campo de refugiados. Si la caja tocó tierra a una distancia horizontal de 150. m desde el punto de su lanzamiento, ¿cuál era la rapidez del helicóptero? ¿Con qué rapidez tocó tierra la caja?

3.74 Un auto cae directamente a un acantilado de 60.0 m de altura. La policía en la escena del accidente observa que el punto de impacto está a 150. m de la base del acantilado. ¿Qué tan rápido viajaba el auto cuando saltó el borde del acantilado?

3.75 Al terminar el periodo de primavera, la clase de física de una preparatoria celebra el fin de cursos lanzando un fajo de papeles de examen en el basurero de la ciudad con una catapulta de fabricación casera. Su objetivo es darle a un punto a 30.0 m de distancia y a la misma altura a la que el fajo de papeles se salió de la catapulta. El componente horizontal de la velocidad inicial es de 3.90 m/s. ¿Cuál es el componente inicial en la dirección vertical? ¿Cuál es el ángulo de lanzamiento?

3.76 Los salmones con frecuencia saltan aguas arriba de cascadas para llegar a sus zonas de reproducción. Un salmón atravesó una caída de 1.05 m de altura, que saltó en 2.1 s a un ángulo de 35° para continuar aguas arriba. ¿Cuál fue la rapidez inicial de su salto?

3.77 Un bombero, a una distancia de 60 m de un edificio incendiado, dirige un chorro de agua de una manguera a nivel del suelo a un ángulo de 37° sobre la horizontal. Si el agua sale de la manguera a 40.3 m/s, ¿a qué piso del edificio llegará el agua? Cada piso tiene una altura de 4 m.

3.78 Un proyectil sale del nivel del suelo a un ángulo de 68° sobre la horizontal. Cuando llega a su altura máxima, H , ha viajado una distancia horizontal, d , en la misma cantidad de tiempo. ¿Cuál es la relación H/d ?

3.79 La terminal McNamara Delta, en el Aeropuerto Metro Detroit, tiene andadores móviles para comodidad de los pasajeros. Robert camina junto a un andador y tarda 30.0 s en recorrer su longitud. John simplemente permanece de pie sobre el andador y cubre la misma distancia en 13.0 s. Kathy camina sobre el andador con la misma rapidez de Robert. ¿Cuánto tarda Kathy en su caminata?

3.80 Cae la lluvia de manera vertical a una rapidez constante de 7.00 m/s. ¿A qué ángulo de la vertical parecen caer las gotas para el conductor de un auto que viaja por un camino recto con una rapidez de 60.0 km/h?

3.81 Para determinar la aceleración gravitacional en la superficie de un planeta recién descubierto, los científicos realizan un experimento de movimiento de proyectil. Lanzan un pequeño cohete modelo a una rapidez inicial de 50.0 m/s y un ángulo de 30.0° sobre la horizontal, y determinan que el alcance (horizontal) en suelo plano es de 2 165 m. Calcule el valor de g para el planeta.

3.82 Un clavadista salta de un acantilado de 40.0 m al mar. Las rocas salen del agua en una distancia horizontal de 7.00 m desde el pie del acantilado. ¿Con qué rapidez horizontal mínima debe saltar el clavadista para evitar las rocas y llegar con seguridad al mar?

3.83 Un jardinero lanza una pelota de béisbol con una rapidez inicial de 32 m/s en un ángulo de 23° sobre la horizontal. La pelota sale de su mano a una altura de 1.83 m. ¿Cuánto tiempo está la pelota en el aire antes de tocar tierra?

3.84 Se lanza una piedra desde la parte superior de un acantilado con altura de 34.9 m. Su rapidez inicial es de 29.3 m/s, y el ángulo de lanzamiento es de 29.9° con respecto a la horizontal. ¿Cuál es la rapidez con la que la piedra choca con el suelo en la base del acantilado?

3.85 Durante los Juegos Olímpicos de 2004, una lanzadora de bala hizo un lanzamiento con una rapidez de 13.0 m/s a un ángulo de 43° sobre la horizontal. Soltó la bala desde una altura de 2 m sobre el suelo.

- a) ¿Qué distancia viajó la bala en la horizontal?
- b) ¿Cuánto tardó la bala en tocar tierra?

3.86 Un vendedor está de pie en el puente Golden Gate durante un congestionamiento de tránsito. Está a una altura de 71.8 m sobre el agua. Recibe una llamada en su teléfono móvil que le enoja tanto que arroja su teléfono horizontalmente del puente, con una velocidad de 23.7 m/s.

- a) ¿Qué distancia horizontal viaja el teléfono antes de tocar el agua?
- b) ¿Cuál es la velocidad con la que el teléfono toca el agua?

3.87 Un guardia de seguridad persigue a un ladrón por una azotea. Ambos corren a 4.2 m/s. Antes de que el ladrón llegue al borde de la azotea, tiene que decidir si debe saltar al techo del edificio vecino, que está a 5.5 m de distancia y 4.0 m más bajo. Si decide saltar de manera horizontal para huir del guardia, ¿lo puede lograr? Explique su respuesta.

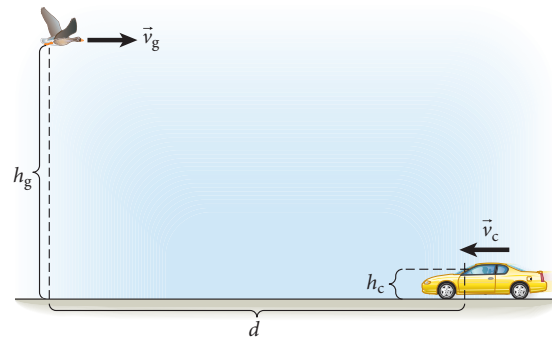
3.88 Un dirigible está ascendiendo a razón de 7.50 m/s a una altura de 80.0 m sobre el suelo cuando se lanza hori-

zontalmente un paquete desde su cabina con una rapidez de 4.70 m/s.

- a) ¿Cuánto tarda el paquete en llegar al suelo?
- b) ¿Con qué velocidad (magnitud y dirección) toca tierra?

3.89 Los gansos salvajes son conocidos por su mala educación. Un ganso vuela hacia el norte a una altitud uniforme de $h_g = 30.0$ m sobre una carretera norte-sur, cuando ve un auto delante a la distancia que se mueve en el carril que va al sur, y decide entregar (dejar caer) un “huevo”. El ganso vuela con una rapidez de $v_g = 15.0$ m/s, y el auto se mueve con una rapidez de $v_c = 100.0$ km/h.

- a) Dados los detalles de la figura, donde la separación entre el ganso y la defensa frontal del auto, $d = 104.1$ m, se especifica en el instante en que el ganso entra en acción, ¿tendrá el conductor que lavar el parabrisas después de este encuentro? (el centro del parabrisas está a una altura $h_c = 1.00$ m del suelo).
- b) Si la entrega se lleva a cabo, ¿cuál es la velocidad relativa del “huevo” con respecto al auto en el momento del impacto?



3.90 Usted está en el centro comercial, en el escalón superior de una escalera eléctrica que desciende cuando usted se inclina en forma lateral para ver a su profesor de física de 1.80 m de estatura en el escalón inferior de la escalera adyacente. Desafortunadamente, el helado que lleva en la mano cae de su cono cuando usted se inclina. Las dos escaleras tienen ángulos idénticos de 40.0° con la horizontal, una altura vertical de 10.0 m, y se mueven con la misma rapidez de 0.400 m/s. ¿Caerá el helado en la cabeza de su profesor? Explique. Si cae en su cabeza, ¿en qué momento y a qué altura vertical sucede eso? ¿Cuál es la rapidez relativa del helado con respecto a la cabeza en el momento del impacto?

3.91 Un jugador de basquetbol practica lanzando tiros de tres puntos desde una distancia de 7.50 m del aro, soltando el balón a una altura de 2.00 m sobre el piso. La parte superior de un aro estándar de basquetbol está a 3.05 m sobre el piso. El jugador lanza el balón con un ángulo de 48° sobre la horizontal. ¿Con qué rapidez inicial debe tirar para hacer canasta?

3.92 Queriendo invitar a Julieta a su fiesta, Romeo lanza guijarros a su ventana con un ángulo de lanzamiento de 37° sobre la horizontal. Está parado a la orilla del jardín de rosas, 7.0 m debajo de la ventana de Julieta, y a 10.0 m de la base del muro. ¿Cuál es la rapidez inicial de los guijarros?

3.93 Un avión vuela horizontalmente sobre la superficie plana de un desierto a una altitud de 5.00 km y con una rapidez

de 1 000 km/h. Si el avión debe lanzar un paquete que se supone debe caer en un objetivo determinado en el suelo, ¿cuál debe ser la ubicación del avión con respecto al objetivo en el momento que suelte el paquete? Si el objetivo cubre un área circular con un diámetro de 50.0 m, ¿cuál es la “ventana de oportunidad” (o margen de error permitido) para el tiempo en el que debe soltar el paquete?

•3.94 Un avión en picada a velocidad constante con un ángulo de 49.0° con la vertical, suelta un paquete a una altitud de 600. m. El paquete toca tierra 3.50 s después de soltarlo. ¿Qué distancia horizontal viaja el paquete?

•3.95 10.0 segundos después del disparo, una bala de cañón impacta un punto a 500. m de distancia horizontal y 100. m arriba del punto de lanzamiento.

a) ¿Con qué velocidad inicial se lanzó la bala?

b) ¿Qué altura máxima alcanzó?

c) ¿Cuál es la magnitud y la dirección de la velocidad de la bala inmediatamente antes de impactar el punto dado?

•3.96 Desprecie la resistencia del aire para lo siguiente. Un balón de fútbol se pateó al aire desde el suelo. Cuando el balón está a una altura de 12.5 m, su velocidad es $(5.6\hat{x} + 4.1\hat{y})$ m/s.

a) ¿A qué altura máxima se elevará el balón?

b) ¿Qué distancia horizontal viajará el balón?

c) ¿Con qué velocidad (magnitud y dirección) tocará tierra?

4

Fuerza

LO QUE APRENDEREMOS 101

4.1 Tipos de fuerzas	101
4.2 Vector de fuerza gravitacional, peso y masa	103
Peso contra masa	104
Órdenes de magnitud de las fuerzas	104
Partícula de Higgs	105
4.3 Fuerza neta	105
Fuerza normal	105
Diagramas de cuerpo libre	106
4.4 Leyes de Newton	106
Primera ley de Newton	107
Segunda ley de Newton	108
Tercera ley de Newton	108
4.5 Cuerdas y poleas	109
Ejemplo 4.1 Juego de la cuerda modificado	109
Ejemplo 4.2 Argollas paralelas	110
Multiplicador de fuerzas	112
4.6 Aplicación de las leyes de Newton	112
Ejemplo 4.3 Dos libros sobre una mesa	113
Problema resuelto 4.1 El patinador	113
Ejemplo 4.4 Dos bloques conectados por una cuerda	115
Ejemplo 4.5 Máquina de Atwood	116
Ejemplo 4.6 Choque de dos vehículos	117
4.7 Fuerza de fricción	118
Fricción cinética	118
Fricción estática	118
Ejemplo 4.7 Patinaje (<i>snowboard</i>) realista	120
Resistencia del aire	121
Ejemplo 4.8 Paracaidismo	122
Tribología	123
4.8 Aplicaciones de la fuerza de fricción	123
Ejemplo 4.9 Dos bloques conector por una cuerda, con fricción	123
Ejemplo 4.10 Tirar de un trineo	124

LO QUE HEMOS APRENDIDO/ GUÍA DE ESTUDIO PARA EXAMEN 126

Práctica para resolución de problemas	127
Problema resuelto 4.2 Cuña	128
Problema resuelto 4.3 Dos bloques	130
Preguntas de opción múltiple	132
Preguntas	132
Problemas	133



FIGURA 4.1 El Transbordador Espacial Columbia despegando del Kennedy Space Center.

LO QUE APRENDEREMOS

- Una fuerza es una cantidad vectorial que mide cómo interactúa un objeto con otros.
- Las fuerzas fundamentales incluyen la atracción gravitacional y la atracción y repulsión electromagnética. En la experiencia diaria, las fuerzas importantes incluyen la tensión, la fuerza normal, la fricción y las fuerzas de resorte.
- La suma de fuerzas múltiples que actúan sobre un objeto es la fuerza neta.
- Los diagramas de cuerpo libre son valiosas herramientas para resolver problemas.
- Las tres leyes de Newton sobre el movimiento rigen el movimiento de los objetos bajo la influencia de fuerzas.
 - a) La primera ley se aplica a objetos para los cuales las fuerzas externas están equilibradas.
 - b) La segunda ley describe los casos en que las fuerzas externas no están equilibradas.
 - c) La tercera ley se refiere a fuerzas iguales (en magnitud) y opuestas (en dirección) que ejercen dos cuerpos entre sí.
- La masa gravitacional y la masa inercial de un objeto son equivalentes.
- La fricción cinética se opone al movimiento de objetos en movimiento; la fricción estática se opone al movimiento inminente de objetos en reposo.
- La fricción es importante para entender los movimientos del mundo real, pero sus causas y mecanismos exactos están todavía bajo investigación.
- Las aplicaciones de las leyes de Newton comprenden múltiples objetos, múltiples fuerzas y la fricción; aplicar estas leyes para analizar una situación es una de las más importantes técnicas para la solución de problemas en física.

El lanzamiento del Transbordador Espacial es un espectáculo imponente. Enormes nubes de humo oscurecen al transbordador hasta que éste se eleva lo suficiente para hacerse visible por encima de las nubes, con brillantes llamas de escape que salen de los motores principales. Los motores generan una fuerza de 30.16 meganewtons (6.781 millones de libras), suficiente para sacudir la tierra en millas a la redonda. Esta tremenda fuerza acelera al transbordador (más de 2 millones de kilogramos o 4.5 millones de libras) lo suficiente para el despegue. Se usan varios sistemas de motores para acelerar el transbordador hasta la rapidez final necesaria para entrar en órbita: aproximadamente 8 km/s.

Al Transbordador Espacial se le reconoce como uno de los mayores logros tecnológicos del siglo xx; pero los principios básicos de fuerza, masa y aceleración que rigen su operación se han conocido durante más de 300 años. Enunciadas por primera vez, por Isaac Newton en 1687, las leyes del movimiento se aplican a toda interacción entre objetos. Así como la cinemática describe cómo se mueven los objetos, las leyes del movimiento de Newton son el fundamento de la **dinámica**, que describe lo que ocasiona que los objetos se muevan. Estudiaremos la dinámica durante varios de los próximos capítulos.

En este capítulo examinamos las leyes del movimiento de Newton y exploramos las diversas clases de fuerzas que ellas describen. El proceso de identificar las fuerzas que actúan sobre un objeto, determinar el movimiento causado por dichas fuerzas e interpretar el resultado vectorial total, es uno de los tipos más comunes e importantes de análisis en la física, y lo usaremos en numerosas ocasiones en todo este libro. Muchos de los tipos de fuerzas que se presentan en este capítulo, tales como las fuerzas de contacto, las fuerzas de fricción y el peso, desempeñarán un papel en muchos de los conceptos y principios que se explican más adelante.

4.1 Tipos de fuerzas

Usted quizás está sentado en una silla mientras lee esta página. La silla ejerce una fuerza sobre usted, que le evita caer al suelo. Puede sentir esta fuerza de la silla en el lado inferior de sus piernas o en su trasero. A la inversa, usted ejerce una fuerza sobre la silla.

Si tira de una cuerda, ejerce una fuerza en ella, y esa cuerda, a su vez, puede ejercer una fuerza en algo que esté atado a su otro extremo. Esta fuerza es un ejemplo de una **fuerza de contacto**, en la que un objeto tiene que estar en contacto con otro para ejercer en éste una fuerza, como en el ejemplo anterior de usted sentado en la silla. Si usted empuja un objeto o tira de él, ejerce sobre él una fuerza de contacto. Tirar de un objeto, como una soga o una cuerda, genera la fuerza de contacto que se llama **tensión**. Empujar un objeto genera la fuerza de contacto que se llama **compre-**

sión. La fuerza que actúa sobre usted cuando se sienta en una silla se llama **fuerza normal**, donde la palabra *normal* significa “perpendicular a la superficie”. Examinaremos las fuerzas normales con más detalle un poco más adelante en este capítulo.

La **fuerza de fricción** es otra importante fuerza de contacto que estudiaremos con más detalle en este capítulo. Si usted empuja un vaso por la superficie de una mesa, entra en reposo relativamente pronto. La fuerza que hace que se detenga el movimiento del vaso es la fuerza de fricción, también llamada algunas veces simplemente *fricción*. Es interesante que la naturaleza exacta y el origen microscópico de la fuerza de fricción todavía se encuentran bajo intensa investigación, como veremos más adelante.

Se necesita una fuerza para comprimir un resorte, así como para estirarlo. La **fuerza de resorte** tiene la propiedad especial de que depende de manera lineal del cambio de longitud del resorte. El capítulo 5 presentará la fuerza de resorte y describirá algunas de sus propiedades. El capítulo 14 se enfocará en las oscilaciones, una clase especial de movimiento que es el resultado de la acción de las fuerzas de resorte.

Las fuerzas de contacto, las fuerzas de fricción y las fuerzas de resorte son el resultado de las **fuerzas fundamentales** de la naturaleza que actúan entre los constituyentes de los objetos. La **fuerza gravitacional**, que a menudo se llama simplemente *gravedad*, es un ejemplo de una fuerza fundamental. Si usted sostiene en su mano un objeto y lo suelta, el objeto cae hacia abajo. Sabemos lo que causa este efecto: la atracción gravitacional entre la Tierra y el objeto. La aceleración gravitacional se introdujo en el capítulo 2 y el presente capítulo describe cómo está relacionada con la fuerza gravitacional. La gravedad también es responsable de mantener a la Luna en órbita alrededor de la Tierra, y a la Tierra en órbita alrededor del Sol. En una famosa narración (¡que hasta puede ser verdad!), se contaba que Isaac Newton tuvo esta intuición en el siglo xvii, después de estar sentado bajo un manzano y recibir el golpe de una manzana que cayó de dicho árbol. El mismo tipo de fuerza gravitacional actúa entre objetos celestes que entre objetos terrestres. Sin embargo, recuerde que la fuerza gravitacional de la que se habla en este capítulo es un ejemplo limitado, sólo válido cerca de la superficie de la Tierra, de la fuerza gravitacional más general. Cerca de la superficie de la Tierra, la fuerza gravitacional actúa sobre todos los objetos, lo cual es suficiente para resolver prácticamente todos los tipos de problemas de trayectoria tratados en el capítulo 3. La forma más general de la interacción gravitacional, sin embargo, es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre los dos objetos que se ejercen la fuerza gravitacional entre ellos. El capítulo 12 se dedica a esta fuerza.

Otra fuerza fundamental que puede actuar a distancia es la **fuerza electromagnética** que, como la fuerza gravitacional, es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia a la cual actúa. La manifestación más evidente de esta fuerza es la atracción o repulsión entre dos imanes, dependiendo de su orientación relativa. Toda la Tierra también actúa como un enorme imán, que hace que las agujas de las brújulas se orienten hacia el Polo Norte. La fuerza electromagnética fue el gran descubrimiento de la física durante el siglo xx, y su refinamiento dio como resultado muchos de los aparatos de alta tecnología (básicamente todo lo que se conecta en un contacto eléctrico o usa baterías) y que disfrutamos hoy en día. Los capítulos 21 a 31 brindan un extenso recorrido de la fuerza electromagnética y sus muchas manifestaciones.

En particular, veremos que todas las fuerzas de contacto mencionadas anteriormente (fuerza normal, tensión, fricción, fuerza de resorte) son consecuencias fundamentales de la fuerza electromagnética. ¿Por qué estudiar en primer lugar estas fuerzas de contacto? La respuesta es que expresar un problema en términos de fuerzas de contacto nos da una gran profundidad de percepción y permite formular soluciones simples para problemas de la vida real, cuya solución exigiría de otro modo el uso de supercomputadoras si tratásemos de analizarlos en términos de las interacciones electromagnéticas entre átomos.

Las otras dos fuerzas fundamentales —llamadas la **fuerza nuclear fuerte** y la **fuerza nuclear débil**— actúan sólo en las escalas de longitud de los núcleos atómicos y entre partículas elementales. Las fuerzas entre partículas elementales se tratarán en el capítulo 39 sobre física de partículas y en el capítulo 40 sobre física nuclear. En general, las fuerzas se pueden definir como los medios que tienen los objetos para influir uno en otro (figura 4.2).

La mayoría de las fuerzas que aquí se mencionan se han conocido durante cientos de años. Sin embargo, las formas en que los científicos y los ingenieros usan las fuerzas siguen evolucionando al crearse nuevos materiales y nuevos diseños. Por ejemplo, la idea de un puente para cruzar un río o una barranca honda se ha usado durante miles de años, comenzando con formas simples como un tronco tirado a través de una corriente, o una serie de rocas puestas en hilera a



a)



b)



c)

FIGURA 4.2 Algunos tipos comunes de fuerzas. a) Una rueda de amolar trabaja usando la fuerza de fricción para quitar la superficie externa de un objeto. b) Con frecuencia se usan resortes como absorbentes de vibraciones en los automóviles para reducir la fuerza transmitida a las ruedas por el suelo. c) Algunos diques están entre las estructuras más grandes jamás construidas. Se diseñan para resistir la fuerza que ejerce el agua que contienen.

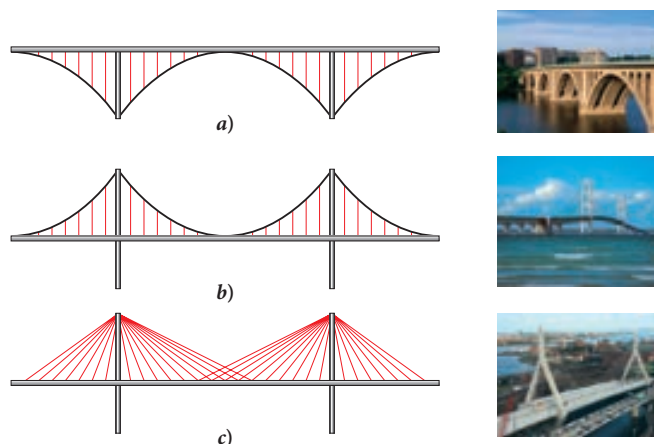


FIGURA 4.3 Diferentes formas de usar fuerzas. *a)* Puentes de arco (como el puente Francis Scott Key en Washington, DC) soportan una calzada por fuerzas compresivas, con cada extremo del arco anclado en su sitio. *b)* Puentes de suspensión (como el Mackinac en Michigan) soportan la calzada por fuerzas de tensión en los cables, que a su vez están soportados por fuerzas de compresión en los altos pilares clavados en el suelo debajo del agua. *c)* Puentes reforzados por cables (como el Zakim en Boston) también usan fuerzas de tensión en los cables para soportar la calzada; pero la carga está distribuida entre una cantidad mucho mayor de cables, que no necesitan ser tan fuertes y difíciles de construir como en los puentes de suspensión.

través de un desfiladero. Con el tiempo, los ingenieros desarrollaron la idea de un puente de arco que puede soportar una pesada calzada y una carga de tránsito usando fuerzas de compresión. Muchos de estos puentes se construyeron de piedra o acero, materiales que pueden soportar bien la compresión [figura 4.3a)]. A finales del siglo XIX y en el siglo XX se construyeron puentes con la calzada suspendida de cables de acero soportados por altos pilares [figura 4.3b)]. Los cables soportaban la tensión, y estos puentes podían ser más ligeros y más largos que los puentes de diseños anteriores. A finales del siglo XX comenzaron a aparecer puentes reforzados por cables, con la calzada soportada por cables fijados de manera directa a los pilares [figura 4.3c)]. Estos puentes por lo general no son tan largos como los puentes de suspensión, pero son menos costosos y necesitan menos tiempo para su construcción.

4.2 Vector de fuerza gravitacional, peso y masa

Después de esta introducción general a las fuerzas, es tiempo de ponerse más cuantitativo. Comencemos con un hecho obvio: las fuerzas tienen una dirección. Por ejemplo, si usted está sosteniendo en su mano una computadora laptop, fácilmente puede decir que la fuerza gravitacional que actúa sobre la computadora apunta hacia abajo. Esta dirección es la del **vector de fuerza gravitacional** (figura 4.4). De nuevo, para caracterizar una cantidad vectorial en todo este libro, se usa una pequeña flecha sobre el símbolo de la cantidad. El vector de fuerza gravitacional que actúa sobre la laptop se denota mediante \vec{F}_g en la figura.

La figura 4.4 muestra también un conveniente sistema de coordenadas cartesianas, que sigue la convención que se introdujo en el capítulo 3 en la que la dirección y positiva es hacia arriba (y la dirección y negativa es hacia abajo). Las direcciones de x y z quedan entonces en el plano horizontal, como se muestra. Como siempre, usamos un sistema de coordenadas de mano derecha. También nos limitamos a sistemas de coordenadas bidimensionales con ejes x y y siempre que sea posible.

En el sistema de coordenadas en la figura 4.4, el vector de fuerza de la fuerza gravitacional que actúa sobre la laptop señala en la dirección y negativa:

$$\vec{F}_g = -F_g \hat{y}. \quad (4.1)$$

Aquí vemos que el vector de fuerza es el producto de su magnitud, F_g , y su dirección, $-\hat{y}$. La magnitud F_g se llama **peso** del objeto.

Cerca de la superficie de la Tierra (dentro de unos pocos cientos de metros bajo tierra), la magnitud de la fuerza gravitacional que actúa sobre un objeto está dado por el producto de la masa del objeto, m , y la aceleración gravitacional de la Tierra, g :

$$F_g = mg. \quad (4.2)$$

Hemos usado la magnitud de la aceleración gravitacional en capítulos anteriores: tiene el valor $g = 9.81 \text{ m/s}^2$. Observe que este valor constante es válido sólo hasta unos pocos cientos de metros sobre el suelo, como veremos en el capítulo 12.

Con la ecuación 4.2, encontramos que la unidad de fuerza es el producto de la unidad de masa (kg) y la unidad de aceleración (m/s^2), lo que hace que la unidad de fuerza sea kg m/s^2 . (Quizá vale la

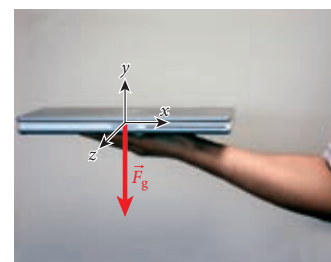


FIGURA 4.4 Vector de fuerza de gravedad que actúa en una computadora laptop, en relación con el sistema de coordenadas cartesianas de mano derecha.

pena repetir que representamos las unidades con letras latinas y las cantidades físicas con itálicas. Así, m es la unidad de longitud; m representa la cualidad física de masa.) Como el manejo de fuerzas es tan común en la física, esa unidad de fuerza ha recibido su propio nombre, el newton (N), por sir Isaac Newton, el físico británico que hizo una contribución notable al análisis de las fuerzas.

$$1 \text{ N} \equiv 1 \text{ kg m/s}^2. \quad (4.3)$$

Peso contra masa

Antes de explicar con más detalle las fuerzas, necesitamos clarificar el concepto de masa. Bajo la influencia de la gravedad, un objeto tiene un peso que es proporcional a su **masa**, que es (intuitivamente) la cantidad de materia en el objeto. Este peso es la magnitud de la fuerza que actúa sobre un objeto debido a su interacción gravitacional con la Tierra (u otro objeto). Cerca de la superficie de la Tierra, la magnitud de esta fuerza es $F_g = mg$, como se expresó en la ecuación 4.2. La masa en esta ecuación también se llama **masa gravitacional** para indicar que es responsable de la interacción gravitacional. Sin embargo, la masa tiene también un papel en la dinámica.

Las leyes del movimiento de Newton, que se presentarán más adelante en este capítulo, tratan de la masa inercial. Para entender el concepto de masa inercial, considere los siguientes ejemplos: es mucho más fácil lanzar una pelota de tenis que un disco de lanzamiento olímpico. También es más fácil abrir una puerta hecha de materiales de peso ligero, como las de madera contrachapada con centro de espuma, que una puerta hecha de un material más pesado como el hierro. Los objetos más masivos parecen resistirse a ser puestos en movimiento que los menos masivos. Esta propiedad de un objeto se conoce como su **masa inercial**. Sin embargo, la masa gravitacional y la masa inercial son idénticas, de modo que la mayoría de las veces hablamos simplemente de la masa de un objeto.

Para una computadora laptop con masa $m = 3.00 \text{ kg}$, por ejemplo, la magnitud de la fuerza gravitacional es $F_g = mg = (3.00 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2) = 29.4 \text{ kg m/s}^2 = 29.4 \text{ N}$. Ahora podemos escribir una ecuación para el vector de fuerza que contiene tanto la magnitud como la dirección de la fuerza gravitacional y que actúa sobre la computadora laptop (vea la figura 4.4):

$$\vec{F}_g = -mg\hat{y}. \quad (4.4)$$

Para resumir, la masa de un objeto se mide en kg y el peso se mide en newtons. La masa y el peso de un objeto se relacionan entre sí multiplicando la masa (en kilogramos) por la constante de aceleración gravitacional, $g = 9.81 \text{ m/s}^2$, para llegar al peso (en newtons). Por ejemplo, si la masa de usted es de 70.0 kg, entonces su peso es de 687 N. En Estados Unidos, la libra (lb) es todavía una unidad que se usa de manera extensa. La equivalencia entre libras y kilogramos es $1 \text{ lb} = 0.4536 \text{ kg}$. Así, su masa de 70.0 kg es de 154 lb. Si usted la expresa en unidades inglesas, en el idioma ordinario usted podría decir que su peso es de 154 libras, lo cual no es correcto. Por desgracia, los ingenieros en Estados Unidos también usan la unidad de libra-fuerza (lb_f) como unidad de fuerza, lo cual se abrevia a simplemente como libra. Sin embargo, una libra-fuerza es 1 libra por la constante de aceleración gravitacional, igual que 1 newton es igual a 1 kg por g . Esto significa que

$$1 \text{ lb}_f = (1 \text{ lb}) \cdot g = (0.4536 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2) = 4.45 \text{ N}.$$

¿Confuso? ¡Sí! Ésta es una razón adicional para mantenerse lejos de usar unidades inglesas. Use kilogramos para la masa y newtons para el peso, ¡que es una fuerza!

Órdenes de magnitud de las fuerzas

El concepto de fuerza es un tema central de este libro, y volveremos a él una y otra vez. Por esta razón, es educativo ver los órdenes de magnitud que pueden tener diferentes fuerzas. La figura 4.5 da una visión general de las magnitudes de algunas fuerzas típicas con la ayuda de una escala logarítmica, similar a las que se usaron en el capítulo 1 para la longitud y la masa.

El peso de un cuerpo humano está en un rango entre 100 y 1 000 N, y está representado por el joven futbolista de la figura 4.5. El audífono a la izquierda del jugador en la figura 4.5 simboliza la fuerza ejercida por el sonido en nuestros tímpanos, que puede ser tan grande como 10^{-4} N , pero todavía es detectable cuando es tan pequeña como 10^{-13} N . (El capítulo 16 se enfocará en el sonido.) Un solo electrón se mantiene en órbita alrededor de un protón por una fuerza electrostática de aproximadamente $10^{-9} \text{ N} \equiv 1 \text{ nN}$, que se introducirá en el capítulo 21 sobre electrostática. Fuerzas tan pequeñas como $10^{-15} \text{ N} \equiv 1 \text{ fN}$ se pueden medir en el laboratorio; estas fuerzas son típicas de las que se necesitan para estirar la molécula de doble hélice del ADN.

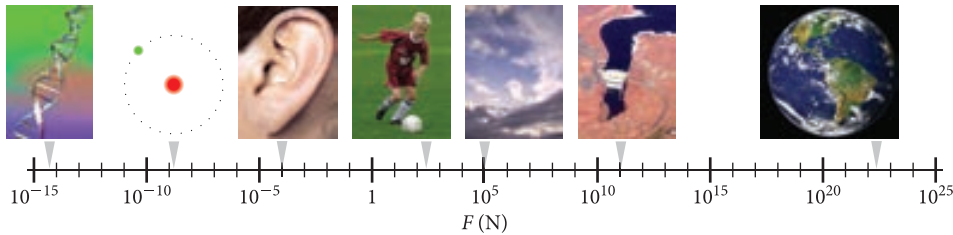


FIGURA 4.5 Magnitudes típicas para diferentes fuerzas.

La atmósfera de la Tierra ejerce una fuerza bastante considerable sobre nuestros cuerpos, del orden de 10^5 N, que es de manera aproximada 100 veces el peso promedio del cuerpo. El capítulo 13, sobre sólidos y fluidos, ampliará este tema y también mostrará cómo calcular la fuerza que ejerce el agua sobre un dique. Por ejemplo, el dique Hoover (que se muestra en la figura 4.5) tiene que soportar una fuerza cercana a 10^{11} N, una enorme fuerza, de más de 30 veces el peso del edificio Empire State. Pero, por supuesto, esta fuerza palidece en comparación con la fuerza gravitacional que ejerce el Sol sobre la Tierra, que es de $3 \cdot 10^{22}$ N. (El capítulo 12, sobre gravedad, describe el procedimiento para calcular esta fuerza.)

Partícula de Higgs

Para lo que importa en nuestros estudios, la masa es una propiedad intrínseca dada de un objeto. El origen de la masa está todavía bajo intenso estudio en la física nuclear y física de partículas. Se ha observado que diferentes partículas elementales tienen masa muy diferente. Por ejemplo, algunas de estas partículas son varios miles de veces más masivas que otras. ¿Por qué? Realmente no lo sabemos. En años recientes, los físicos de partículas han expuesto la teoría de que la llamada **partícula de Higgs** (por el físico escocés Peter Higgs, quien fue el primero en proponer esta teoría) puede ser la causa de la creación de la masa de todas las demás partículas, y que la masa de un tipo específico de partículas depende de cómo interactúan con la partícula de Higgs. Hay una investigación en curso en los aceleradores más grandes de partículas para hallar la partícula de Higgs, la cual se piensa que es una de las piezas centrales faltantes en el modelo estándar de la física de partículas. Sin embargo, una exposición completa sobre el origen de la masa rebasa el alcance de este libro.

4.3 Fuerza neta

Como las fuerzas son vectores debemos sumarlas como vectores, usando los métodos desarrollados en el capítulo 1. Definimos la **fuerza neta** como la suma vectorial de todos los vectores de fuerza que actúan sobre un objeto:

$$\vec{F}_{\text{neta}} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n. \quad (4.5)$$

Siguiendo las reglas para la suma vectorial usando componentes, los componentes cartesianos de la fuerza neta están dados por

$$\begin{aligned} F_{\text{neta},x} &= \sum_{i=1}^n F_{i,x} = F_{1,x} + F_{2,x} + \cdots + F_{n,x} \\ F_{\text{neta},y} &= \sum_{i=1}^n F_{i,y} = F_{1,y} + F_{2,y} + \cdots + F_{n,y} \\ F_{\text{neta},z} &= \sum_{i=1}^n F_{i,z} = F_{1,z} + F_{2,z} + \cdots + F_{n,z}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Para explorar el concepto de fuerza neta, volvamos nuevamente al ejemplo de la laptop sostenida en la mano.

Fuerza normal

Hasta ahora sólo hemos visto la fuerza gravitacional que actúa sobre la computadora laptop. Sin embargo, también hay otras fuerzas que actúan sobre ella. ¿Cuáles son?

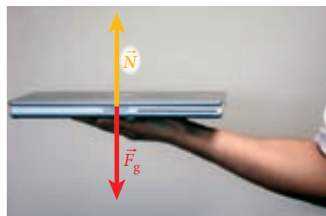


FIGURA 4.6 La fuerza de gravedad actúa hacia abajo y la fuerza normal actúa hacia arriba ejercida por la mano que sostiene la computadora laptop.

En la figura 4.6, la fuerza que ejerce la mano sobre la computadora laptop está representada por la flecha amarilla rotulada \vec{N} . (¡Cuidado! La magnitud de la fuerza normal se representa por la letra itálica N , mientras que la unidad de fuerza, el newton, se representa por la letra latina N .) Observe en la figura que la magnitud del vector \vec{N} es exactamente igual a la del vector \vec{F}_g y que los dos vectores apuntan en sentidos opuestos, o $\vec{N} = -\vec{F}_g$. Esta situación no es accidental. Veremos en breve que en un objeto en reposo no hay una fuerza neta. Si calculamos la fuerza neta que actúa sobre la computadora laptop, obtenemos

$$\vec{F}_{\text{neta}} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{F}_g + \vec{N} = \vec{F}_g - \vec{F}_g = 0.$$

En general, podemos caracterizar la *fuerza normal*, \vec{N} , como una fuerza de contacto que actúa en la superficie entre dos objetos. La fuerza normal siempre se dirige de modo perpendicular al plano de las superficies de contacto. (De ahí el nombre: *normal* que significa “perpendicular”.) La fuerza normal es sólo suficientemente grande para evitar que los objetos penetren uno en otro, y no es necesariamente igual a la fuerza de la gravedad en todas las situaciones.

Para la mano que sostiene la computadora laptop, la superficie de contacto con la computadora está en la cara inferior de la computadora, que está alineada con el plano horizontal. Por definición, la fuerza normal tiene que apuntar de modo perpendicular a este plano o, en este caso, en forma vertical hacia arriba.

Los diagramas de cuerpo libre facilitan la tarea de determinar la fuerza neta sobre objetos.

Diagramas de cuerpo libre

Hemos representado el efecto completo que tiene la mano al sostener la computadora laptop mediante el vector de fuerza \vec{N} . No necesitamos considerar la influencia del brazo, ni de la persona a la que pertenece el brazo, ni del resto del mundo cuando queremos considerar las fuerzas que actúan en la computadora laptop. Podemos eliminarlas simplemente de nuestra consideración, como se ilustra en la figura 4.7a), en la que se ha quitado todo salvo la computadora laptop y los dos vectores de fuerza. De hecho, ni siquiera es necesaria una representación realista de la computadora laptop; ésta se puede mostrar como un punto, como en la figura 4.7b). Este tipo de dibujo de un objeto, en el que se ignoran todas las conexiones con el resto del mundo y sólo se trazan los vectores de fuerza que actúan sobre el objeto, se llama **diagrama de cuerpo libre**.

4.1 Oportunidad de autoexamen

Trace los diagramas de cuerpo libre para una pelota de golf en reposo sobre el tee, su auto estacionado en la calle, y usted sentado en una silla.

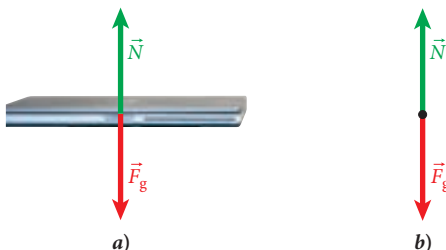


FIGURA 4.7 a) Fuerzas que actúan sobre un objeto real, una computadora laptop; b) abstracción del objeto como un cuerpo libre sobre el que actúan dos fuerzas.

4.4 Leyes de Newton

Hasta ahora, este capítulo ha presentado varios tipos de fuerzas sin explicar en realidad cómo trabajan y cómo podemos tratarlas. La clave para trabajar con fuerzas incluye la comprensión de las leyes de Newton. En esta sección las explicamos y luego presentamos varios ejemplos que muestran cómo se aplican en situaciones prácticas.

Sir Isaac Newton (1642-1727) fue quizás el científico más influyente que ha vivido. Por lo general se le considera el fundador de la mecánica moderna, así como del cálculo diferencial e integral (junto con el matemático alemán Gottfried Leibniz). Los primeros capítulos de este libro son básicamente sobre mecánica newtoniana. Aunque formuló sus tres famosas leyes en el siglo XVII, éstas son todavía el fundamento de nuestro entendimiento de las fuerzas. Para comenzar esta exposición, simplemente enunciamos las tres leyes de Newton, publicadas en 1687.

Primera ley de Newton:

Si la fuerza neta sobre un objeto es igual a cero, el objeto permanecerá en reposo si estaba en reposo. Si se estaba moviendo, continuará en movimiento en línea recta con la misma velocidad constante.

Segunda ley de Newton:

Si una fuerza neta externa, \vec{F}_{neta} actúa sobre un objeto de masa m , la fuerza causará una aceleración \vec{a} , en la misma dirección que la fuerza:

$$\vec{F}_{\text{neta}} = m\vec{a}.$$

Tercera ley de Newton:

Las fuerzas que dos objetos en interacción se ejercen uno sobre otro, son siempre exactamente iguales en magnitud y dirección pero de sentido opuesto:

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\vec{F}_{2 \rightarrow 1}.$$

Primera ley de Newton

La explicación anterior sobre la fuerza neta mencionaba que la condición necesaria para que un objeto esté en reposo es que la fuerza externa neta sea cero. Podemos usar esta condición para encontrar la magnitud y la dirección de cualesquiera fuerzas desconocidas en un problema. Es decir, si sabemos que un objeto está en reposo y conocemos la fuerza de su peso, entonces podemos usar la condición $\vec{F}_{\text{neta}} = 0$ para despejar otras fuerzas que actúan sobre el objeto. Este tipo de análisis dio por resultado la magnitud y la dirección de la fuerza \vec{N} en el ejemplo de la computadora laptop mantenida en reposo.

Podemos usar esta forma de razonar como principio general: si el objeto 1 está en reposo sobre el objeto 2, entonces la fuerza normal \vec{N} que es igual al peso del objeto 1, lo mantiene en reposo y, por lo tanto, la fuerza neta sobre el objeto 1 es cero. Si \vec{N} fuese mayor que el peso del objeto 1, éste se elevaría en el aire. Si \vec{N} fuese menor que el peso del objeto 1, éste se hundiría en el objeto 2.

La primera ley de Newton dice que hay dos posibles estados para un objeto sobre el que la fuerza neta es cero: se dice que un objeto en reposo está en **equilibrio estático**. Un objeto en movimiento con velocidad constante se dice que está en **equilibrio dinámico**.

Antes de continuar, es importante señalar que la ecuación $\vec{F}_{\text{neta}} = 0$ como condición para el equilibrio estático realmente representa una ecuación para cada dimensión del espacio de coordenadas que estemos considerando. Así, en un espacio tridimensional, tenemos tres condiciones de equilibrio independientes:

$$F_{\text{neta},x} = \sum_{i=1}^n F_{i,x} = F_{1,x} + F_{2,x} + \cdots + F_{n,x} = 0$$

$$F_{\text{neta},y} = \sum_{i=1}^n F_{i,y} = F_{1,y} + F_{2,y} + \cdots + F_{n,y} = 0$$

$$F_{\text{neta},z} = \sum_{i=1}^n F_{i,z} = F_{1,z} + F_{2,z} + \cdots + F_{n,z} = 0.$$

Sin embargo, la primera ley de Newton también considera el caso en el que un objeto ya está en movimiento con respecto a algún marco de referencia dado. Para este caso, la ley especifica que la aceleración es cero, siempre y cuando la fuerza neta externa sea cero. La abstracción de Newton afirma algo que en su tiempo parecía estar en conflicto con la experiencia ordinaria. En la actualidad, sin embargo, tenemos la ventaja de haber visto imágenes de televisión de objetos que flotan en las naves espaciales, que se mueven con velocidades que no cambian, hasta que un astronauta los empuja y así ejerce una fuerza sobre ellos. Esta experiencia visual está en completa concordancia con lo que afirma la primera ley, pero en tiempos de Newton esta experiencia no era lo ordinario.

Considere un automóvil que se queda sin gasolina y hay que empujarlo hasta la gasolinera más cercana, en una calle horizontal. Mientras usted empuja, puede hacer que se mueva el auto. Sin embargo, tan pronto como deja de empujar, el auto se mueve más lento y se detiene. Parece que, mientras usted empuja el auto, éste se mueve a velocidad constante, pero cuando usted deja de ejercer sobre él una fuerza, se deja de mover. Esta idea de que se necesita una fuerza constante

para mover algo con rapidez constante era la visión aristotélica, sostenida por el antiguo filósofo griego Aristóteles (384-322 a.C.) y sus discípulos. Galileo (1564-1642) propuso una ley de inercia y expresó la teoría de que los objetos en movimiento disminuían su velocidad debido a la fricción. La primera ley de Newton se basa en esta ley de inercia.

¿Qué sucede con el auto que disminuye de velocidad cuando usted deja de empujarlo? Esta situación no es un caso de fuerza neta cero. En vez de esto, una fuerza actúa sobre el auto para desacelerarlo: la fuerza de fricción. Como la fuerza de fricción actúa como una fuerza neta diferente de cero, resulta que el ejemplo del auto que desacelera es un ejemplo no de la primera ley de Newton, sino de la segunda ley de Newton. Trabajaremos más con la fricción después en este capítulo.

La primera ley de Newton a veces se llama *ley de la inercia*. Ya antes se definió la masa inercial (sección 4.2), y la definición incluía el concepto de que la inercia es la resistencia de un objeto a cambiar su movimiento. Esto es exactamente lo que dice la primera ley de Newton: para cambiar el movimiento de un objeto, usted necesita aplicar una fuerza externa neta; el movimiento no cambia por sí mismo, ni en magnitud ni en dirección.

Segunda ley de Newton

La segunda ley relaciona el concepto de aceleración, para el cual usamos el símbolo \vec{a} , con la fuerza. Ya hemos considerado la aceleración como la derivada de la velocidad con respecto al tiempo y la segunda derivada de la posición con respecto al tiempo. La segunda ley de Newton nos dice lo que causa la aceleración.

Segunda ley de Newton:

Si una fuerza externa neta, \vec{F}_{neta} actúa sobre un objeto de masa m , la fuerza causará una aceleración, \vec{a} , en la misma dirección de la fuerza:

$$\vec{F}_{\text{neta}} = m\vec{a}. \quad (4.7)$$

Esta fórmula, $F = ma$, es quizá la segunda ecuación más famosa de toda la física. (Más adelante encontraremos la más famosa, $E = mc^2$.) La ecuación 4.7 nos dice que la magnitud de la aceleración de un objeto es proporcional a la magnitud de la fuerza neta externa que actúa sobre él. También nos dice que, para una fuerza externa dada, la magnitud de la aceleración es inversamente proporcional a la masa del objeto. Si todo lo demás es igual, los objetos más masivos son más difíciles de acelerar que los objetos menos masivos.

Sin embargo, la ecuación 4.7 nos dice aún más, porque es una ecuación vectorial. Establece que el vector de aceleración que experimenta un objeto de masa m tiene la misma dirección que el vector de fuerza externa neta que actúa sobre el objeto para causar la aceleración. Como es una ecuación vectorial, de inmediato podemos escribir las ecuaciones para los tres componentes espaciales:

$$F_{\text{neta},x} = ma_x, \quad F_{\text{neta},y} = ma_y, \quad F_{\text{neta},z} = ma_z.$$

Este resultado significa que $F = ma$ y se aplica independientemente para cada componente cartesiano de los vectores de fuerza y de aceleración.

Tercera ley de Newton

Si usted ha patinado alguna vez con una patineta (monopatín o tabla), debe haber hecho las siguientes observaciones: si usted está de pie en reposo sobre la patineta, y se baja por el frente o por la parte posterior, la patineta se dispara en el sentido opuesto. En el proceso de bajarse, la patineta ejerce una fuerza sobre su pie, y su pie ejerce una fuerza sobre la patineta. Esta experiencia parece sugerir que estas fuerzas apuntan en sentidos opuestos, y ofrece un ejemplo de una verdad general, cuantificada por la tercera ley de Newton:

Tercera ley de Newton:

Las fuerzas que ejercen entre sí dos objetos en interacción son siempre iguales en magnitud y dirección, pero de sentido opuesto:

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\vec{F}_{2 \rightarrow 1}. \quad (4.8)$$

Observe que estas dos fuerzas no actúan sobre el mismo cuerpo; cada una es la fuerza con la que un cuerpo actúa sobre el otro.

La tercera ley de Newton aparentemente presenta una paradoja. Por ejemplo, si un caballo tira de una carreta hacia adelante con la misma fuerza con que la carreta tira del caballo hacia

atrás, ¿entonces cómo se mueven hacia adelante la carreta y el caballo? La respuesta es que estas fuerzas actúan sobre diferentes objetos del sistema. La carreta experimenta la tracción del caballo y se mueve hacia adelante. El caballo siente la tracción de la carreta y empuja contra el suelo con suficiente fuerza para vencer la tracción de la carreta y moverse hacia adelante. Un diagrama de cuerpo libre de un objeto puede mostrar sólo la mitad de tales pares de fuerzas de acción y reacción.

La tercera ley de Newton es una consecuencia del requisito de que las fuerzas internas —es decir, las fuerzas que actúan entre diferentes componentes del mismo sistema— deben sumar cero; de otra manera, su suma contribuiría a una fuerza neta externa y causaría una aceleración, de acuerdo con la segunda ley de Newton. Ningún objeto ni grupo de objetos se puede acelerar por sí mismo sin interactuar con objetos externos. El cuento del Barón de Münchhausen, que afirmaba haberse sacado a sí mismo de un pantano simplemente tirando de sus propios cabellos, queda desenmascarado como una total ficción por la tercera ley de Newton.

Consideraremos algunos ejemplos de uso de las leyes de Newton para resolver problemas, pero explicaremos cómo las cuerdas y poleas conducen fuerzas. Muchos problemas relativos a las leyes de Newton se refieren a fuerzas sobre una soga (o una cuerda), que con frecuencia pasa por una polea.

4.5 Cuerdas y poleas

Los problemas con cuerdas y poleas son muy comunes. En este capítulo consideraremos sólo cuerdas y poleas sin masa (idealizadas). Siempre que está presente una cuerda, la dirección de la fuerza debida a la tracción sobre la cuerda actúa exactamente en la dirección a lo largo de la cuerda misma. La fuerza con la cual tiramos de una cuerda sin masa se transmite sin cambio a través de toda la cuerda. La magnitud de la fuerza se llama *tensión* en la cuerda. Cada cuerda puede resistir sólo una cierta fuerza máxima, pero por ahora supondremos que todas las fuerzas aplicadas están debajo de ese límite. Las cuerdas no pueden soportar una fuerza de *compresión*.

Si una cuerda se pasa por una polea, la dirección de la fuerza cambia, pero la magnitud de la fuerza es la misma en cualquier lugar dentro de la cuerda. En la figura 4.8, el extremo derecho de la cuerda verde se ató al suelo, y alguien tiró del otro extremo con una determinada fuerza, 11.5 N, indicada en los dispositivos de medición insertados. Como usted puede ver con claridad, la magnitud de la fuerza en ambos lados de la polea es la misma. (El peso de los dispositivos de medición es una pequeña complicación de la vida real; pero se usó en este ejemplo una fuerza de tracción suficientemente grande para despreciar este efecto como una buena aproximación.)



FIGURA 4.8 Una cuerda que pasa por una polea, con dispositivos de medición de fuerza que muestran que la magnitud de la fuerza es constante a lo largo de toda la cuerda.

EJEMPLO 4.1 Juego de la cuerda modificado

En una competencia de juego de la cuerda, dos equipos tratan de tirar uno de otro a través de una línea. Si ningún equipo se mueve, entonces los dos equipos ejercen fuerzas iguales y opuestas sobre la cuerda. Ésta es una consecuencia inmediata de la tercera ley de Newton. Es decir, si el equipo que se muestra en la figura 4.9 tira de la cuerda con una fuerza de magnitud F , el otro equipo necesariamente tiene que tirar de la cuerda con una fuerza de la misma magnitud pero en sentido opuesto.

PROBLEMA

Ahora consideremos la situación en la que tres cuerdas están amarradas entre sí en un punto, y un equipo tira de cada cuerda. Suponga que el equipo 1 tira hacia el oeste, con una fuerza de 2 750 N, y que el equipo 2 tira hacia el norte, con una fuerza de 3 630 N. ¿Puede un tercer equipo tirar de tal manera que el juego de cuerda de los tres equipos termine en reposo; es decir, que ningún equipo pueda mover la cuerda? Si la respuesta es afirmativa, ¿cuál es la magnitud y la dirección de la fuerza necesaria para lograr esto?

SOLUCIÓN

La respuesta a la primera pregunta es sí; no importa en qué dirección y con qué fuerza tiren los equipos 1 y 2. Éste es el caso porque las dos fuerzas siempre se sumarán para dar una fuerza combinada, y todo lo que el equipo 3 tiene que hacer es tirar con una fuerza igual a dicha fuer-



FIGURA 4.9 Hombres que participan en una competencia de juego de la cuerda en la Braemar Games Highland Gathering, Escocia, Reino Unido.

(continúa)

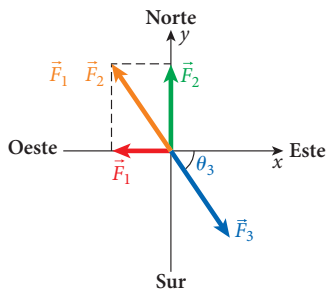


FIGURA 4.10 Suma de vectores de fuerza en el juego de cuerdas de tres equipos.

(continuación)

za combinada y de dirección opuesta. Entonces, la suma de las tres fuerzas será cero, y por la primera ley de Newton, el sistema habrá alcanzado el equilibrio estático. Nada se acelerará, de modo que si las cuerdas comienzan en reposo, nada se moverá.

La figura 4.10 representa la situación física. La suma vectorial de las fuerzas ejercidas por los equipos 1 y 2 es especialmente sencilla, porque las dos fuerzas son perpendiculares entre sí. Elegimos un sistema convencional de coordenadas con su origen en el punto donde convergen las tres cuerdas, y determinamos que el norte esté en la dirección y positiva y el oeste en la dirección x negativa. Así, el vector de fuerza para el equipo 1, \vec{F}_1 , apunta en la dirección x negativa, y el vector de fuerza para el equipo 2, \vec{F}_2 , apunta en la dirección y positiva. Entonces podemos escribir los dos vectores de fuerza y su suma como sigue:

$$\vec{F}_1 = -(2\,750\text{ N})\hat{x}$$

$$\vec{F}_2 = (3\,630\text{ N})\hat{y}$$

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = -(2\,750\text{ N})\hat{x} + (3\,630\text{ N})\hat{y}.$$

La suma se facilitó por el hecho de que las dos fuerzas señalaban a lo largo de los ejes de coordenadas elegidos. Sin embargo, casos más generales de dos fuerzas se sumarían de todas maneras en términos de sus componentes. Como la suma de las tres fuerzas tiene que ser cero para tener reposo, obtenemos la fuerza que tiene que ejercer el tercer equipo:

$$0 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$$

$$\Leftrightarrow \vec{F}_3 = -(\vec{F}_1 + \vec{F}_2)$$

$$= (2\,750\text{ N})\hat{x} - (3\,630\text{ N})\hat{y}.$$

Este vector de fuerza también se muestra en la figura 4.10. Teniendo los componentes cartesianos de los vectores de fuerza que estábamos buscando, podemos obtener la magnitud y la dirección usando trigonometría:

$$F_3 = \sqrt{F_{3,x}^2 + F_{3,y}^2} = \sqrt{(2\,750\text{ N})^2 + (-3\,630\text{ N})^2} = 4\,554\text{ N}$$

$$\theta_3 = \tan^{-1}\left(\frac{F_{3,y}}{F_{3,x}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{-3\,630\text{ N}}{2\,750\text{ N}}\right) = -52.9^\circ.$$

Estos resultados complementan nuestra respuesta.

Como este tipo de problema ocurre con frecuencia, trabajemos con otro ejemplo.

EJEMPLO 4.2 Argollas paralelas

Un gimnasta de 55 kg de masa está suspendido de manera vertical de un par de argollas paralelas [figura 4.11a)].

PROBLEMA 1

Si las cuerdas que soportan las argollas son verticales y están fijadas al techo que está directamente arriba, ¿cuál es la tensión en cada cuerda?

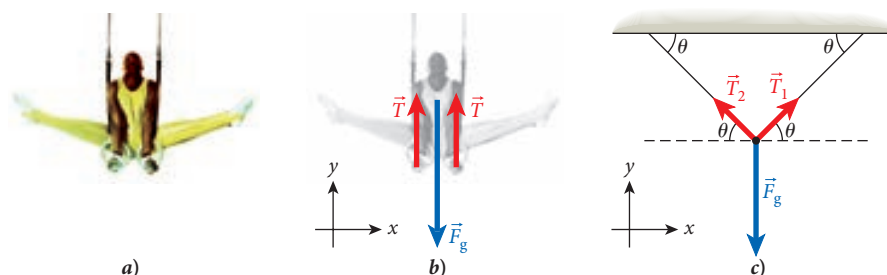


FIGURA 4.11 a) Argollas paralelas en gimnasia masculina. b) Diagrama de cuerpo libre para el problema 1. c) Diagrama de cuerpo libre para el problema 2.

SOLUCIÓN 1

En este ejemplo, definimos que la dirección x sea horizontal y la dirección y vertical. El diagrama de cuerpo libre se muestra en la figura 4.11b). Por ahora, no hay fuerzas en la dirección x . En la dirección y , tenemos $\sum_i F_{y,i} = T_1 + T_2 - mg = 0$. Como ambas cuerdas soportan por igual al gimnasta, la tensión tiene que ser la misma en cada una, $T_1 = T_2 \equiv T$, y obtenemos

$$T + T - mg = 0$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2}mg = \frac{1}{2}(55 \text{ kg}) \cdot (9.81 \text{ m/s}^2) = 270 \text{ N.}$$

PROBLEMA 2

Si las cuerdas están fijadas de modo que formen un ángulo $\theta = 45^\circ$ con el techo [figura 4.11c)], ¿cuál es la tensión en cada cuerda?

SOLUCIÓN 2

En esta parte, las fuerzas sí ocurren tanto en la dirección x como en la dirección y . Trabajemos en términos de un ángulo general y luego introduciremos el ángulo específico, $\theta = 45^\circ$, al final. En la dirección x tenemos para nuestra condición de equilibrio:

$$\sum_i F_{x,i} = T_1 \cos \theta - T_2 \cos \theta = 0.$$

En la dirección y , nuestra condición de equilibrio es

$$\sum_i F_{y,i} = T_1 \sin \theta + T_2 \sin \theta - mg = 0.$$

De la ecuación para la dirección x , obtenemos de nuevo $T_1 = T_2 \equiv T$, y de la ecuación para la dirección y , obtenemos:

$$2T \sin \theta - mg = 0 \Rightarrow T = \frac{mg}{2 \sin \theta}.$$

Insertando los números, obtenemos la tensión en cada cuerda:

$$T = \frac{(55 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2)}{2 \sin 45^\circ} = 382 \text{ N.}$$

PROBLEMA 3

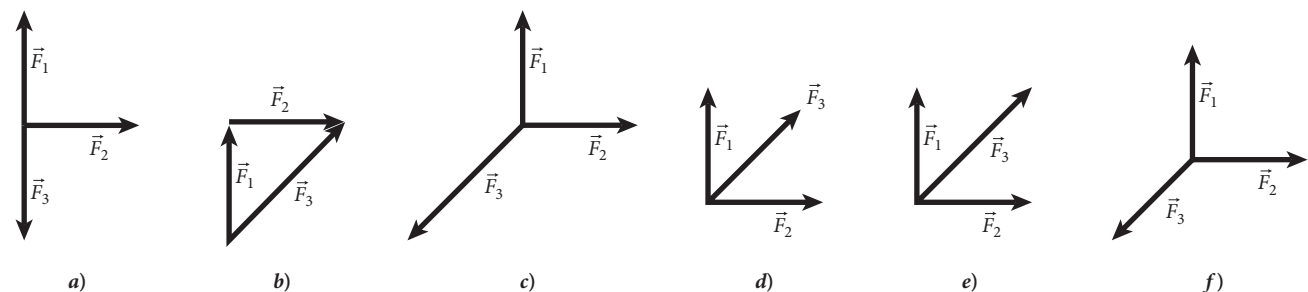
¿Cómo cambia la tensión en las cuerdas al hacerse más y más pequeño el ángulo θ entre las cuerdas y el techo?

SOLUCIÓN 3

Al hacerse más pequeño el ángulo θ entre el techo y las cuerdas, la tensión en las cuerdas, $T = mg/2 \sin \theta$, se vuelve mayor. Cuando θ tiende a cero, la tensión se vuelve infinitamente grande. En realidad, por supuesto, el gimnasta tiene sólo una capacidad finita y no puede mantener su posición para ángulos pequeños.

4.1 Ejercicio en clase

Elija el conjunto de tres vectores coplanarios cuya suma sea una fuerza neta de cero: $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 0$.



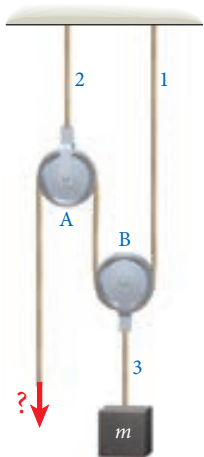


FIGURA 4.12 Cuerda que pasa por dos poleas.

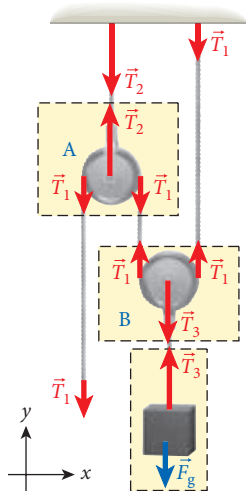


FIGURA 4.13 Diagrama de cuerpo libre para las dos poleas y la masa que se va a levantar.



FIGURA 4.14 Polea con tres vueltas.

Multiplicador de fuerzas

Se pueden combinar cuerdas y poleas para levantar objetos demasiado pesados que de otra manera serían muy difíciles de levantar. Para ver cómo se puede hacer esto, considere la figura 4.12. El sistema que se muestra consiste en la cuerda 1, que está atada al techo (arriba a la derecha) y luego pasa por las poleas B y A. La polea A también está atada al techo con la cuerda 2. La polea B es libre para moverse de modo vertical y está ligada a la cuerda 3. El objeto de masa m , que queremos mover, está suspendido del otro extremo de la cuerda 3. Suponemos que las dos poleas tienen masa despreciable y que la cuerda 1 se puede deslizar por la polea sin fricción.

¿Qué fuerza necesitamos aplicar al extremo libre de la cuerda 1 para mantener el sistema en equilibrio estático? Llamaremos la fuerza de tensión en la cuerda 1, T_1 , la fuerza de tensión en la cuerda 2, T_2 , y la de la cuerda 3, T_3 . De nuevo, la idea clave es que la magnitud de esta fuerza de tensión es la misma en cualquier punto de una cuerda dada.

La figura 4.13 muestra nuevamente el sistema de la figura 4.12, pero con líneas punteadas y áreas sombreadas que indican los diagramas de cuerpo libre de las dos poleas y el objeto de masa m . Comenzamos con la masa m . Para cumplir la condición de fuerza neta cero, necesitamos

$$\vec{T}_3 + \vec{F}_g = 0$$

o

$$F_g = mg = T_3.$$

Por el diagrama de cuerpo libre de la polea B, vemos que la fuerza de tensión aplicada de la cuerda 1 actúa en ambos lados de la polea B. Esta tensión tiene que equilibrar la tensión de la cuerda 3, lo cual nos da

$$2T_1 = T_3.$$

Al combinar las dos últimas ecuaciones, vemos que

$$T_1 = \frac{1}{2}mg.$$

Este resultado significa que la fuerza que necesitamos aplicar para suspender el objeto de masa m de esta manera es sólo la mitad de la fuerza que tendríamos que usar para mantenerlo con una sola cuerda, sin poleas. Este cambio en la fuerza es la razón por lo que una polea se llama *multiplicador de fuerzas*.

Se logra multiplicación de fuerzas todavía mayor si la cuerda 1 pasa un total de n veces sobre las mismas dos poleas. En este caso, la fuerza necesaria para suspender el objeto de masa m es

$$T = \frac{1}{2n}mg. \tag{4.9}$$

La figura 4.14 muestra la situación para la polea inferior de la figura 4.13 con $n = 3$. Este arreglo da por resultado $2n = 6$ flechas de fuerza de magnitud T apuntando hacia arriba, capaces de equilibrar una fuerza hacia abajo de magnitud $6T$, como se expresa en la ecuación 4.9.

4.2 Ejercicio en clase

Usando un par de poleas con dos vueltas, podemos levantar un peso de 440 N. Si agregamos dos vueltas a la polea con la misma fuerza, podemos levantar

- a) la mitad del peso.
- b) dos veces el peso.
- c) un cuarto del peso.
- d) cuatro veces el peso.
- e) el mismo peso.

4.6 Aplicación de las leyes de Newton

Ahora veamos cómo las leyes de Newton nos permiten resolver diversos tipos de problemas que incluyen fuerza, masa y aceleración. Usaremos de manera frecuente diagramas de cuerpo libre y supondremos que las cuerdas y las poleas no tienen masa. También ignoraremos la fricción por ahora, pero la consideraremos en la sección 4.7.

EJEMPLO 4.3 Dos libros sobre una mesa

Hemos considerado la situación sencilla de un objeto (la computadora laptop) soportada desde abajo y mantenida en reposo. Ahora veamos dos objetos en reposo: dos libros sobre una mesa [figura 4.15a)].

PROBLEMA

¿Cuál es la magnitud de la fuerza que ejerce la mesa en el libro inferior?

SOLUCIÓN

Comenzamos con un diagrama de cuerpo libre del libro de arriba, libro 1 [figura 4.15b)]. Esta situación es la misma que la de la computadora laptop que se mantiene en reposo por la mano. La fuerza gravitacional debida a la atracción de la Tierra que actúa sobre el libro superior está indicada por \vec{F}_1 . Tiene la magnitud m_1g , donde m_1 es la masa del libro superior y apunta directamente hacia abajo. La magnitud de la fuerza normal, \vec{N}_1 , que el libro inferior ejerce sobre el libro superior desde abajo es entonces $N_1 = F_1 = m_1g$, por la condición de fuerza neta cero sobre el libro superior (primera ley de Newton). La fuerza \vec{N}_1 apunta hacia arriba, como se muestra en el diagrama de cuerpo libre, $\vec{N}_1 = -\vec{F}_1$.

La tercera ley de Newton nos permite ahora calcular la fuerza que ejerce el libro superior sobre el inferior. Esta fuerza es igual en magnitud y opuesta en dirección a la fuerza que el libro inferior ejerce sobre el libro superior:

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\vec{N}_1 = -(-\vec{F}_1) = \vec{F}_1.$$

Esta relación dice que la fuerza que el libro superior ejerce sobre el libro inferior es exactamente igual a la fuerza gravitacional que actúa sobre el libro superior; es decir, su peso. Usted puede pensar en este punto que este resultado es trivial, pero la aplicación de este principio general nos permite analizar y hacer cálculos para situaciones más complicadas.

Considere ahora el diagrama de cuerpo libre del libro inferior, libro 2 [figura 4.15c)]. Este diagrama de cuerpo libre nos permite calcular la fuerza normal que ejerce la mesa sobre el libro inferior. Sumamos todas las fuerzas que actúan sobre este libro:

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} + \vec{N}_2 + \vec{F}_2 = 0 \Rightarrow \vec{N}_2 = -(\vec{F}_{1 \rightarrow 2} + \vec{F}_2) = -(\vec{F}_1 + \vec{F}_2),$$

donde \vec{N}_2 es la fuerza normal que ejerce la mesa sobre el libro inferior, $\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$ es la fuerza que ejerce el libro superior sobre el libro inferior, y \vec{F}_2 es la fuerza gravitacional sobre el libro inferior. En el último paso, usamos el resultado que obtuvimos del diagrama de cuerpo libre del libro 1. Este resultado significa que la fuerza que la mesa ejerce sobre el libro inferior es exactamente igual en magnitud y opuesta en dirección a la suma de los pesos de los dos libros.

El uso de la segunda ley de Newton nos permite realizar una amplia gama de cálculos respecto al movimiento y la aceleración. El siguiente problema es un ejemplo clásico: considere un objeto de masa m ubicado en un plano inclinado un ángulo θ respecto a la horizontal. Suponga que no hay fuerza de fricción entre el plano y el objeto. ¿Qué nos dice la segunda ley de Newton sobre esta situación?

PROBLEMA RESUELTO 4.1 El patinador

PROBLEMA

Un deportista de patinaje con tabla sobre nieve (72.9 kg masa, 1.79 m de altura) se desliza por una pendiente con un ángulo de 22° con respecto a la horizontal [figura 4.16a)]. Si podemos despreciar la fricción, ¿cuál es la aceleración?

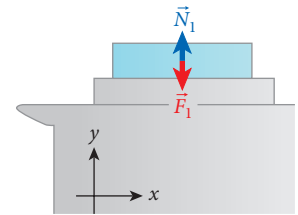
SOLUCIÓN

PIENSE

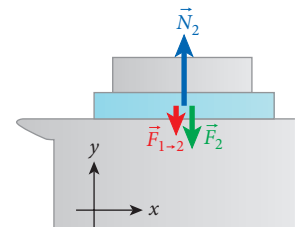
El movimiento está restringido a moverse a lo largo del plano, porque el patinador de tabla sobre nieve no se puede hundir en la nieve ni puede despegarse del plano. (¡Por lo menos no sin



a)



b)



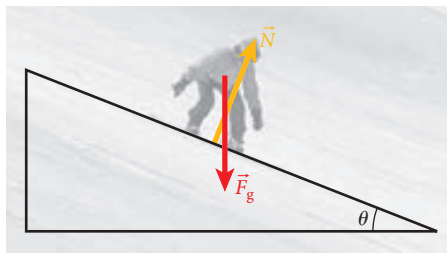
c)

FIGURA 4.15 a) Dos libros sobre una mesa. b) Diagrama de cuerpo libre para el libro 1. c) Diagrama de cuerpo libre para el libro 2.

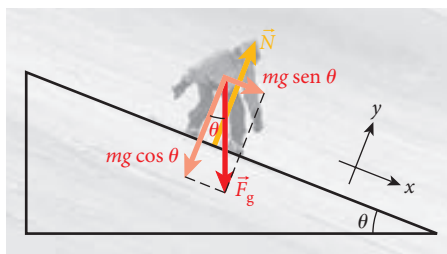
(continúa)



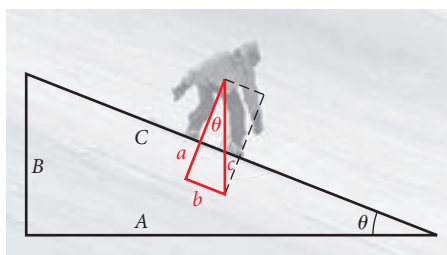
a)



b)



c)



d)

FIGURA 4.16 a) El patinador de tabla sobre nieve es un ejemplo de movimiento en un plano inclinado. b) Diagrama de cuerpo libre del patinador sobre el plano inclinado. c) Diagrama de cuerpo libre del patinador, con un sistema de coordenadas agregado. d) Triángulos semejantes en el problema del plano inclinado.

(continuación)

saltar!) Siempre es aconsejable comenzar con un diagrama de cuerpo libre. La figura 4.16b) muestra los vectores de fuerza para la gravedad, \vec{F}_g , y la fuerza normal, \vec{N} . Observe que el vector de fuerza normal se dirige de manera perpendicular a la superficie de contacto, como lo exige la definición de fuerza normal. También observe que la fuerza normal y la fuerza de gravedad no señalan en direcciones exactamente opuestas y por lo tanto no se cancelan de manera mutua por completo.

ESBOCE

Ahora escogemos un sistema conveniente de coordenadas. Como se muestra en la figura 4.16c), elegimos un sistema de coordenadas con el eje x a lo largo de la dirección del plano inclinado. Esto asegura que la aceleración es sólo en la dirección x . Otra ventaja de esta elección de sistema de coordenadas es que la fuerza normal señala directamente en la dirección y . El precio que pagamos por esta comodidad es que el vector de fuerza gravitacional no apunta a lo largo de uno de los ejes principales de nuestro sistema de coordenadas, sino que tiene un componente x y uno y . Las flechas rojas de la figura indican los dos componentes del vector de fuerza gravitacional. Observe que el ángulo de inclinación del plano, θ , también aparece en el rectángulo construido a partir de los dos componentes del vector de fuerza gravitacional, que es la diagonal de dicho rectángulo. Usted puede ver esta relación considerando los triángulos semejantes con lados abc y ABC en la figura 4.16d). Como a es perpendicular a C y c es perpendicular a A , tenemos que el ángulo entre a y c es el mismo que el ángulo entre A y C .

INVESTIGUE

Los componentes x y y del vector de fuerza gravitacional se encuentran por trigonometría:

$$F_{g,x} = F_g \sin \theta = mg \sin \theta$$

$$F_{g,y} = -F_g \cos \theta = -mg \cos \theta.$$

SIMPLIFIQUE

Ahora realizamos las matemáticas en forma sencilla, separando los cálculos por componentes.

Primero, no hay movimiento en la dirección y , lo cual significa que, de acuerdo con la primera ley de Newton, todos los componentes externos en la dirección y tienen que sumar cero:

$$F_{g,y} + N = 0 \Rightarrow$$

$$-mg \cos \theta + N = 0 \Rightarrow$$

$$N = mg \cos \theta.$$

Nuestro análisis del movimiento en la dirección y nos ha dado la magnitud de la fuerza normal, que equilibra al componente del peso del patinador perpendicular a la pendiente. Éste es un resultado muy típico. La fuerza normal casi siempre equilibra a la fuerza total perpendicular a la superficie de contacto a la que contribuyen todas las otras fuerzas. Por lo tanto, los objetos no se hunden en las superficies ni se elevan de ellas.

La información que nos interesa la obtenemos observando la dirección x . En esta dirección sólo hay un componente de fuerza; el componente x de la fuerza gravitacional. Por lo tanto, de acuerdo con la segunda ley de Newton, obtenemos

$$F_{g,x} = mg \sin \theta = ma_x \Rightarrow$$

$$a_x = g \sin \theta.$$

Así, ahora tenemos el vector de aceleración en el sistema especificado de coordenadas:

$$\vec{a} = (g \sin \theta) \hat{x}$$

Observe que la masa, m , se eliminó de nuestra respuesta. La aceleración no depende de la masa del patinador; sólo depende del ángulo de inclinación del plano. Así, la masa dada del patinador en el planteamiento del problema resulta tan irrelevante como su estatura.

CALCULE

Al introducir los valores dados del ángulo se obtiene

$$a_x = (9.81 \text{ m/s}^2)(\text{sen } 22^\circ) = 3.67489 \text{ m/s}^2.$$

REDONDEE

Como el ángulo de la pendiente se dio sólo con una exactitud de dos dígitos, no tiene sentido dar nuestro resultado con mayor precisión. La respuesta final es

$$a_x = 3.7 \text{ m/s}^2.$$

VUELVA A REVISAR

Las unidades de nuestra respuesta, m/s^2 , son las de la aceleración. El número que obtuvimos es positivo, lo cual significa una aceleración positiva cuesta abajo en el sistema de coordenadas que hemos elegido. También el número es menor que 9.81, lo cual es satisfactorio. Significa que nuestra aceleración calculada es menor que la de caída libre. Como paso final, verifiquemos la congruencia de nuestra respuesta, $a_x = g \text{ sen } \theta$, en casos límite. En el caso en que $\theta \rightarrow 0^\circ$, el seno también converge a cero y la aceleración desaparece. Este resultado es consistente porque no esperamos aceleración del patinador si él permanece en una superficie horizontal. Cuando $\theta \rightarrow 90^\circ$, el seno tiende a 1, y la aceleración es la debida a la gravedad, como esperamos. En este caso límite, el patinador estaría en caída libre.

Los problemas de plano inclinado, como el que acabamos de resolver, son muy comunes y sirven para practicar descomposición de fuerzas en sus componentes. Otro tipo común de problemas se refiere a la redirección de fuerzas mediante poleas y cuerdas. El siguiente ejemplo muestra cómo proceder en un caso sencillo.

EJEMPLO 4.4 Dos bloques conectados por una cuerda

En este problema clásico, una masa suspendida genera una aceleración de una segunda masa que se encuentra sobre una superficie horizontal [figura 4.17a)]. Un bloque de masa m_1 yace sobre una superficie horizontal sin fricción, y está conectado mediante una cuerda sin masa (por sencillez, orientada en la dirección horizontal), que pasa por una polea sin masa, a otro bloque de masa m_2 suspendido de la cuerda.

PROBLEMA

¿Cuál es la aceleración del bloque m_1 y cuál es la aceleración del bloque m_2 ?

SOLUCIÓN

De nuevo comenzamos con un diagrama de cuerpo libre para cada objeto. Para el bloque m_1 , el diagrama de cuerpo libre se muestra en la figura 4.17b). El vector de fuerza gravitacional apunta directamente hacia abajo

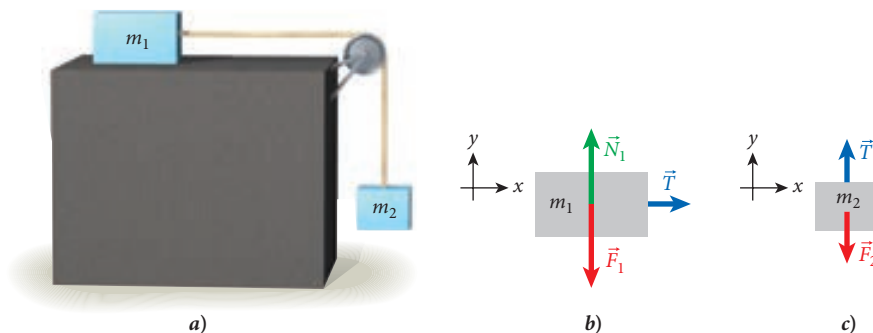


FIGURA 4.17 a) Bloque suspendido de modo vertical mediante una cuerda que pasa por una polea y está conectada a un segundo bloque sobre una superficie horizontal sin fricción. b) Diagrama de cuerpo libre para el bloque m_1 . c) Diagrama de cuerpo libre para el bloque m_2 .

(continúa)

(continuación)

y tiene magnitud $F_1 = m_1g$. La fuerza debida a la cuerda, \vec{T} , actúa a lo largo de la cuerda y por lo tanto está en la dirección horizontal, que hemos elegido como la dirección x . La fuerza normal, \vec{N}_1 , que actúa sobre m_1 , actúa perpendicularmente a la superficie de contacto. Como la superficie es horizontal, \vec{N}_1 actúa en la dirección vertical. Por el requisito de fuerza neta cero en la dirección y , obtenemos que $N_1 = F_1 = m_1g$ para la magnitud de la fuerza normal. La magnitud de la fuerza de tensión en la cuerda, T , queda por determinar. Para el componente de la aceleración en la dirección x , la segunda ley de Newton nos da

$$m_1a = T.$$

Ahora veamos el diagrama de cuerpo libre para la masa m_2 [figura 4.17c)]. La fuerza debida a la cuerda, \vec{T} , que actúa sobre m_1 , también lo hace sobre m_2 , pero la redirección debida a la polea hace que la fuerza actúe en diferente dirección. Sin embargo, nos interesa la magnitud de la tensión, T , y su valor es el mismo para ambas masas.

Para el componente y de la fuerza neta que actúa sobre m_2 , la segunda ley de Newton nos da

$$T - F_2 = T - m_2g = -m_2a.$$

La magnitud de la aceleración \vec{a} para m_2 que aparece en esta ecuación es la misma que a en la ecuación de movimiento para m_1 , porque las dos masas están atadas una a otra por una cuerda y experimentan la misma magnitud de aceleración. Ésta es una percepción clave: si dos objetos están atados entre sí de esta manera, deben experimentar la misma magnitud de aceleración, siempre y cuando la cuerda esté bajo tensión y no se estire. El signo negativo en el lado derecho de esta ecuación indica que m_2 se acelera en la dirección y negativa.

Ahora podemos combinar las dos ecuaciones para las dos masas a fin de eliminar la magnitud de la fuerza en la cuerda, T , y obtener la aceleración común de las dos masas:

$$m_1a = T = m_2g - m_2a \Rightarrow a = g \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} \right).$$

Este resultado tiene sentido: en el límite, cuando m_1 es muy grande en comparación con m_2 , casi no habrá aceleración, mientras que si m_1 es muy pequeño en comparación con m_2 , entonces m_2 se acelerará casi con la aceleración debida a la gravedad, como si no hubiera m_1 .

Para concluir, podemos calcular la magnitud de la tensión reinsertando nuestro resultado para la aceleración en una de las dos ecuaciones que obtuvimos usando la segunda ley de Newton:

$$T = m_1a = g \left(\frac{m_1m_2}{m_1 + m_2} \right).$$

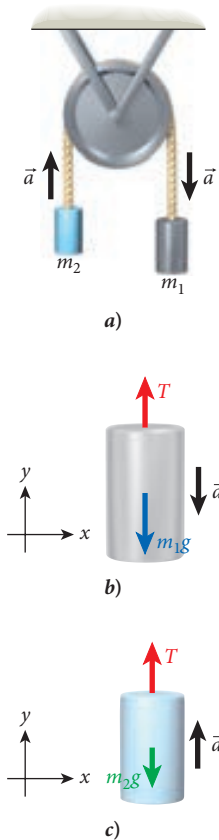


FIGURA 4.18 a) Máquina de Atwood con la dirección de aceleración positiva como se indica. b) Diagrama de cuerpo libre para el peso al lado derecho de la máquina de Atwood. c) Diagrama de cuerpo libre para el peso al izquierdo de la máquina de Atwood.

En el ejemplo 4.4, es claro en qué sentido ocurrirá la aceleración. En casos más complicados, el sentido en el que se comienza a acelerar el objeto puede no ser claro al principio. Usted sólo tiene que definir un sentido como positivo y usar esta suposición constantemente en todos sus cálculos. Si el valor de aceleración que usted obtiene al final resulta ser negativo, este resultado significa que el objeto se acelera en el sentido opuesto a aquel que usted supuso inicialmente. El valor calculado seguirá siendo correcto. El ejemplo 4.5 ilustra una situación así.

EJEMPLO 4.5 Máquina de Atwood

La máquina de Atwood consiste en dos pesos suspendidos (con masas m_1 y m_2) conectados mediante una cuerda que pasa por una polea. Por ahora, consideramos un caso libre de fricción, en el que la polea no se mueve y la cuerda se desliza sobre ella. (En el capítulo 10 sobre rotación, volveremos a este problema y lo resolveremos con fricción presente, que hace que la polea gire.) También suponemos que $m_1 > m_2$. En este caso, la aceleración es como se muestra en la figura 4.18a). (La fórmula deducida en lo que sigue es correcta para cualquier caso. Si

$m_1 < m_2$, entonces el valor de la aceleración, a , tendrá signo negativo, lo cual significará que la dirección de la aceleración es opuesta a lo que supusimos al trabajar con el problema.)

Comenzamos con diagramas de cuerpo libre para m_1 y m_2 como se muestra en la figura 4.18b) y c). Para ambos diagramas de cuerpo libre, elegimos que el eje y positivo señale hacia arriba, y ambos diagramas muestran nuestra elección para la dirección de la aceleración. La cuerda ejerce una tensión T , de magnitud todavía por determinar, hacia arriba tanto sobre m_1 como sobre m_2 . Con nuestra elección sobre el sistema de coordenadas y la dirección de la aceleración, la aceleración hacia abajo de m_1 es aceleración en la dirección negativa. Esto lleva a una ecuación de la cual se puede despejar T :

$$T - m_1g = -m_1a \Rightarrow T = m_1g - m_1a = m_1(g - a).$$

Del diagrama de cuerpo libre para m_2 y la suposición de que la aceleración hacia arriba de m_2 corresponde a aceleración en dirección positiva, obtenemos

$$T - m_2g = m_2a \Rightarrow T = m_2g + m_2a = m_2(g + a).$$

Igualando las dos expresiones para T , obtenemos

$$m_1(g - a) = m_2(g + a),$$

lo cual lleva a una expresión para la aceleración:

$$(m_1 - m_2)g = (m_1 + m_2)a \Rightarrow a = g \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right).$$

En esta ecuación, usted puede ver que la magnitud de la aceleración, a , es siempre menor que g en esta situación. Si las masas son iguales, obtenemos el resultado esperado de aceleración nula. Seleccionando la combinación adecuada de masas, podemos generar cualquier valor que queramos de la aceleración entre cero y g .

4.2 Oportunidad de autoexamen

Para la máquina de Atwood, ¿puede usted escribir una fórmula para la magnitud de la tensión en la cuerda?

4.3 Ejercicio en clase

Si usted duplica ambas masas en una máquina de Atwood, la aceleración resultante será

- el doble.
- la mitad.
- la misma.
- la cuarta parte.
- cuatro veces mayor.

EJEMPLO 4.6 Choque de dos vehículos

Suponga que una SUV con masa $m = 3\,260$ kg tiene un choque de frente con un auto subcompacto de masa $m = 1\,194$ kg, y ejerce una fuerza de magnitud $2.9 \cdot 10^5$ N sobre el auto subcompacto.

PROBLEMA

¿Cuál es la magnitud de la fuerza que ejerce el auto subcompacto sobre la SUV en el choque?

SOLUCIÓN

Tan paradójico como pueda parecer a primera vista, el pequeño auto subcompacto ejerce exactamente la misma fuerza sobre la SUV que la que ésta ejerce sobre el auto subcompacto. Esta igualdad es una consecuencia directa de la tercera ley de Newton, ecuación 4.8. De modo que la respuesta es $2.9 \cdot 10^5$ N.

EXPLICACIÓN

La respuesta puede ser sencilla, pero no es de ninguna manera intuitiva. El subcompacto usualmente sufrirá mucho más daño en un choque como éste, y sus pasajeros tendrán mucho mayor riesgo de resultar lastimados. Sin embargo, esta diferencia se debe a la segunda ley de Newton, que dice que la misma fuerza aplicada a un objeto menos masivo produce una mayor aceleración que cuando se aplica a uno más masivo. Incluso en un choque de frente entre un mosquito y un automóvil en la autopista, las fuerzas ejercidas en cada cuerpo son iguales; la diferencia en el daño al automóvil (ninguno) y el daño al mosquito (destrucción) se debe a las diferentes aceleraciones que sufren. Volveremos a esta idea en el capítulo 7 sobre momento y colisiones.

4.4 Ejercicio en clase

Para el choque del ejemplo 4.6, si llamamos a_{SUV} a la aceleración experimentada por la SUV, y a_{car} a la aceleración del auto subcompacto, encontramos que aproximadamente

- $a_{\text{SUV}} \approx \frac{1}{9}a_{\text{car}}$
- $a_{\text{SUV}} \approx \frac{1}{3}a_{\text{car}}$
- $a_{\text{SUV}} \approx a_{\text{car}}$
- $a_{\text{SUV}} \approx 3a_{\text{car}}$
- $a_{\text{SUV}} \approx 9a_{\text{car}}$

4.7 Fuerza de fricción

Hasta ahora, hemos despreciado la fuerza de fricción y sólo hemos considerado aproximaciones sin fricción. Sin embargo, en general, tenemos que incluir la fricción en la mayoría de nuestros cálculos cuando queremos describir situaciones físicamente realistas.

Podríamos llevar a cabo una serie de experimentos muy sencillos para estudiar las características básicas de la fricción. Aquí están los hallazgos que obtendríamos:

- Si un objeto está en reposo se necesita una fuerza externa con una cierta magnitud mínima actuando paralelamente a la superficie de contacto entre el objeto y la superficie para vencer la fuerza de fricción y hacer que se mueva el objeto.
- La fuerza de fricción que tiene que vencerse para hacer que se mueva un objeto que está en reposo es mayor que la fuerza de fricción que tiene que vencerse para mantener el objeto en movimiento a velocidad constante.
- La magnitud de la fuerza de fricción que actúa sobre un objeto en movimiento es proporcional a la magnitud de la fuerza normal.
- La magnitud de la fuerza de fricción es independiente del tamaño del área de contacto entre objeto y superficie.
- La fuerza de fricción depende de la aspereza de las superficies; es decir, una interfaz más lisa generalmente produce menos fuerza de fricción que una más áspera.
- La fuerza de fricción es independiente de la velocidad del objeto.

Estas aseveraciones sobre la fricción no son principios del mismo modo que las leyes de Newton. Más bien son observaciones generales basadas en experimentos. Por ejemplo, usted podría pensar que el contacto de dos superficies extremadamente lisas produciría muy baja fricción. Sin embargo, en algunos casos, las superficies extremadamente lisas en realidad se funden juntas como soldadura en frío. Las investigaciones sobre la naturaleza y las causas de la fricción continúan, como veremos más adelante en esta sección.

Por estos hallazgos, queda claro que necesitamos distinguir entre el caso en que un objeto está en reposo relativo a su superficie de soporte (fricción estática) y el caso en el que un objeto está en movimiento sobre la superficie (fricción cinética). Este caso en el que un objeto se mueve sobre una superficie es más fácil de tratar y, por lo tanto, consideraremos primero la fricción cinética.

Fricción cinética

Las observaciones generales que anteceden se pueden resumir en la siguiente fórmula aproximada para la magnitud de la fuerza de fricción cinética, f_k :

$$f_k = \mu_k N. \quad (4.10)$$

Aquí N es la magnitud de la fuerza normal y μ_k es el **coeficiente de fricción cinética**. Este coeficiente siempre es igual o mayor que cero. (El caso en el que $\mu_k = 0$ corresponde a una aproximación sin fricción. En la práctica, sin embargo, nunca se puede alcanzar perfectamente.) En casi todos los casos μ_k es también menor que 1. (Algunas superficies especiales de neumáticos que se usan para carreras de autos, sin embargo, tienen un coeficiente de fricción con el camino que puede ser bastante mayor que 1.) En la tabla 4.1 se muestran algunos coeficientes representativos de coeficientes de fricción cinética.

El sentido de la fuerza de fricción cinética *siempre es opuesto al sentido del movimiento* del objeto relativo a la superficie sobre la que se mueve.

Si usted empuja un objeto con una fuerza externa paralela a la superficie de contacto, y si la fuerza tiene una magnitud exactamente igual al de la fuerza de fricción cinética sobre el objeto, entonces, la fuerza externa total neta es cero, porque la fuerza externa y la fuerza de fricción se cancelan entre ellas. En ese caso, de acuerdo con la primera ley de Newton, el objeto continuará deslizándose sobre la superficie con velocidad constante.

Fricción estática

Si un objeto está en reposo se necesita una mínima cantidad de fuerza externa para ponerlo en movimiento. Por ejemplo, si usted trata de empujar con poca fuerza un refrigerador, éste no se

Tabla 4.1 Coeficientes típicos de fricción tanto estática como cinética entre material 1 y material 2*

Material 1	Material 2	μ_s	μ_k
Caucho	Concreto seco	1	0.8
Caucho	Concreto mojado	0.7	0.5
Acero	Acero	0.7	0.6
Madera	Madera	0.5	0.3
Ski encerado	Nieve	0.1	0.05
Acero	Acero aceitado	0.12	0.07
Teflón	Acero	0.04	0.04
Piedra de curling	Hielo		0.017

*Nota: estos valores son aproximados y dependen fuertemente de las condiciones de la superficie entre los dos materiales.

moverá. Al empujar con más y más fuerza, llega a un punto en el que el refrigerador finalmente se desliza sobre el piso de la cocina.

Para cualquier fuerza externa que actúe sobre un objeto que permanezca en reposo, la fuerza de fricción es exactamente igual en magnitud y de sentido opuesto a la componente de dicha fuerza externa que actúa a lo largo de la superficie de contacto entre el objeto y su superficie de apoyo. Sin embargo, la magnitud de la fuerza de fricción estática tiene un valor máximo: $f_s \leq f_{s,\text{máx}}$. Esta magnitud máxima de la fuerza de fricción estática es proporcional a la fuerza normal, pero con una constante de proporcionalidad diferente del coeficiente de fricción cinética: $f_{s,\text{máx}} = \mu_s N$. Podemos escribir, para la magnitud de la fuerza de fricción estática

$$f_s \leq \mu_s N = f_{s,\text{máx}}, \quad (4.11)$$

donde μ_s se llama **coeficiente de fricción estática**. En la tabla 4.1 se muestran algunos coeficientes típicos de fricción estática. En general, para cualquier objeto sobre cualquier superficie de apoyo, la máxima fuerza de fricción estática es mayor que la fuerza de fricción cinética. Usted puede haber experimentado esto al tratar de deslizar un objeto pesado sobre una superficie. Tan pronto como comienza a moverse el objeto, se necesita mucho menos fuerza para mantener el objeto en movimiento deslizante constante. Podemos escribir este hallazgo como una desigualdad matemática entre los dos coeficientes:

$$\mu_s > \mu_k. \quad (4.12)$$

La figura 4.19 presenta una gráfica que muestra cómo la fuerza de fricción depende de una fuerza externa, F_{ext} , que se aplica a un objeto. Si el objeto está inicialmente en reposo, una pequeña fuerza externa da por resultado una pequeña fuerza de fricción, que aumenta de manera lineal en forma proporcional a la fuerza externa hasta que alcanza un valor de $\mu_s N$. Luego cae con cierta rapidez a un valor de $\mu_k N$, cuando el objeto se pone en movimiento. En este punto, la fuerza externa tiene un valor de $F_{\text{ext}} = \mu_s N$, dando por resultado una aceleración repentina del objeto. Esta dependencia de la fuerza de fricción con respecto a la fuerza externa se muestra en la figura 4.19 como una línea roja.

Por otro lado, si comenzamos con una gran fuerza externa y el objeto ya está en movimiento, entonces podemos reducir la fuerza externa por debajo de un valor de $\mu_s N$, pero todavía superior a $\mu_k N$, y el objeto se seguirá moviendo y acelerando. Así, el coeficiente de fricción conserva un valor de μ_k hasta que la fuerza externa se reduzca a un valor de $\mu_k N$. En este punto (¡y sólo en este punto!), el objeto se moverá con velocidad constante, porque la fuerza externa y la fricción serán iguales en magnitud. Si reducimos más la fuerza exterior, el objeto se desacelera (el segmento horizontal de la línea azul a la izquierda de la diagonal roja de la figura 4.19), porque la fuerza de fricción cinética es mayor que la fuerza externa. Por último, el objeto entra en reposo debido a la fricción cinética, y la fuerza externa ya no es suficiente para moverlo. Entonces entra en función la fricción estática, y la fuerza de fricción se reduce de modo proporcional a la fuerza externa hasta que ambas llegan a cero. La línea azul en la figura 4.19 ilustra esta dependencia de la fuerza de fricción con respecto a la fuerza externa. Donde se traslapan la línea azul y la roja, esto se indica con cuadrados alternos azules y rojos. Lo más interesante de la figura 4.19 es que las líneas azul y roja no coinciden entre $\mu_k N$ y $\mu_s N$.

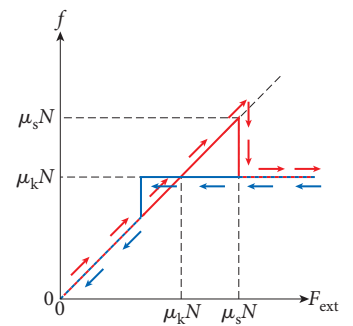


FIGURA 4.19 Magnitudes de las fuerzas de fricción como función de la magnitud de una fuerza externa.

Volvamos al intento de mover un refrigerador por el piso de la cocina. Inicialmente, el refrigerador descansa en el suelo, y la fuerza de fricción estática opone resistencia a su esfuerzo para moverlo. Una vez que empuja con suficiente fuerza, el refrigerador vibra al ponerse en movimiento. En este proceso, la fuerza de fricción sigue la ruta roja en la figura 4.19. Una vez que el refrigerador se mueve, usted puede empujarlo con menos fuerza y todavía se sigue moviendo. Si empuja con menos fuerza de modo que se mueva con velocidad constante, la fuerza externa que aplica sigue la ruta azul en la figura 4.19, hasta que se reduce a $F_{\text{ext}} = \mu_k N$. Entonces la fuerza de fricción y la fuerza que aplica al refrigerador suman cero, y no hay una fuerza neta que actúe sobre el refrigerador, permitiéndole moverse con velocidad constante.

EJEMPLO 4.7 Patinaje (snowboard) realista

Reconsideremos la situación del patinador del problema resuelto 4.1, pero ahora incluyamos la fricción. Un patinador de tabla sobre nieve se mueve cuesta abajo por una pendiente con $\theta = 22^\circ$. Suponga que el coeficiente de fricción cinética entre su tabla y la nieve es de 0.21, y su velocidad, que tiene la dirección de la pendiente, es de 8.3 m/s en un instante dado.

PROBLEMA 1

Suponiendo una pendiente constante, ¿cuál será la rapidez del patinador a lo largo de la pendiente, 100 m más abajo?

SOLUCIÓN 1

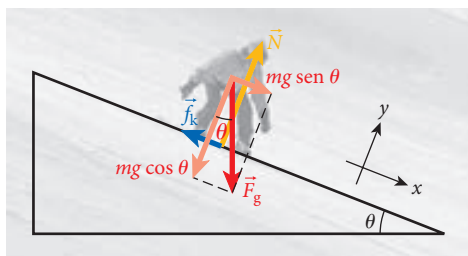


FIGURA 4.20 Diagrama de cuerpo libre de un patinador, incluyendo la fuerza de fricción.

La figura 4.20 muestra un diagrama de cuerpo libre para este problema. La fuerza gravitacional señala hacia abajo y tiene la magnitud mg , donde m es la masa del patinador y su equipo. Elegimos los ejes x y y paralelo y perpendicular a la pendiente, respectivamente, como se indica en la figura 4.20. El ángulo θ que forma la pendiente con la horizontal (22° en este caso) también aparece en la descomposición de los componentes paralelo y vertical a la pendiente de la fuerza gravitacional. (Este análisis es una característica general de cualquier problema de plano inclinado.) El componente de la fuerza a lo largo del plano es entonces $mg \sin \theta$, como se muestra en la figura 4.20. La fuerza normal está dada por $N = mg \cos \theta$, y la fuerza de fricción cinética es $f_k = -\mu_k mg \cos \theta$, donde el signo menos indica que la fuerza actúa en la dirección x negativa, en el sistema de coordenadas que hemos elegido.

Así obtenemos para el componente de la fuerza total en la dirección x :

$$mg \sin \theta - \mu_k mg \cos \theta = ma_x \Rightarrow$$

$$a_x = g(\sin \theta - \mu_k \cos \theta).$$

Aquí hemos usado la segunda ley de Newton, $F_x = ma_x$, en la primera línea. La masa del patinador se elimina, y la aceleración, a_x , a lo largo de la pendiente, es una constante. Insertando los números dados en el planteamiento del problema obtenemos

$$a \equiv a_x = (9.81 \text{ m/s}^2)(\sin 22^\circ - 0.21 \cos 22^\circ) = 1.76 \text{ m/s}^2.$$

Así vemos que esta situación es un problema de movimiento en línea recta en una dirección con aceleración constante. Podemos aplicar la relación entre los cuadrados de las velocidades inicial y final que hemos deducido para el movimiento unidimensional con aceleración constante:

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0).$$

Con $v_0 = 8.3 \text{ m/s}$ y $x - x_0 = 100 \text{ m}$, calculamos la rapidez final:

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2a(x - x_0)}$$

$$= \sqrt{(8.3 \text{ m/s})^2 + 2 \cdot (1.76 \text{ m/s}^2)(100 \text{ m})}$$

$$= 20.5 \text{ m/s}.$$

PROBLEMA 2

¿Cuánto tarda el patinador en alcanzar esta rapidez?

SOLUCIÓN 2

Como ahora conocemos la aceleración y la rapidez final, y como se nos ha dado la rapidez inicial, usamos

$$v = v_0 + at \Rightarrow t = \frac{v - v_0}{a} = \frac{(20.5 - 8.3) \text{ m/s}}{1.76 \text{ m/s}^2} = 6.95 \text{ s.}$$

PROBLEMA 3

Dado el mismo coeficiente de fricción, ¿cuál tendría que ser el ángulo de la pendiente para que el patinador se deslizara con velocidad constante?

SOLUCIÓN 3

El movimiento con velocidad constante implica aceleración cero. Ya hemos deducido una ecuación para la aceleración como función del ángulo de la pendiente. Igualamos esta expresión a cero y despejamos el ángulo θ de la ecuación resultante:

$$a_x = g(\sin\theta - \mu_k \cos\theta) = 0$$

$$\Rightarrow \sin\theta = \mu_k \cos\theta$$

$$\Rightarrow \tan\theta = \mu_k$$

$$\Rightarrow \theta = \tan^{-1} \mu_k$$

Como se nos dio $\mu_k = 0.21$ el ángulo es $\theta = \tan^{-1} 0.21 = 12^\circ$. Con una pendiente mayor, el patinador se acelerará, y con una pendiente menor, se frenará hasta que se detenga por completo.

Resistencia del aire

Hasta ahora hemos ignorado la fricción debida al movimiento en el aire. A diferencia de la fricción cinética que usted encuentra cuando arrastra o empuja un objeto por la superficie de otro, la resistencia del aire aumenta al incrementar la rapidez. Por lo tanto, necesitamos expresar la fuerza de fricción como función de la velocidad del objeto relativa al medio en el que se mueve. El sentido de la fuerza de resistencia del aire es opuesto al del vector de velocidad.

En general, la magnitud de la fuerza de fricción debida a la resistencia del aire, o **fuerza de arrastre**, se puede expresar como $F_{\text{fric}} = K_0 + K_1 v + K_2 v^2 + \dots$, donde las constantes K_0, K_1, K_2, \dots se deben determinar de modo experimental. Para la fuerza de arrastre sobre objetos macroscópicos que se mueven con rapidez relativamente altas, podemos despreciar el término lineal en la velocidad. La magnitud de la fuerza de arrastre es, entonces, aproximadamente

$$F_{\text{arras}} = K v^2. \quad (4.13)$$

Esta ecuación significa que la fuerza debida a la resistencia del aire es proporcional al cuadrado de la rapidez.

Cuando un objeto cae a través del aire, la fuerza de la resistencia del aire aumenta al acelerar el objeto, hasta que llega a lo que se llama **rapidez terminal**. En este punto, la fuerza ascendente de la resistencia del aire y la fuerza descendente debida a la gravedad son iguales. Así, la fuerza neta es cero y ya no hay aceleración. Como ya no hay aceleración, el objeto que cae alcanza una rapidez terminal:

$$F_g = F_{\text{arras}} \Rightarrow mg = K v^2.$$

Despejando la rapidez terminal, tenemos

$$v = \sqrt{\frac{mg}{K}}. \quad (4.14)$$

Observe que la rapidez terminal depende de la masa del objeto, mientras que cuando despreciábamos la resistencia del aire, la masa del objeto no afectaba el movimiento del objeto. En ausencia de la resistencia del aire, todos los objetos caen con la misma rapidez; pero la presencia de la resistencia del aire explica por qué los objetos pesados caen más rápido que los ligeros que tienen la misma constante (de arrastre) K .

4.5 Ejercicio en clase

Un filtro de café sin usar alcanza su rapidez terminal si usted lo deja caer. Suponga que suelta uno desde una altura de 1 m. ¿Desde qué altura tendría usted que soltar una pila de dos filtros de café en el mismo instante de modo que lleguen al suelo al mismo tiempo que el filtro solo? (Usted con seguridad puede despreciar el tiempo necesario para alcanzar la rapidez terminal.)

- a) 0.5 m
- b) 0.7 m
- c) 1 m
- d) 1.4 m
- e) 2 m

Para calcular la rapidez terminal de un objeto que cae, necesitamos saber el valor de la constante K . Esta constante depende de muchas variables, incluyendo el tamaño de la sección transversal, A , expuesta a la corriente de aire. En términos generales, cuanto mayor es el área, mayor es la constante K . K también depende de manera lineal de la densidad del aire, ρ . Las demás dependencias —de la forma del objeto, de su inclinación relativa a la dirección del movimiento, de la viscosidad y compresibilidad del aire— generalmente están comprendidas en un coeficiente de arrastre, c_d :

$$K = \frac{1}{2} c_d A \rho. \quad (4.15)$$

La ecuación 4.15 tiene el factor $\frac{1}{2}$ para simplificar los cálculos relativos a la energía de objetos en caída libre con resistencia del aire. Regresaremos a este tema cuando expliquemos la energía cinética en el capítulo 5.

Lograr un bajo coeficiente de arrastre es un criterio importante en el diseño de automóviles, porque tiene una fuerte influencia sobre la rapidez máxima del automóvil y sobre su consumo de combustible. Los cálculos numéricos son útiles, pero el coeficiente de arrastre usualmente se optimiza en forma experimental poniendo los prototipos de automóviles en túneles de viento y probando la resistencia del aire a diferentes velocidades. Las mismas pruebas de túnel de viento se usan para optimizar el desempeño de equipamiento y de atletas en eventos tales como las carreras de esquí cuesta abajo y las carreras en bicicleta.

Para el movimiento en medios muy viscosos o a bajas velocidades, no se puede despreciar el término de velocidad lineal de la fuerza de fricción. En este caso, la fuerza de fricción se puede aproximar por la forma $F_{\text{fric}} = K_1 v$. Esta forma se aplica a la mayoría de procesos biológicos, incluyendo biomoléculas grandes o incluso microorganismos tales como bacterias que se mueven en líquidos. La aproximación de la fuerza de fricción también es útil cuando se analiza el hundimiento de un objeto en un fluido; por ejemplo, una piedra pequeña o una concha fósil en agua.

EJEMPLO 4.8 Paracaidismo

Un paracaidista de 80 kg cae por el aire con una densidad de 1.15 kg/m^3 . Suponga que su coeficiente de arrastre es $c_d = 0.57$. Cuando cae en la posición de águila desplegada, como se muestra en la figura 4.21a), su cuerpo presenta al viento un área $A_1 = 0.94 \text{ m}^2$ mientras que cuando entra en picada cabeza abajo, con los brazos pegados al cuerpo y las piernas juntas, como se muestra en la figura 4.21b), su área se reduce a $A_2 = 0.21 \text{ m}^2$.

PROBLEMA

¿Cuáles son las rapidezces terminales en ambos casos?

SOLUCIÓN

Usamos la ecuación 4.14 para la rapidez terminal y la ecuación 4.15 para la constante de resistencia del aire, reacomodamos las fórmulas e insertamos los números dados:

$$v = \sqrt{\frac{mg}{K}} = \sqrt{\frac{mg}{\frac{1}{2} c_d A \rho}}$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{(80 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2)}{\frac{1}{2} (0.57)(0.94 \text{ m}^2)(1.15 \text{ kg/m}^3)}} = 50.5 \text{ m/s}$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{(80 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2)}{\frac{1}{2} (0.57)(0.21 \text{ m}^2)(1.15 \text{ kg/m}^3)}} = 107 \text{ m/s.}$$

Estos resultados muestran que, clavándose de cabeza, el deportista puede alcanzar velocidades más altas durante la caída libre que cuando usa la posición de águila desplegada. Por lo tanto, es posible dar alcance a una persona que ha caído de un avión, suponiendo que esa persona no está en picada, cabeza abajo. Sin embargo, en general, esta técnica no se puede usar para salvar a una persona en esa situación porque sería casi imposible sostenerla durante el súbito tirón de desaceleración causado por la apertura del paracaídas del rescatista.



a)



b)

FIGURA 4.21 a) Acróbata aéreo en una posición de alta resistencia. b) Acróbata aéreo en posición de baja resistencia.

Tribología

¿Qué es lo que causa la fricción? La respuesta a esta pregunta no es de ninguna manera fácil ni obvia. Cuando las superficies se frotan una contra otra, distintos átomos (más sobre átomos en el capítulo 13) de ambas superficies entran en contacto de diferentes modos. Los átomos salen de sus sitios en el proceso de arrastrar una superficie sobre otra. La interacción electrostática (más sobre esto en el capítulo 21) entre los átomos de las superficies provoca fricción estática adicional. Una verdadera comprensión microscópica de la fricción rebasa el alcance de este libro, y en la actualidad es el objetivo central de una gran actividad de investigación.

La ciencia de la fricción tiene un nombre: **tribología**. Las leyes de fricción que hemos visto ya se conocían hace 300 años. Su descubrimiento generalmente se acredita a Guillaume Amontons y Charles Augustin de Coulomb, pero el mismo Leonardo da Vinci pudo haberlas conocido. Con todo, todavía se están descubriendo cosas asombrosas acerca de la fricción, la lubricación y el desgaste.

Quizá el avance más interesante en la tribología ha tenido lugar en las dos últimas décadas, con el desarrollo de los microscopios atómicos y de fuerza de fricción. El principio básico que utilizan estos microscopios es el arrastre de una punta muy afilada por una superficie con análisis mediante tecnología de punta en computación y sensores. Estos microscopios de fuerza de fricción pueden medir fuerzas de fricción tan pequeñas como $10 \text{ pN} = 10^{-11} \text{ N}$. La figura 4.22 muestra un dibujo de corte esquemático de uno de estos instrumentos, construido por físicos de la Universidad de Leiden, Holanda. Las simulaciones microscópicas de fricción más avanzadas todavía no pueden explicar completamente la fricción, de modo que constituye un área de investigación de gran interés en el campo de la nanotecnología.

La fricción es la causa del desprendimiento de pequeñas partículas de las superficies que se frotan una contra otra, causando el desgaste. Este fenómeno es en particular importante en los motores de automóviles de alto desempeño, que necesitan lubricantes de formulación especial. Entender la influencia de las pequeñas impurezas superficiales en la fuerza de fricción es de gran interés en este contexto. La investigación sobre lubricantes sigue tratando de encontrar modos de reducir el coeficiente de fricción cinética, μ_k , a un valor tan cercano a cero como sea posible. Por ejemplo, los lubricantes modernos incluyen *buckyballs* (moléculas de buckminsterfulereno) que consisten en 60 átomos de carbono dispuestos en la forma de un balón de fútbol, descubiertas en 1985. Estas moléculas actúan como bolas microscópicas de rodamiento.

Resolver problemas de fricción también es importante para las carreras de autos. En el circuito de Fórmula 1 para ganar carreras es esencial usar los neumáticos correctos que ofrezcan fricción óptimamente alta. Mientras los coeficientes de fricción están generalmente en el rango de 0 a 1, no es inusual para los autos de carreras *top fuel* tener neumáticos con coeficientes de fricción con la superficie de la pista de 3 o aun mayores.

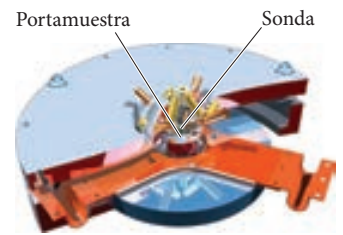


FIGURA 4.22 Vista de corte de un microscopio que se utiliza para estudiar las fuerzas de fricción arrastrando una sonda en forma de una punta afilada por la superficie que se va a estudiar.

4.8 Aplicaciones de la fuerza de fricción

Con las tres leyes de Newton podemos resolver una enorme cantidad de problemas. Saber sobre fricción estática y cinética nos permite aproximar a situaciones de la vida real y llegar a conclusiones con sentido. Dado que es útil ver diversas aplicaciones de las leyes de Newton, resolveremos varios problemas. Estos ejemplos están diseñados para demostrar una gama de técnicas útiles en la solución de muchos tipos de problemas.

EJEMPLO 4.9 Dos bloques conectados por una cuerda, con fricción

Hemos resuelto este problema en el ejemplo 4.4, con las suposiciones de que m_1 se desliza sin fricción sobre la superficie de apoyo horizontal y que la cuerda se desliza sin fricción por la polea. Ahora consideraremos la fricción entre m_1 y la superficie sobre la que se desliza. Por ahora todavía supondremos que la cuerda se desliza sin fricción sobre la polea. (El capítulo 10 presentará técnicas que nos permiten considerar la polea puesta en movimiento rotativo por la cuerda que se mueve por ella.)

PROBLEMA 1

Suponga que el coeficiente de fricción estática entre el bloque 1 (masa $m_1 = 2.3 \text{ kg}$) y su superficie de soporte tiene un valor de 0.73, y que el coeficiente de fricción cinética tiene un valor de 0.60. (Refiérase de nuevo a la figura 4.17.) Si el bloque 2 tiene una masa $m_2 = 1.9 \text{ kg}$, ¿el bloque 1 se acelerará a partir del reposo?

(continúa)

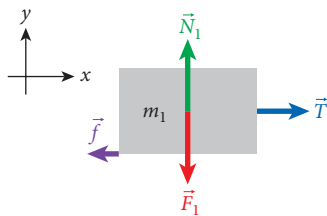


FIGURA 4.23 Diagrama de cuerpo libre para m_1 , incluida la fuerza de fricción.

(continuación)

SOLUCIÓN 1

Todas las condiciones de fuerza del ejemplo 4.4 se mantienen iguales, salvo que el diagrama de cuerpo libre para el bloque m_1 (figura 4.23) tiene ahora una flecha de fuerza que corresponde a la fuerza de fricción, f . Recuerde que para trazar la dirección de la fuerza de fricción necesita saber en qué dirección tendría lugar el movimiento en ausencia de la fricción. Como ya hemos resuelto el caso sin fricción, sabemos que m_1 se moverá a la derecha. Como la fuerza de fricción se opone al movimiento, el vector de fricción, por lo tanto, apunta a la izquierda.

La ecuación que deducimos en el ejemplo 4.4 aplicando la segunda ley de Newton a m_1 cambia de $m_1 a = T$ a

$$m_1 a = T - f.$$

Al combinar esto con la ecuación que obtuvimos en el ejemplo 4.4, mediante la aplicación de la segunda ley de Newton a m_2 , $T - m_2 g = -m_2 a$, y nuevamente eliminando T , nos da

$$m_1 a + f = T = m_2 g - m_2 a \Rightarrow$$

$$a = \frac{m_2 g - f}{m_1 + m_2}.$$

Hasta ahora, hemos evitado especificar ningún detalle adicional acerca de la fuerza de fricción. Ahora lo hacemos calculando primero la magnitud máxima de la fuerza de fricción estática $f_{s,\text{máx}} = \mu_s N_1$. Para la magnitud de la fuerza normal, ya encontramos $N_1 = m_1 g$, lo cual nos da la fórmula para la fuerza de fricción estática máxima:

$$f_{s,\text{máx}} = \mu_s N_1 = \mu_s m_1 g = (0.73)(2.3 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2) = 16.5 \text{ N}.$$

Necesitamos comparar este valor al de $m_2 g$ en el numerador de nuestra ecuación para la aceleración, $a = (m_2 g - f)/(m_1 + m_2)$. Si $f_{s,\text{máx}} \geq m_2 g$, entonces la fuerza de fricción estática tomará un valor exactamente igual a $m_2 g$, haciendo que la aceleración sea cero. En otras palabras, no habrá movimiento porque la tracción debida a m_2 suspendida de la cuerda no es suficiente para vencer la fuerza de fricción estática entre el bloque m_1 y su superficie de apoyo. Si $f_{s,\text{máx}} < m_2 g$, entonces habrá aceleración positiva, y los dos bloques comenzarán a moverse. En el caso actual, como $m_2 g = (1.9 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2) = 18.6 \text{ N}$, los bloques comenzarán a moverse.

PROBLEMA 2

¿Cuál es el valor de la aceleración?

SOLUCIÓN 2

Tan pronto como se vence la fuerza de fricción estática, toma su lugar la fricción cinética. Podemos entonces usar nuestra ecuación para la aceleración, $a = (m_2 g - f)/(m_1 + m_2)$, sustituir $f = \mu_k N_1 = \mu_k m_1 g$, y obtener

$$a = \frac{m_2 g - \mu_k m_1 g}{m_1 + m_2} = g \left(\frac{m_2 - \mu_k m_1}{m_1 + m_2} \right).$$

Al sustituir valores, encontramos

$$a = (9.81 \text{ m/s}^2) \left[\frac{(1.9 \text{ kg}) - 0.6 \cdot (2.3 \text{ kg})}{(2.3 \text{ kg}) + (1.9 \text{ kg})} \right] = 1.21 \text{ m/s}^2.$$

EJEMPLO 4.10 Tirar de un trineo

Suponga que usted está tirando de un trineo por una superficie nivelada cubierta de nieve, ejerciendo una fuerza constante mediante una cuerda que forma un ángulo θ con respecto al suelo.

PROBLEMA 1

Si el trineo, incluida su carga, tiene una masa de 15.3 kg, los coeficientes de fricción entre el trineo y la nieve son $\mu_s = 0.076$ y $\mu_k = 0.070$, y usted tira de la cuerda con una fuerza de 25.3 N a un ángulo de 24.5° respecto al suelo horizontal, ¿cuál es la aceleración del trineo?

SOLUCIÓN 1

La figura 4.24 muestra el diagrama de cuerpo libre para el trineo, con todas las fuerzas que actúan sobre él. Las direcciones de los vectores de fuerza son correctas, pero las magnitudes no están necesariamente dibujadas a escala. La aceleración del trineo, si la hay, se dirigirá a lo largo de la horizontal, en la dirección x . En términos de componentes, la segunda ley de Newton queda:

$$\text{componente } x: ma = T \cos\theta - f$$

y

$$\text{componente } y: 0 = T \sen\theta - mg + N.$$

Para la fuerza de fricción usaremos la forma $f = \mu N$ por ahora, sin especificar si se trata de fricción cinética o estática, pero al final tendremos que regresar a este punto. La fuerza normal se puede calcular por la ecuación anterior para la componente y y luego sustituirla en la ecuación para la componente x :

$$N = mg - T \sen\theta$$

$$ma = T \cos\theta - \mu(mg - T \sen\theta) \Rightarrow$$

$$a = \frac{T}{m}(\cos\theta + \mu \sen\theta) - \mu g.$$

Vemos que la fuerza normal es menor que el peso del trineo, porque la fuerza que tira de la cuerda tiene una componente y hacia arriba. La componente vertical de la fuerza que tira de la cuerda también contribuye a la aceleración del trineo, ya que afecta a la fuerza normal y, por lo tanto, a la fuerza de fricción horizontal.

Al introducir los números usamos primero el valor del coeficiente de fricción estática para ver si se aplica suficiente fuerza al tirar de la cuerda para generar una aceleración positiva. Si el valor resultante de a es negativo, esto significa que no hay suficiente fuerza de tracción para vencer la fuerza de fricción estática. Con el valor dado de μ_s (0.076), obtenemos

$$a' = \frac{25.3 \text{ N}}{15.3 \text{ kg}}(\cos 24.5^\circ + 0.076 \sen 24.5^\circ) - 0.076(9.81 \text{ m/s}^2) = 0.81 \text{ m/s}^2.$$

Como este cálculo da como resultado un valor positivo para a' , sabemos que la fuerza es suficiente para vencer la fuerza de fricción. Ahora usamos el valor dado para el coeficiente de fricción cinética para calcular la aceleración real del trineo:

$$a = \frac{25.3 \text{ N}}{15.3 \text{ kg}}(\cos 24.5^\circ + 0.070 \sen 24.5^\circ) - 0.070(9.81 \text{ m/s}^2) = 0.87 \text{ m/s}^2.$$

PROBLEMA 2

¿Qué ángulo de la cuerda con la horizontal producirá la aceleración máxima del trineo para un valor dado de la magnitud de la fuerza de tracción, T ? ¿Cuál es el máximo valor de a ?

SOLUCIÓN 2

En cálculo diferencial e integral, para encontrar el valor extremo de una función debemos tomar la primera derivada y hallar el valor de la variable independiente para el cual dicha derivada es cero:

$$\frac{d}{d\theta} a = \frac{d}{d\theta} \left(\frac{T}{m}(\cos\theta + \mu \sen\theta) - \mu g \right) = \frac{T}{m}(-\sen\theta + \mu \cos\theta)$$

La búsqueda de la raíz de esta ecuación da por resultado

$$\begin{aligned} \left. \frac{da}{d\theta} \right|_{\theta=\theta_{\text{máx}}} &= \frac{T}{m}(-\sen\theta_{\text{máx}} + \mu \cos\theta_{\text{máx}}) = 0 \\ \Rightarrow \sen\theta_{\text{máx}} &= \mu \cos\theta_{\text{máx}} \Rightarrow \\ \theta_{\text{máx}} &= \tan^{-1} \mu. \end{aligned}$$

(continúa)

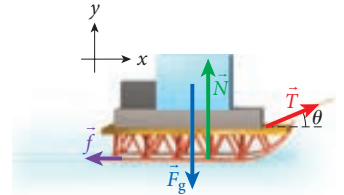


FIGURA 4.24 Diagrama de cuerpo libre del trineo y su carga.

(continuación)

Al insertar el valor dado para el coeficiente de fricción cinética, 0.070, en la ecuación, se obtiene $\theta_{\text{máx}} = 4.0^\circ$. Esto significa que la cuerda debe orientarse casi de manera horizontal. El valor resultante de la aceleración se puede obtener insertando los valores en la ecuación para a que usamos en la solución 1:

$$a_{\text{máx}} \equiv a(\theta_{\text{máx}}) = 0.97 \text{ m/s}^2.$$

Nota: la condición de primera derivada nula es sólo necesaria, pero no suficiente, para un máximo. Usted se puede convencer a sí mismo de que efectivamente hemos hallado el máximo observando primero que obtuvimos sólo una raíz de la primera derivada, lo cual significa que la función $a(\theta)$ tiene sólo un valor extremo. Otra razón para estar seguros de que nuestro único valor extremo es un máximo, es que el valor de la aceleración que calculamos en este punto es mayor que el que habíamos obtenido antes para 24.5° . De manera alternativa, podríamos haber tomado la segunda derivada y hallado que es negativa en el punto $\theta_{\text{máx}} = 4.0^\circ$; entonces, podríamos haber comparado el valor de la aceleración obtenida en ese punto con los obtenidos en $\theta = 0^\circ$ y $\theta = 90^\circ$.

LO QUE HEMOS APRENDIDO | GUÍA DE ESTUDIO PARA EXAMEN

- La fuerza neta sobre un objeto es la suma vectorial de las fuerzas que actúan sobre el objeto $\vec{F}_{\text{neta}} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$.
- La masa es una cualidad intrínseca de un objeto que cuantifica tanto su capacidad para resistir la aceleración como la fuerza gravitacional sobre el objeto.
- Un diagrama de cuerpo libre es una abstracción que muestra todas las fuerzas externas que actúan sobre un objeto aislado.
- Las leyes de Newton son las siguientes:
 - Primera ley de Newton. En ausencia de una fuerza neta sobre un objeto, el objeto permanecerá en reposo si estaba en reposo. Si estaba en movimiento, permanecerá en movimiento en línea recta con la misma velocidad.
 - Segunda ley de Newton. Si una fuerza externa, \vec{F}_{neta} actúa sobre un objeto de masa m , la fuerza producirá una aceleración, \vec{a} , en la misma dirección de la fuerza: $\vec{F}_{\text{neta}} = m\vec{a}$.

Tercera ley de Newton. Las fuerzas que ejercen dos objetos que interactúan entre sí son siempre exactamente iguales en magnitud y dirección pero con sentidos opuestos: $\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$.

- Ocurren dos tipos de fricción: estática y cinética. Ambos tipos son proporcionales a la fuerza normal, N . La fricción estática describe la fuerza de fricción entre un objeto en reposo sobre una superficie en términos del coeficiente de fricción estática, μ_s . La fuerza de fricción estática, $f_{s,\text{máx}}$, se opone a la fuerza que trata de mover un objeto, y tiene un valor máximo, $f_s \leq \mu_s N = f_{s,\text{máx}}$. La fricción cinética describe la fuerza de fricción entre un objeto en movimiento sobre una superficie en términos del coeficiente de fricción cinética, μ_k . La fricción cinética está dada por $f_k = \mu_k N$. En general, $\mu_s > \mu_k$.

TÉRMINOS CLAVE

dinámica, p. 101
 fuerza de contacto, p. 101
 tensión, p. 101
 compresión, p. 101
 fuerza normal, p. 102
 fuerza de fricción, p. 102
 fuerzas fundamentales, p. 102
 fuerza gravitacional, p. 102

fuerza electromagnética, p. 102
 fuerza nuclear fuerte, p. 102
 fuerza nuclear débil, p. 102
 vector de fuerza gravitacional, p. 103
 peso, p. 103
 masa, p. 104

masa gravitacional, p. 104
 masa inercial, p. 104
 partícula de Higgs, p. 105
 fuerza neta, p. 105
 diagrama de cuerpo libre, p. 106
 primera ley de Newton, p. 107
 segunda ley de Newton, p. 107

tercera ley de Newton, p. 107
 equilibrio estático, p. 107
 equilibrio dinámico, p. 107
 coeficiente de fricción cinética, p. 118
 coeficiente de fricción estática, p. 119
 fuerza de arrastre, p. 121
 rapidez terminal, p. 121
 tribología, p. 123

NUEVOS SÍMBOLOS Y ECUACIONES

$\vec{F}_g = -mg\hat{y}$, vector de fuerza gravitacional

$\vec{F}_{\text{neta}} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n$, fuerza neta

\vec{N} , fuerza normal

$\vec{F}_{\text{neta}} = 0$, primera ley de Newton, condición para equilibrio estático

$\vec{F}_{\text{neta}} = m\vec{a}$, segunda ley de Newton

$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$, tercera ley de Newton

\vec{T} , tensión en cuerdas

f_k , fuerza de fricción cinética

μ_k , coeficiente de fricción cinética

f_s , fuerza de fricción estática

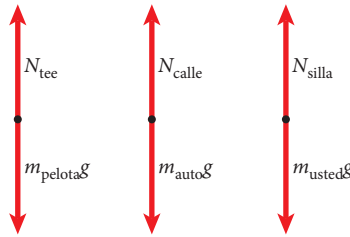
μ_s , coeficiente de fricción estática

F_{drag} , fuerza debida a la resistencia del aire, o fuerza de arrastre

c_d , coeficiente de arrastre

RESPUESTAS A LAS OPORTUNIDADES DE AUTOEXAMEN

4.1



4.2 Usando $T = m_2(g + a)$ e insertando el valor de la aceleración, $a = g \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right)$, encontramos

$$T = m_2(g + a) = m_2 \left(g + g \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) = m_2 g \left(\frac{m_1 + m_2}{m_1 + m_2} + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) = 2g \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}.$$

PRÁCTICA PARA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Lineamientos de problemas resueltos: leyes de Newton

Analizar una situación en términos de fuerzas y movimiento es una habilidad vital en física. Una de las técnicas más importantes es la aplicación correcta de las leyes de Newton. Los siguientes lineamientos pueden ayudarle a resolver problemas mecánicos en términos de las tres leyes de Newton. Estos lineamientos son parte de la estrategia de siete pasos para resolver toda clase de problemas de física, y principalmente son aplicables a los pasos Esboce, Piense e Investigue.

1. Un diagrama general puede ayudarle a visualizar la situación y a identificar los conceptos involucrados, pero también necesita usted un diagrama de cuerpo libre individual para cada objeto, a fin de identificar qué fuerzas actúan sobre ese objeto en particular y no sobre otros. Trazar diagramas correctos de cuerpo libre es clave para resolver todos los problemas de la mecánica, ya sea que se refieran a situaciones estáticas (sin movimiento) o cinéticas (con movimiento). Recuerde que el término $m\vec{a}$ de la segunda ley de Newton no se debe incluir como fuerza en ningún diagrama de cuerpo libre.

2. Elegir el sistema de coordenadas es importante: usualmente la elección del sistema de coordenadas marca la diferencia entre ecuaciones muy sencillas y muy difíciles. Colocar un eje a lo largo de la misma dirección de la aceleración de un objeto, si la hay, a menudo ayuda mucho. En un problema de estática, por lo general, resulta útil orientar un eje a lo largo de una superficie, ya sea horizontal o inclinada. Elegir el sistema más ventajoso de

coordenadas es una habilidad adquirida, que usted ganará por experiencia al trabajar con muchos problemas.

3. Una vez que ha elegido las direcciones de sus coordenadas, determine si la situación incluye aceleración en cualquier dirección. Si no ocurre ninguna aceleración en la dirección y, por ejemplo, entonces la primera ley de Newton se aplica en esa dirección, y la suma de las fuerzas (la fuerza neta) es igual a cero. Si hay aceleración en cualquier dirección dada, por ejemplo en la dirección x , entonces se aplica la segunda ley de Newton en esa dirección, y la fuerza neta es igual a la masa del objeto por su aceleración.

4. Cuando usted descompone un vector de fuerza en sus componentes a lo largo de las direcciones de los ejes coordenados, tenga cuidado de ver cuál dirección involucra el seno de un ángulo dado y cuál involucra el coseno. No generalice a partir de problemas pasados pensando que todas las componentes en la dirección x comprenden el coseno; usted encontrará problemas en los que la componente x involucra el seno. Mejor bájese en definiciones claras de los ángulos y las direcciones de las coordenadas, y la geometría de una situación dada. Con frecuencia aparece el mismo ángulo en diferentes puntos y entre distintas líneas de un problema. Esto suele dar por resultado triángulos semejantes que en general tienen ángulos rectos. Si usted elabora un diagrama de un problema con un ángulo general θ , trate de usar un ángulo que no sea cercano a 45° , porque es difícil distinguir entre tal ángulo y su complemento en un diagrama.

5. Siempre verifique su respuesta final. ¿Tienen lógica las unidades? ¿Las magnitudes son razonables? Si usted cambia una variable para que tienda a algún valor limitante, ¿su respuesta conduce a una predicción válida sobre lo que ocurre? A veces usted puede estimar la respuesta a un problema usando aproximaciones de orden de magnitud, como se explicó en el capítulo 1; tal estimado puede revelar a menudo si cometió un error aritmético o escribió una fórmula incorrecta.

6. La fuerza de fricción siempre se opone al sentido del movimiento relativo entre dos superficies y actúa paralela a la superficie de contacto; la fuerza de fricción estática se opone a la dirección en la que el objeto se movería si la fuerza de fricción no estuviese presente. Observe que la fuerza de fricción cinética es *igual* al producto del coeficiente de fricción y la fuerza normal, mientras que la fuerza de fricción estática es *menor o igual que* dicho producto.

PROBLEMA RESUELTO 4.2 Cuña

Una cuña de masa $m = 37.7$ kg se mantiene en su lugar en un plano fijo inclinado en un ángulo $\theta = 20.5^\circ$ con respecto a la horizontal. La fuerza $F = 309.3$ N en la dirección horizontal empuja la cuña, como se muestra en la figura 4.25a). El coeficiente de fricción cinética entre la cuña y el plano es $\mu_k = 0.171$. Suponga que el coeficiente de fricción estática es suficientemente pequeño para que la fuerza neta mueva la cuña.

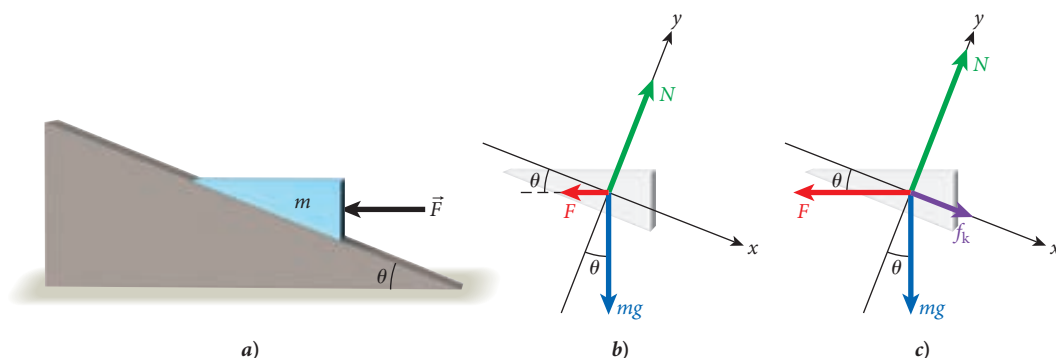


FIGURA 4.25 a) Un bloque en forma de cuña que se empuja sobre un plano inclinado. b) Diagrama de cuerpo libre de la cuña que muestra la fuerza externa, la fuerza de gravedad y la fuerza normal. c) Diagrama de cuerpo libre que incluye la fuerza externa, la fuerza de gravedad, la fuerza normal y la fuerza de fricción.

PROBLEMA

¿Cuál es la aceleración que adquiere la cuña a lo largo del plano en estas condiciones?

SOLUCIÓN

PIENSE

Queremos saber la aceleración a de la cuña de masa m a lo largo del plano, para lo cual necesitamos determinar la componente de la fuerza neta que actúa sobre la cuña paralela a la superficie del plano inclinado. También necesitamos encontrar la componente de la fuerza neta que actúa sobre la cuña perpendicularmente al plano, para poder determinar la fuerza de fricción cinética.

Las fuerzas que actúan sobre la cuña son la gravedad, la fuerza normal, la fuerza de fricción cinética f_k , y la fuerza externa F . El coeficiente de fricción cinética, μ_k , está dado, de modo que podemos calcular la fuerza de fricción una vez que determinemos la fuerza normal. Antes de poder continuar con nuestro análisis de las fuerzas, debemos determinar en qué dirección se moverá la cuña después de ser liberada, como resultado de la fuerza F . Una vez que sepamos en qué sentido irá la cuña, podremos determinar el sentido de la fuerza de fricción y completar nuestro análisis.

Para determinar la fuerza neta antes de que la cuña comience a moverse, necesitamos un diagrama de cuerpo libre solamente con las fuerzas F , N y mg . Una vez que determinemos la dirección del movimiento, podremos determinar la dirección de la fuerza de fricción, usando un segundo diagrama de cuerpo libre con la fuerza de fricción agregada.

ESBOCE

En la figura 4.25b) se presenta un diagrama de cuerpo libre que muestra las fuerzas que actúan sobre la cuña antes de que se libere. Hemos definido un sistema de coordenadas con el eje x

paralelo a la superficie del plano inclinado, con la dirección x positiva señalando pendiente abajo en el plano. La suma de las fuerzas en la dirección x es

$$mg \sen\theta - F \cos\theta = ma.$$

Necesitamos determinar si la masa se moverá a la derecha (dirección x positiva o pendiente abajo en el plano) o a la izquierda (dirección x negativa o pendiente arriba en el plano). Podemos ver por la ecuación que la cantidad $mg \sen\theta - F \cos\theta$ determinará el sentido del movimiento. Con los valores numéricos dados, tenemos

$$\begin{aligned} mg \sen\theta - F \cos\theta &= (37.7 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2)(\sen 20.5^\circ) - (309.3 \text{ N})(\cos 20.5^\circ) \\ &= -160.193 \text{ N} \end{aligned}$$

De modo que la masa se moverá pendiente arriba en el plano (a la izquierda o en la dirección x negativa). Ahora podemos redibujar el diagrama de cuerpo libre como se muestra en la figura 4.25c), insertando la flecha para la fuerza de fricción cinética, f_k , apuntando hacia abajo en el plano (en la dirección x positiva), porque la fuerza de fricción siempre se opone a la dirección del movimiento.

INVESTIGUE

Ahora podemos escribir las componentes de las fuerzas en las direcciones x y y con base en el diagrama final de cuerpo libre. Para la dirección x , tenemos

$$mg \sen\theta - F \cos\theta + f_k = ma. \quad (\text{i})$$

Para la dirección y tenemos

$$N - mg \cos\theta - F \sen\theta = 0.$$

De esta ecuación podemos obtener la fuerza normal N que necesitamos para calcular la fuerza de fricción.

$$f_k = \mu_k N = \mu_k (mg \cos\theta + F \sen\theta). \quad (\text{ii})$$

SIMPLIFIQUE

Después de haber relacionado entre sí todas las cantidades conocidas y desconocidas, podemos obtener una expresión para la aceleración de la masa usando las ecuaciones (i) y (ii).

$$mg \sen\theta - F \cos\theta + \mu_k (mg \cos\theta + F \sen\theta) = ma.$$

Podemos reacomodar esta expresión:

$$\begin{aligned} mg \sen\theta - F \cos\theta + \mu_k mg \cos\theta + \mu_k F \sen\theta &= ma \\ (mg + \mu_k F) \sen\theta + (\mu_k mg - F) \cos\theta &= ma, \end{aligned}$$

y luego despejar la aceleración:

$$a = \frac{(mg + \mu_k F) \sen\theta + (\mu_k mg - F) \cos\theta}{m}. \quad (\text{iii})$$

CALCULE

Ahora introducimos los valores y obtenemos un resultado numérico. El primer número en el numerador de la ecuación (iii) es

$$((37.7 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2) + (0.171)(309.3 \text{ N}))(\sen 20.5^\circ) = 148.042 \text{ N}.$$

Observe que todavía no hemos redondeado este resultado. El segundo término en el numerador de la ecuación (iii) es

$$((0.171)(37.7 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2) - (309.3 \text{ N}))(\cos 20.5^\circ) = -230.476 \text{ N}.$$

De nuevo, no hemos redondeado todavía el resultado. Ahora calculamos la aceleración usando la ecuación (iii):

$$a = \frac{(148.042 \text{ N}) + (-230.476 \text{ N})}{37.7 \text{ kg}} = -2.1866 \text{ m/s}^2.$$

(continúa)

(continuación)

REDONDEE

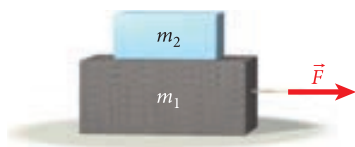
Como todos los valores numéricos se dieron inicialmente con tres cifras significativas, presentamos nuestro resultado final como

$$a = -2.19 \text{ m/s}^2.$$

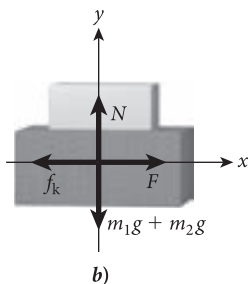
VUELVA A REVISAR

Observando nuestra respuesta, vemos que la aceleración es negativa, lo que significa que está en la dirección x negativa. Habíamos determinado que la masa se movería a la izquierda (hacia arriba en el plano, o en la dirección x negativa), lo cual concuerda con el signo de la aceleración en nuestro resultado final. La magnitud de la aceleración es una fracción de la aceleración de la gravedad (9.81 m/s^2), lo cual es físicamente lógico.

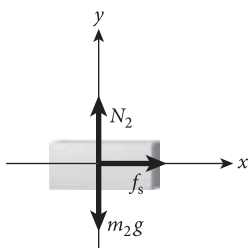
PROBLEMA RESUELTO 4.3 Dos bloques



a)



b)



c)

FIGURA 4.26 a) Dos bloques apilados de los que se tira a la derecha. b) Diagrama de cuerpo libre para los dos bloques que se mueven juntos. c) Diagrama de cuerpo libre para el bloque superior.

Dos bloques rectangulares están apilados sobre una mesa, como se muestra en la figura 4.26a). El bloque superior tiene una masa de 3.40 kg, y el inferior de 38.6 kg. El coeficiente de fricción cinética entre el bloque inferior y la mesa es de 0.260. El coeficiente de fricción estática entre los bloques es de 0.551. Se amarra una cuerda al bloque inferior y se aplica una fuerza externa \vec{F} de modo horizontal, tirando de la cuerda como se muestra.

PROBLEMA

¿Cuál es la fuerza máxima que se puede aplicar a la cuerda sin que se deslice el bloque superior?

SOLUCIÓN

PIENSE

Para comenzar con este problema observamos que, mientras la fuerza de fricción estática entre los dos bloques no se venza, los dos bloques viajarán juntos. Por lo tanto, si tiramos suavemente del bloque inferior, el superior permanecerá en su lugar encima del inferior, y los dos bloques se deslizarán como uno solo. Sin embargo, si tiramos fuerte del bloque inferior, la fuerza de fricción estática entre los bloques no será suficiente para conservar al bloque superior en su lugar, y comenzará a deslizarse respecto del bloque inferior.

Las fuerzas que actúan en este problema son la fuerza externa F que tira de la cuerda, la fuerza de fricción cinética f_k entre el bloque inferior y la superficie sobre la cual se deslizan los bloques, el peso m_1g del bloque inferior, el peso m_2g del bloque superior, la fuerza de fricción estática f_s entre los bloques y las fuerzas normales.

ESBOCE

Comenzamos con un diagrama de cuerpo libre de los dos bloques que se mueven juntos [figura 4.26b)], porque trataremos a los dos bloques como un sistema para la primera parte de este análisis. Definimos la dirección x paralela a la superficie sobre la cual se deslizan los bloques, y paralela a la fuerza externa que tira de la cuerda, con la dirección positiva a la derecha, en la dirección de la fuerza externa. La suma de las fuerzas en la dirección x es

$$F - f_k = (m_1 + m_2)a. \tag{i}$$

La suma de las fuerzas en la dirección y es

$$N - (m_1g + m_2g) = 0. \tag{ii}$$

Las ecuaciones (i) y (ii) describen el movimiento de los dos bloques juntos.

Ahora necesitamos un segundo diagrama de cuerpo libre para describir las fuerzas que actúan sobre el bloque superior. Las fuerzas en el diagrama de cuerpo libre para el bloque superior [figura

4.26c)] son la fuerza normal N_2 ejercida por el bloque inferior, el peso m_2g y la fuerza de fricción estática f_s . La suma de las fuerzas en la dirección x es

$$f_s = m_2a. \quad (\text{iii})$$

La suma de las fuerzas en la dirección y es

$$N_2 - m_2g = 0. \quad (\text{iv})$$

PLANTEO

El valor máximo de la fuerza de fricción estática entre los bloques superior e inferior está dada por

$$f_s = \mu_s N_2 = \mu_s (m_2g).$$

donde hemos usado las ecuaciones (iii) y (iv). Así, la aceleración máxima que puede tener el bloque superior sin deslizarse es

$$a_{\text{máx}} = \frac{f_s}{m_2} = \frac{\mu_s m_2 g}{m_2} = \mu_s g. \quad (\text{v})$$

Esta aceleración máxima para el bloque superior también es la aceleración máxima para los dos bloques juntos. De la ecuación (ii) obtenemos la fuerza normal entre el bloque inferior y la superficie de deslizamiento:

$$N = m_1g + m_2g. \quad (\text{vi})$$

La fuerza de fricción cinética entre el bloque inferior y la superficie de deslizamiento es, entonces

$$f_k = \mu_k (m_1g + m_2g). \quad (\text{vii})$$

SIMPLIFIQUE

Ahora podemos relacionar la aceleración máxima con la fuerza máxima $F_{\text{máx}}$, que se puede ejercer sin que el bloque superior se deslice, usando las ecuaciones (v-vii):

$$F_{\text{máx}} - \mu_k (m_1g + m_2g) = (m_1 + m_2)\mu_s g.$$

Despejamos la fuerza máxima para obtener

$$F_{\text{máx}} = \mu_k (m_1g + m_2g) + (m_1 + m_2)\mu_s g = g(m_1 + m_2)(\mu_k + \mu_s).$$

CALCULE

Introduciendo los valores numéricos dados obtenemos

$$F_{\text{máx}} = (9.81 \text{ m/s}^2)(38.6 \text{ kg} + 3.40 \text{ kg})(0.260 + 0.551) = 334.148 \text{ N}.$$

REDONDEE

Todos los valores numéricos se dieron con tres cifras significativas, de modo que presentamos nuestra respuesta como

$$F_{\text{máx}} = 334 \text{ N}.$$

VUELVA A REVISAR

La respuesta es un valor positivo, lo cual indica una fuerza a la derecha, y concuerda con el diagrama de cuerpo libre de la figura 4.26. La aceleración máxima es

$$a_{\text{máx}} = \mu_s g = (0.551)(9.81 \text{ m/s}^2) = 5.41 \text{ m/s}^2,$$

que es una fracción de la aceleración debida a la gravedad, lo cual parece razonable. Si no hubiera fricción entre el bloque inferior y la superficie sobre la cual se desliza, la fuerza necesaria para acelerar ambos bloques sería

$$F = (m_1 + m_2)a_{\text{máx}} = (38.6 \text{ kg} + 3.40 \text{ kg})(5.41 \text{ m/s}^2) = 227 \text{ N}.$$

Así, nuestra respuesta de 334 N para la fuerza máxima parece razonable, porque es mayor que la fuerza calculada cuando no hay fricción.

PREGUNTAS DE OPCIÓN MÚLTIPLE

4.1 Un auto de masa M viaja en línea recta con rapidez constante por un camino nivelado con un coeficiente de fricción entre los neumáticos y el camino de μ y una fuerza de arrastre D . La magnitud de la fuerza neta sobre el auto es

- a) μMg .
 b) $\mu Mg + D$.
 c) $\sqrt{(\mu Mg)^2 + D^2}$.
 d) cero.

4.2 Una persona está de pie en la superficie de la Tierra. La masa de la persona es m , y la masa de la Tierra es M . La persona salta hacia arriba, alcanzando una altura máxima h sobre la Tierra. Cuando la persona está a esta altura h , la magnitud de la fuerza que la persona ejerce sobre la Tierra es

- a) mg .
 b) Mg .
 c) M^2g/m .
 d) m^2g/M .
 e) cero.

4.3 Leonardo da Vinci descubrió que la magnitud de la fuerza de fricción por lo general es proporcional simplemente a la magnitud de la fuerza normal; es decir, la fuerza de fricción no depende de la anchura ni de la longitud del área de contacto. Así, la razón principal para usar neumáticos anchos en un auto de carrera es que dichos neumáticos

- a) se ven bonitos.
 b) tienen mayor área aparente de contacto.
 c) cuestan más.
 d) se pueden hacer de materiales más suaves.

4.4 El Tornado es un juego de feria que consiste en un cilindro vertical que gira rápidamente alrededor de su eje vertical. Al girar el Tornado, los pasajeros se oprimen contra la pared interior del cilindro por la rotación, y el piso del cilindro se quita. La fuerza que apunta hacia arriba, evitando que los pasajeros se caigan hacia abajo, es

- a) la fuerza de fricción.
 b) una fuerza normal.
 c) la gravedad.
 d) una fuerza de tensión.

4.5 Cuando un autobús hace una parada repentina, los pasajeros tienden a irse hacia adelante. ¿Cuál de las leyes de Newton puede explicar esto?

- a) Primera ley de Newton.
 b) Segunda ley de Newton.
 c) Tercera ley de Newton.
 d) No se puede explicar por las leyes de Newton.

4.6 Sólo dos fuerzas, \vec{F}_1 y \vec{F}_2 , actúan sobre un bloque. ¿Cuál de las siguientes puede ser la magnitud de la fuerza neta, \vec{F} , que actúa sobre el bloque? (Indique todas las posibilidades.)

- a) $F > F_1 + F_2$
 b) $F = F_1 + F_2$
 c) $F < F_1 + F_2$
 d) ninguna de las opciones anteriores.

4.7 ¿Cuál(es) de las siguientes observaciones sobre la fuerza de fricción es (son) incorrecta(s)?

- a) La magnitud de la fuerza de fricción cinética es siempre proporcional a la fuerza normal.
 b) La magnitud de la fuerza de fricción estática es siempre proporcional a la fuerza normal.
 c) La magnitud de la fuerza de fricción estática es siempre proporcional a la fuerza externa aplicada.
 d) El sentido de la fuerza de fricción cinética es siempre opuesto al del movimiento relativo del objeto respecto a la superficie sobre la que se mueve.
 e) El sentido de la fuerza de fricción estática es siempre opuesto al del movimiento inminente del objeto en relación con la superficie sobre la cual se apoya.
 f) Todo lo anterior es correcto.

4.8 Se aplica una fuerza horizontal que es igual al peso del objeto, el cual está apoyado sobre una mesa. ¿Cuál es la aceleración del objeto en movimiento cuando el coeficiente de fricción cinética entre el objeto y el piso es 1? (Suponiendo que el objeto se mueve en el sentido de la fuerza aplicada.)

- a) Cero.
 b) 1 m/s^2 .
 c) No se da información suficiente para encontrar la aceleración.
 d) Ninguna de las anteriores.

4.9 Dos bloques de masas iguales están conectados por una cuerda horizontal sin masa y se apoyan sobre una mesa sin fricción. Cuando se tira de uno de los bloques por una fuerza horizontal externa \vec{F} , ¿cuál es la relación entre las fuerzas netas que actúan sobre los bloques?

- a) 1:1
 b) 1:1.41
 c) 1:2
 d) ninguna de las anteriores.

4.10 Si una carreta reposa en el suelo, no hay fuerzas que actúen sobre ella.

- a) Verdadero.
 b) Falso.
 c) Quizá.

4.11 Un objeto cuya masa es de 0.092 kg está inicialmente en reposo y luego adquiere una rapidez de 75.0 m/s en 0.028 s. ¿Qué fuerza media actuó sobre el objeto durante este intervalo de tiempo?

- a) $1.2 \cdot 10^2 \text{ N}$
 b) $2.5 \cdot 10^2 \text{ N}$
 c) $2.8 \cdot 10^2 \text{ N}$
 d) $4.9 \cdot 10^2 \text{ N}$

4.12 Usted empuja un gran cajón por el suelo, con rapidez constante, ejerciendo una fuerza horizontal F sobre el cajón. La fuerza de fricción tiene una magnitud que es

- a) Cero.
 b) F .
 c) Mayor que F .
 d) Menor que F .
 e) Imposible de cuantificar sin mayor información.

PREGUNTAS

4.13 Usted está en la zapatería comprando un par de zapatos de basquetbol que tienen la mayor tracción sobre un tipo específico de madera dura. Para determinar el coeficiente de fricción estática, μ , usted coloca cada zapato en una plancha

de la madera dura e inclina la plancha hasta un ángulo θ , al cual el zapato justo comienza a deslizarse. Obtenga una expresión para μ como función de θ .

4.14 Una pesada bola de madera está colgada del techo por un trozo de cuerda que se fija del techo en un extremo y se fija a la parte superior de la bola en el otro. Un trozo similar de cuerda se fija a la parte inferior de la bola. Si se tira bruscamente del extremo suelto de la cuerda inferior, ¿cuál es la cuerda que tiene mayor probabilidad de romperse?

4.15 Un automóvil tira de un remolque por la carretera. Sea F_r la magnitud de la fuerza sobre el remolque debida al auto, y sea F_a la magnitud de la fuerza sobre el carro debida al remolque. Si el auto y el remolque se mueven a velocidad constante por un piso a nivel, entonces $F_r = F_a$. Si el auto y el remolque aceleran cuesta arriba, ¿cuál es la relación entre las dos fuerzas?

4.16 Un auto acelera por una carretera horizontal. ¿Cuál es la fuerza en la dirección del movimiento que acelera al auto?

4.17 Si las fuerzas que ejercen dos objetos uno sobre otro son siempre iguales en magnitud y de sentidos opuestos, ¿cómo es posible que un objeto se acelere?

4.18 Verdadero o falso: un libro de física sobre una mesa no se moverá en lo absoluto si y sólo si la fuerza neta es cero.

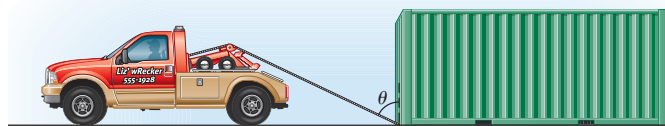
4.19 Una masa se desliza sobre una rampa inclinada un ángulo θ arriba de la horizontal. El coeficiente de fricción entre la masa y la rampa es μ .

- a) Encuentre una expresión para la magnitud y la dirección de la aceleración si la masa se desliza hacia arriba en la rampa.
- b) Repita el inciso a) para encontrar una expresión para la magnitud y la dirección de la aceleración de la masa al deslizarse hacia abajo en la rampa.

4.20 Un cajón de embarque que pesa 340 N está inicialmente estacionario en un muelle de carga. Llega un montacargas y sube el cajón con una fuerza ascendente de 500 N, acelerando el cajón hacia arriba. ¿Cuál es la magnitud de la fuerza debida a la gravedad que actúa sobre el cajón de embarque mientras se está acelerando hacia arriba?

4.21 Un bloque se desliza sobre una pendiente (casi) sin fricción, con una inclinación de 30.0° . ¿Cuál fuerza tiene mayor magnitud, la fuerza neta que actúa sobre el bloque o la fuerza normal que actúa sobre el bloque?

4.22 Un camión de remolque de masa M utiliza un cable para tirar de un contenedor de embarque de masa m sobre una superficie horizontal, como se muestra en la figura. El cable está fijado al contenedor por la arista frontal inferior, y forma un ángulo θ con la vertical, como se muestra. El coeficiente de fricción cinética entre la superficie y el contenedor es μ .



- a) Trace un diagrama de cuerpo libre para el contenedor.
- b) Suponiendo que el camión tire del contenedor con una rapidez constante, escriba la ecuación para la magnitud T de la tensión en el cable.

PROBLEMAS

Una • y dos •• indican un nivel creciente de dificultad del problema.

Sección 4.2

4.23 La aceleración gravitacional en la Luna es un sexto de la de la Tierra. El peso de una manzana en la Tierra es de 1.00 N.

- a) ¿Cuál es el peso de la manzana en la Luna?
- b) ¿Cuál es la masa de la manzana?

Sección 4.4

4.24 Una fuerza de 423.5 N acelera a un *go-cart* y a su conductor de 10.4 m/s a 17.9 m/s en 5.00 s. ¿Cuál es la masa del *go-cart* y su conductor?

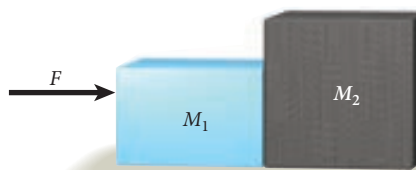
4.25 Usted acaba de ingresar a un exclusivo club de salud, ubicado en el último piso de un rascacielos. Usted llega a las instalaciones usando un elevador expreso. El elevador tiene una báscula de precisión instalada, para que los miembros se puedan pesar antes y después de sus ejercicios. Un miembro entra al elevador y se pone en la báscula antes de que se cierren las puertas del elevador. La báscula muestra un peso de 183.7 lb. Luego el elevador acelera hacia arriba con una aceleración de 2.43 m/s^2 , mientras esa persona sigue sobre la báscula. ¿Cuál es el peso que muestra la escala mientras el elevador está acelerando?

4.26 La cabina de un elevador tiene una masa de 358.1 kg, y la masa combinada de las personas que están dentro es de 169.2 kg. La cabina se eleva mediante un cable, con una aceleración constante de 4.11 m/s^2 . ¿Cuál es la tensión del cable?

4.27 La cabina de un elevador tiene una masa de 363.7 kg, y la masa combinada de las personas que están dentro es de 177 kg. La cabina se eleva mediante un cable en el que la fuerza de tensión es de 7 638 N. ¿Cuál es la aceleración de la cabina?

4.28 Dos bloques están en contacto sobre una mesa horizontal sin fricción. Se aplica una fuerza externa, \vec{F} , al bloque 1, y los dos bloques se mueven con una aceleración constante de 2.45 m/s^2 .

- a) ¿Cuál es la magnitud, F , de la fuerza que se aplica?
- b) ¿Cuál es la fuerza de contacto entre los bloques?
- c) ¿Cuál es la fuerza neta que actúa sobre el bloque 1? Use $M_1 = 3.20 \text{ kg}$ y $M_2 = 5.70 \text{ kg}$.

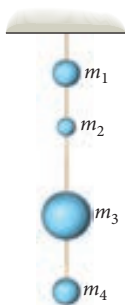


•4.29 La densidad (masa por unidad de volumen) del hielo es de 917 kg/m^3 , y la densidad del agua de mar es de 1024 kg/m^3 . Sólo 10.4% del volumen de un iceberg está por encima de la superficie del agua. Si el volumen de un iceberg dado que está arriba del agua es de 4205.3 m^3 , ¿cuál es la magnitud de la fuerza que el agua del mar ejerce sobre este iceberg?

•4.30 En una clase de laboratorio de física, tres cuerdas sin masa se atan juntas en un punto. Se aplica una fuerza de tracción a lo largo de cada cuerda: $F_1 = 150 \text{ N}$ a 60.0° , $F_2 = 200 \text{ N}$ a $100.^\circ$, $F_3 = 100 \text{ N}$ a $190.^\circ$. ¿Cuál es la magnitud de una cuarta fuerza y el ángulo al cual actúa para conservar estacionario el punto en el centro del sistema? (Todos los ángulos se miden desde el eje x positivo en sentido contrario a las manecillas del reloj.)

Sección 4.5

4.31 Cuatro pesas, de masas $m_1 = 6.50 \text{ kg}$, $m_2 = 3.80 \text{ kg}$, $m_3 = 10.70 \text{ kg}$ y $m_4 = 4.20 \text{ kg}$, cuelgan del techo como se muestra en la figura. Están conectados por cuerdas. ¿Cuál es la tensión en la cuerda que conecta las masas m_1 y m_2 ?



4.32 Una masa suspendida, $M_1 = 0.50 \text{ kg}$, está conectada mediante una cuerda ligera que pasa por una polea sin fricción, a una masa $M_2 = 1.50 \text{ kg}$ que inicialmente está en reposo sobre una mesa sin fricción. Encuentre la magnitud de la aceleración a , de M_2 .

•4.33 Una masa suspendida, $M_1 = 0.50 \text{ kg}$, está conectada, mediante una cuerda ligera que pasa por una polea sin fricción, al frente de una masa $M_2 = 1.50 \text{ kg}$ que inicialmente está en reposo en una mesa sin fricción. Una tercera masa $M_3 = 2.50 \text{ kg}$, que también está inicialmente en reposo en una mesa sin fricción, se conecta a la parte posterior de M_2 mediante una cuerda ligera.

- a) Encuentre la magnitud de la aceleración a de la masa M_3 .
- b) Encuentre la tensión en la cuerda entre las masas M_1 y M_2 .

•4.34 Una masa suspendida $M_1 = 0.400 \text{ kg}$ está conectada mediante una cuerda ligera que pasa por una polea sin fricción a una masa $M_2 = 1.20 \text{ kg}$ que inicialmente está en reposo sobre una rampa sin fricción. La rampa está inclinada un ángulo de $\theta = 30.0^\circ$ sobre la horizontal, y la polea está en la parte superior de la rampa. Encuentre la magnitud y la dirección de la aceleración, a_2 , de M_2 .

•4.35 Una mesa de fuerzas es una mesa circular con un pequeño aro que se tiene que equilibrar en el centro de la mesa. El aro está atado a tres masas colgantes mediante cuerdas de masa despreciable que pasan por poleas sin fricción montadas en el borde de la mesa. La magnitud y la dirección de cada una de las tres fuerzas horizontales que actúan sobre el aro se pueden ajustar cambiando la cantidad de cada masa colgante y la posición de cada polea, respectivamente. Dada una masa $m_1 = 0.040 \text{ kg}$ que tira en la dirección x positiva, y una masa $m_2 = 0.030 \text{ kg}$ que tira en la dirección y positiva, encuentre la masa (m_3) y el ángulo (θ , en sentido contrario a las manecillas del reloj del eje x positivo) que mantendrá en equilibrio el aro en el centro de la mesa.

•4.36 Un mono está sentado en una placa de madera conectada por una cuerda cuyo otro extremo pasa por la rama de un árbol como se muestra en la figura. El mono sostiene la cuerda y trata de tirar de ella hacia abajo. La masa combinada del mono y la placa de madera es de 100 kg .



- a) ¿Cuál es la fuerza mínima que el mono tiene que aplicar para elevarse del suelo?
- b) ¿Qué fuerza aplicada se necesita para mover al mono con una aceleración ascendente de 2.45 m/s^2 ?
- c) Explique cómo cambiarían las respuestas si, en vez de esto, un segundo mono en el piso tirara de la cuerda.

Sección 4.6

4.37 Una silla de contraestre es un dispositivo que usa un contraestre de barco para elevarse hasta la punta de la vela principal de un barco. Un dispositivo simplificado consiste en una silla, una cuerda de masa despreciable y una polea sin fricción fijada en la parte superior de la vela principal. La cuerda pasa por la polea, con un extremo atado a la silla, y el contraestre tira del otro extremo, elevándose a sí mismo. La silla y el contraestre tienen una masa total $M = 90.0 \text{ kg}$.

a) Si el contraestre tira de sí mismo hacia arriba con rapidez constante, ¿cuál es la magnitud de la fuerza con la que debe tirar de la cuerda?

b) Si en vez de esto, el contraestre se mueve en forma brusca, acelerando hacia arriba con una aceleración máxima de magnitud $a = 2.0 \text{ m/s}^2$, ¿con qué magnitud máxima de fuerza debe tirar de la cuerda?

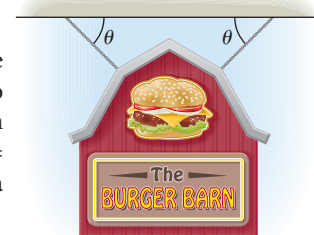


4.38. Un bloque de granito de 311 kg de masa está suspendido de un sistema de poleas como se muestra en la figura. La cuerda está devanada en seis vueltas alrededor de las poleas. ¿Cuál es la fuerza con la que usted tendría que tirar de la cuerda para mantener el bloque de granito en equilibrio?

4.39 Al llegar a un planeta recién descubierto, el capitán de una nave espacial realizó el siguiente experimento para calcular la aceleración gravitacional del planeta. Colocó masas de 100.0 y 200.0 g sobre una máquina de Atwood hecha de cuerdas sin masa y una polea sin fricción y midió que cada masa tardaba 1.52 s en viajar 1.00 m desde el reposo.

- a) ¿Cuál es la aceleración gravitacional en el planeta?
- b) ¿Cuál es la tensión en la cuerda?

•4.40 Un letrero de tienda de masa 4.25 kg está suspendido de dos alambres que forman cada uno un ángulo de $\theta = 42.4^\circ$ con el techo. ¿Cuál es la tensión en cada alambre?



•4.41 Un cajón de naranjas se desliza hacia abajo de un plano inclinado sin fricción. Si se suelta desde el reposo y alcanza una rapidez de 5.832 m/s, después de deslizarse una distancia de 2.29 m, ¿cuál es el ángulo de inclinación del plano con respecto a la horizontal?

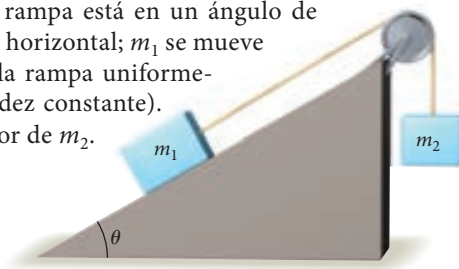
•4.42 Una carga de ladrillos de masa $M = 200.0$ kg se ata a una grúa mediante un cable de masa despreciable y longitud $L = 3.00$ m. Inicialmente, cuando el cable cuelga de manera vertical, los ladrillos están a una distancia horizontal $D = 1.50$ m de la pared donde se van a colocar los ladrillos. ¿Cuál es la magnitud de la fuerza horizontal que debe aplicarse a la carga de ladrillos (sin mover la grúa) para que los ladrillos queden en reposo directamente sobre la pared?

•4.43 Un gran bloque de hielo de masa $M = 80.0$ kg se mantiene estacionario en una rampa sin fricción. La rampa forma un ángulo de $\theta = 36.9^\circ$ sobre la horizontal.

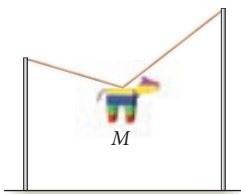
a) Si el bloque de hielo se mantiene en su sitio por una fuerza tangencial a lo largo de la superficie de la rampa (a un ángulo θ sobre la horizontal), encuentre la magnitud de esta fuerza.

b) Si, en vez de esto, el bloque de hielo se mantuviera en su lugar por una fuerza horizontal dirigida en forma horizontal hacia el centro del bloque de hielo, encuentre la magnitud de esta fuerza.

•4.44 Una masa $m_1 = 20.0$ kg sobre una rampa sin fricción está conectada a una cuerda ligera. La cuerda pasa sobre una polea sin fricción y está fijada a una masa colgante m_2 . La rampa está en un ángulo de $\theta = 30.0^\circ$ sobre la horizontal; m_1 se mueve hacia arriba en la rampa uniformemente (con rapidez constante). Encuentre el valor de m_2 .



•4.45 Una piñata de masa $M = 8.0$ kg está atada a una cuerda de masa despreciable que está tendida entre las puntas de dos postes verticales. La distancia horizontal entre los postes es $D = 2.0$ m, y la punta del poste derecho está a una distancia vertical $h = 0.50$ m más alta que la punta del poste izquierdo. La piñata está atada a la cuerda en una posición horizontal a mitad de camino entre los dos postes, y a una distancia vertical $s = 1.0$ m por debajo de la punta del poste izquierdo. Encuentre la tensión en cada parte de la cuerda debida al peso de la piñata.



•4.46 Una piñata de masa $M = 12$ kg cuelga de una cuerda de masa despreciable que está tendida entre las puntas de dos postes verticales. La distancia horizontal entre los postes es $D = 2.0$ m, la punta del poste derecho está a una distancia vertical $h = 0.50$ m más arriba de la punta del poste izquierdo, y la longitud total de la cuerda entre los postes es $L = 3.0$ m. La piñata está atada a un aro, y la cuerda pasa por el centro del aro. El aro carece de fricción, de modo que se puede deslizar

libremente por la cuerda hasta que la piñata llega a un punto de equilibrio estático.

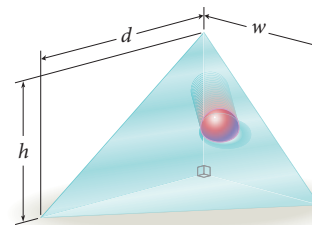
a) Determine la distancia de la punta del poste izquierdo (el más bajo) al aro cuando la piñata está en equilibrio estático.

b) ¿Cuál es la tensión en la cuerda cuando la piñata está en este punto de equilibrio estático?

•4.47 Tres objetos con masas $m_1 = 36.5$ kg, $m_2 = 19.2$ kg y $m_3 = 12.5$ kg cuelgan de cuerdas que corren sobre poleas. ¿Cuál es la aceleración de m_1 ?



•4.48 Un bloque rectangular de anchura $w = 116.5$ cm, largo $d = 164.8$ cm y altura $h = 105.1$ cm se corta en forma diagonal desde un vértice superior hasta el vértice inferior opuesto, de modo que se genera una superficie triangular, como se muestra en la figura. Un pisapapeles de masa $m = 16.93$ kg se desliza hacia abajo por el plano inclinado sin fricción. ¿Cuál es la magnitud de la aceleración que experimenta el pisapapeles?



•4.49 Un gran bloque cúbico de hielo de masa $M = 64$ kg y lados de longitud $L = 0.40$ m se mantiene estacionario en una rampa sin fricción. La rampa forma un ángulo $\theta = 26^\circ$ sobre la horizontal. El cubo de hielo se mantiene en su sitio mediante una cuerda de masa despreciable y longitud $l = 1.6$ m. La cuerda está atada a la superficie de la rampa y a la arista superior del cubo de hielo, a una distancia L arriba de la superficie de la rampa. Encuentre la tensión en la cuerda.

•4.50 Una bola de boliche de masa $M_1 = 6.0$ kg está inicialmente en reposo sobre el lado inclinado de una cuña de masa $M_2 = 9.0$ kg que está sobre un piso horizontal sin fricción. El lado de la cuña está inclinado con un ángulo de $\theta = 36.9^\circ$ sobre la horizontal.

a) ¿Con qué magnitud de fuerza horizontal debe empujarse la cuña para mantener la bola a una altura constante sobre la pendiente?

b) ¿Cuál es la magnitud de la aceleración de la cuña, si no se aplica una fuerza externa?

Sección 4.7

4.51 Una paracaidista con masa de 82.3 kg (incluyendo traje y equipo) desciende suspendida de su paracaídas, habiendo alcanzado la rapidez terminal. El coeficiente de arrastre es de 0.533, y el área del paracaídas es de 20.11 m². La densidad del aire es de 1.14 kg/m³. ¿Cuál es la fuerza de arrastre del aire sobre la paracaidista?

4.52 El tiempo que tarda un auto modificado *top fuel* para arrancar desde el reposo y correr en línea recta una distancia de $\frac{1}{4}$ de milla (402 m) es de 4.41 s. Encuentre el coeficiente mínimo de fricción entre los neumáticos y la pista que se necesita para lograr este resultado. (Observe que el coeficiente mínimo de fricción se encuentra con la suposición simplificadora de que el auto acelera con aceleración constante.)

4.53 Un bloque de motor de masa M está en la plataforma de una camioneta que viaja en línea recta por un camino horizontal con una rapidez inicial de 30.0 m/s. El coeficiente de fricción estática entre el bloque y la plataforma es $\mu_s = 0.540$. Encuentre la distancia mínima en la cual se puede detener la camioneta sin que el bloque se deslice hacia la cabina del conductor.

4.54 Una caja de libros está inicialmente en reposo a una distancia $D = 0.540$ m del extremo de una tabla de madera. El coeficiente de fricción estática entre la caja y la tabla es $\mu_s = 0.320$, y el coeficiente de fricción cinética es $\mu_k = 0.250$. El ángulo de la tabla aumenta en forma lenta, hasta que la caja apenas comienza a deslizarse; entonces se mantiene la tabla con este ángulo. Encuentre la rapidez de la caja hasta que llegue al extremo de la tabla.

4.55 Un bloque de masa $M_1 = 0.640$ kg está inicialmente en reposo sobre una carreta de masa $M_2 = 0.320$ kg con la carreta inicialmente en reposo sobre una pista aérea horizontal. El coeficiente de fricción estática entre el bloque y la carreta es $\mu_s = 0.620$, pero no hay fricción entre la pista y la carreta. La carreta se acelera mediante una fuerza de magnitud F paralela a la pista. Encuentre el valor máximo de F que permite que el bloque se acelere con la carreta, sin que se deslice sobre ésta.

Sección 4.8

4.56 Los filtros de café se comportan como pequeños paracaídas, con una fuerza de arrastre que es proporcional al cuadrado de la velocidad, $F_{\text{arras}} = Kv^2$. Un solo filtro de café, cuando se suelta desde una altura de 2.0 m, llega al suelo en un tiempo de 3.0 s. Cuando se acomoda un segundo filtro dentro del primero, la fuerza de arrastre sigue siendo la misma, pero el peso es el doble. Encuentre el tiempo que tardan los dos filtros en llegar al suelo. (Desprecie el breve periodo durante el cual los filtros aceleran hasta su rapidez terminal.)

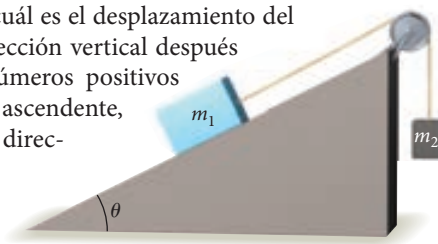
4.57 Su refrigerador tiene una masa de 112.2 kg, incluidos los alimentos en su interior. Está colocado en medio de su cocina, y usted necesita moverlo. Los coeficientes de fricción estática y cinética entre el refrigerador y el piso de azulejos son de 0.460 y 0.370, respectivamente. ¿Cuál es la magnitud de la fuerza de fricción que actúa sobre el refrigerador si usted lo empuja en forma horizontal con una fuerza de cada magnitud?

- a) 300 N b) 500 N c) 700 N

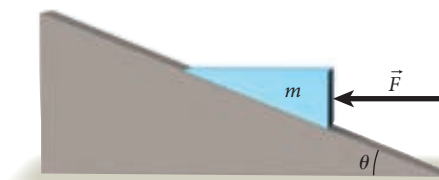
4.58 En la pista de esquí para principiantes, una cuerda de remolque tira de los esquiadores cuesta arriba, con rapidez constante de 1.74 m/s. La pendiente de la colina es de 12.4° con respecto a la horizontal. Están subiendo a un niño por la colina. Los coeficientes de fricción estática y cinética entre los esquís del niño y la nieve son de 0.152 y 0.104, respectivamente, y la masa del niño es de 62.4 kg, incluyendo la ropa y el equipo. ¿Cuál es la fuerza con que la cuerda de remolque tiene que tirar del niño?

4.59 Una esquiadora arranca con una rapidez de 2.0 m/s y esquía en línea recta cuesta abajo por una colina con un ángulo de 15.0° con respecto a la horizontal. El coeficiente de fricción cinética entre sus esquís y la nieve es de 0.100. ¿Cuál es su rapidez después de 10.0 s?

4.60 Un bloque de masa $m_1 = 21.9$ kg está en reposo en un plano inclinado $\theta = 30.0^\circ$ sobre la horizontal. El bloque está conectado por una cuerda y un sistema de poleas sin masa a otro bloque de masa $m_2 = 25.1$ kg, como se muestra en la figura. Los coeficientes de fricción estática y cinética entre el bloque 1 y el plano inclinado son $\mu_s = 0.109$ y $\mu_k = 0.086$, respectivamente. Si los bloques se liberan desde el reposo, ¿cuál es el desplazamiento del bloque 2 en la dirección vertical después de 1.51 s? Use números positivos para la dirección ascendente, y negativos para la dirección descendente.



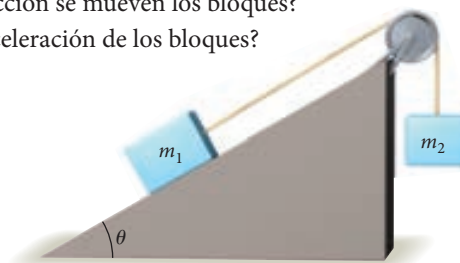
4.61 Una cuña de masa $m = 36.1$ kg está ubicada en un plano inclinado un ángulo $\theta = 21.3^\circ$ respecto a la horizontal. Una fuerza $F = 302.3$ N en la dirección horizontal empuja la cuña, como se muestra en la figura. El coeficiente de fricción cinética entre la cuña y el plano es de 0.159. ¿Cuál es la aceleración de la cuña a lo largo del plano?



4.62 Una silla de masa M está en reposo sobre un piso horizontal, con un coeficiente de fricción estática $\mu_s = 0.560$ entre la silla y el piso. Una persona quiere empujar la silla por el piso. La empuja con una fuerza F a un ángulo θ por debajo de la horizontal. ¿Cuál es el valor máximo de θ para el cual la silla no comenzará a moverse por el piso?

4.63 Como se muestra en la figura, bloques de masas $m_1 = 250.0$ g y $m_2 = 500.0$ g están conectados por una cuerda sin masa que pasa por una polea sin fricción y sin masa. Los coeficientes de fricción estática y cinética entre el bloque y el plano inclinado son de 0.250 y 0.123, respectivamente. El ángulo del plano inclinado es $\theta = 30.0^\circ$, y los bloques están en reposo al inicio.

- a) ¿En qué dirección se mueven los bloques?
b) ¿Cuál es la aceleración de los bloques?



- 4.64 Un bloque de masa $M = 500.0$ g reposa sobre una mesa horizontal. Los coeficientes de fricción estática y cinética son de 0.53 y 0.41, respectivamente, en la superficie de contacto entre la mesa y el bloque. El bloque recibe un empuje de 10.0 N de una fuerza externa en un ángulo θ con la horizontal.
 - a) ¿Qué ángulo producirá la máxima aceleración del bloque para una fuerza dada de empuje?
 - b) ¿Cuál es la aceleración máxima?

Problemas adicionales

- 4.65 Un auto sin ABS (*Antilock Brake System*, sistema de frenos antibloqueo) se movía a 15.0 m/s cuando el conductor pisa el freno para hacer una parada repentina. Los coeficientes de fricción estática y cinética entre los neumáticos y el camino son de 0.550 y 0.430, respectivamente.
 - a) ¿Cuál fue la aceleración del auto durante el intervalo de frenado?
 - b) ¿Qué distancia recorrió el auto antes de detenerse?
- 4.66 Un bloque de 2.00 kg (M_1) y un bloque de 6.00 kg (M_2) están conectados por una cuerda sin masa. Sobre los bloques actúan las fuerzas aplicadas, $F_1 = 10.0$ N y $F_2 = 5.00$ N, como se muestra en la figura.
 - a) ¿Cuál es la aceleración de los bloques?
 - b) ¿Cuál es la tensión en la cuerda?
 - c) ¿Cuál es la fuerza neta que actúa sobre M_1 ? (Desprecie la fricción entre los bloques y la mesa.)

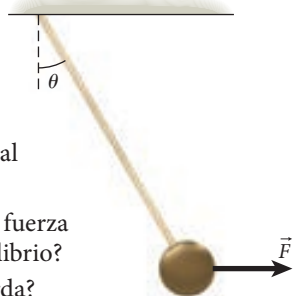


- 4.67 Un elevador contiene dos masas: $M_1 = 2.0$ kg está conectada por una cuerda (cuerda 1) al techo del elevador, y $M_2 = 4.0$ kg está conectado por una cuerda similar (cuerda 2) a la parte inferior de la masa 1.
 - a) Encuentre la tensión en la cuerda 1 (T_1) si el elevador se mueve hacia arriba a velocidad constante de $v = 3.0$ m/s.
 - b) Encuentre T_1 si el elevador está acelerando hacia arriba con una aceleración de $a = 3.0$ m/s².
- 4.68 ¿Qué coeficiente de fricción se necesita para detener un disco de hockey que se desliza inicialmente a 12.5 m/s, en una distancia de 60.5 m?
- 4.69 Un resorte de masa despreciable está fijado al techo de un elevador. Cuando el elevador está parado en el primer piso, se fija una masa M al resorte, estirándolo una distancia D hasta que la mesa llega al equilibrio. Cuando el elevador comienza a subir hacia el segundo piso, el resorte se estira una distancia adicional $D/4$. ¿Cuál es la magnitud de la aceleración del elevador? Suponga que la fuerza que ejerce el resorte es directamente proporcional a la elongación del resorte.
- 4.70 Una grúa de masa $M = 1.00 \cdot 10^4$ kg levanta una bola de demolición de masa $m = 1\ 200$ kg directamente hacia arriba.
 - a) Encuentre la magnitud de la fuerza normal que el suelo ejerce sobre la grúa mientras la bola de demolición sube con rapidez constante $v = 1.00$ m/s.

- b) Encuentre la magnitud de la fuerza normal si el movimiento ascendente de la bola se desacelera a razón constante desde su rapidez inicial $v = 1.00$ m/s hasta detenerse a una distancia $D = 0.250$ m.
- 4.71 Un bloque de masa de 20.0 kg suspendido de un cable vertical sin masa está inicialmente en reposo. Luego se tira del bloque hacia arriba produciéndole una aceleración constante de 2.32 m/s².
 - a) ¿Cuál es la tensión en el cable?
 - b) ¿Cuál es la fuerza neta que actúa sobre la masa?
 - c) ¿Cuál es la rapidez del bloque después de que se ha movido 2.00 m?
- 4.72 Tres bloques idénticos, A, B y C, están sobre una mesa horizontal sin fricción. Los bloques están conectados por cuerdas de masa despreciable, el bloque B se ubica en medio de los otros dos. Si una fuerza $F = 12$ N tira horizontalmente del bloque C, encuentre la tensión en la cuerda que une los bloques B y C.
 - 4.73 Un bloque de masa $m_1 = 3.00$ kg y un bloque de masa $m_2 = 4.00$ kg están suspendidos de una cuerda sin masa que pasa por una polea sin fricción y con masa despreciable, como en una máquina de Atwood. Los bloques se mantienen inmóviles y luego se liberan. ¿Cuál es la aceleración de los dos bloques?
 - 4.74 Dos bloques de masas m_1 y m_2 están suspendidos de una cuerda sin masa que pasa por una polea sin fricción y con masa despreciable, y luego se liberan. Si $m_1 = 3.50$ kg, ¿qué valor debe tener m_2 para que el sistema experimente una aceleración $a = 0.400$ g? (*Pista:* Hay dos soluciones para este problema.)
 - 4.75 Un tractor tira de un trineo de masa $M = 1\ 000$ kg por terreno nivelado. El coeficiente de fricción cinética entre el trineo y el piso es $\mu_k = 0.600$. El tractor tira del trineo mediante una cuerda fija al trineo con un ángulo $\theta = 30.0^\circ$ sobre la horizontal. ¿Qué magnitud de tensión en la cuerda se necesita para mover en forma horizontal el trineo con una aceleración $a = 2.00$ m/s²?
 - 4.76 Un bloque de 2.00 kg está sobre un plano inclinado 20.0° respecto a la horizontal. El coeficiente de fricción estática entre el bloque y el plano es de 0.60.
 - a) ¿Cuántas fuerzas actúan sobre el bloque?
 - b) ¿Cuánto vale la fuerza normal?
 - c) ¿Se mueve este bloque? Explique.
 - 4.77 Un bloque con masa de 5.00 kg se desliza a una velocidad constante hacia abajo sobre un plano inclinado que forma un ángulo de 37° respecto a la horizontal.
 - a) ¿Cuál es la fuerza de fricción?
 - b) ¿Cuál es el coeficiente de fricción cinética?
 - 4.78 Una paracaidista con masa de 83.7 kg (incluida ropa y equipo) cae en posición de águila extendida, habiendo alcanzado su rapidez terminal. El coeficiente de arrastre es de 0.587, y su área superficial expuesta a la corriente de aire es de 1.035 m². ¿Cuánto tarda en caer una distancia vertical de 296.7 m? (La densidad del aire es de 1.14 kg/m³.)
 - 4.79 Un libro de física de 0.50 kg está suspendido de dos alambres sin masa de longitudes iguales fijados al techo. La ten-

sión en cada alambre es de 15.4 N. ¿Cuál es el ángulo que forman los alambres respecto a la horizontal?

•4.80 En la figura, una fuerza externa \vec{F} mantiene una pesa suspendida con masa de 500 g en posición estacionaria. El ángulo que forma la cuerda sin masa con la vertical es $\theta = 30.0^\circ$.



- ¿Cuál es la magnitud, F , de la fuerza necesaria para mantener el equilibrio?
- ¿Cuál es la tensión en la cuerda?

•4.81 En una clase de física, una pelota de ping-pong de 2.70 g se suspendió de una cuerda sin masa. La cuerda forma un ángulo $\theta = 15.0^\circ$ con la vertical cuando se sopla aire horizontalmente a la pelota con una rapidez de 20.5 m/s. Suponga que la fuerza de fricción es proporcional al cuadrado de la rapidez de la corriente de aire.

- ¿Cuál es la constante de proporcionalidad en este experimento?
- ¿Cuál es la tensión en la cuerda?

•4.82 Un nanoalambre es una estructura (casi) unidimensional, con un diámetro del orden de unos pocos nanómetros. Suponga que un nanoalambre de 100.0 nm de longitud hecho de silicio puro (densidad del Si = 2.33 g/cm³) tiene un diámetro de 5.0 nm. Este nanoalambre está fijado por la parte superior, y cuelga en forma vertical debido a la fuerza de gravedad.

- ¿Cuál es la tensión en la parte superior del nanoalambre?
- ¿Cuál es la tensión en la parte media?

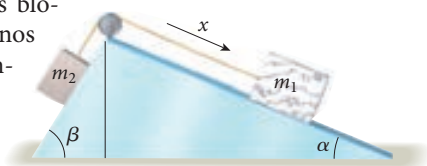
(Pista: Trate el nanoalambre como un cilindro de 5.0 nm de diámetro y longitud de 100.0 nm, hecho de silicio).

•4.83 Dos bloques están apilados sobre una mesa sin fricción, y se aplica una fuerza horizontal F al bloque superior (bloque 1). Sus masas son $m_1 = 2.50$ kg y $m_2 = 3.75$ kg. Los coeficientes de fricción estática y cinética entre los bloques son 0.456 y 0.380, respectivamente.

- ¿Cuál es la máxima fuerza F aplicada para la cual m_1 no se deslizará respecto de m_2 ?
- ¿Cuáles son las aceleraciones de m_1 y m_2 cuando se aplica a m_1 una fuerza $F = 24.5$ N?

•4.84 Dos bloques ($m_1 = 1.23$ kg y $m_2 = 2.46$ kg) se pegan entre sí con un adhesivo y se mueven hacia abajo en un plano inclinado con un ángulo de 40° respecto a la horizontal. Ambos bloques descansan sobre la superficie del plano inclinado. Los coeficientes de fricción cinética son de 0.23 para m_1 y de 0.35 para m_2 . ¿Cuál es la aceleración de los bloques?

•4.85 Un bloque de mármol de masa $m_1 = 567.1$ kg y un bloque de granito de masa $m_2 = 266.4$ kg se conectan entre sí mediante una cuerda que pasa por una polea, como se muestra en la figura. Ambos bloques están sobre planos inclinados, cuyos ángulos son $\alpha = 39.3^\circ$ y $\beta = 53.2^\circ$. Ambos bloques se

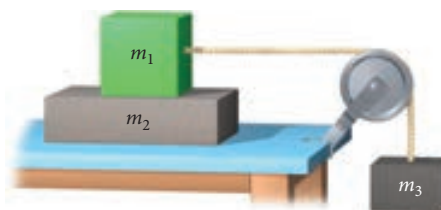


mueven sin fricción, y la cuerda se desliza sobre la polea sin fricción. ¿Cuál es la aceleración del bloque de mármol? Observe que en la figura se indica la dirección x positiva.

••4.86 Un bloque de mármol de masa $m_1 = 559.1$ kg y un bloque de granito de masa $m_2 = 128.4$ kg se conectan mediante una cuerda que pasa por una polea como se muestra en la figura. Ambos bloques están sobre planos inclinados con ángulos $\alpha = 38.3^\circ$ y $\beta = 57.2^\circ$. La cuerda se desliza sobre una polea sin fricción, pero el coeficiente de fricción entre el bloque 1 y el plano inclinado es $\mu_1 = 0.13$, y entre el bloque 2 y el plano inclinado es $\mu_2 = 0.31$. (Por simplicidad, suponga que los coeficientes de fricción cinética y estática son los mismos en cada caso.) ¿Cuál es la aceleración del bloque de mármol? Observe que en la figura se indica la dirección x positiva.

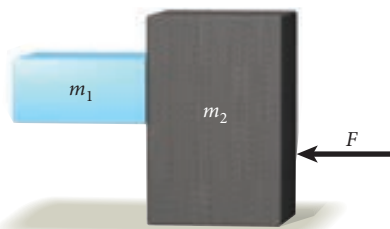
••4.87 Como se muestra en la figura, dos masas, $m_1 = 3.50$ kg y $m_2 = 5.00$ kg, están sobre una mesa sin fricción, y la masa $m_3 = 7.60$ kg cuelga de m_1 . Los coeficientes de fricción estática y cinética entre m_1 y m_2 son 0.60 y 0.50, respectivamente.

- ¿Cuáles son las aceleraciones de m_1 y m_2 ?
- ¿Cuál es la tensión en la cuerda entre m_1 y m_3 ?



••4.88 Un bloque de masa $m_1 = 2.30$ kg se coloca en el frente de un bloque de masa $m_2 = 5.20$ kg, como se muestra en la figura. El coeficiente de fricción estática entre m_1 y m_2 es de 0.65, y hay fricción despreciable entre el bloque mayor y la mesa.

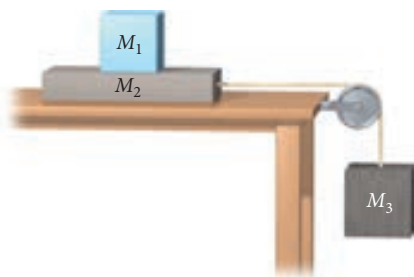
- ¿Qué fuerzas actúan sobre m_1 ?
- ¿Cuál es la fuerza externa mínima F que se debe aplicar a m_2 para que m_1 no caiga?
- ¿Cuál es la fuerza de contacto entre m_1 y m_2 ?
- ¿Cuál es la fuerza neta que actúa sobre m_2 cuando se aplica la fuerza que se determinó en el inciso b)?



••4.89 Se está tirando, mediante una pequeña correa, de una maleta de peso $Mg = 450$ N, sobre un piso horizontal. El coeficiente de fricción cinética entre la maleta y el piso es $\mu_k = 0.640$.

- Encuentre el ángulo óptimo de la correa sobre la horizontal. (El ángulo óptimo minimiza la fuerza necesaria para mover la maleta con rapidez constante.)
- Encuentre en la correa la tensión mínima necesaria para mover la maleta con rapidez constante.

••4.90 Como se muestra en la figura, un bloque de masa $M_1 = 0.450$ kg está inicialmente en reposo sobre una losa de masa $M_2 = 0.820$ kg, y la losa está inicialmente en reposo sobre una mesa horizontal. Una cuerda de masa despreciable conectada a la losa corre por una polea sin fricción colocada en el borde de la mesa y se conecta por el otro extremo a una masa colgante M_3 . El bloque descansa sobre la losa pero no está atado a la cuerda, de modo que la fricción constituye la única fuerza horizontal sobre el bloque. La losa tiene un coeficiente de fricción cinética $\mu_k = 0.340$ y un coeficiente de fricción estática



$\mu_s = 0.560$ tanto con la mesa como con el bloque. Cuando la masa M_3 es liberada tira de la cuerda y acelera la losa, la cual acelera a su vez al bloque. Encuentre la masa máxima de M_3 que permite que el bloque se acelere con la losa, sin deslizarse por encima de la losa.

••4.91 Como se muestra en la figura, un bloque de masa $M_1 = 0.250$ kg está inicialmente en reposo sobre una losa de masa $M_2 = 0.420$ kg, y la losa está inicialmente en reposo sobre una mesa horizontal. Una cuerda de masa despreciable se conecta a la losa, pasa por una polea sin fricción en el borde de la mesa y se fija a una masa colgante $M_3 = 1.80$ kg. El bloque descansa sobre la losa, pero no está atado a la cuerda, de modo que la fricción constituye la única fuerza horizontal sobre el bloque. La losa tiene un coeficiente de fricción cinética $\mu_k = 0.340$ tanto con la mesa como con el bloque. Cuando se libera la masa M_3 , ésta tira de la cuerda, la cual acelera a la losa de manera tan rápida que el bloque comienza a deslizarse sobre la losa. Antes de que el bloque se deslice fuera de la losa:

- Encuentre la magnitud de la aceleración del bloque.
- Encuentre la magnitud de la aceleración de la losa.

5

Energía cinética, trabajo y potencia

LO QUE APRENDEREMOS 141

5.1 La energía en nuestra vida diaria	141
5.2 Energía cinética	143
Ejemplo 5.1 Florero que cae	144
5.3 Trabajo	145
5.4 Trabajo realizado por una fuerza constante	145
Inserto matemático: producto escalar de vectores	146
Ejemplo 5.2 Ángulo entre dos vectores de posición	147
Producto escalar para vectores unitarios	147
Interpretación geométrica del producto escalar	148
Caso unidimensional	149
Teorema del trabajo y la energía cinética	149
Trabajo realizado por la fuerza gravitacional	149
Trabajo realizado al subir y bajar un objeto	150
Ejemplo 5.3 Levantamiento de pesas	150
Levantamiento con poleas	151
5.5 Trabajo realizado por una fuerza variable	152
5.6 Fuerza de resorte	153
Ejemplo 5.4 Constante del resorte	154
Trabajo realizado por la fuerza de resorte	155
Problema resuelto 5.1 Compresión de un resorte	155
5.7 Potencia	157
Potencia para una fuerza constante	158
Ejemplo 5.5 Aceleración de un automóvil	158

LO QUE HEMOS APRENDIDO/ GUÍA DE ESTUDIO PARA EXAMEN 159

Práctica para resolución de problemas	161
Problema resuelto 5.2 Levantamiento de ladrillos	161
Problema resuelto 5.3 Lanzamiento de bala	162
Preguntas de opción múltiple	164
Preguntas	165
Problemas	165



FIGURA 5.1 Imagen compuesta de fotografías de un satélite de la NASA, tomadas por la noche. Las fotos se tomaron de noviembre de 1994 a marzo de 1995.

LO QUE APRENDEREMOS

- La energía cinética es la energía asociada con el movimiento de un objeto.
- El trabajo es la energía transferida a un objeto o transferida desde un objeto debido a la acción de una fuerza externa. El trabajo positivo transfiere energía al objeto, y el trabajo negativo transfiere energía del objeto.
- El trabajo es el producto escalar entre el vector fuerza y el vector desplazamiento.
- El cambio en energía cinética debido a fuerzas aplicadas es igual al trabajo total realizado por las fuerzas.
- La potencia es la rapidez con la que se realiza el trabajo.
- La potencia que da una fuerza constante que actúa sobre un objeto es el producto escalar entre el vector velocidad del objeto y el vector fuerza.

La figura 5.1 es una imagen compuesta de fotografías de satélite tomadas por la noche, que muestran qué partes del mundo usan la mayor cantidad de energía para la iluminación nocturna. No es sorprendente que destaquen Estados Unidos, Europa occidental y Japón. La cantidad de luz que emite una región por la noche es una buena medida de la cantidad de energía que consume dicha región.

En física, la energía tiene una importancia fundamental. Prácticamente no hay una actividad física que tenga lugar sin el consumo o la transformación de la energía. Los cálculos relativos a la energía de un sistema son de importancia primordial en toda la ciencia y la ingeniería. Como veremos en este capítulo, los métodos de resolución de problemas relacionados con la energía ofrecen una alternativa para trabajar con las leyes de Newton y, con frecuencia, son más sencillos y fáciles de usar.

Este capítulo presenta los conceptos de energía cinética, trabajo y potencia, e introduce algunas técnicas que usan estos conceptos, tales como el teorema del trabajo y la energía cinética, para resolver diversos tipos de problemas. El capítulo 6 introducirá tipos adicionales de energía y ampliará el teorema del trabajo y la energía cinética para abarcar estos tipos de energía. También expondrá uno de los grandes conceptos de la física y, ciertamente, de toda la ciencia: la ley de conservación de la energía.

5.1 La energía en nuestra vida diaria

Ninguna cantidad física tiene mayor importancia en nuestra vida diaria que la energía. El consumo de energía, la eficiencia energética y la “producción” de energía son de suma importancia económica, y constituyen el foco de acaloradas discusiones sobre políticas nacionales y acuerdos internacionales. (La palabra “producción” aparece entre comillas porque la energía no se produce, sino más bien se convierte de una forma menos utilizable a otra más utilizable.) La energía también desempeña un importante papel en la rutina diaria de cada individuo: ingestión de energía en forma de calorías de alimentos y energía consumida en los procesos celulares, las actividades, el trabajo y el ejercicio. La pérdida o el aumento de peso, a final de cuentas, se debe a un desequilibrio entre la ingestión y el uso de energía.

La energía tiene muchas formas y se necesitan diferentes metodologías para estudiarla a fondo, de modo que la energía es un tema recurrente en este libro. Comenzamos, en este capítulo y el siguiente, investigando las formas de la energía mecánica: energía cinética y potencial. La energía térmica, otra forma de la energía, es uno de los pilares centrales de la termodinámica. La energía química está almacenada en los compuestos químicos, y las reacciones químicas pueden ya sea consumir energía del entorno (reacciones endotérmicas) o dar energía utilizable al entorno (reacciones exotérmicas). Nuestra economía basada en el petróleo utiliza la energía química y su conversión a energía mecánica y calor, que es otra forma de energía (o de transferencia de energía).

En el capítulo 31 veremos que la radiación electromagnética contiene energía. Esta energía es la base de una forma renovable de energía: la energía solar. Se puede afirmar que el origen de casi todas las demás fuentes de energía renovables en la Tierra es la energía solar. La energía solar es la causa del viento que hace mover las grandes turbinas de viento (figura 5.2). La radiación solar también evapora el agua de la superficie de la Tierra y la mueve en forma de nubes, de las cuales cae como lluvia y por último se une a los ríos que se pueden represar (figura 5.3) para extraer energía. La biomasa, otra forma de energía renovable, depende de la capacidad de las plantas y de los animales para almacenar energía solar durante sus procesos metabólicos y de crecimiento.



FIGURA 5.2 Las granjas de viento cosechan energía renovable.



FIGURA 5.3 Las presas dan energía eléctrica renovable. *a)* La presa Grand Coulee en el río Columbia, en Washington. *b)* La presa Itaipú en el río Paraná, en Brasil y Paraguay.



a)



b)

FIGURA 5.4 *a)* Granja solar con un grupo ajustable de espejos; *b)* panel solar.

De hecho, la energía que el Sol irradia a la superficie de la Tierra excede las necesidades de energía de toda la población humana por un factor de más de 10 000. Es posible convertir la energía solar directamente en energía eléctrica usando celdas fotovoltaicas [figura 5.4*b*)]. Son intensos los esfuerzos actuales de investigación para aumentar la eficiencia y la fiabilidad de estas fotoceldas, al mismo tiempo que se reduce su costo. Ya se usan versiones de celdas solares para algunos propósitos prácticos; por ejemplo, en la iluminación de patios y jardines. También están en operación granjas solares experimentales como la que se ve en la figura 5.4*a*). El capítulo sobre física cuántica (capítulo 36) explicará en detalle cómo funcionan las fotoceldas. Los problemas con la energía solar fotovoltaica son: que no está disponible por las noches, que tiene variaciones estacionales y que se reduce en gran medida en condiciones de cielo nublado o mal tiempo. Dependiendo de los métodos de instalación y conversión que se usen, los dispositivos solares fotovoltaicos actuales convierten sólo de 10 a 5% de la energía solar en energía eléctrica; aumentar esta fracción es un objetivo clave de la actual actividad de investigación. En el laboratorio se han desarrollado materiales con rendimientos de 30% o superiores de energía eléctrica a partir de la energía solar; pero todavía no se han llevado a escala industrial. La biomasa, en cambio, captura energía solar, en un orden de 1% o menos.

En el capítulo 35, sobre relatividad, veremos que energía y masa no son conceptos por completo separados, sino relacionados entre sí por la famosa fórmula de Einstein: $E = mc^2$. Cuando estudiemos la física nuclear (capítulo 40), encontraremos que a partir de núcleos atómicos masivos (como los de uranio y plutonio) se libera energía. Las plantas convencionales de energía nuclear están basadas en este principio básico, que se llama *fisión nuclear*. También podemos obtener energía útil fusionando núcleos atómicos con masas muy pequeñas para formar núcleos más sólidos, proceso que se llama *fusión nuclear*. El Sol y otras estrellas en el universo usan la fusión nuclear para generar energía.

Muchos piensan que la energía de la fusión nuclear es el medio que parece más idóneo para satisfacer las necesidades de energía, a largo plazo, de la moderna sociedad industrializada. Quizás el enfoque con más probabilidades de éxito para lograr el progreso hacia reacciones controladas de fusión es la propuesta planta internacional con reactor de fusión nuclear ITER (“el camino”, en latín), que se construirá en Francia. Pero hay otros enfoques prometedores para resolver el problema de cómo utilizar la fusión nuclear; por ejemplo, la National Ignition Facility (NIF), que inició operaciones en mayo de 2009 en el Lawrence Livermore National Laboratory, en California. Presentaremos estas tecnologías con más detalle en el capítulo 40.

Relacionados con la energía están el trabajo y la potencia. Usaremos estos términos de manera informal, pero este capítulo explicará cómo se relacionan estas cantidades con la energía en términos físicos y matemáticos precisos.

Usted puede ver que la energía ocupa un sitio especial en nuestras vidas. Una de las metas de este libro es darle un cimiento sólido en los fundamentos de la ciencia de la energía, para que pueda participar de manera informada en algunos de los más importantes debates de nuestro tiempo sobre este tipo de políticas.

Queda por responder una pregunta final: ¿qué es la energía? En muchos libros de texto, la energía se define como la capacidad de realizar trabajo. Sin embargo, esta definición sólo cambia

de sitio el misterio, sin dar una explicación más profunda. Y la verdad es que no hay una explicación más profunda. En sus famosas *Feynman Lectures on Physics*, el laureado con el premio Nobel y héroe popular de la física, Richard Feynman, escribió en 1963: “Es importante darse cuenta de que en física, hoy en día, no tenemos ningún conocimiento de lo que es la energía. No tenemos una imagen de que la energía viene en pequeños glóbulos de una cantidad definida. No es de esa manera; sin embargo, hay fórmulas para calcular alguna cantidad numérica, y cuando sumamos todo da ‘28’: siempre el mismo número. Es algo abstracto, en cuanto a que no nos dice el mecanismo ni las razones de las distintas fórmulas.” Más de cuatro décadas después, esto no ha cambiado. El concepto de energía y, en particular, la ley de la conservación de la energía (vea el capítulo 6) son herramientas en extremo útiles para explicar el comportamiento de los sistemas. Pero nadie ha dado todavía una explicación sobre la verdadera naturaleza de la energía.

5.2 Energía cinética

La primera clase de energía que consideraremos es la energía asociada con el movimiento de un objeto móvil: la **energía cinética**. La energía cinética se define como la mitad del producto de la masa de un objeto en movimiento y el cuadrado de su velocidad:

$$K = \frac{1}{2}mv^2. \quad (5.1)$$

Observe que, por definición, la energía cinética es siempre positiva o igual a cero, y sólo es cero para un objeto en reposo. También observe que la energía cinética, como todas las formas de energía, es una cantidad escalar, no vectorial. Como es el producto de la masa (kg) y el cuadrado de la velocidad (m/s · m/s), las unidades de la energía cinética son $\text{kg m}^2/\text{s}^2$. Como la energía es una cantidad tan importante, tiene su propia unidad SI, el **joule (J)**. La unidad de fuerza SI, el newton, es $1 \text{ N} = 1 \text{ kg m/s}^2$, y podemos hacer una útil conversión:

$$\text{Unidad de energía: } 1 \text{ J} = 1 \text{ N m} = 1 \text{ kg m}^2/\text{s}^2. \quad (5.2)$$

Veamos unos pocos valores de muestra de energía para tener una percepción del tamaño del joule. Un auto de 1 310 kg de masa que se está conduciendo al límite de rapidez de 55 mph (24.6 m/s) tiene una energía cinética de

$$K_{\text{auto}} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(1310 \text{ kg})(24.6 \text{ m/s})^2 = 4.0 \cdot 10^5 \text{ J}.$$

La masa de la Tierra es de $6.0 \cdot 10^{24}$ kg, y orbita alrededor del Sol con una rapidez de $3.0 \cdot 10^4$ m/s. La energía cinética asociada con este movimiento es de $2.7 \cdot 10^{33}$ J. Una persona de 64.8 kg de masa trotando a 3.50 m/s tiene una energía cinética de 400 J, y una pelota de béisbol (masa de “5 onzas avoirdupois” = 0.142 kg) lanzada a 80 mph (35.8 m/s) tiene una energía cinética de 91 J. En la escala atómica, la energía cinética promedio de una molécula de aire es de $6.1 \cdot 10^{-21}$ J, como veremos en el capítulo 19. La figura 5.5 presenta las magnitudes típicas de energías cinéticas de algunos objetos en movimiento. Usted puede ver por estos ejemplos que el rango de las energías relacionadas con procesos físicos es muy amplio.

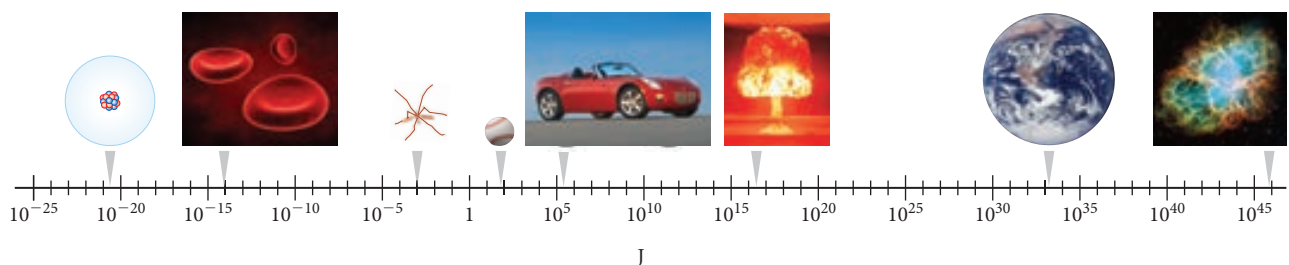


FIGURA 5.5 Rango de energías cinéticas mostradas en escala logarítmica. Las energías cinéticas (de derecha a izquierda) de una molécula de aire, un glóbulo rojo de la sangre viajando por la aorta, un mosquito en vuelo, una pelota de béisbol lanzada, un auto en movimiento y la Tierra orbitando alrededor del Sol se comparan con la energía liberada por una explosión nuclear de 15 Mt, y la de una supernova que emite partículas con una energía cinética total de aproximadamente 10^{46} J.

Algunas otras unidades de energía que se usan con frecuencia son el electrón-volt (eV), la caloría alimenticia (Cal) y el megatón de TNT (Mt):

$$1 \text{ eV} = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

$$1 \text{ Cal} = 4186 \text{ J}$$

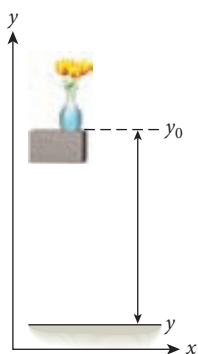
$$1 \text{ Mt} = 4.18 \cdot 10^{15} \text{ J.}$$

En la escala atómica, 1 electrón-volt (eV) es la energía cinética que gana un electrón cuando se acelera por un potencial eléctrico de 1 V. El contenido de energía de los alimentos que consumimos es, por lo general (y erróneamente), proporcionado en términos de calorías, pero debería darse en calorías alimenticias. Como veremos cuando estudiemos la termodinámica, 1 caloría alimenticia = 1 kilocaloría. En una escala mayor, 1 Mt es la energía liberada al estallar 1 millón de toneladas métricas del explosivo TNT, una liberación de energía lograda sólo por las armas nucleares o por eventos naturales catastróficos como el impacto de un gran asteroide. Como comparación, en 2007, el consumo anual de energía de todos los seres humanos de la Tierra alcanzó $5 \cdot 10^{20}$ J. (Todos estos conceptos se explicarán en detalle en los capítulos siguientes.)

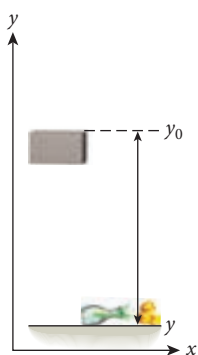
Para el movimiento en más de una dimensión, podemos escribir la energía cinética total como la suma de las energías cinéticas asociadas con las componentes de la velocidad en cada dirección espacial. Para mostrar esto, comenzamos con la definición de energía cinética (ecuación 5.1), y luego usamos $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}mv_y^2 + \frac{1}{2}mv_z^2. \quad (5.3)$$

(Nota: La energía cinética es una cantidad escalar, de modo que estas componentes no se suman como los vectores, sino simplemente tomando su suma algebraica.) Por lo tanto, podemos concebir la energía cinética como la suma de las energías cinéticas asociadas con el movimiento en las direcciones x , y y z . Este concepto es útil en especial para problemas de proyectil ideal, donde el movimiento consiste en caída libre en la dirección vertical (dirección y) y movimiento con velocidad constante en la dirección horizontal (dirección x).



a)



b)

FIGURA 5.6 a) Un florero se suelta desde el reposo a una altura de y_0 . b) El florero cae al suelo, que tiene una altura de y .

EJEMPLO 5.1 Florero que cae

PROBLEMA

Un florero de cristal (masa = 2.40 kg) se deja caer desde una altura de 1.30 m, y cae al piso, como se muestra en la figura 5.6. ¿Cuál es su energía cinética inmediatamente antes del impacto? (Desprecie la resistencia del aire, por ahora.)

SOLUCIÓN

Una vez que sepamos la velocidad del florero inmediatamente antes del impacto, podemos ponerla en la ecuación que define la energía cinética. Para obtener esta velocidad, recordamos la cinemática de objetos en caída libre. En este caso, lo más sencillo es usar la relación entre las velocidades inicial y final y las alturas inicial y final que dedujimos en el capítulo 2 para el movimiento en caída libre:

$$v_y^2 = v_{y0}^2 - 2g(y - y_0).$$

(Recuerde que el eje y debe estar señalando hacia arriba para usar esta ecuación.) Como el florero se suelta desde el reposo, las componentes de la velocidad inicial son $v_{x0} = v_{y0} = 0$. Como no hay aceleración en la dirección x , la componente x de la velocidad sigue siendo cero durante la caída del florero: $v_x = 0$. Por lo tanto, tenemos

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 = 0 + v_y^2 = v_y^2.$$

Entonces obtenemos

$$v^2 = v_y^2 = 2g(y_0 - y).$$

Usamos este resultado en la ecuación 5.1:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(2g(y_0 - y)) = mg(y_0 - y).$$

Si anotamos los números dados en el problema obtenemos la respuesta:

$$K = (2.40 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2)(1.30 \text{ m}) = 30.6 \text{ J}.$$

5.3 Trabajo

En el ejemplo 5.1, el florero comenzó con energía cinética cero, inmediatamente antes de dejarlo caer. Después de caer una distancia de 1.30 m, había adquirido una energía cinética de 30.6 J. Cuanto mayor sea la altura desde la cual se deja caer el florero, mayor será la rapidez que alcance (ignorando la resistencia del aire) y, por lo tanto, mayor su energía cinética. De hecho, como encontramos en el ejemplo 5.1, la energía cinética del florero depende de manera lineal de la altura desde la cual cae: $K = mg(y_0 - y)$.

La fuerza gravitacional, $\vec{F}_g = -mg\hat{y}$, acelera la caída del florero y, por lo tanto, le da energía cinética. Podemos ver por la ecuación anterior que la energía cinética también depende linealmente de la magnitud de la fuerza gravitacional. Duplicar la masa del florero duplicaría la fuerza gravitacional que actúa sobre él y, por ende, doblaría su energía cinética.

Como la rapidez de un objeto se puede aumentar o disminuir acelerándolo o desacelerándolo, respectivamente, su energía cinética también cambia en este proceso. Para el florero acabamos de ver que la fuerza de gravedad es la causa de este cambio. Explicamos el cambio en la energía cinética de un objeto causada por una fuerza mediante el concepto de trabajo, W .

Definición

Trabajo es la energía transferida a o desde un objeto, debido a la acción de una fuerza. El trabajo positivo es una transferencia de energía al objeto, y el trabajo negativo es la transferencia de energía desde el objeto.

El florero ganó energía cinética del trabajo positivo hecho por la fuerza gravitacional, y, así, $W_g = mg(y_0 - y)$.

Observe que esta definición no se limita a la energía cinética. La relación entre trabajo y energía descrita en esta definición es válida, en general, para diferentes formas de energía además de la cinética. Esta definición de trabajo no es exactamente la misma que el significado asociado a la palabra **trabajo** en el lenguaje cotidiano. El trabajo que se considera en este capítulo es el trabajo mecánico en conexión con transferencia de energía; sin embargo, el trabajo, tanto físico como mental, del que de modo ordinario hablamos, no implica necesariamente la transferencia de energía.

5.4 Trabajo realizado por una fuerza constante

Suponga que dejamos que el florero del ejemplo 5.1 se deslice, desde el reposo, a lo largo de un plano inclinado con un ángulo θ con respecto a la horizontal (figura 5.7). Por ahora despreciamos la fuerza de fricción, pero regresaremos a esto más tarde. Como mostramos en el capítulo 4, en ausencia de fricción, la aceleración a lo largo del plano está dada por $a = g \sin \theta = g \cos \alpha$. (Aquí, el ángulo $\alpha = 90^\circ - \theta$ es el ángulo entre el vector de fuerza gravitacional y el vector de desplazamiento; vea la figura 5.7.)

Podemos determinar la energía cinética que tiene el florero en esta situación como función del desplazamiento, $\Delta\vec{r}$. Más convenientemente, podemos realizar este cálculo usando la relación entre los cuadrados de las velocidades inicial y final, el desplazamiento y la aceleración, que obtuvimos para movimiento unidimensional en el capítulo 2:

$$v^2 = v_0^2 + 2a\Delta r.$$

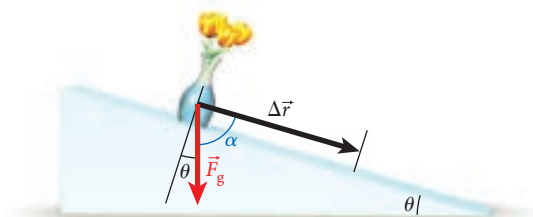


FIGURA 5.7 Florero deslizándose sin fricción sobre un plano inclinado.

5.1 Oportunidad de autoexamen

Dibuje el diagrama de cuerpo libre para el florero que se desliza por el plano inclinado.

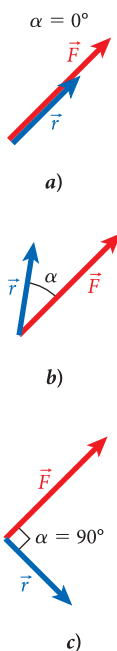


FIGURA 5.8 a) \vec{F} es paralela a \vec{r} y $W = |\vec{F}||\vec{r}|$. b) El ángulo entre \vec{F} y \vec{r} es α y $W = |\vec{F}||\vec{r}|\cos\alpha$. c) \vec{F} es perpendicular a \vec{r} y $W = 0$.

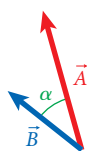


FIGURA 5.9 Dos vectores \vec{A} y \vec{B} y el ángulo α entre ellos.

Establecemos $v_0 = 0$ porque estamos de nuevo suponiendo que el florero se deja caer desde el reposo; es decir, con energía cinética cero. Entonces usamos la expresión para la aceleración, $a = g \cos \alpha$, que acabamos de obtener. Ahora tenemos

$$v^2 = 2g \cos \alpha \Delta r \Rightarrow K = \frac{1}{2}mv^2 = mg\Delta r \cos \alpha.$$

La energía cinética transferida al florero fue el resultado del trabajo positivo realizado por la fuerza de gravedad y, por lo tanto,

$$\Delta K = mg\Delta r \cos \alpha = W_g. \tag{5.4}$$

Veamos dos casos limitantes de la ecuación 5.4:

- Para $\alpha = 0$, tanto la fuerza gravitacional como el desplazamiento están en la dirección y negativa. Por lo tanto, estos vectores son paralelos y tenemos el resultado que ya dedujimos para el caso del florero que cae bajo la influencia de la gravedad, $W_g = mg\Delta r$.
- Para $\alpha = 90^\circ$, la fuerza gravitacional todavía está en la dirección y negativa, pero el florero no se puede mover en la dirección y negativa porque descansa sobre la superficie horizontal del plano. Por lo anterior, no hay cambio en la energía cinética del florero, y no hay trabajo realizado por la fuerza gravitacional sobre el florero; es decir, $W_g = 0$. El trabajo realizado sobre el florero por la fuerza gravitacional también es cero, si el florero se mueve a velocidad constante por la superficie del plano.

Como $mg = |\vec{F}_g|$ y $\Delta r = |\Delta\vec{r}|$, podemos escribir el trabajo realizado sobre el florero como $W = |\vec{F}||\Delta\vec{r}|\cos\alpha$. De los dos casos limitantes que acabamos de presentar, adquirimos confianza en que podemos usar la ecuación que acabamos de deducir para el movimiento en un plano inclinado como la definición del trabajo realizado por una fuerza constante:

$$W = |\vec{F}||\Delta\vec{r}|\cos\alpha, \text{ donde } \alpha \text{ es el ángulo entre } \vec{F} \text{ y } \Delta\vec{r}.$$

Esta ecuación para el trabajo realizado por una fuerza constante que actúa sobre un desplazamiento espacial es válida para todos los vectores de fuerzas constantes, vectores de desplazamientos arbitrarios y los ángulos entre los dos. La figura 5.8 muestra tres casos para el trabajo realizado por una fuerza \vec{F} que actúa sobre un desplazamiento \vec{r} . En la figura 5.8a) se realiza el trabajo máximo porque $\alpha = 0$ y \vec{F} y \vec{r} están en la misma dirección. En la figura 5.8b), \vec{F} está a un ángulo arbitrario α con respecto a \vec{r} . En la figura 5.8c) no se realiza ningún trabajo porque \vec{F} es perpendicular a \vec{r} .

Inserto matemático: producto escalar de vectores

En la sección 1.6 vimos cómo multiplicar un vector por un escalar. Ahora definiremos una manera de multiplicar un vector por un vector y obtener el **producto escalar**. El producto escalar de dos vectores \vec{A} y \vec{B} se define como

$$\vec{A} \bullet \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\cos\alpha, \tag{5.5}$$

donde α es el ángulo entre los vectores \vec{A} y \vec{B} , como se muestra en la figura 5.9. Observe el uso del punto grande (\bullet) como signo de multiplicación para el producto escalar entre los vectores, en contraste con el punto más pequeño (\cdot) que se usa para la multiplicación de escalares. Debido al punto, el producto escalar se llama a veces el *producto punto*.

Si dos vectores forman un ángulo de 90° , entonces el producto escalar tiene el valor cero. En este caso, los dos vectores son ortogonales entre sí. El producto escalar de un par de vectores ortogonales es cero.

Si \vec{A} y \vec{B} se dan en coordenadas cartesianas como $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$ y $\vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$, entonces su producto escalar se puede demostrar que es igual a:

$$\vec{A} \bullet \vec{B} = (A_x, A_y, A_z) \bullet (B_x, B_y, B_z) = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z. \tag{5.6}$$

Por la ecuación 5.6 podemos ver que el producto escalar tiene la propiedad conmutativa:

$$\vec{A} \bullet \vec{B} = \vec{B} \bullet \vec{A}. \tag{5.7}$$

El resultado no sorprende, ya que la propiedad conmutativa también es cierta para la multiplicación de dos escalares.

Para el producto escalar de cualquier vector por sí mismo, en notación de componente, tenemos $\vec{A} \cdot \vec{A} = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2$. Entonces, por la ecuación 5.5, encontramos $\vec{A} \cdot \vec{A} = |\vec{A}| |\vec{A}| \cos \alpha = |\vec{A}|^2$ (porque el ángulo entre el vector \vec{A} y este mismo es cero, y el coseno de ese ángulo tiene el valor 1). Combinando estas dos ecuaciones obtenemos la expresión para la longitud de un vector que se introdujo en el capítulo 1:

$$|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}. \quad (5.8)$$

También podemos usar la definición del producto escalar para calcular el ángulo entre dos vectores arbitrarios en espacio tridimensional:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}| |\vec{B}|} \Rightarrow \alpha = \cos^{-1} \left(\frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}| |\vec{B}|} \right). \quad (5.9)$$

Para el producto escalar es válida la misma propiedad distributiva que es válida para la multiplicación convencional:

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}. \quad (5.10)$$

El siguiente ejemplo pone en uso el producto escalar.

EJEMPLO 5.2 Ángulo entre dos vectores de posición

PROBLEMA

¿Cuál es el ángulo α entre los dos vectores de posición que se muestran en la figura 5.10 $\vec{A} = (4.00, 2.00, 5.00)$ cm y $\vec{B} = (4.50, 4.00, 3.00)$ cm?

SOLUCIÓN

Para resolver este problema tenemos que poner los números para las componentes de cada uno de los dos vectores en la ecuación 5.8 y la ecuación 5.6, y luego usar la ecuación 5.9:

$$|\vec{A}| = \sqrt{4.00^2 + 2.00^2 + 5.00^2} \text{ cm} = 6.71 \text{ cm}$$

$$|\vec{B}| = \sqrt{4.50^2 + 4.00^2 + 3.00^2} \text{ cm} = 6.73 \text{ cm}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = (4.00 \cdot 4.50 + 2.00 \cdot 4.00 + 5.00 \cdot 3.00) \text{ cm}^2 = 41.0 \text{ cm}^2$$

$$\Rightarrow \alpha = \cos^{-1} \left(\frac{41.0 \text{ cm}^2}{6.71 \text{ cm} \cdot 6.73 \text{ cm}} \right) = 24.7^\circ.$$

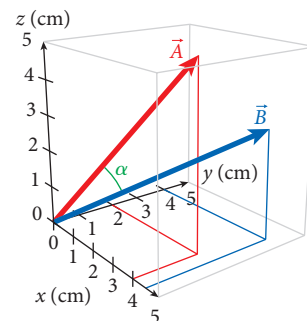


FIGURA 5.10 Cálculo del ángulo entre dos vectores de posición.

Producto escalar para vectores unitarios

La sección 1.6 introdujo los vectores unitarios en el sistema tridimensional de coordenadas cartesianas: $\hat{x} = (1, 0, 0)$, $\hat{y} = (0, 1, 0)$ y $\hat{z} = (0, 0, 1)$. Con nuestra definición (5.6) del producto escalar, encontramos

$$\hat{x} \cdot \hat{x} = \hat{y} \cdot \hat{y} = \hat{z} \cdot \hat{z} = 1 \quad (5.11)$$

y

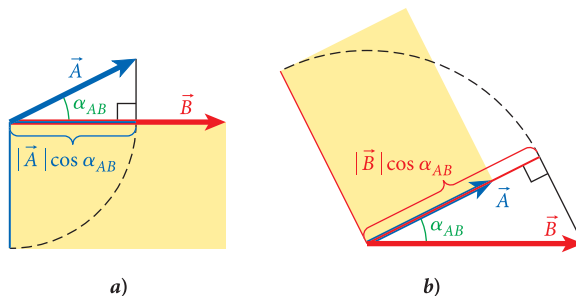
$$\begin{aligned} \hat{x} \cdot \hat{y} &= \hat{x} \cdot \hat{z} = \hat{y} \cdot \hat{z} = 0 \\ \hat{y} \cdot \hat{x} &= \hat{z} \cdot \hat{x} = \hat{z} \cdot \hat{y} = 0. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Ahora vemos por qué los vectores unitarios se llaman así: sus productos escalares al multiplicarse por ellos mismos tienen el valor 1. Así, los vectores unitarios tienen longitud 1, o longitud unidad, de acuerdo con la ecuación 5.8. Además, cualquier par de vectores unitarios diferentes tiene un producto escalar que es cero, lo cual significa que estos vectores son ortogonales entre sí. Así, las ecuaciones 5.11 y 5.12 expresan que los vectores unitarios \hat{x} , \hat{y} y \hat{z} forman un conjunto ortonormal de vectores, lo cual es en extremo útil para la descripción de sistemas físicos.

5.2 Oportunidad de autoexamen

Demuestre que las ecuaciones 5.11 y 5.12 son correctas, usando la ecuación 5.6 y la definición de los vectores unitarios.

FIGURA 5.11 Interpretación geométrica del producto escalar como área. a) La proyección de \vec{A} sobre \vec{B} . b) La proyección de \vec{B} sobre \vec{A} .



Interpretación geométrica del producto escalar

En la definición del producto escalar $\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos \alpha$ (ecuación 5.5), podemos interpretar $|\vec{A}| \cos \alpha$ como la proyección del vector \vec{A} sobre el vector \vec{B} [figura 5.11a)]. En este dibujo, la línea $|\vec{A}| \cos \alpha$ está girada 90° para mostrar la interpretación geométrica del producto escalar como el área de un paralelogramo con lados $|\vec{A}| \cos \alpha$ y $|\vec{B}|$. Del mismo modo, podemos interpretar $|\vec{B}| \cos \alpha$ como la proyección del vector \vec{B} sobre el vector \vec{A} y construir un paralelogramo con longitudes de lados $|\vec{B}| \cos \alpha$ y $|\vec{A}|$ [figura 5.11b)]. Las áreas de los dos paralelogramos amarillos en la figura 5.11 son idénticas e iguales al producto escalar de los dos vectores \vec{A} y \vec{B} .

Por último, si sustituimos en la ecuación 5.9 el coseno del ángulo entre los dos vectores, la proyección $|\vec{A}| \cos \alpha$ del vector \vec{A} al vector \vec{B} se puede escribir como

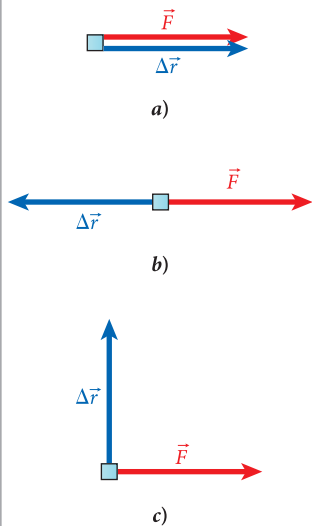
$$|\vec{A}| \cos \alpha = |\vec{A}| \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}| |\vec{B}|} = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{B}|},$$

y la proyección $|\vec{B}| \cos \alpha$ del vector \vec{B} sobre el vector \vec{A} se puede expresar como

$$|\vec{B}| \cos \alpha = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}|}.$$

5.1 Ejercicio en clase

Considere un objeto que sufre un desplazamiento $\Delta \vec{r}$ y una fuerza \vec{F} . ¿En cuál de los tres casos que se muestran en seguida es cero el trabajo realizado por la fuerza sobre el objeto?



Usando un producto escalar, podemos escribir el trabajo realizado por una fuerza constante como

$$W = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r}. \tag{5.13}$$

Esta ecuación es el principal resultado de esta sección. Dice que el trabajo realizado por una fuerza constante \vec{F} al desplazar un objeto en $\Delta \vec{r}$ es el producto escalar de los dos vectores. Especialmente, si el desplazamiento es perpendicular a la fuerza, el producto escalar es cero, y no se realiza ningún trabajo.

Observe que podemos usar cualquier vector de fuerza y cualquier vector de desplazamiento en la ecuación 5.13. Si hay más de una fuerza actuando sobre un objeto, la ecuación es válida para cualquiera de las fuerzas individuales, y se mantiene para la fuerza neta. La razón matemática para la generalización está en la propiedad distributiva del producto escalar, ecuación 5.10. Para verificar esta afirmación, podemos ver una fuerza neta constante que es la suma de fuerzas individuales constantes, $\vec{F}_{\text{neto}} = \sum_i \vec{F}_i$. De acuerdo con la ecuación 5.13, el trabajo realizado por esta fuerza neta es

$$W_{\text{neto}} = \vec{F}_{\text{neto}} \cdot \Delta \vec{r} = \left(\sum_i \vec{F}_i \right) \cdot \Delta \vec{r} = \sum_i (\vec{F}_i \cdot \Delta \vec{r}) = \sum_i W_i.$$

En otras palabras, el trabajo neto hecho por una fuerza neta es igual a la suma de los trabajos hechos por las fuerzas individuales. Hemos demostrado esta propiedad aditiva del trabajo sólo para fuerzas constantes, pero también es válida para fuerzas variables (o, hablando estrictamente, sólo para fuerzas conservativas, que veremos en el capítulo 6). Pero, para repetir el punto principal: la ecuación 5.13 es válida para cada fuerza individual así como para la fuerza neta. De manera típica, consideraremos la fuerza neta al calcular el trabajo realizado sobre un objeto, pero omitiremos el subíndice “neto” para simplificar la notación.

Caso unidimensional

En todos los casos de movimiento en una dimensión, el trabajo realizado para producir el movimiento está dado por

$$\begin{aligned} W &= \vec{F} \bullet \Delta\vec{r} \\ &= \pm F_x \cdot |\Delta\vec{r}| = F_x \Delta x \\ &= F_x (x - x_0). \end{aligned} \quad (5.14)$$

La fuerza \vec{F} y el desplazamiento $\Delta\vec{r}$ pueden señalar en el mismo sentido, $\alpha = 0 \Rightarrow \cos \alpha = 1$, dando como resultado trabajo positivo, o bien pueden señalar en sentidos opuestos, $\alpha = 180^\circ \Rightarrow \cos \alpha = -1$, dando como resultado trabajo negativo.

Teorema del trabajo y la energía cinética

La relación entre la energía cinética de un objeto y el trabajo realizado por las fuerzas que actúan sobre dicho objeto, que se llama **teorema del trabajo y la energía cinética**, se expresa formalmente como

$$\Delta K \equiv K - K_0 = W. \quad (5.15)$$

Aquí, K es la energía cinética que tiene un objeto después de haberse realizado sobre éste el trabajo W , y K_0 es la energía cinética antes de que el trabajo se realice. Las definiciones de W y K son tales que la ecuación 5.15 es equivalente a la segunda ley de Newton. Para ver esta equivalencia, considere una fuerza constante que actúa en una dimensión sobre un objeto de masa m . La segunda ley de Newton es entonces $F_x = ma_x$, y la aceleración (¡también constante!), a_x , del objeto se relaciona con la diferencia de los cuadrados de sus velocidades inicial y final mediante $v_x^2 - v_{x0}^2 = 2a_x(x - x_0)$, que es una de las cinco ecuaciones cinemáticas que dedujimos en el capítulo 2. La multiplicación de ambos lados de esta ecuación por $\frac{1}{2}m$ da

$$\frac{1}{2}mv_x^2 - \frac{1}{2}mv_{x0}^2 = ma_x(x - x_0) = F_x \Delta x = W. \quad (5.16)$$

Así vemos que, para este caso unidimensional, el teorema del trabajo y la energía cinética es equivalente a la segunda ley de Newton.

Debido a la equivalencia que acabamos de establecer, si sobre un objeto actúan más de una fuerza, podemos usar la fuerza neta para calcular el trabajo realizado. De manera alternativa, y más comúnmente en problemas de energía, si sobre un objeto actúan más de una fuerza, podemos calcular el trabajo hecho por cada fuerza, y entonces W en la ecuación 5.15 representa su suma.

El teorema del trabajo y la energía cinética especifica que el cambio en la energía cinética de un objeto es igual al trabajo realizado sobre el objeto por las fuerzas que actúan sobre éste. Podemos reescribir la ecuación 5.15 para despejar K o K_0 :

$$K = K_0 + W$$

o

$$K_0 = K - W.$$

Por definición, la energía cinética no puede ser menor que cero; de modo que, si un objeto tiene $K_0 = 0$, el teorema del trabajo y la energía cinética implica que $K = K_0 + W = W \geq 0$.

Mientras hemos verificado el teorema del trabajo y la energía cinética sólo para una fuerza constante, también es válido para fuerzas variables, como veremos en seguida. ¿Es válido para toda clase de fuerzas? ¡La respuesta breve es no! Las fuerzas de fricción son una clase de fuerzas que violan el teorema del trabajo y la energía cinética. Explicaremos más sobre este punto en el capítulo 6.

Trabajo realizado por la fuerza gravitacional

Con el teorema del trabajo y la energía cinética a nuestra disposición, podemos ahora dar otra mirada al problema de un objeto que cae bajo la influencia de la fuerza gravitacional, como en el ejemplo 5.1. En el descenso, el trabajo realizado por la fuerza gravitacional sobre el objeto es

$$W_g = +mgh, \quad (5.17)$$

donde $h = |y - y_0| = |\Delta\vec{r}| > 0$. El desplazamiento $\Delta\vec{r}$ y la fuerza de gravedad \vec{F}_g apuntan en el mismo sentido, dando por resultado un producto escalar positivo y, por lo tanto, trabajo positivo. Esta situa-

5.3 Oportunidad de autoexamen

Demuestre la equivalencia entre la segunda ley de Newton y el teorema del trabajo y la energía cinética para el caso de una fuerza constante que actúa en espacio tridimensional.

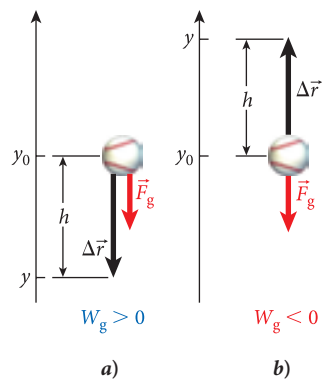


FIGURA 5.12 Trabajo realizado por la fuerza gravitacional.
 a) El objeto durante la caída libre.
 b) Lanzamiento de un objeto hacia arriba.

ción se ilustra en la figura 5.12a). Como el trabajo es positivo, la fuerza gravitacional aumenta la energía cinética del objeto.

Podemos invertir esta situación y arrojar el objeto de manera vertical hacia arriba, convirtiéndolo en un proyectil y dándole una energía cinética inicial. Esta energía cinética disminuirá hasta que el proyectil llegue al punto más alto de su trayectoria. Durante este tiempo, el vector de desplazamiento $\Delta\vec{r}$ señala hacia arriba, en el sentido opuesto de la fuerza de gravedad [figura 5.12b)]. Así, el trabajo hecho por la fuerza de gravedad durante el movimiento ascendente del objeto es

$$W_g = -mgh. \tag{5.18}$$

Por lo tanto, el trabajo realizado por la fuerza gravitacional reduce la energía cinética del objeto durante su movimiento ascendente. Esta conclusión es congruente con la fórmula general para el trabajo realizado por una fuerza constante, $W = \vec{F} \bullet \Delta\vec{r}$, porque el desplazamiento (que señala hacia arriba) del objeto y la fuerza gravitacional (que señala hacia abajo) están en sentidos opuestos.

Trabajo realizado al subir y bajar un objeto

Consideremos ahora la situación en la que se aplica una fuerza externa a un objeto: por ejemplo, atar al objeto una soga y subirlo o bajarlo. El teorema del trabajo y la energía cinética tiene ahora que incluir el trabajo realizado por la fuerza gravitacional, W_g , y el trabajo realizado por la fuerza externa, W_F :

$$K - K_0 = W_g + W_F.$$

Para el caso en el que el objeto está en reposo tanto inicial, $K_0 = 0$, como al final, $K = 0$, tenemos

$$W_F = -W_g.$$

El trabajo realizado por una fuerza al subir o bajar el objeto es entonces

$$W_F = -W_g = mgh \text{ (para subirlo) o } W_F = -W_g = -mgh \text{ (para bajarlo)}. \tag{5.19}$$

EJEMPLO 5.3 Levantamiento de pesas

En el deporte de levantamiento de pesas, la tarea consiste en tomar una masa muy grande, levantarla arriba de la cabeza y mantenerla ahí en reposo por un momento. Esta acción es un ejemplo de un trabajo realizado al levantar y bajar una masa.

PROBLEMA 1

El levantador alemán Ronny Weller ganó la medalla de plata en la Olimpiada de Sidney, Australia, en 2000. Levantó 257.5 kg en la competencia de “envión”. Suponiendo que levantó la masa a una altura de 1.83 m y la mantuvo ahí, ¿cuánto fue el trabajo que realizó en ese proceso?

SOLUCIÓN 1

El problema es una aplicación de la ecuación 5.19 para el trabajo realizado contra la fuerza gravitacional. El trabajo que hizo Weller fue

$$W = mgh = (257.5 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2)(1.83 \text{ m}) = 4.62 \text{ kJ}.$$

PROBLEMA 2

Una vez que Weller terminó de manera exitosa el levantamiento y sostenía la masa con los brazos extendidos arriba de su cabeza, ¿cuál fue el trabajo que realizó al bajar la barra de pesas con lentitud (con energía cinética despreciable) de regreso al piso?

SOLUCIÓN 2

El cálculo es el mismo que en la solución 1, salvo que el signo del desplazamiento cambia. Así, la respuesta es que el trabajo realizado al bajar la pesa de regreso es de -4.62 kJ ¡exactamente el opuesto de lo que obtuvimos para el problema 1!

Éste es un buen momento para recordar que estamos hablando de trabajo estrictamente mecánico. Todo levantador de pesas sabe que usted puede sentir cómo “arden” los músculos

igual cuando se sostiene la masa arriba de la cabeza o se baja (de manera controlada) que cuando se levanta. (En las competencias olímpicas, dicho sea de paso, los levantadores de pesas simplemente dejan caer la masa después del levantamiento exitoso.) Sin embargo, el efecto fisiológico no es sólo trabajo mecánico, que es lo que en la actualidad nos interesa, sino más bien la conversión de energía química, almacenada en diferentes moléculas como los azúcares, en la energía necesaria para contraer los músculos.

Usted puede pensar que el levantamiento de pesas olímpico no es el mejor ejemplo a considerar porque la fuerza que se usa para levantar la masa no es constante. Esto es cierto; pero, como antes explicamos, el teorema del trabajo y la energía cinética también se aplica a fuerzas no constantes. Además, aun cuando una grúa levante una masa con mucha lentitud y con rapidez constante, la fuerza de levantamiento no es exactamente constante, porque se necesita una ligera aceleración inicial para llevar a la masa de rapidez cero a un valor finito, y ocurre una desaceleración al final del proceso de levantamiento.

Levantamiento con poleas

Cuando estudiamos las poleas y las cuerdas en el capítulo 4, aprendimos que las poleas actúan como multiplicadores de fuerza. Por ejemplo, con el arreglo que se muestra en la figura 5.13, la fuerza necesaria para levantar una plataforma llena de ladrillos de masa m tirando de la cuerda es sólo la mitad de la fuerza gravitacional, $T = \frac{1}{2}mg$. ¿Cómo se compara el trabajo realizado al tirar de la plataforma de ladrillos con cuerdas y poleas con el trabajo de subirla sin esa ayuda mecánica?

La figura 5.13 muestra las posiciones inicial y final de la plataforma con ladrillos y las cuerdas y poleas que se usan para levantarla. A fin de levantarla sin dispositivos mecánicos necesitaría la fuerza \vec{T}_2 , como se indica, cuya magnitud está dada por $T_2 = mg$. El trabajo que hace la fuerza \vec{T}_2 en este caso es $W_2 = \vec{T}_2 \cdot \vec{r}_2 = T_2 r_2 = mgr_2$. Tirar de la cuerda con la fuerza \vec{T}_1 de magnitud $T_1 = \frac{1}{2}T_2 = \frac{1}{2}mg$ logra lo mismo. Sin embargo, ahora el desplazamiento tiene el doble de longitud, $r_1 = 2r_2$, como usted puede ver examinando la figura 5.13. Así, el trabajo hecho en este caso es $W_1 = \vec{T}_1 \cdot \vec{r}_1 = (\frac{1}{2}T_2)(2r_2) = mgr_2 = W_2$.

En ambos casos se hace la misma cantidad de trabajo. Es necesario compensar por la fuerza reducida tirando de la cuerda por una distancia más larga. Este resultado es general para el uso de poleas, brazos de palanca o cualquier otro multiplicador mecánico de fuerzas: el trabajo total realizado es el mismo que sería si no se usara la ayuda mecánica. Cualquier reducción en la fuerza está siempre sujeta a compensarse por un alargamiento proporcional del desplazamiento.

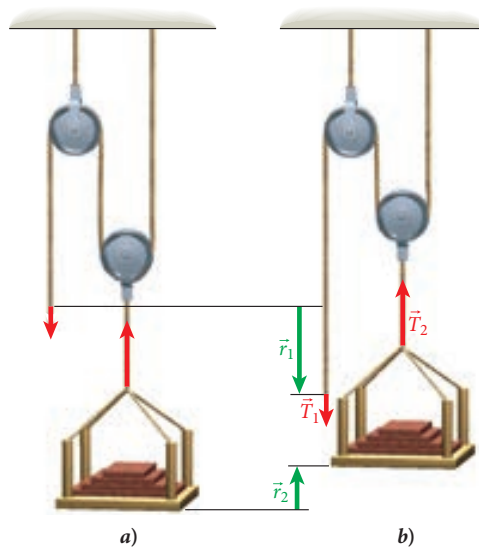


FIGURA 5.13 Fuerzas y desplazamientos para el proceso de levantar una plataforma con ladrillos en un sitio de trabajo con la ayuda de un mecanismo de cuerda y poleas. a) Plataforma en la posición inicial. b) Plataforma en la posición final.

5.5 Trabajo realizado por una fuerza variable

Suponga que la fuerza que actúa sobre un objeto no es constante. ¿Cuál es el trabajo realizado por una fuerza así? En caso de movimiento en una dimensión con una componente x variable de la fuerza, $F_x(x)$, el trabajo es

$$W = \int_{x_0}^x F_x(x') dx'. \quad (5.20)$$

(El integrando tiene x' como una variable muda para distinguirlo de los límites de la integral.) La ecuación 5.20 muestra que el trabajo W es el área bajo la curva de $F_x(x)$ (vea la figura 5.14 en la siguiente derivación).

DEDUCCIÓN 5.1

Si usted ya ha tomado cálculo integral, puede saltarse esta sección. Si la ecuación 5.20 es su primera exposición a las integrales, la siguiente derivación es una útil introducción. Derivaremos el caso unidimensional y usaremos nuestro resultado para la fuerza constante como punto inicial.

En el caso de una fuerza constante, podemos visualizar el trabajo como el área bajo la línea horizontal que grafica el valor de la fuerza constante en el intervalo entre x_0 y x . Para una fuerza variable, el trabajo es el área bajo la curva $F_x(x)$, pero esa área ya no es un simple rectángulo. En el caso de una fuerza variable, necesitamos dividir el intervalo de x_0 a x en muchos pequeños intervalos iguales. Luego aproximamos el área bajo la curva $F_x(x)$ por una serie de rectángulos y sumamos sus áreas para aproximarnos al trabajo. Como usted puede ver por la figura 5.14a), el área del rectángulo entre x_i y x_{i+1} está dada por $F_x(x_i) \cdot (x_{i+1} - x_i) = F_x(x_i) \cdot \Delta x$. Obtenemos una aproximación para el trabajo sumando todos los rectángulos:

$$W \approx \sum_i W_i = \sum_i F_x(x_i) \cdot \Delta x.$$

Ahora espaciamos menos y menos los puntos x_i usando más de ellos. Este método hace más pequeño Δx y hace que el área total de la serie de rectángulos sea una mejor aproximación del área bajo la curva $F_x(x)$ como en la figura 5.14b). En el límite, cuando $\Delta x \rightarrow 0$, la suma se acerca a la expresión exacta para el trabajo:

$$W = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\sum_i F_x(x_i) \cdot \Delta x \right).$$

El límite de la suma de las áreas es exactamente como se define la integral:

$$W = \int_{x_0}^x F_x(x') dx'.$$

Hemos obtenido este resultado para el caso de movimiento unidimensional. La deducción del caso tridimensional sigue líneas similares, pero es más elaborado en términos de álgebra.

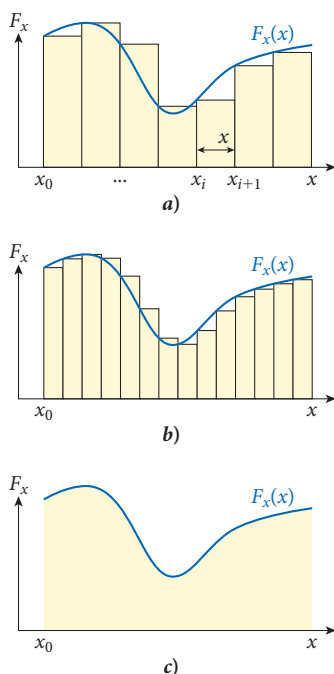


FIGURA 5.14 a) Una serie de rectángulos se aproxima al área bajo la curva obtenida graficando la fuerza como función del desplazamiento; b) una mejor aproximación usando rectángulos de menor anchura; c) el área exacta bajo la curva.

Como lo prometimos antes, podemos verificar que el teorema del trabajo y la energía cinética (ecuación 5.15) es válido cuando la fuerza es variable. Mostramos este resultado para movimiento unidimensional por simplicidad, pero el teorema del trabajo y la energía cinética también es válido para fuerzas variables y desplazamientos en más de una dimensión. Suponemos una fuerza variable en la dirección x , $F_x(x)$ como en la ecuación 5.20, que podemos expresar como

$$F_x(x) = ma,$$

usando la segunda ley de Newton. Usamos la regla de la cadena del cálculo diferencial e integral para obtener

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt}$$

Entonces podemos usar la ecuación 5.20 e integrar a lo largo del desplazamiento para obtener el trabajo realizado:

$$W = \int_{x_0}^x F_x(x') dx' = \int_{x_0}^x ma dx' = \int_{x_0}^x m \frac{dv}{dx'} \frac{dx'}{dt} dx'$$

Ahora cambiamos la variable de integración de desplazamiento (x) a velocidad (v):

$$W = \int_{x_0}^x m \frac{dx'}{dt} \frac{dv}{dx'} dx' = \int_{v_0}^v mv' dv' = m \int_{v_0}^v v' dv',$$

donde v' es una variable muda de integración. Realizamos la integración y obtenemos el resultado prometido:

$$W = m \int_{v_0}^v v' dv' = m \left[\frac{v'^2}{2} \right]_{v_0}^v = \frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} mv_0^2 = K - K_0 = \Delta K.$$

5.2 Ejercicio en clase

Una componente x de una fuerza tiene la dependencia $F_x(x) = -c \cdot x^3$ con respecto al desplazamiento x , donde la constante $c = 19.1 \text{ N/m}^3$. ¿Cuánto trabajo se necesita para cambiar el desplazamiento de 0.810 m a 1.39 m?

- a) 12.3 J d) -3.76 J
 b) 0.452 J e) 0.00 J
 c) -15.8 J

5.6 Fuerza de resorte

Examinemos la fuerza que se necesita para estirar o comprimir un resorte. Comenzamos con un resorte que no está ni estirado ni comprimido desde su longitud normal, y suponemos que el extremo del resorte en esta condición está ubicado en la posición de equilibrio, x_0 , como se muestra en la figura 5.15a). Si tiramos del extremo de este resorte un poco hacia la derecha usando una fuerza externa, \vec{F}_{ext} , el resorte se alarga. En el proceso de estiramiento, el resorte genera una fuerza dirigida a la izquierda; es decir, señalando hacia la posición de equilibrio, que aumenta en magnitud al incrementar la longitud del resorte. Esta fuerza se llama de manera convencional **fuerza de resorte**, \vec{F}_s .

Tirar con una fuerza externa de una magnitud dada estira el resorte hasta un cierto desplazamiento desde el equilibrio, en cuyo punto la fuerza del resorte es igual en magnitud a la fuerza externa [figura 5.15b)]. Duplicando esta fuerza externa se duplica el desplazamiento desde el equilibrio [figura 5.15c)]. A la inversa, empujando con una fuerza externa hacia la izquierda, se comprime el resorte desde su longitud de equilibrio, y la fuerza de resorte resultante apunta a la derecha, de nuevo hacia la posición de equilibrio [figura 5.15d)]. Duplicando la cantidad de compresión [figura 5.15e)] también se duplica la fuerza de resorte, igual que en el estiramiento.

Podemos resumir estas observaciones al apuntar que la magnitud de la fuerza de resorte es proporcional a la magnitud del desplazamiento del extremo del resorte desde la posición de equilibrio, y que la fuerza de resorte siempre apunta hacia la posición de equilibrio y, por lo tanto, está en la dirección opuesta al vector de desplazamiento:

$$\vec{F}_s = -k(\vec{x} - \vec{x}_0). \quad (5.21)$$

Como es usual, la ecuación vectorial se puede escribir en términos de las componentes; en particular, para la componente x , podemos escribir

$$F_s = -k(x - x_0). \quad (5.22)$$

La constante k es, por definición, siempre positiva. El signo negativo frente a k indica que la fuerza de resorte siempre está dirigida en sentido opuesto al del desplazamiento desde la posición de equilibrio. Podemos elegir que la posición de equilibrio sea $x_0 = 0$, lo cual nos permite escribir

$$F_s = -kx. \quad (5.23)$$

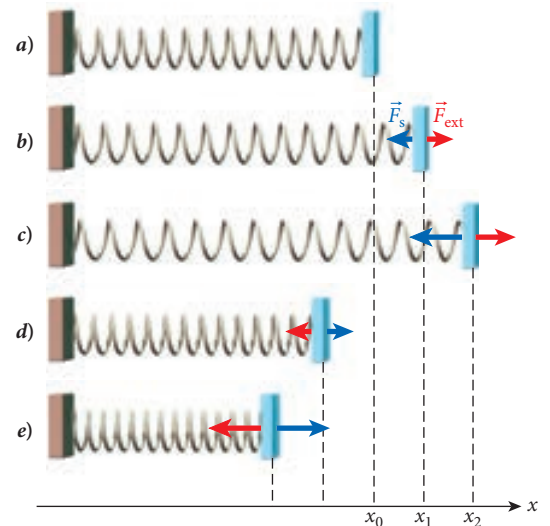


FIGURA 5.15 Fuerza de resorte. El resorte está en su posición de equilibrio en a), está estirado en b) y c), y está comprimido en d) y e). En cada caso de no equilibrio, la fuerza externa que actúa sobre el extremo del resorte se muestra como una flecha roja, y la fuerza de resorte como una flecha azul.

Esta sencilla ley de fuerzas se llama **ley de Hooke**, en honor del físico británico Robert Hooke (1635-1703), un contemporáneo de Newton y Curador de Experimentos de la Royal Society. Observe que, para un desplazamiento $x > 0$, la fuerza de resorte señala en la dirección negativa, y $F_s < 0$. Lo contrario también es cierto: si $x < 0$, entonces $F_s > 0$. Por lo tanto, en todos los casos, la fuerza de resorte apunta hacia la posición de equilibrio, $x = 0$. Exactamente en la posición de equilibrio, la fuerza de resorte es cero, $F_s(x = 0) = 0$. Como recordatorio del capítulo 4, la fuerza cero es una de las condiciones definitorias del equilibrio. La constante de proporcionalidad, k , que aparece en la ley de Hooke se llama **constante del resorte**, y tiene unidades de $\text{N/m} = \text{kg/s}^2$. La fuerza de resorte es un ejemplo importante de una **fuerza de reposición**: siempre actúa para reponer el extremo del resorte en su posición de equilibrio.

Se pueden encontrar fuerzas lineales de reposición que siguen la ley de Hooke en muchos sistemas en la naturaleza. Por ejemplo, las fuerzas en un átomo que se ha movido de manera ligera fuera del equilibrio en una red cristalina, las fuerzas debidas a las deformaciones de estado en los núcleos atómicos, y cualquier otra fuerza que lleva a oscilaciones en un sistema físico (se explican con más detalle en los capítulos 14 a 16). En el capítulo 6 veremos que generalmente podemos aproximarnos a la fuerza en muchas situaciones físicas por una fuerza que siga la ley de Hooke.

Por supuesto, la ley de Hooke no es válida para todos los desplazamientos de resorte. Todo el que ha jugado con un resorte sabe que, si se estira demasiado, se deformará y luego ya no regresará a su longitud de equilibrio cuando se suelte. Si se estira todavía más, al final se romperá en dos partes. Cada resorte tiene un límite de elasticidad —una deformación máxima— debajo del cual la ley de Hooke todavía es válida; sin embargo, donde está este límite exactamente depende de las características materiales del resorte en particular. Para nuestras consideraciones en este capítulo, suponemos que los resortes están siempre dentro del límite de elasticidad.

EJEMPLO 5.4 Constante del resorte

PROBLEMA 1

Un resorte tiene una longitud de 15.4 cm y cuelga de modo vertical de un punto de soporte arriba del resorte [figura 5.16a)]. Un peso con una masa de 0.200 kg se fija al resorte, haciendo que se extienda a una longitud de 28.6 cm [figura 5.16b)]. ¿Cuál es el valor de la constante del resorte?

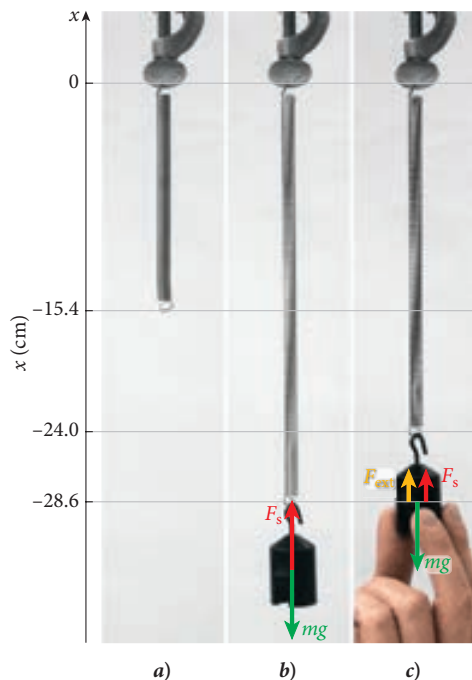


FIGURA 5.16 Masa en un resorte. a) El resorte sin ninguna masa fijada. b) El resorte con la masa colgando de manera libre. c) La masa empujada hacia arriba por una fuerza externa.

SOLUCIÓN 1

Colocamos el origen de nuestro sistema de coordenadas en la parte superior del resorte, con la dirección positiva hacia arriba, como se acostumbra. Entonces, $x_0 = -15.4 \text{ cm}$ y $x = -28.6 \text{ cm}$. De acuerdo con la ley de Hooke, la fuerza de resorte es

$$F_s = -k(x - x_0).$$

También sabemos que la fuerza que se ejerce sobre el resorte la da el peso de la masa de 0.200 kg: $F = -mg = -(0.200 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2) = -1.962 \text{ N}$. De nuevo, el signo negativo indica la dirección. Ahora podemos despejar la constante del resorte de la ecuación de fuerza:

$$k = -\frac{F_s}{x - x_0} = -\frac{-1.962 \text{ N}}{(-0.286 \text{ m}) - (-0.154 \text{ m})} = 14.9 \text{ N/m}.$$

Observe que habríamos obtenido exactamente el mismo resultado si hubiéramos puesto el origen del sistema de coordenadas en otro punto o si hubiéramos elegido designar el sentido descendente como positivo.

PROBLEMA 2

¿Cuánta fuerza se necesita para mantener el peso en una posición 4.6 cm arriba de -28.6 cm [figura 5.16c)].

SOLUCIÓN 2

A primera vista, podría parecer que este problema necesita un cálculo complicado. Sin embargo, recuerde que la masa ha estirado el resorte hasta una nueva

posición de equilibrio. Para mover la masa de esa nueva posición se necesita una fuerza externa. Si la fuerza externa mueve la masa hacia arriba 4.6 cm, entonces tiene que ser exactamente igual en magnitud y opuesta en dirección a la fuerza de resorte que resulte de un desplazamiento de 4.6 cm. Por lo tanto, todo lo que tenemos que hacer para encontrar la fuerza externa es usar la ley de Hooke para la fuerza de resorte (eligiendo que la nueva posición de equilibrio esté en $x_0 = 0$):

$$F_{\text{ext}} + F_s = 0 \Rightarrow F_{\text{ext}} = -F_s = kx = (0.046 \text{ m})(14.9 \text{ N/m}) = 0.68 \text{ N}.$$

En este punto, vale la pena generalizar las observaciones hechas en el ejemplo 5.4: agregar una fuerza constante —por ejemplo, suspendiendo una masa del resorte— sólo mueve la posición de equilibrio. (Esta generalización es verdadera para todas las fuerzas que dependen de modo lineal del desplazamiento.) Mover la masa, hacia arriba o hacia abajo, de la nueva posición de equilibrio da entonces por resultado una fuerza que es linealmente proporcional al desplazamiento desde la nueva posición de equilibrio. Por supuesto, la adición de más masa no se puede continuar sin límite. En algún punto, la adición de más y más masa sobreestirará el resorte. Entonces, el resorte no regresará a su longitud original una vez que se quite la masa, y la ley de Hooke ya no será válida.

Trabajo realizado por la fuerza de resorte

El desplazamiento de un resorte es un caso de movimiento en una dimensión espacial. Por lo tanto, podemos aplicar la integral unidimensional de la ecuación 5.20 para determinar el trabajo realizado por la fuerza del resorte al moverse éste de x_0 a x . El resultado es

$$W_s = \int_{x_0}^x F_s(x') dx' = \int_{x_0}^x (-kx') dx' = -k \int_{x_0}^x x' dx'.$$

El trabajo realizado por la fuerza de resorte es entonces

$$W_s = -k \int_{x_0}^x x' dx' = -\frac{1}{2} kx^2 + \frac{1}{2} kx_0^2. \quad (5.24)$$

Si hacemos $x_0 = 0$ y comenzamos en la posición de equilibrio, como lo hicimos al llegar a la ley de Hooke (ecuación 5.23), el segundo término del lado derecho de la ecuación 5.24 se vuelve cero y obtenemos

$$W_s = -\frac{1}{2} kx^2. \quad (5.25)$$

Observe que, como la constante del resorte es siempre positiva, el trabajo realizado por la fuerza de resorte siempre es negativo para desplazamientos desde el equilibrio. La ecuación 5.24 muestra que el trabajo realizado por la fuerza de resorte es positivo si el desplazamiento inicial del resorte es más lejano del equilibrio que el desplazamiento final. Un trabajo externo de magnitud $\frac{1}{2} kx^2$ estirará o comprimirá el resorte fuera de su posición de equilibrio.

PROBLEMA RESUELTO 5.1 Compresión de un resorte

Un resorte sin masa ubicado sobre una superficie horizontal lisa se comprime por una fuerza de 63.5 N que produce un desplazamiento de 4.35 cm desde la posición inicial de equilibrio. Como se muestra en la figura 5.17, una bola de acero con masa de 0.075 kg se coloca entonces enfrente del resorte, y se libera el resorte.

PROBLEMA

¿Cuál es la rapidez de la bola de acero cuando la dispara el resorte; es decir, inmediatamente después de que pierde contacto con el resorte? (Suponga que no hay fricción entre la superficie y la bola de acero; la bola de acero simplemente se deslizará por la superficie, sin rodar.)

(continúa)

5.4 Oportunidad de autoexamen

Un bloque cuelga de manera vertical de un resorte en la posición de equilibrio. Luego se tira del bloque hacia abajo y se suelta del reposo. Trace el diagrama de cuerpo libre para el bloque en cada uno de los siguientes casos:

- El bloque está en la posición de equilibrio.
- El bloque está en su punto vertical más alto.
- El bloque está en su punto vertical más bajo.

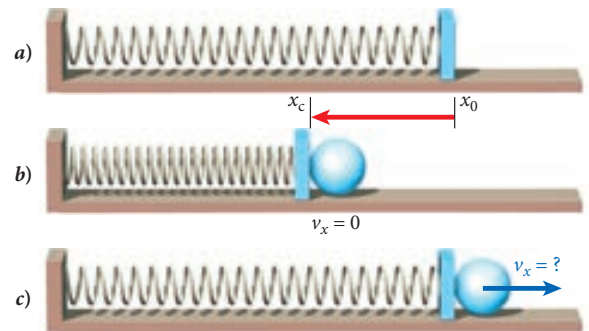


FIGURA 5.17 a) Resorte en su posición de equilibrio; b) se comprime el resorte; c) se relaja la compresión y se acelera la bola de acero.

(continuación)

SOLUCIÓN**PIENSE**

Si comprimimos un resorte con una fuerza externa realizamos trabajo contra la fuerza de resorte. La liberación del resorte al retirar la fuerza externa permite al resorte realizar trabajo sobre la bola de acero, que adquiere energía cinética en este proceso. El cálculo del trabajo inicial realizado contra la fuerza de trabajo nos permite calcular la energía cinética que tendrá la bola de acero, para calcular la rapidez de la bola.

ESBOCE

Trazamos un diagrama de cuerpo libre en el instante anterior al retiro de la fuerza externa (vea la figura 5.18). En este instante, la bola de acero está en reposo, porque la fuerza externa y la fuerza de resorte se equilibran exactamente. Observe que el diagrama también incluye la superficie de apoyo y muestra dos fuerzas más que actúan sobre la bola: la fuerza de gravedad, \vec{F}_g , y la fuerza normal de la superficie de apoyo, \vec{N} . Estas dos fuerzas se cancelan de manera mutua y por lo tanto no entran en nuestros cálculos, pero vale la pena observar el conjunto completo de fuerzas que actúan sobre la bola.

Colocamos la coordenada x de la bola en su orilla izquierda, que es donde la bola toca el resorte. Ésta es la ubicación físicamente importante, porque mide la elongación del resorte desde su posición de equilibrio.

INVESTIGUE

El movimiento de la bola de acero comienza una vez que se retira la fuerza externa. Sin la flecha azul de la figura 5.18, la fuerza de resorte es la única fuerza no equilibrada en la situación, y acelera la bola. (Esta aceleración no es constante en el tiempo, como es el caso del movimiento en caída libre, por ejemplo, sino que cambia con el tiempo.) Sin embargo, la belleza de aplicar consideraciones de energía está en que no necesitamos conocer la aceleración para calcular la rapidez final.

Como es usual, somos libres de elegir el origen del sistema de coordenadas, y lo ponemos en x_0 , la posición de equilibrio del resorte. Esto implica que hacemos $x_0 = 0$. La relación entre la componente x de la fuerza de resorte en el momento de la liberación y la compresión inicial del resorte x_c es

$$F_s(x_c) = -kx_c.$$

Como $F_s(x_c) = -F_{\text{ext}}$, encontramos

$$kx_c = F_{\text{ext}}.$$

La magnitud de esta fuerza externa, así como el valor del desplazamiento, se nos dieron y, por lo tanto, podemos calcular el valor de la constante del resorte por esta ecuación. Observe que con nuestra selección del sistema de coordenadas, $F_{\text{ext}} < 0$, porque su flecha vectorial apunta en la dirección x negativa. Además, $x_c < 0$, porque el desplazamiento desde el equilibrio es en la dirección negativa.

Ahora podemos calcular el trabajo W que se necesita para comprimir este resorte. Como la fuerza que ejerce la bola sobre el resorte es siempre igual y opuesta a la fuerza que el resorte ejerce sobre la bola, la definición de trabajo nos permite establecer

$$W = -W_s = \frac{1}{2}kx_c^2.$$

De acuerdo con el teorema del trabajo y la energía cinética, este trabajo se relaciona con el cambio en la energía cinética de la bola de acero mediante

$$K = K_0 + W = 0 + W = \frac{1}{2}kx_c^2.$$

Por último, la energía cinética de la bola es, por definición

$$K = \frac{1}{2}mv_x^2,$$

lo cual nos permite determinar la rapidez de la bola.

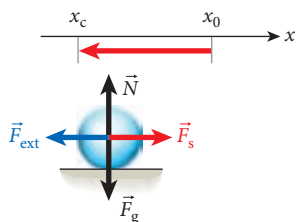


FIGURA 5.18 Diagrama de cuerpo libre de la bola de acero antes de quitar la fuerza externa.

SIMPLIFIQUE

Despejamos la rapidez, v_x , de la ecuación para la energía cinética, y luego usamos la $K = \frac{1}{2}kx_c^2$ para obtener

$$v_x = \sqrt{\frac{2K}{m}} = \sqrt{\frac{2(\frac{1}{2}kx_c^2)}{m}} = \sqrt{\frac{kx_c^2}{m}} = \sqrt{\frac{F_{\text{ext}}x_c}{m}}.$$

(en el tercer paso, cancelamos los factores 2 y $\frac{1}{2}$, y en el cuarto paso usamos $kx_c = F_{\text{ext}}$.)

CALCULE

Ahora estamos listos para insertar los números, $x_c = -0.0435$ m, $m = 0.075$ kg y $F_{\text{ext}} = -63.5$ N. Nuestro resultado es

$$v_x = \sqrt{\frac{(-63.5 \text{ N})(-0.0435 \text{ m})}{0.075 \text{ kg}}} = 6.06877 \text{ m/s}.$$

Observe que elegimos la ruta positiva para la componente x de la velocidad de la bola. Examinando la figura 5.17, usted puede ver que ésta es la elección correcta, porque la bola se moverá en la dirección x positiva después de la liberación del resorte.

REDONDEE

Redondeando a una exactitud de dos dígitos con la que se especificó la masa, presentamos nuestro resultado como

$$v_x = 6.1 \text{ m/s}.$$

VUELVA A REVISAR

Estamos limitados en la verificación que podemos realizar para determinar que nuestra respuesta tenga sentido, hasta que estudiemos el movimiento bajo la influencia de la fuerza de resorte con más detalle en el capítulo 14. Sin embargo, nuestra respuesta cumple los requisitos mínimos en cuanto a que tiene las unidades correctas y el orden de magnitud parece estar en línea con las velocidades típicas para bolas propulsadas por pistolas de juguete de resorte.

5.3 Ejercicio en clase

¿Cuánto trabajo se necesitaría para estirar el resorte del problema resuelto 5.1 de 4.35 cm a 8.15 cm?

- a) 4.85 J d) -1.38 J
 b) 1.38 J e) 3.47 J
 c) -3.47 J

5.7 Potencia

Podemos ahora calcular con facilidad la cantidad de trabajo que se necesita para acelerar un automóvil de 1 550 kg (3 410 lb) desde el reposo hasta una rapidez de 26.8 m/s (60.0 mph). El trabajo realizado es simplemente la diferencia entre las energías cinéticas final e inicial. La energía cinética inicial es cero, y la energía cinética final es

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(1550 \text{ kg})(26.8 \text{ m/s})^2 = 557 \text{ kJ},$$

que es también la cantidad de trabajo que se necesita. Sin embargo, la necesidad de trabajo no es tan interesante para la mayoría de nosotros. Nos interesaría más saber qué tan rápido puede el auto alcanzar 60 mph. Es decir, nos gustaría saber la tasa con la que el auto puede hacer este trabajo.

La **potencia** es la tasa con la que se realiza el trabajo. Matemáticamente, esto significa que la potencia, P , es la derivada del trabajo, W , con respecto al tiempo:

$$P = \frac{dW}{dt}. \quad (5.26)$$

También es útil definir la potencia media, \bar{P} como

$$\bar{P} = \frac{W}{\Delta t}. \quad (5.27)$$

5.4 Ejercicio en clase

Cada una de las siguientes aseveraciones, ¿es verdadera o falsa?

- No se puede realizar trabajo en ausencia de movimiento.
- Se necesita más potencia para levantar con lentitud una caja que para levantarla rápidamente.
- Se necesita una fuerza para realizar trabajo.

La unidad SI de potencia es el **watt** (W). [Cuidese de no confundir el símbolo de trabajo, W (itálica), y la abreviación para la unidad de potencia, W (no itálica).]

$$1 \text{ W} = 1 \text{ J/s} = 1 \text{ kg m}^2/\text{s}^3. \quad (5.28)$$

A la inversa, un joule también es un watt por un segundo. Esta relación se refleja en una unidad muy común de energía (no potencia), el **kilowatt-hora** (kWh):

$$1 \text{ kWh} = (1000 \text{ W})(3600 \text{ s}) = 3.6 \cdot 10^6 \text{ J} = 3.6 \text{ MJ}.$$

La unidad kWh aparece en las facturas de la empresa de suministro eléctrico y cuantifica la cantidad de energía eléctrica que se ha consumido. Se pueden usar los kilowatt-horas para medir cualquier clase de energía. Así, la energía cinética del auto de 1550 kg que se mueve con una rapidez de 26.8 m/s, que calculamos como 557 kJ, se puede expresar con igual validez como

$$(557000 \text{ J})(1 \text{ kWh}/3.6 \cdot 10^6 \text{ J}) = 0.155 \text{ kWh}.$$

Las dos unidades de potencia más comunes que no son SI son el caballo de potencia (hp) y el pie-libra por segundo (ft lb/s): $1 \text{ hp} = 550 \text{ ft lb/s} = 746 \text{ W}$.

Potencia para una fuerza constante

Para una fuerza constante, encontramos que el trabajo está dado por $W = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r}$ y el trabajo diferencial como $dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$. En este caso, la derivada con respecto al tiempo es

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} = Fv \cos \alpha, \quad (5.29)$$

donde α es el ángulo entre el vector fuerza y el vector velocidad. Por lo tanto, para una fuerza constante, la potencia es el producto escalar del vector fuerza y el vector velocidad.

EJEMPLO 5.5 Aceleración de un automóvil

PROBLEMA

Regresando al ejemplo de un auto que acelera, supongamos que el auto, de 1550 kg de masa, puede alcanzar una rapidez de 60 mph (26.8 m/s) en 7.1 s. ¿Cuál es la potencia media necesaria para lograr esto?

SOLUCIÓN

Ya encontramos que la energía cinética del auto a 60 mph es

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(1550 \text{ kg})(26.8 \text{ m/s})^2 = 557 \text{ kJ}.$$

El trabajo para llevar al auto a la rapidez de 60 mph es entonces

$$W = \Delta K = K - K_0 = 557 \text{ kJ}.$$

La potencia media necesaria para llegar a 60 mph en 7.1 s es, por lo tanto,

$$\bar{P} = \frac{W}{\Delta t} = \frac{5.57 \cdot 10^5 \text{ J}}{7.1 \text{ s}} = 78.4 \text{ kW} = 105 \text{ hp}.$$

Si usted tiene un automóvil con una masa por lo menos de 1550 kg que tiene un motor de 105 hp, sabe que no es posible llegar a 60 mph en 7.1 s. Se necesita un motor de por lo menos 180 hp para acelerar un auto de 1550 kg de masa (incluyendo al conductor, por supuesto), a 60 mph en ese intervalo de tiempo.

Nuestro cálculo en el ejemplo 5.5 no es por completo correcto por varias razones. En primer lugar, no todo el suministro de potencia del motor está disponible para hacer trabajo útil como acelerar el auto. En segundo, las fuerzas de fricción y de resistencia del aire actúan sobre un auto en movimiento, pero se ignoraron en el ejemplo 5.5. El capítulo 6 tratará el trabajo y la energía en presencia de fuerzas de fricción (la fricción de rodamiento y la resistencia del aire, en este caso).

Por último, la potencia nominal en hp de un auto es una especificación pico, verdadera sólo en el rango más benéfico de rpm del motor. Cuando usted acelera el auto desde el reposo, este suministro pico del motor no se puede mantener cuando cambia marchas.

En la figura 5.19 se muestran los promedios de masa, potencia y eficiencia de combustible (para conducción urbana) de autos de tamaño mediano vendidos en Estados Unidos de 1975 a 2007. La masa de un auto es importante en la conducción urbana debido a las múltiples ocasiones de aceleración en condiciones de parar y seguir. Podemos combinar el teorema del trabajo y la energía cinética (ecuación 5.15) y la definición de potencia media (ecuación 5.27) para obtener

$$\bar{P} = \frac{W}{\Delta t} = \frac{\Delta K}{\Delta t} = \frac{\frac{1}{2}mv^2}{\Delta t} = \frac{mv^2}{2\Delta t}. \quad (5.30)$$

Usted puede ver que la potencia media necesaria para acelerar un auto desde el reposo a una rapidez v en un intervalo de tiempo dado, Δt , es proporcional a la masa del auto. La energía consumida por el auto es igual a la potencia media multiplicada por el intervalo de tiempo. Así, cuanto mayor sea la masa de un auto, más energía se necesita para acelerarlo en una cantidad dada de tiempo.

Como consecuencia del bloqueo petrolero de 1973, la masa media de los autos medianos disminuyó de 2 100 kg a 1 500 kg, entre 1975 y 1982. Durante el mismo periodo, la potencia media disminuyó de 160 hp a 110 hp, y la eficiencia de combustible aumentó de 10 a 18 mpg. De 1982 a 2007, sin embargo, la masa media y la eficiencia de combustible de los autos medianos se mantuvo constante de manera aproximada, mientras que la potencia aumentó de modo uniforme. En apariencia, los compradores de autos medianos en Estados Unidos han apreciado más el incremento de potencia que el aumento de eficiencia.

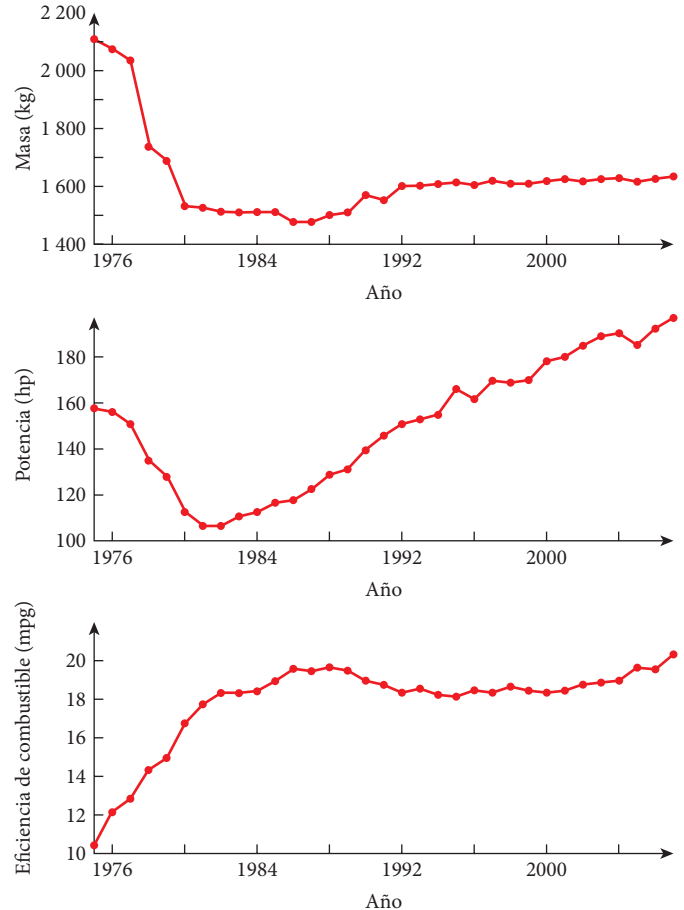


FIGURA 5.19 La masa, la potencia y la eficiencia de combustible de autos medianos vendidos en Estados Unidos de 1975 a 2007. La eficiencia de combustible corresponde a la conducción urbana típica.

LO QUE HEMOS APRENDIDO | GUÍA DE ESTUDIO PARA EXAMEN

- La energía cinética es la energía asociada con el movimiento de un objeto, $K = \frac{1}{2}mv^2$.
- La unidad SI de trabajo y energía es el joule: $1 \text{ J} = 1 \text{ kg m}^2/\text{s}^2$.
- El trabajo es la energía transferida a un objeto o transferida desde un objeto debido a la acción de una fuerza. Trabajo positivo es una transferencia de energía al objeto; trabajo negativo es una transferencia de energía desde el objeto.
- El trabajo realizado por una fuerza constante es $W = |\vec{F}||\Delta\vec{r}|\cos\alpha$, donde α es el ángulo entre \vec{F} y $\Delta\vec{r}$.
- El trabajo realizado por una fuerza variable en una dimensión es $W = \int_{x_0}^x F_x(x')dx'$.
- El trabajo realizado por la fuerza gravitacional en el proceso de levantar un objeto es $W_g = -mgh < 0$, donde $h = |y - y_0|$; el trabajo realizado por la fuerza gravitacional al bajar un objeto es $W_g = +mgh > 0$.
- La fuerza de resorte está dada por la ley de Hooke, $F_s = -kx$.
- El trabajo realizado por la fuerza de resorte es $W = -k \int_{x_0}^x x' dx' = -\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}kx_0^2$.
- El teorema del trabajo y la energía cinética es $\Delta K \equiv K - K_0 = W$.
- La potencia, \bar{P} , es la derivada del trabajo con respecto al tiempo $P = \frac{dW}{dt}$.
- La potencia media, \bar{P} , es $\bar{P} = \frac{W}{\Delta t}$.
- La unidad SI de potencia es el watt (W): $1 \text{ W} = 1 \text{ J/s}$.
- La potencia para una fuerza constante es $P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} = \cos\alpha$, donde α es el ángulo entre el vector fuerza y el vector velocidad.

TÉRMINOS CLAVE

energía cinética, p. 143
joule, p. 143
trabajo, p. 145
producto escalar, p. 146

teorema del trabajo y la energía cinética, p. 149
fuerza de resorte, p. 153
ley de Hooke, p. 154

constante del resorte, p. 154
fuerza de reposición, p. 154
potencia, p. 157
watt, p. 158

kilowatt-hora, p. 158

NUEVOS SÍMBOLOS Y NUEVAS ECUACIONES

$$K = \frac{1}{2}mv^2, \text{ energía cinética}$$

$$W = \vec{F} \bullet \Delta\vec{r}, \text{ trabajo hecho por una fuerza constante}$$

$$W = \int_{x_0}^x F_x(x')dx', \text{ trabajo hecho por una fuerza variable}$$

$$\Delta K = W, \text{ teorema del trabajo y la energía}$$

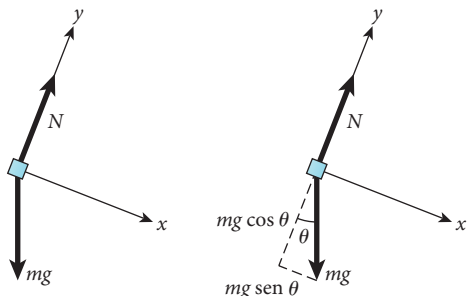
$$F_s = -kx, \text{ ley de Hooke}$$

$$W_s = -\frac{1}{2}kx^2, \text{ trabajo hecho por un resorte}$$

$$P = \frac{dW}{dt}, \text{ potencia}$$

RESPUESTAS A LAS OPORTUNIDADES DE AUTOEXAMEN

5.1



5.2 Ecuación 5.11

$$\hat{x} \bullet \hat{x} = (1,0,0) \bullet (1,0,0) = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 1$$

$$\hat{y} \bullet \hat{y} = (0,1,0) \bullet (0,1,0) = 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 1$$

$$\hat{z} \bullet \hat{z} = (0,0,1) \bullet (0,0,1) = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 1$$

Ecuación 5.12

$$\hat{x} \bullet \hat{y} = (1,0,0) \bullet (0,1,0) = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 0$$

$$\hat{x} \bullet \hat{z} = (1,0,0) \bullet (0,0,1) = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$$

$$\hat{y} \bullet \hat{z} = (0,1,0) \bullet (0,0,1) = 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$$

$$\hat{y} \bullet \hat{x} = (0,1,0) \bullet (1,0,0) = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 0$$

$$\hat{z} \bullet \hat{x} = (0,0,1) \bullet (1,0,0) = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 0$$

$$\hat{z} \bullet \hat{y} = (0,0,1) \bullet (0,1,0) = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 0$$

5.3 $\vec{F} = m\vec{a}$ se puede reescribir como

$$F_x = ma_x$$

$$F_y = ma_y$$

$$F_z = ma_z$$

para cada componente

$$v_x^2 - v_{x0}^2 = 2a_x(x - x_0)$$

$$v_y^2 - v_{y0}^2 = 2a_y(y - y_0)$$

$$v_z^2 - v_{z0}^2 = 2a_z(z - z_0)$$

multiplique por $\frac{1}{2}m$

$$\frac{1}{2}mv_x^2 - \frac{1}{2}mv_{x0}^2 = ma_x(x - x_0)$$

$$\frac{1}{2}mv_y^2 - \frac{1}{2}mv_{y0}^2 = ma_y(y - y_0)$$

$$\frac{1}{2}mv_z^2 - \frac{1}{2}mv_{z0}^2 = ma_z(z - z_0)$$

sume las tres ecuaciones

$$\frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) - \frac{1}{2}m(v_{x0}^2 + v_{y0}^2 + v_{z0}^2) = ma_x(x - x_0) + ma_y(y - y_0) + ma_z(z - z_0)$$

$$K = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) = \frac{1}{2}mv^2$$

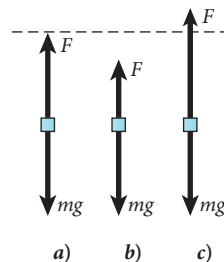
$$K_0 = \frac{1}{2}m(v_{x0}^2 + v_{y0}^2 + v_{z0}^2) = \frac{1}{2}mv_0^2$$

$$\Delta\vec{r} = (x - x_0)\hat{x} + (y - y_0)\hat{y} + (z - z_0)\hat{z}$$

$$\vec{F} = ma_x\hat{x} + ma_y\hat{y} + ma_z\hat{z}$$

$$K - K_0 = \Delta K = \vec{F} \bullet \Delta\vec{r} = W$$

5.4



PRÁCTICA PARA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Lineamientos de problemas resueltos: energía cinética, trabajo y potencia

1. En todos los problemas que incluyan la energía, el primer paso es identificar claramente el sistema y los cambios en sus condiciones. Si un objeto sufre un desplazamiento, verifique que éste se mida siempre desde el mismo punto del objeto, como la orilla frontal o el centro del objeto. Si la rapidez del objeto cambia, identifique las rapidez inicial y final en puntos específicos. Con frecuencia es útil un diagrama para mostrar la posición y la rapidez del objeto en dos tiempos interesantes diferentes.
2. Tenga cuidado de identificar la fuerza que hace el trabajo. También observe si las fuerzas que hacen el trabajo son constantes o variables, porque se necesitan tratar en forma diferente.

3. Usted puede calcular la suma del trabajo realizado por fuerzas individuales que actúan sobre un objeto, o el trabajo realizado por la fuerza neta que actúa sobre un objeto; el resultado debe ser el mismo. (Usted puede usar esto como una forma de verificar sus cálculos.)

4. Recuerde que el sentido de la fuerza de reposición ejercida por un resorte es siempre opuesto al sentido del desplazamiento del resorte desde su punto de equilibrio.

5. La fórmula para la potencia, $P = \vec{F} \bullet \vec{v}$, es muy útil, pero se aplica sólo a una fuerza constante. Cuando use una definición más general de la potencia, asegúrese de distinguir entre la potencia media, $\bar{P} = \frac{W}{\Delta t}$, y el valor instantáneo de la potencia, $P = \frac{dW}{dt}$.

PROBLEMA RESUELTO 5.2 Levantamiento de ladrillos

PROBLEMA

Una carga de ladrillos en una obra de construcción tiene una masa de 85.0 kg. Una grúa levanta esta carga desde el piso hasta una altura de 50.0 m en 60.0 s a una rapidez baja constante. ¿Cuál es la potencia media de la grúa?

SOLUCIÓN

PIENSE

Subir los ladrillos con una rapidez baja constante significa que la energía cinética es despreciable, de modo que el trabajo en esta situación se realiza sólo contra la gravedad. No hay aceleración y la fricción es despreciable. La potencia media es entonces el trabajo realizado contra la gravedad dividido entre el tiempo necesario para elevar la carga de ladrillos hasta la altura especificada.

ESBOCE

En la figura 5.20 se muestra un diagrama de cuerpo libre de la carga de los ladrillos. Aquí hemos definido el sistema de coordenadas en el que el eje y es vertical y positivo hacia arriba. La tensión, T , que ejerce el cable de la grúa es una fuerza en sentido ascendente, y el peso, mg , de la carga de ladrillos es una fuerza descendente. Como la carga se mueve con rapidez constante, la suma de la tensión y el peso es cero. La carga se mueve verticalmente una distancia h , como se muestra en la figura 5.21.

INVESTIGUE

El trabajo, W , que realiza la grúa está dado por

$$W = mgh.$$

La potencia media, \bar{P} , necesaria para subir la carga en el tiempo dado Δt es

$$\bar{P} = \frac{W}{\Delta t}.$$

SIMPLIFIQUE

Combinando las dos ecuaciones anteriores se obtiene

$$\bar{P} = \frac{mgh}{\Delta t}.$$

CALCULE

Ahora introducimos los números y obtenemos

$$\bar{P} = \frac{(85.0 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2)(50.0 \text{ m})}{60.0 \text{ s}} = 694.875 \text{ W}.$$

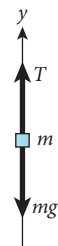


FIGURA 5.20 Diagrama de cuerpo libre de la carga de ladrillos de masa m que levanta una grúa.

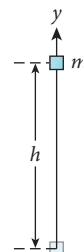


FIGURA 5.21 La masa m se eleva una distancia h .

(continúa)

(continuación)

REDONDEE

Presentamos nuestro resultado final como

$$\bar{P} = 695 \text{ W}$$

porque todos los valores numéricos se dieron inicialmente con tres cifras significativas.

VUELVA A REVISAR

Para volver a revisar nuestro resultado para la potencia media necesaria, convertimos la potencia necesaria en watts a caballos de potencia:

$$\bar{P} = (695 \text{ W}) \frac{1 \text{ hp}}{746 \text{ W}} = 0.932 \text{ hp.}$$

De modo que un motor de 1 hp es suficiente para levantar la carga de 85.0 kg 50 m en 60 s, lo que no parece por completo irracional, aunque es sorprendentemente pequeña. Como los motores no son 100% eficientes, en realidad la grúa tendría que tener un motor con una potencia nominal un poco más alta para levantar la carga.

PROBLEMA RESUELTO 5.3 Lanzamiento de bala

PROBLEMA

Las competencias de lanzamiento de bala usan bolas de metal con una masa de 16 lb (= 7.26 kg). Un competidor lanza la bala a un ángulo de 43.3° y la suelta a una altura de 1.82 m del suelo, y toca el piso a una distancia horizontal de 17.7 m desde el punto de lanzamiento. ¿Cuál es la energía cinética de la bala cuando sale de la mano del lanzador?

SOLUCIÓN

PIENSE

Se nos da la distancia horizontal $x_s = 17.7 \text{ m}$, la altura de lanzamiento, $y_0 = 1.82 \text{ m}$, y el ángulo de la velocidad inicial, $\theta_0 = 43.3^\circ$, pero no la rapidez inicial, v_0 . Si podemos calcular la rapidez inicial a partir de los datos que nos han dado, entonces será sencillo calcular la energía cinética inicial, porque también conocemos la masa de la bala, $m = 7.26 \text{ kg}$.

Como la bala es muy pesada, la resistencia del aire se puede ignorar con seguridad. Esta situación es una excelente realización del movimiento de proyectil ideal. Después de que la bala sale de la mano del lanzador, la única fuerza sobre la bala es la fuerza de gravedad, y la bala seguirá una trayectoria parabólica hasta que toque el piso. Por lo tanto, resolveremos este problema por aplicación de las reglas sobre movimiento de proyectil ideal.

ESBOCE

La trayectoria de la bala se muestra en la figura 5.22.

INVESTIGUE

La energía cinética inicial K de la bala de masa m está dada por

$$K = \frac{1}{2} m v_0^2.$$

Ahora necesitamos decidir cómo obtener v_0 . Se nos da la distancia, x_s hasta el punto en que la bala toca el suelo, pero ésta no es igual al alcance, R (para el cual obtuvimos una fórmula en el capítulo 3), porque la fórmula del alcance supone que las alturas del punto de partida y el de llegada son iguales. Aquí, la altura inicial de la bala es y_0 , y la altura final es cero. Por lo tanto, tenemos que usar la expresión completa para la trayectoria de un proyectil ideal del capítulo 3:

$$y = y_0 + x \tan \theta_0 - \frac{x^2 g}{2 v_0^2 \cos^2 \theta_0}.$$

Esta ecuación describe la componente y de la trayectoria como función de la componente x .

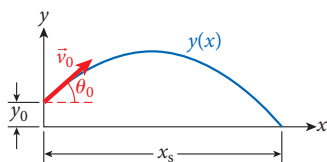


FIGURA 5.22 Trayectoria parabólica de una bala lanzada.

En este problema, sabemos que $y(x = x_s) = 0$, es decir, que la bala toca el suelo en $x = x_s$. Sustituyendo x cuando $y = 0$ en la ecuación para la trayectoria, obtenemos

$$0 = y_0 + x_s \tan \theta_0 - x_s^2 \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta_0}.$$

SIMPLIFIQUE

Despejamos v_0^2 :

$$y_0 + x_s \tan \theta_0 = \frac{x_s^2 g}{2v_0^2 \cos^2 \theta_0} \Rightarrow$$

$$2v_0^2 \cos^2 \theta_0 = \frac{x_s^2 g}{y_0 + x_s \tan \theta_0} \Rightarrow$$

$$v_0^2 = \frac{x_s^2 g}{2 \cos^2 \theta_0 (y_0 + x_s \tan \theta_0)}.$$

Ahora, sustituyendo v_0^2 en la expresión para la energía cinética inicial, obtenemos

$$K = \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{m x_s^2 g}{4 \cos^2 \theta_0 (y_0 + x_s \tan \theta_0)}.$$

CALCULE

Introduciendo los valores numéricos dados, obtenemos

$$K = \frac{(7.26 \text{ kg})(17.7 \text{ m})^2 (9.81 \text{ m/s}^2)}{4 (\cos^2 43.3^\circ) [1.82 \text{ m} + (17.7 \text{ m})(\tan 43.3^\circ)]} = 569.295 \text{ J}.$$

REDONDEE

Todos los valores numéricos dados para este problema tenían tres cifras significativas, de modo que presentamos nuestra respuesta como

$$K = 569 \text{ J}.$$

VUELVA A REVISAR

Como tenemos una expresión para la rapidez inicial, $v_0^2 = x_s^2 g / (2 \cos^2 \theta_0 (y_0 + x_s \tan \theta_0))$, podemos encontrar las componentes horizontal y vertical del vector inicial de velocidad:

$$v_{x0} = v_0 \cos \theta_0 = 9.11 \text{ m/s}$$

$$v_{y0} = v_0 \sin \theta_0 = 8.59 \text{ m/s}.$$

Como explicamos en la sección 5.2, podemos dividir la energía cinética total en el movimiento de proyectil ideal en aportaciones al movimiento en las direcciones horizontal y vertical (vea la ecuación 5.3). La energía cinética debida al movimiento en la dirección x permanece constante. La energía cinética debida al movimiento en la dirección y es inicialmente

$$\frac{1}{2} m v_{y0}^2 \sin^2 \theta_0 = 268 \text{ J}.$$

En el ápice de la trayectoria de la bala, el componente vertical de la velocidad es cero, como en todo movimiento de proyectil. Esto también significa que la energía cinética asociada con el movimiento vertical es cero en este punto. Todos los 268 J de la energía cinética inicial debida al componente y del movimiento se han usado para realizar trabajo contra la fuerza de gravedad (vea la sección 5.3). Este trabajo es (vea la ecuación 5.18) $-268 \text{ J} = -mgh$, donde $h = y_{\text{máx}} - y_0$ es la altura máxima de la trayectoria. De modo que encontramos el valor de h :

$$h = \frac{268 \text{ J}}{mg} = \frac{268 \text{ J}}{(7.26 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2)} = 3.76 \text{ m}.$$

(continúa)

(continuación)

Usemos los conceptos conocidos del movimiento de proyectiles para encontrar la altura máxima para la velocidad inicial que hemos determinado. En la sección 3.4 se demostró que la altura máxima H de un objeto en movimiento de proyectil es

$$H = y_0 + \frac{v_{y0}^2}{2g}.$$

Introduciendo los números se obtiene $v_{y0}^2 / 2g = 3.76$ m. Este valor es el mismo que el obtenido aplicando consideraciones de energía.

PREGUNTAS DE OPCIÓN MÚLTIPLE

5.1 ¿Cuál de las siguientes es una unidad correcta de energía?

- a) kg m/s^2 c) $\text{kg m}^2/\text{s}^2$ e) $\text{kg}^2 \text{m}^2/\text{s}^2$
 b) $\text{kg m}^2/\text{s}$ d) $\text{kg}^2 \text{m}/\text{s}^2$

5.2 Una caja de 800 N se empuja hacia arriba por un plano inclinado con una longitud de 4.0 m. Se necesitan 3 200 J de trabajo para llevar la caja hasta el extremo superior del plano, que está 2.0 m arriba de la base. ¿Cuál es la magnitud de la fuerza media de fricción sobre la caja? (Suponga que la caja parte del reposo y termina en el reposo.)

- a) 0 N c) mayor de 400 N
 b) no cero, pero menos de 400 N d) 400 N
 e) 800 N

5.3 Una bomba de motor bombea agua de manera continua por una manguera. Si la rapidez con la que el agua pasa por la boquilla de la manguera es v y si k es la masa por unidad de longitud del chorro de agua al salir de la boquilla, ¿cuál es la energía cinética que se está impartiendo al agua?

- a) $\frac{1}{2}kv^3$ c) $\frac{1}{2}kv$ e) $\frac{1}{2}v^3/k$
 b) $\frac{1}{2}kv^2$ d) $\frac{1}{2}v^2/k$

5.4 Un auto de 1 500 kg acelera de 0 a 25 m/s en 7.0 s. ¿Cuál es la potencia media suministrada por el motor (1 hp = 746 W)?

- a) 60 hp c) 80 hp e) 180 hp
 b) 70 hp d) 90 hp

5.5 ¿Cuál de las siguientes es una unidad correcta de potencia?

- a) kg m/s^2 c) J e) W
 b) N d) m/s^2

5.6 ¿Cuánto trabajo se realiza cuando una persona de 75 kg sube una escalera de 10 m de altura con rapidez constante?

- a) $7.35 \cdot 10^5$ J c) 75 J e) 7 350 J
 b) 750 J d) 7 500 J

5.7 ¿Cuánto trabajo hacen los cargadores (horizontalmente) al empujar un cajón de 150 kg, una distancia de 12.3 m por un piso con rapidez constante si el coeficiente de fricción es de 0.70?

- a) 1 300 J c) $1.3 \cdot 10^4$ J e) 130 J
 b) 1 845 J d) $1.8 \cdot 10^4$ J

5.8 Ocho libros, cada uno con un espesor de 4.6 cm y una masa de 1.8 kg, están sobre una mesa plana. ¿Cuánto trabajo se necesita para apilarlos uno encima de otro?

- a) 141 J c) 230 J e) 14 J
 b) 23 J d) 0.81 J

5.9 Una partícula se mueve de manera paralela al eje x . La fuerza neta sobre la partícula aumenta proporcionalmente a x de acuerdo con la fórmula $F_x = (120 \text{ N/m})x$, donde la fuerza está en newtons cuando x está en metros. ¿Cuánto trabajo hace esta fuerza sobre la partícula cuando se mueve de $x = 0$ a $x = 0.50$ m?

- a) 7.5 J c) 30 J e) 120 J
 b) 15 J d) 60 J

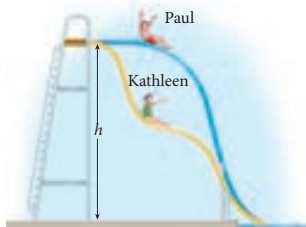
5.10 Una paracaidista deportiva está sujeta a dos fuerzas: la gravedad y la resistencia del aire. En caída vertical alcanza una rapidez terminal constante algún tiempo después de saltar de un avión. Como se mueve a velocidad constante desde ese tiempo hasta que se abre su paracaídas, concluimos, por el teorema del trabajo y la energía cinética, que, durante ese intervalo de tiempo,

- a) el trabajo realizado por la gravedad es cero.
 b) el trabajo realizado por la resistencia del aire es cero.
 c) el trabajo realizado por la gravedad es igual al valor negativo del trabajo realizado por la resistencia del aire.
 d) el trabajo realizado por la gravedad es igual al valor realizado por la resistencia del aire.
 e) su energía cinética aumenta.

PREGUNTAS

5.11 Si el trabajo realizado sobre una partícula es cero, ¿qué se puede decir sobre la rapidez de la partícula?

5.12. Paul y Kathleen parten del reposo al mismo tiempo, a una altura h en la parte superior de dos toboganes de agua con diferentes configuraciones.



Los toboganes son casi sin fricción. a) ¿Quién llega primero al final? b) ¿Quién tiene una rapidez mayor al final? ¿Qué principio físico utilizó usted para sus respuestas?

5.13 ¿Realiza la Tierra algún trabajo sobre la Luna mientras ésta se mueve en su órbita?

5.14 Un auto de masa m que viaja con una rapidez v_1 puede frenar hasta detenerse dentro de una distancia d . Si el auto acelera por un factor de 2, $v_2 = 2v_1$, ¿por qué factor se aumenta la distancia de detención, suponiendo que la fuerza de frenado F es aproximadamente independiente de la rapidez del auto?

PROBLEMAS

Una • y dos •• indican un nivel creciente de dificultad del problema.

Sección 5.2

5.15 El daño que causa un proyectil en el impacto está relacionado con su energía cinética. Calcule y compare las energías cinéticas de estos tres proyectiles:

- Una piedra de 10.0 kg a 30.0 m/s.
- Una pelota de béisbol de 100.0 g a 60.0 m/s.
- Una bala de 20.0 g a 300. m/s.

5.16 Una limusina se mueve a una velocidad de 100. km/h. Si la masa de este vehículo, incluyendo los pasajeros, es de 1 900. kg, ¿cuál es su energía cinética?

5.17 Dos vagones de ferrocarril, cada uno con una masa de 7 000. kg y viajando a 90.0 km/h, chocan de frente y entran en reposo. ¿Cuánta energía mecánica se pierde en este choque?

5.18 Piense sobre las respuestas a estas cuestiones la próxima vez que conduzca un auto:

- ¿Cuál es la energía cinética de un auto de 1 500. kg que se mueve a 15.0 m/s?
- Si el auto cambiara su velocidad a 30.0 m/s, ¿cómo cambiaría el valor de la energía cinética?

5.19 Un tigre de 200. kg en movimiento tiene una energía cinética de 14 400 J. ¿Cuál es la velocidad del tigre?

•5.20 Dos autos se mueven. El primero tiene dos veces la masa del segundo, pero sólo la mitad de su energía cinética. Cuando ambos autos aumenten su rapidez en 5.0 m/s, entonces tienen igual energía cinética. Calcule las rapidezces originales de los dos autos.

•5.21 ¿Cuál es la energía cinética de un proyectil ideal con masa de 20.1 kg en el ápice de su trayectoria si se lanzó con una rapidez inicial de 27.3 m/s y en un ángulo inicial de 46.9° respecto a la horizontal?

Sección 5.4

5.22 Una fuerza de 5.00 N actúa por una distancia de 12.0 m en la dirección de la fuerza. Encuentre el trabajo realizado.

5.23 Dos pelotas de béisbol se lanzan desde el techo de un edificio de 7.25 m de altura. Ambas se lanzan con rapidez inicial de 63.5 mph. La pelota 1 se lanza de manera horizontal, y la pelota 2 se lanza directamente hacia abajo. ¿Cuál es la diferencia en las rapidezces de las dos pelotas cuando tocan el suelo? (Desprecie la resistencia del aire.)

5.24 Un refrigerador de 95 kg está en reposo sobre el suelo. ¿Cuánto trabajo se necesita para moverlo por el suelo 4.0 m con una rapidez constante, contra una fuerza de fricción de 180 N?

5.25 Una cabeza de martillo de masa $m = 2.00$ kg se deja caer sobre un clavo desde una altura $h = 0.400$ m. Calcule la máxima cantidad de trabajo que podría hacer sobre el clavo.

5.26 Usted empuja su sofá una distancia de 4.00 m por el piso de la sala, con una fuerza horizontal de 200.0 N. La fuerza de fricción es de 150.0 N. ¿Cuál es el trabajo que usted realiza, el de la fuerza de fricción, el de la gravedad y el de la fuerza neta?

•5.27 Suponga que usted tira de un trineo con una cuerda que hace un ángulo de 30.0° respecto a la horizontal. ¿Cuánto trabajo realiza usted si tira con 25.0 N de fuerza y el trineo se mueve 25.0 m?

•5.28 Un padre tira de su hijo, cuya masa es de 25.0 kg, quien está sentado en un columpio con cuerdas con una longitud de 3.00 m, hacia atrás, hasta que las cuerdas forman un ángulo de 33.6° respecto a la vertical. Entonces suelta a su hijo desde el reposo. ¿Cuál es la rapidez del hijo en la parte inferior del movimiento del columpio?

•5.29 Una fuerza constante, $\vec{F} = (4.79, -3.79, 2.09)$ N, actúa sobre un objeto de 18.0 kg de masa, causando un desplazamiento de dicho objeto de $\vec{r} = (4.25, 3.69, -2.45)$ m. ¿Cuál es el trabajo total que hace esta fuerza?

•5.30 Una madre tira de su hija, cuya masa es de 20.0 kg, quien está sentada en un columpio, con cuerdas de una longitud de 3.50 m, hacia atrás hasta que las cuerdas forman un ángulo de 35.0° respecto a la vertical. Luego suelta a su hija desde el reposo. ¿Cuál es la rapidez de la hija cuando las cuerdas forman un ángulo de 15.0° respecto a la vertical?

•5.31 Un saltador en esquíes se desliza hacia abajo por una pendiente de 30.0° durante 80.0 ft antes de despegar desde una rampa

horizontal despreciablemente corta. Si la rapidez de despegue del saltador es de 45.0 ft/s, ¿cuál es el coeficiente de fricción cinética entre los esquíes y la pendiente? ¿El valor del coeficiente de fricción sería diferente si se expresara en unidades SI? Si la respuesta es afirmativa, ¿de cuánto sería la diferencia?

•5.32 A nivel del mar, una molécula de nitrógeno en el aire tiene una energía cinética promedio de $6.2 \cdot 10^{-21}$ J. Su masa es de $4.7 \cdot 10^{-26}$ kg. Si la molécula pudiera salir disparada en forma directa hacia arriba sin chocar con otras moléculas, ¿qué tan alto se elevaría? ¿A qué porcentaje del radio de la Tierra equivale en esta altura? ¿Cuál es la rapidez inicial de la molécula? (Suponga que usted puede usar $g = 9.81$ m/s²; aunque veremos en el capítulo 12 que esta suposición puede no estar justificada para esta situación.)

••5.33 Una bala que se mueve con una rapidez de 153 m/s pasa a través de un tablón de madera. Después de pasar por el tablón, su rapidez es de 130 m/s. Otra bala de la misma masa y del mismo tamaño, pero que se mueve a 92 m/s, pasa a través de un tablón idéntico. ¿Cuál será la rapidez de esta segunda bala después de pasar a través del tablón? Suponga que la resistencia que ofrece el tablón es independiente de la rapidez de la bala.

Sección 5.5

•5.34 Una partícula de masa m se sujeta a una fuerza que actúa en la dirección x , $F_x = (3.0 + 0.50x)$ N. Encuentre el trabajo realizado por la fuerza cuando la partícula se mueve de $x = 0$ a $x = 4.0$ m.

•5.35 Una fuerza tiene la dependencia $F_x(x) = -kx^4$ con respecto al desplazamiento x , donde la constante $k = 20.3$ N/m⁴. ¿Cuánto trabajo se necesita para cambiar el desplazamiento de 0.73 m a 1.35 m?

•5.36 Un cuerpo de masa m se mueve por una trayectoria $\vec{r}(t)$ en espacio tridimensional con energía cinética constante. ¿Qué relación geométrica tiene que existir entre el vector velocidad del cuerpo, $\vec{v}(t)$, y su vector aceleración, $\vec{a}(t)$, para lograr esto?

•5.37 Una fuerza dada por $F(x) = 5x^3$ (en N/m³) actúa sobre una masa de 1.00 kg que se mueve sobre una superficie sin fricción. La masa se mueve de $x = 2.00$ m a $x = 6.00$ m.

a) ¿Cuánto trabajo realiza la fuerza?

b) Si la masa tiene una rapidez de 2.00 m/s en $x = 2.00$ m, ¿cuál es su rapidez a $x = 6.00$ m?

Sección 5.6

5.38 Un resorte ideal tiene la constante del resorte $k = 440$ N/m. Calcule la distancia que se tiene que estirar este resorte desde su posición de equilibrio para realizar un trabajo de 25 J.

5.39 Un resorte se estira 5.00 cm desde su posición de equilibrio. Si este estiramiento necesita 30.0 J de trabajo, ¿cuál es la constante del resorte?

5.40 Un resorte con constante del resorte k se comprime de manera inicial una distancia x_0 desde su longitud de equilibrio. Después de regresar a su posición de equilibrio, el resorte se estira una distancia x_0 desde dicha posición. ¿Cuál es la relación del trabajo que necesita realizarse sobre el resorte en el estiramiento con el trabajo hecho en la compresión?

•5.41 Un resorte con una constante del resorte de 238.5 N/m se comprime en 0.231 m. Luego una bola de rodamiento con masa de 0.0413 kg se pone contra el extremo del resorte, y se suelta el resorte. ¿Cuál es la rapidez de la bola de rodamiento inmediatamente después de que pierde contacto con el resorte? (La bola se separará del resorte de manera exacta cuando el resorte vuelve a su posición de equilibrio. Suponga que la masa del resorte se puede despreciar.)

Sección 5.7

5.42 Un caballo tira horizontalmente de un trineo a través de un campo cubierto de nieve. El coeficiente de fricción entre el trineo y la nieve es de 0.195, y la masa del trineo, incluyendo la carga, es de 202.3 kg. Si el caballo mueve el trineo con una rapidez constante de 1.785 m/s, ¿cuál es la potencia necesaria para lograr esto?

5.43 Un caballo tira de manera horizontal de un trineo sobre nieve con rapidez constante. El caballo puede producir una potencia de 1.060 hp. El coeficiente de fricción entre el trineo y la nieve es de 0.115, y la masa del trineo, incluyendo la carga, es de 204.7 kg. ¿Cuál es la rapidez con la que se mueve el trineo a través de la nieve?

5.44 Mientras un bote se remolca con una rapidez de 12 m/s, la tensión en el cable de remolque es de 6.0 kN. ¿Cuál es la potencia suministrada al bote a través del cable de remolque?

5.45 Un auto de 1 214.5 kg de masa se mueve con una rapidez de 62.5 mph cuando en una curva sale del camino y choca con un pilar de un puente. Si el auto llega al reposo en 0.236 s, ¿cuánta potencia media (en watts) se gasta en este intervalo?

5.46 Un motor utiliza 40.0 hp en mover un automóvil en un camino recto con una rapidez de 15.0 m/s. ¿Qué tan grande es la fuerza total que actúa sobre el auto en el sentido opuesto al movimiento del mismo?

•5.47 Un ciclista va de bajada por una pendiente de 7.0°, con una rapidez uniforme de 5.0 m/s. Suponiendo una masa total de 75 kg (bicicleta más ciclista), ¿cuál debe ser el suministro de energía del ciclista para pedalear hacia arriba la misma pendiente y con la misma rapidez?

•5.48 Un auto con 942.4 kg de masa acelera desde el reposo con un suministro constante de potencia de 140.5 hp. Despreciando la resistencia del aire, ¿cuál es la rapidez del auto después de 4.55 s?

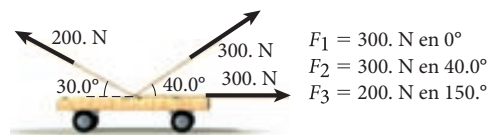
•5.49 Un pequeño dirigible se usa para publicidad en un juego de fútbol americano. Tiene una masa de 93.5 kg y está atado mediante una cuerda de remolque a un camión en tierra. La cuerda hace un ángulo de 53.3° hacia abajo de la horizontal, y el dirigible se suspende en el aire a 19.5 m arriba del suelo. El camión se mueve en línea recta por un espacio de 840.5 m sobre la superficie a nivel del lote de estacionamiento del estadio, con una velocidad constante de 8.90 m/s. Si el coeficiente de arrastre (K en $F = Kv^2$) es de 0.500 kg/m, ¿cuánto trabajo realiza el camión al tirar del dirigible (suponiendo que no haya viento)?

••5.50 Un auto de masa m acelera desde el reposo por una pista recta, no con aceleración constante, pero con potencia constante del motor, P . Suponga que la resistencia del aire es despreciable.

- a) Encuentre la velocidad del auto como función del tiempo.
- b) Un segundo auto arranca desde el reposo a un lado del primer auto en la misma pista, pero mantiene una aceleración constante. ¿Cuál carro toma la delantera inicial? ¿Lo rebasa el otro auto? Si la respuesta es afirmativa, escriba una fórmula para la distancia desde el punto inicial en que sucede esto.
- c) Usted está en una carrera de arrancadas (arrancones) en una pista recta, con un oponente cuyo auto mantiene una aceleración constante de 12.0 m/s^2 . Ambos autos tienen masas idénticas de $1\,000 \text{ kg}$. Los autos salen juntos desde el reposo. Se supone que la resistencia del aire es despreciable. Calcule la potencia mínima que necesita su motor para que usted gane la carrera, suponiendo que el suministro de potencia es constante y la distancia a la línea de meta es de 0.250 mi .

Problemas adicionales

- 5.51** En la Olimpiada de 2004 en Atenas, Grecia, el atleta iraní Hossein Reza Zadeh ganó la medalla de oro de la clase superpesada en levantamiento de pesas. Levantó 472.5 kg ($1\,041 \text{ lb}$) combinados en sus dos mejores levantamientos en la competencia. Suponiendo que levantó las pesas una altura de 196.7 cm , ¿qué trabajo realizó?
- 5.52** ¿Cuánto trabajo se realiza contra la gravedad al levantar un peso de 6.00 kg por una distancia de 20.0 cm ?
- 5.53** Cierta tractor es capaz de tirar con una fuerza uniforme de 14 kN mientras se mueve con una rapidez de 3.0 m/s . ¿Cuánta potencia en kW y en hp suministra el tractor en estas condiciones?
- 5.54** Un lanzador de bala acelera una bala de 7.3 kg desde el reposo hasta 14 m/s . Si este movimiento tarda 2.0 s , ¿qué potencia media se suministró?
- 5.55** Un anuncio afirma que cierto automóvil de $1\,200 \text{ kg}$ puede acelerar desde el reposo hasta una rapidez de 25 m/s en 8.0 s . ¿Qué potencia media debe suministrar el motor para lograr esta aceleración? Ignore pérdidas debidas a la fricción.
- 5.56** Un auto de masa $m = 1\,250 \text{ kg}$ viaja con una rapidez de $v_0 = 105 \text{ km/h}$ (29.2 m/s). Calcule el trabajo que deben hacer los frenos para detener por completo el auto.
- 5.57** Una flecha de masa $m = 88 \text{ g}$ (0.088 kg) se dispara con un arco. La cuerda del arco ejerce una fuerza media de $F = 110 \text{ N}$ sobre la flecha en una distancia $d = 78 \text{ cm}$ (0.78 m). Calcule la rapidez de la flecha cuando sale del arco.
- 5.58** La masa de un libro de texto de física es de 3.4 kg . Usted toma el libro de una mesa y lo levanta 0.47 m con rapidez constante de 0.27 m/s .
- a) ¿Cuál es el trabajo realizado por la gravedad sobre el libro?
- b) ¿Cuál es la potencia que usted suministra para realizar esta tarea?
- 5.59** Se empuja un trineo de masa m hacia arriba de un plano inclinado, sin fricción, que forma un ángulo de 28° con la horizontal. Por último, el trineo se detiene a una altura de 1.35 m arriba del punto donde comenzó. Calcule su rapidez inicial.
- 5.60** Un hombre lanza una roca de masa $m = 0.325 \text{ kg}$ verticalmente hacia arriba. En este proceso, su brazo realiza una cantidad total de trabajo $W_{\text{neto}} = 115 \text{ J}$ sobre la roca. Calcule la distancia máxima, h , sobre la mano con la que el hombre hace el lanzamiento que viajará la roca. Desprecie la resistencia del aire.
- 5.61** Un auto hace el trabajo $W_{\text{auto}} = 7.0 \cdot 10^4 \text{ J}$ al viajar una distancia $x = 2.8 \text{ km}$ con rapidez constante. Calcule la fuerza media F (de todos los orígenes) que actúan sobre el auto en este proceso.
- 5.62** Una pelota de softbol de masa $m = 0.250 \text{ kg}$ se lanza con una rapidez $v_0 = 26.4 \text{ m/s}$. Debido a la resistencia del aire, cuando llega a *home* su rapidez ha disminuido 10.0% . La distancia entre el *home* y el *pitcher* es $d = 15.0 \text{ m}$. Calcule la fuerza media de la resistencia del aire, F_{aire} , que se ejerce sobre la pelota durante su movimiento del lanzador a *home*.
- 5.63** Un camión de plataforma está cargado con una pila de sacos de cemento con masa combinada de $1\,143.5 \text{ kg}$. El coeficiente de fricción estática entre la plataforma del camión y el saco más bajo de la pila es de 0.372 , y los sacos no están amarrados, sino se mantienen en su lugar por la fuerza de la fricción entre la plataforma y el saco inferior. El camión acelera de manera uniforme desde el reposo hasta 56.6 mph en 22.9 s . La pila de sacos está a 1 m del borde de la plataforma. ¿Se desliza la pila sobre la plataforma? El coeficiente de fricción cinética entre el saco inferior y la plataforma es de 0.257 . ¿Cuál es el trabajo realizado sobre la pila de sacos por la fuerza de fricción entre ésta y la plataforma del camión?
- 5.64** Una conductora observa que su auto de $1\,000 \text{ kg}$ desacelera desde $v_0 = 90.0 \text{ km/h}$ (25.0 m/s) hasta $v = 70.0 \text{ km/h}$ (19.4 m/s) en $t = 6.00 \text{ s}$, moviéndose en línea recta, en punto neutro. Calcule la potencia necesaria para mantener el auto en movimiento con rapidez constante $v_{\text{prom}} = 80.0 \text{ km/h}$ (22.2 m/s).
- 5.65** La carreta de 125 kg que aparece en la figura parte del reposo y rueda con fricción despreciable. Tiran de ella tres cuerdas. Se mueve 100 m horizontalmente. Encuentre la velocidad final de la carreta.



- 5.66** Calcule la potencia necesaria para propulsar un auto de $1\,000.0 \text{ kg}$ a 25.0 m/s hacia arriba de una pendiente recta con una inclinación de 5.0° sobre la horizontal. Desprecie la fricción y la resistencia del aire.
- 5.67** Un abuelo tira de su nieta, cuya masa es de 21.0 kg , quien está sentada en un columpio, con cuerdas de 2.50 m de longitud, hacia atrás, y la suelta desde el reposo. La rapidez de la nieta en la parte inferior del movimiento del columpio es de 3.00 m/s . ¿Cuál es el ángulo (en grados, medidos respecto a la vertical) desde el cual se libera?
- 5.68** Un caminante de 65 kg asciende al segundo campamento base en la Nanga Parbat, en Pakistán, a una altitud de $3\,900 \text{ m}$, comenzando desde el primer campamento base a $2\,200 \text{ m}$. El ascenso se realiza en 5.0 h . Calcule a) el trabajo realizado contra la gravedad, b) el suministro de potencia media y c) la tasa de suministro de energía necesaria, suponiendo que la eficiencia de conversión de energía del cuerpo humano es de 15% .

6

Energía potencial y conservación de la energía

LO QUE APRENDEREMOS	169
6.1 Energía potencial	169
6.2 Fuerzas conservativas y no conservativas	171
Fuerzas de fricción	172
6.3 Trabajo y energía potencial	173
6.4 Energía potencial y fuerza	174
Potencial de Lennard- Jones	175
Ejemplo 6.1 Fuerza molecular	175
6.5 Conservación de la energía mecánica	177
Problema resuelto 6.1 La defensa con catapulta	178
6.6 Trabajo y energía para la fuerza de resorte	181
Problema resuelto 6.2 La bala humana	181
Ejemplo 6.2 Saltador de bungee	184
Energía potencial de un objeto suspendido de un resorte	185
6.7 Fuerzas no conservativas y el teorema del trabajo y la energía	186
Problema resuelto 6.3 Bloque empujado hacia afuera de una mesa	187
6.8 Energía potencial y estabilidad	190
Puntos de equilibrio	190
Puntos de inflexión	191
Avance: física atómica	191
LO QUE HEMOS APRENDIDO/ GUÍA DE ESTUDIO PARA EXAMEN	192
Práctica para resolución de problemas	193
Problema resuelto 6.4 Artista del trapecio	193
Problema resuelto 6.5 En trineo en la colina de Mickey Mouse	195
Problema resuelto 6.6 Energía producida por las Cataratas del Niágara	197
Preguntas de opción múltiple	198
Preguntas	199
Problemas	200



FIGURA 6.1 Cataratas del Niágara.

LO QUE APRENDEREMOS

- Energía potencial, U , es la energía almacenada en la configuración de un sistema de objetos que ejercen fuerzas entre sí.
- Cuando una fuerza conservativa realiza trabajo sobre un objeto que viaja por una trayectoria y regresa a su punto de partida (trayectoria cerrada), el trabajo total es cero. Una fuerza que no cumple este requisito se llama no conservativa.
- Una energía potencial puede estar asociada con cualquier fuerza conservativa. El cambio en energía potencial debido a algún reacomodo espacial de un sistema es igual al valor negativo del trabajo realizado por la fuerza conservativa durante este reacomodo espacial.
- La energía mecánica, E , es la suma de la energía cinética y la energía potencial.
- La energía mecánica total se conserva (permanece constante en el tiempo) para cualquier proceso mecánico dentro de un sistema aislado que comprende sólo fuerzas conservativas.
- En un sistema aislado, la energía total, es decir, la suma de todas las formas de energía, mecánica o de otra clase, siempre se conserva. Esto es válido para fuerzas tanto conservativas como no conservativas.
- Pequeñas perturbaciones alrededor de un punto de equilibrio estable dan por resultado pequeñas oscilaciones alrededor del punto de equilibrio; para un punto de equilibrio inestable, pequeñas perturbaciones dan por resultado un movimiento acelerado que se aleja del punto de equilibrio.

Las Cataratas del Niágara ofrecen una de las vistas más espectaculares del mundo, con alrededor de 5 500 metros cúbicos de agua que se precipitan desde una altura de 49 m (160 ft) *cada segundo!* La figura 6.1 muestra la Catarata de la Herradura (Horseshoe Falls), del lado canadiense de la frontera, que tiene una longitud de 790 m (2 592 ft). La American Falls, del lado estadounidense, se extiende por una longitud de otros 305 m (1 001 ft). Juntas constituyen una de las más importantes atracciones turísticas de Norteamérica y una de las fuentes de energía eléctrica más grandes del mundo, con una producción mayor de 2 500 megawatts (vea el problema resuelto 6.6). Los humanos han usado la energía de caídas de agua desde tiempos remotos, utilizándola para hacer girar ruedas de paletas para molinos y fábricas. En la actualidad, la conversión de la energía de las caídas de agua en energía eléctrica mediante presas hidroeléctricas es una de las principales fuentes de energía en todo el mundo.

Como vimos en el capítulo 5, la energía es un concepto fundamental en física, que determina muchas de las interacciones en las que participan fuerzas y movimientos de objetos. En este capítulo continuamos nuestro estudio de la energía, introduciendo diversas formas nuevas de energía y nuevas leyes que rigen su uso. Volveremos a las leyes de la energía en los capítulos sobre termodinámica, a partir del material que se presenta aquí. Aunque, en primer término, continuaremos nuestro estudio de la mecánica, apoyándonos sólidamente en las ideas que aquí exponemos.

6.1 Energía potencial

El capítulo 5 examinó en detalle la relación existente entre energía cinética y trabajo, y uno de los puntos principales era que el trabajo y la energía cinética se pueden convertir uno en el otro. Ahora, esta sección introduce otra clase de energía que se llama *energía potencial*.

La **energía potencial**, U , es la energía almacenada en la configuración de un sistema de objetos que ejercen fuerzas entre sí. Por ejemplo, hemos visto que una fuerza externa realiza un trabajo al elevar una carga en contra de la fuerza de gravedad, y este trabajo está dado por $W = mgh$, donde m es la masa de la carga y $h = y - y_0$ es la altura a la que se eleva la carga arriba de su posición inicial. (En este capítulo supondremos que el eje y apunta hacia arriba, a menos que se especifique otra cosa.) Este levantamiento se puede obtener sin cambiar la energía cinética, como en el caso de un levantador de pesas que levanta una masa por arriba de su cabeza y la mantiene ahí. Hay energía almacenada al sostener la masa arriba de la cabeza. Si el levantador de pesas suelta la masa, esta energía se puede reconvertir en energía cinética al acelerarse la masa y caer al suelo. Podemos expresar la energía potencial gravitacional como

$$U_g = mgy. \quad (6.1)$$

El cambio en la energía potencial gravitacional de la masa es entonces

$$\Delta U_g \equiv U_g(y) - U_g(y_0) = mg(y - y_0) = mgh. \quad (6.2)$$

(La ecuación 6.1 es válida sólo cerca de la superficie de la Tierra, donde $F_g = mg$, y en el límite de que la Tierra es infinitamente masiva en relación con el objeto. Encontraremos una expresión más general para U_g en el capítulo 12.) En el capítulo 5 también hemos calculado el trabajo que realiza la fuerza gravitacional sobre un objeto que se eleva por una altura h para ser $W_g = -mgh$. Por esto vemos que el trabajo realizado por la fuerza gravitacional y la energía potencial gravitacional para un objeto levantado desde el reposo a una altura h están relacionados por

$$\Delta U_g = -W_g. \quad (6.3)$$

Consideremos la energía potencial gravitacional en una situación específica. Un levantador de pesas que levanta una barra con pesas con masa m . El atleta comienza con la barra con pesas en el piso, como se muestra en la figura 6.2a). En $y = 0$, la energía potencial gravitacional se puede definir como $U_g = 0$. El levantador toma entonces la barra con pesas, la levanta a una altura de $y = h/2$, y la mantiene ahí, como se muestra en la figura 6.2b). La energía potencial gravitacional es ahora $U_g = mgh/2$, y el trabajo realizado por la gravedad sobre la barra con pesas es $W_g = -mgh/2$. El levantador de pesas luego eleva la barra sobre su cabeza a una altura de $y = h$, como se muestra en la figura 6.2c). La energía potencial gravitacional es ahora $U_g = mgh$, y el trabajo realizado por la gravedad durante esta parte del levantamiento es $W_g = -mgh/2$. Luego de completar el levantamiento, el levantador de pesas suelta la barra con pesas, y cae al piso como se ilustra en la figura 6.2d). La energía potencial gravitacional de la barra en el piso es, nuevamente, $U_g = 0$, y el trabajo realizado por la gravedad durante la caída es $W_g = mgh$.

La ecuación 6.3 es verdadera incluso para trayectorias complicadas que comprenden movimientos horizontales y verticales del objeto, porque la fuerza gravitacional no hace ningún trabajo durante los segmentos horizontales del movimiento. Durante el movimiento horizontal, el desplazamiento es perpendicular a la fuerza de gravedad (que siempre apunta de manera vertical hacia abajo), y por esta razón el producto escalar entre los vectores fuerza y desplazamiento es cero; por lo tanto, no se realiza ningún trabajo.

Levantar cualquier masa a una elevación más alta implica hacer un trabajo contra la fuerza de gravedad y genera un aumento en energía potencial gravitacional de la masa. Esta energía se puede almacenar para uso posterior. El principio se emplea, por ejemplo, en muchas presas hidroeléctricas. El exceso de electricidad generada por las turbinas se usa para bombear agua a un reservorio a una elevación más alta. Ahí constituye una reserva que se puede usar en tiempos de alta demanda de energía o de bajo suministro de agua. Expresado en términos generales, si ΔU_g es positiva, existe el potencial (de ahí el nombre *energía potencial*) para permitir que ΔU_g sea negativa en el futuro y de este modo obtener trabajo positivo, ya que $W_g = -\Delta U_g$.

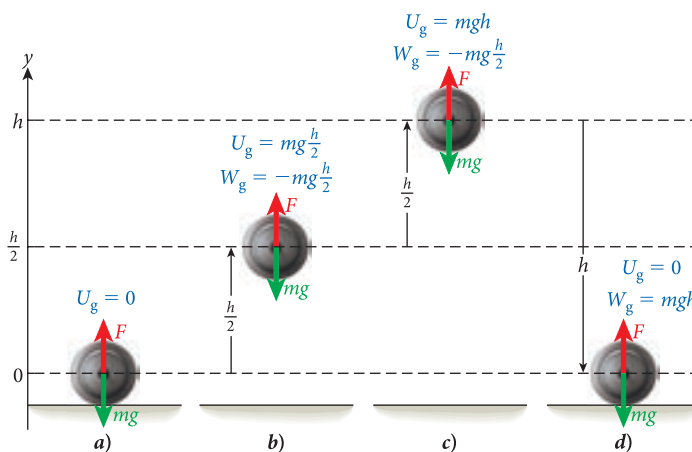


FIGURA 6.2 Levantamiento de una barra con pesas y energía potencial (el diagrama muestra la barra con pesas en vista lateral y omite al levantador de pesas). El peso de la barra con pesas es mg , y la fuerza normal que ejerce el piso o el levantador de pesas para mantener arriba el peso es F . a) La barra con pesas está inicialmente sobre el piso. b) El levantador de pesas levanta la barra de masa m a una altura de $h/2$ y la mantiene ahí. c) El levantador de pesas eleva la barra una distancia adicional $h/2$, hasta una altura h y la mantiene ahí. d) El levantador de pesas deja caer la barra con pesas al piso.

6.2 Fuerzas conservativas y no conservativas

Antes de poder calcular la energía potencial a partir de una fuerza dada, tenemos que preguntar: ¿Se puede usar cualquier tipo de fuerzas para almacenar energía potencial para usarla posteriormente? Si no, ¿qué tipos de fuerza podemos usar? Para responder a esta pregunta, necesitamos considerar lo que le sucede al trabajo que realiza una fuerza cuando se invierte la dirección de la trayectoria que sigue un objeto. En el caso de la fuerza gravitacional, ya hemos visto lo que sucede. Como se muestra en la figura 6.3, el trabajo que realiza la fuerza F_g cuando se levanta un objeto de masa m de la elevación y_A a y_B tiene la misma magnitud, pero signo opuesto, que el trabajo que hace la fuerza F_g cuando se baja el objeto de la elevación y_B a la elevación y_A . Esto significa que el trabajo total realizado por F_g al subirse el objeto desde una elevación a otra diferente y luego regresarlo a la misma elevación es cero. Este hecho es la base para la definición de una fuerza conservativa (vea la figura 6.4a).

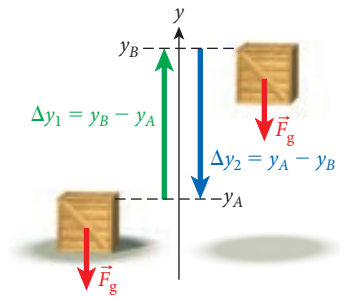


FIGURA 6.3 Vectores de fuerza gravitacional y desplazamiento para subir y bajar una caja.

Definición

Una **fuerza conservativa** es cualquier fuerza para la cual el trabajo realizado en una trayectoria cerrada es cero. Una fuerza que no cumple este requisito se llama **fuerza no conservativa**.

Para las fuerzas conservativas podemos inmediatamente expresar dos consecuencias de esta definición:

1. Si conocemos el trabajo, $W_{A \rightarrow B}$, realizado por una fuerza conservativa sobre un objeto al moverse éste por una trayectoria del punto A al punto B , entonces también conocemos el trabajo, $W_{B \rightarrow A}$, que realiza la misma fuerza sobre el objeto cuando éste se mueve por la trayectoria en el sentido opuesto, del punto B al punto A (vea la figura 6.4b):

$$W_{B \rightarrow A} = -W_{A \rightarrow B} \quad (\text{para fuerzas conservativas}). \quad (6.4)$$

La prueba de esta aseveración se obtiene a partir de la condición de trabajo cero en una trayectoria cerrada. Como la trayectoria de A a B a A forma una trayectoria cerrada, la suma de las aportaciones de trabajo en la trayectoria tiene que ser igual a cero. En otras palabras,

$$W_{A \rightarrow B} + W_{B \rightarrow A} = 0,$$

de lo cual se desprende de inmediato la ecuación 6.4.

2. Si conocemos el trabajo $W_{A \rightarrow B, \text{tray } 1}$, que realiza una fuerza conservativa sobre un objeto que se mueve por la trayectoria 1 del punto A al punto B , entonces también conocemos el trabajo, $W_{A \rightarrow B, \text{tray } 2}$, que realiza la misma fuerza sobre el objeto cuando usa cualquier otra trayectoria 2 para ir del punto A al punto B (vea la figura 6.4c). El trabajo es el mismo; el trabajo que realiza una fuerza conservativa es independiente de la trayectoria que siga el objeto.

$$W_{A \rightarrow B, \text{tray } 2} = W_{A \rightarrow B, \text{tray } 1} \quad (6.5)$$

(para las trayectorias arbitrarias 1 y 2, para fuerzas conservativas).

Esta aseveración también es fácil de probar por la definición de una fuerza conservativa como aquella para la cual el trabajo realizado en cualquier trayectoria cerrada es cero. La trayectoria del punto A al punto B sobre la trayectoria 1 y el regreso de B a A sobre la trayectoria 2 es una trayectoria cerrada; por lo tanto, $W_{A \rightarrow B, \text{tray } 2} + W_{B \rightarrow A, \text{tray } 1} = 0$. Ahora usamos la ecuación 6.4; la dirección de la trayectoria $W_{B \rightarrow A, \text{tray } 1} = -W_{A \rightarrow B, \text{tray } 1}$. Combinando estos dos resultados, obtenemos $W_{A \rightarrow B, \text{tray } 2} - W_{A \rightarrow B, \text{tray } 1} = 0$, de la cual se deduce la ecuación 6.5.

Una aplicación física de los resultados matemáticos que se acaban de dar se refiere a ir en bicicleta de un punto, por ejemplo la casa de usted, a otro punto, por ejemplo la piscina. Suponiendo que su casa está ubicada al pie de una colina y que la piscina está en la cima, podemos usar la figura 6.4c) para ilustrar este ejemplo, en donde el punto A representa su casa, y el punto B la piscina. Lo que la aseveración anterior sobre las fuerzas conservativas significa es que usted realiza la misma cantidad de trabajo cuando va en bicicleta de su casa a la piscina, independientemente de la ruta que seleccione. Usted puede tomar una ruta más corta y más empinada, o una ruta más

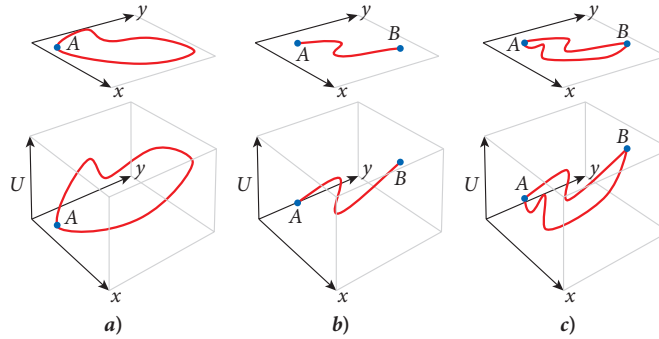


FIGURA 6.4 Varias trayectorias para la energía potencial relacionada con una fuerza conservativa como función de las posiciones x y y , con U proporcional a y . Las gráficas bidimensionales son proyecciones de las gráficas tridimensionales sobre el plano xy . a) Bucle o trayectoria cerrada. b) Trayectoria del punto A al punto B . c) Dos trayectorias diferentes entre los puntos A y B .

plana y más larga; puede incluso tomar una ruta que sube y baja entre los puntos A y B . El trabajo total será el mismo. Como sucede con casi todos los ejemplos de la vida real, sin embargo, aquí también hay algunas complicaciones. Es importante saber si usted usa el freno de mano; hay que considerar la resistencia del aire y la fricción de los neumáticos, y su cuerpo también realiza otras funciones metabólicas durante el viaje, además de mover su masa y la de la bicicleta del punto A al punto B . Pero este ejemplo puede ayudarle a crear una imagen mental de los conceptos de independencia de ruta del trabajo y de las fuerzas conservativas.

La fuerza gravitacional, como hemos visto, es un ejemplo de una fuerza conservativa. Otro ejemplo de una fuerza conservativa es la fuerza de resorte. Sin embargo, no todas las fuerzas son conservativas. ¿Cuáles fuerzas son no conservativas?

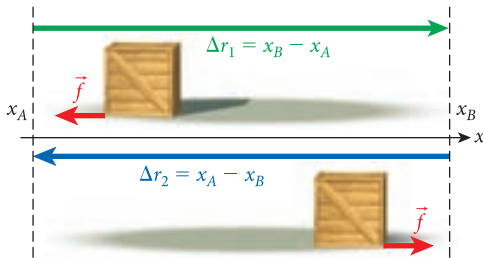


FIGURA 6.5 Vector fuerza de fricción y vector de desplazamiento para el proceso de deslizar una caja hacia delante y hacia atrás por una superficie con fricción.

Fuerzas de fricción

Consideremos lo que sucede al deslizar una caja sobre una superficie horizontal, del punto A al punto B y luego de regreso al punto A , si el coeficiente de fricción cinética entre la caja y la superficie es μ_k (figura 6.5). Como hemos aprendido, la fuerza de fricción está dada por $f = \mu_k N = \mu_k mg$ y siempre apunta en el sentido opuesto al del movimiento. Usemos los resultados del capítulo 5 y encontremos el trabajo realizado por esta fuerza de fricción. Como la fuerza de fricción es constante, la cantidad de trabajo que hace se determina simplemente tomando el producto escalar entre la fuerza de fricción y los vectores de desplazamiento.

Para el movimiento de A a B usamos la fórmula general de producto escalar para el trabajo que realiza una fuerza constante:

$$W_{f1} = \vec{f} \cdot \Delta\vec{r}_1 = -f \cdot (x_B - x_A) = -\mu_k mg \cdot (x_B - x_A).$$

Hemos supuesto que el eje positivo de x apunta a la derecha, como es convencional, de modo que la fuerza de fricción apunta en la dirección x negativa. Para el movimiento de regreso de B a A , resulta que la fuerza de fricción señala en la dirección x positiva. Por lo tanto, el trabajo realizado para esta parte de la ruta es

$$W_{f2} = \vec{f} \cdot \Delta\vec{r}_2 = f \cdot (x_A - x_B) = \mu_k mg \cdot (x_A - x_B).$$

Este resultado nos lleva a concluir que el trabajo total que realiza la fuerza de fricción al deslizar la caja por la superficie en una trayectoria cerrada del punto A al punto B y de regreso al punto A , no es cero, sino

$$W_f = W_{f1} + W_{f2} = -2\mu_k mg(x_B - x_A) < 0. \tag{6.6}$$

Parece haber una contradicción entre este resultado y el teorema del trabajo y la energía cinética. La caja comienza con energía cinética cero y en cierta posición, y termina con energía cinética cero y en la misma posición. De acuerdo con el teorema del trabajo y la energía cinética, el trabajo total realizado debería ser cero. Esto nos lleva a concluir que la fuerza de fricción no realiza trabajo del mismo modo en que lo hace una fuerza conservativa. En vez de esto, la fuerza de fricción convierte la energía cinética y/o la energía potencial en una energía interna de excitación de los dos objetos que ejercen la fricción entre ellos (la caja y la superficie de apoyo, en este

caso). Esta energía interna de excitación puede tomar la forma de vibraciones o de energía térmica o incluso de energía química o eléctrica. El punto principal es que la conversión de energía cinética y/o potencial a energía interna de excitación no es reversible; es decir, la energía interna de excitación no se puede reconvertir totalmente en energía cinética o potencial.

Así vemos que la fuerza de fricción es un ejemplo de fuerza no conservativa. Como la fuerza de fricción siempre actúa en sentido opuesto al del desplazamiento, la disipación de energía debida a la fuerza de fricción siempre es negativa, sin que importe si la trayectoria es cerrada o no. El trabajo realizado por una fuerza conservativa, W , puede ser positivo o negativo, pero la disipación debida a la fuerza de fricción W_f , es siempre negativa; toma energía cinética y/o potencial y la convierte en energía interna de excitación. El uso del símbolo W_f para esta energía disipada es un recordatorio de que usamos el mismo procedimiento para calcularla que para calcular el trabajo para las fuerzas conservativas.

El hecho decisivo es que la fuerza de fricción cambia de dirección como función de la dirección del movimiento y causa disipación. El vector fuerza de fricción siempre es antiparalelo al vector velocidad; cualquier fuerza que tenga esta propiedad no puede ser conservativa. La disipación convierte la energía cinética en energía interna del objeto, lo cual constituye otra importante característica de una fuerza no conservativa. En la sección 6.7 examinaremos este punto con más detalle.

Otro ejemplo de fuerza no conservativa es la fuerza de la resistencia del aire. También es dependiente de la velocidad, y siempre apunta en la dirección opuesta a la del vector velocidad, igual que la fuerza de fricción cinética. Otro ejemplo más de fuerza no conservativa es la fuerza de amortiguamiento (que se explica en el capítulo 14). Ésta también es dependiente de la velocidad y opuesta a la dirección de la velocidad.

6.1 Ejercicio en clase

Una persona empuja una caja con masa de 10.0 kg una distancia de 5.00 m por el piso. El coeficiente de fricción cinética entre la caja y el piso es de 0.250. Luego, la persona toma la caja, la levanta a una altura de 1.00 m, la lleva de regreso al punto de partida y la pone nuevamente sobre el suelo. ¿Cuánto trabajo ha realizado la persona sobre la caja?

- | | |
|-----------|-----------|
| a) 0 J | d) 123 J |
| b) 12.5 J | e) 25.0 J |
| c) 98.1 J | f) 246 J |

6.3 Trabajo y energía potencial

Al considerar el trabajo realizado por la fuerza gravitacional y su relación con la energía potencial gravitacional en la sección 6.1, encontramos que el cambio en la energía potencial es igual al valor negativo del trabajo realizado por la fuerza, $\Delta U_g = -W_g$. Esta relación es verdadera para todas las fuerzas conservativas. De hecho, podemos usarla para definir el concepto de energía potencial.

Para cualquier fuerza conservativa, el cambio en la energía potencial debido a algún reacomodo espacial de un sistema es igual al valor negativo del trabajo realizado por la fuerza conservativa durante este reacomodo espacial:

$$\Delta U = -W. \quad (6.7)$$

Ya hemos visto que el trabajo está dado por

$$W = \int_{x_0}^x F_x(x') dx'. \quad (6.8)$$

Combinando las ecuaciones 6.7 y 6.8 obtenemos la relación entre la fuerza conservativa y la energía potencial:

$$\Delta U = U(x) - U(x_0) = - \int_{x_0}^x F_x(x') dx'. \quad (6.9)$$

Podríamos usar la ecuación 6.9 para calcular el cambio en energía potencial debido a la acción de cualquier fuerza conservativa. ¿Por qué tenemos que molestarnos con el concepto de energía potencial cuando podemos tratar directamente con la fuerza conservativa misma? La respuesta es que el cambio en energía potencial depende sólo de los estados inicial y final del sistema, y es independiente de la trayectoria que se siga para llegar al estado final. ¡A menudo contamos con una expresión sencilla para la energía potencial (y por lo tanto para su cambio) antes de trabajar en la resolución de un problema! Por lo contrario, evaluar la integral del lado derecho de la ecuación 6.9 podría ser bastante complicado. Y, de hecho, el ahorro en el cálculo no es la única razón, ya que el uso de consideraciones de energía se basa en una ley física subyacente (la ley de conservación de la energía, que se presentará en la sección 6.4).

En el capítulo 5 evaluamos esta integral para la fuerza de gravedad y para la fuerza de resorte. El resultado para la fuerza gravitacional es

$$\Delta U_g = U_g(y) - U_g(y_0) = - \int_{y_0}^y (-mg) dy' = mg \int_{y_0}^y dy' = mgy - mgy_0. \quad (6.10)$$

Esto concuerda con el resultado que encontramos en la sección 6.1. En consecuencia, la energía potencial gravitacional es

$$U_g(y) = mgy + \text{constante.} \quad (6.11)$$

Observe que podemos determinar la energía potencial en la coordenada y sólo dentro del límite de una constante aditiva. La única cantidad físicamente observable, el trabajo realizado, se relaciona con la *diferencia* en la energía potencial. Si sumamos una constante arbitraria al valor de la energía potencial en cualquier punto, la diferencia entre las energías potenciales permanece sin cambio.

Del mismo modo, encontramos para la fuerza de resorte que

$$\begin{aligned} \Delta U_s &= U_s(x) - U_s(x_0) \\ &= - \int_{x_0}^x F_s(x') dx' \\ &= - \int_{x_0}^x (-kx') dx' \\ &= k \int_{x_0}^x x' dx' \\ \Delta U_s &= \frac{1}{2} kx^2 - \frac{1}{2} kx_0^2. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Por lo tanto, la energía potencial asociada con la elongación de un resorte desde su posición de equilibrio, en $x = 0$, es

$$U_s(x) = \frac{1}{2} kx^2 + \text{constante.} \quad (6.13)$$

De nuevo, la energía potencial se determina sólo dentro del límite de una constante aditiva. Sin embargo, recuerde que las situaciones físicas a menudo forzarán a la elección de esta constante aditiva.

6.4 Energía potencial y fuerza

¿Cómo podemos encontrar la fuerza conservativa cuando tenemos información sobre la energía potencial correspondiente? En cálculo diferencial e integral, derivar es la operación inversa de integrar, y en la ecuación 6.9 se usa la integración para el cambio en la energía potencial. Por lo tanto, tomamos la derivada de la expresión para obtener la fuerza a partir de la energía potencial:

$$F_x(x) = - \frac{dU(x)}{dx}. \quad (6.14)$$

La ecuación 6.14 es una expresión para la fuerza en términos de la energía potencial para el caso de movimiento en una dimensión. Como usted puede ver por esta expresión, cualquier constante que usted sume a la energía potencial no tendrá ninguna influencia sobre los resultados que obtenga para la fuerza, porque la derivada de un término constante es cero. Ésta es una prueba más de que la energía potencial se puede determinar sólo dentro del límite de una constante aditiva.

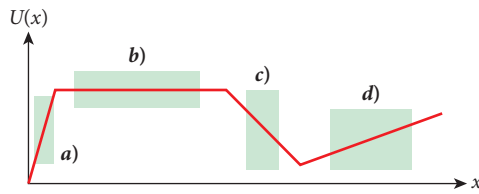
No consideraremos el movimiento en situaciones tridimensionales sino hasta más adelante en este libro. Sin embargo, para completar el tema, podemos dar la expresión para la fuerza en términos de la energía potencial para el caso de movimiento tridimensional:

$$\vec{F}(\vec{r}) = - \left(\frac{\partial U(\vec{r})}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial U(\vec{r})}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial U(\vec{r})}{\partial z} \hat{z} \right). \quad (6.15)$$

Aquí, las componentes de la fuerza están dadas como derivadas parciales con respecto a las coordenadas correspondientes. Si usted estudia la carrera de ingeniería o la de ciencias, encontrará derivadas parciales en muchas situaciones.

6.2 Ejercicio en clase

En esta figura se muestra la energía potencial, $U(x)$, como función de la posición, x . ¿En qué región es máxima la magnitud de la fuerza?



Potencial de Lennard-Jones

Empíricamente, la energía potencial asociada con la interacción de dos átomos en una molécula como función de la separación de los átomos tiene una forma que se conoce como *potencial de Lennard-Jones*. Esta energía potencial como función de la separación, x , está dada por

$$U(x) = 4U_0 \left[\left(\frac{x_0}{x} \right)^{12} - \left(\frac{x_0}{x} \right)^6 \right]. \quad (6.16)$$

Aquí U_0 es una energía constante y x_0 es una longitud constante. El potencial de Lennard-Jones es uno de los conceptos más importantes en física atómica y se usa para la mayoría de simulaciones numéricas de sistemas moleculares.

EJEMPLO 6.1 Fuerza molecular

PROBLEMA

¿Cuál es la fuerza que resulta del potencial de Lennard-Jones?

SOLUCIÓN

Simplemente tomamos el negativo de la derivada de la energía potencial con respecto a x :

$$\begin{aligned} F_x(x) &= -\frac{dU(x)}{dx} \\ &= -\frac{d}{dx} \left(4U_0 \left[\left(\frac{x_0}{x} \right)^{12} - \left(\frac{x_0}{x} \right)^6 \right] \right) \\ &= -4U_0 x_0^{12} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x^{12}} \right) + 4U_0 x_0^6 \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x^6} \right) \\ &= 48U_0 x_0^{12} \frac{1}{x^{13}} - 24U_0 x_0^6 \frac{1}{x^7} \\ &= \frac{24U_0}{x_0} \left[2 \left(\frac{x_0}{x} \right)^{13} - \left(\frac{x_0}{x} \right)^7 \right]. \end{aligned}$$

PROBLEMA

¿En qué valor de x tiene el potencial de Lennard-Jones su mínimo?

SOLUCIÓN

Como acabamos de encontrar que la fuerza es la derivada de la función de energía potencial, todo lo que tenemos que hacer es encontrar el (los) punto(s) donde $F(x) = 0$. Esto nos lleva a

$$F_x(x)|_{x=x_{\min}} = \frac{24U_0}{x_0} \left[2 \left(\frac{x_0}{x_{\min}} \right)^{13} - \left(\frac{x_0}{x_{\min}} \right)^7 \right] = 0.$$

(continúa)

(continuación)

Esta condición se cumple sólo si la expresión en el paréntesis mayor es cero; entonces

$$2 \left(\frac{x_0}{x_{\min}} \right)^{13} = \left(\frac{x_0}{x_{\min}} \right)^7.$$

Multiplicando ambos lados por $x^{13}x_0^{-7}$ obtenemos

$$2x_0^6 = x_{\min}^6$$

o

$$x_{\min} = 2^{1/6} x_0 \approx 1.1225x_0.$$

Matemáticamente, no basta con mostrar que la derivada es cero para establecer que el potencial tiene en realidad un mínimo en esta coordenada. Debemos también asegurarnos de que la segunda derivada sea positiva. Usted puede hacer esto como ejercicio.

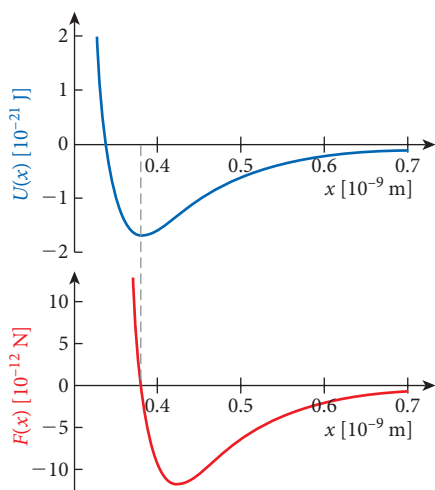


FIGURA 6.6 a) Dependencia de la energía potencial con respecto a la coordenada x de la función de energía potencial en la ecuación 6.16. b) Dependencia de la fuerza con respecto a la coordenada x de la función de energía potencial en la ecuación 6.16.

La figura 6.6a) muestra la forma del potencial de Lennard-Jones, trazado a partir de la ecuación 6.16, con $x_0 = 0.34$ nm y $U_0 = 1.70 \cdot 10^{-21}$ J, para la interacción de dos átomos de argón como función de la separación de los centros de los dos átomos. La figura 6.6b) grafica la fuerza molecular correspondiente, usando la expresión que encontramos en el ejemplo 6.1. La línea vertical punteada en gris marca la coordenada donde el potencial tiene un mínimo y donde, por consecuencia, la fuerza es cero. También observe que, cerca del punto mínimo del potencial (con un error de ± 0.1 nm), la fuerza se puede aproximar estrechamente por una función lineal, $F_x(x) \approx -k(x - x_{\min})$. Esto significa que, cerca del mínimo, la fuerza molecular debida al potencial de Lennard-Jones se comporta como una fuerza de resorte.

El capítulo 5 mencionaba que en muchos sistemas físicos aparecen fuerzas similares a la fuerza de resorte, y la conexión entre energía potencial y fuerza que se acaba de describir nos dice por qué. Vea, por ejemplo, el patinador en el medio tubo de la figura 6.7. La superficie curva del medio tubo se aproxima a la forma del potencial de Lennard-Jones cerca del mínimo. Si el patinador está en $x = x_{\min}$, puede quedarse ahí en reposo. Si está a la izquierda del mínimo, donde $x < x_{\min}$, entonces el medio tubo ejerce una fuerza sobre él, que apunta hacia la derecha, $F_x > 0$; cuanto más a la izquierda se mueve, mayor se vuelve la fuerza. Del lado derecho del medio tubo, para $x > x_{\min}$, la fuerza apunta a la izquierda; es decir, $F_x < 0$. De nuevo, estas observaciones se pueden resumir con una expresión de fuerza que sigue de manera aproximada la ley de Hooke: $F_x(x) = -k(x - x_{\min})$.

Además, podemos llegar a esta misma conclusión matemáticamente escribiendo una expansión de Taylor para $F_x(x)$ alrededor de x_{\min} :

$$F_x(x) = F_x(x_{\min}) + \left(\frac{dF_x}{dx} \right)_{x=x_{\min}} \cdot (x - x_{\min}) + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2F_x}{dx^2} \right)_{x=x_{\min}} \cdot (x - x_{\min})^2 + \dots$$

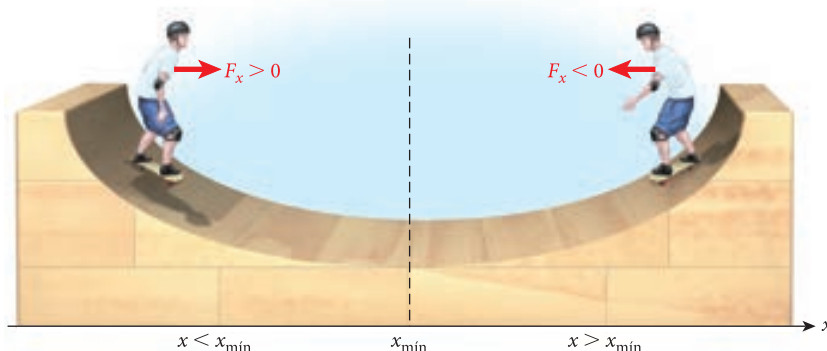


FIGURA 6.7 Patinador en un medio tubo.

Como estamos expandiendo alrededor del mínimo de energía potencial, y como acabamos de mostrar que ahí la fuerza es cero, tenemos $F_x(x_{\min}) = 0$. Si hay un mínimo del potencial en $x = x_{\min}$, entonces la segunda derivada del potencial debe ser positiva. Como, de acuerdo con la ecuación 6.14, la fuerza es $F_x(x) = -dU(x)/dx$, esto significa que la derivada de la fuerza es $dF_x(x)/dx = -d^2U(x)/dx^2$. En el mínimo del potencial, tenemos por lo tanto $(dF_x/dx)_{x=x_{\min}} < 0$. Expresando el valor de la primera derivada de la fuerza en la coordenada x_{\min} como una constante, $(dF_x/dx)_{x=x_{\min}} = -k$ (con $k > 0$), encontramos $F_x(x) = -k(x - x_{\min})$, si estamos suficientemente cerca de x_{\min} podemos despreciar los términos proporcionales a $(x - x_{\min})^2$ y potencias más altas.

Estos argumentos físicos y matemáticos establecen por qué es importante estudiar en detalle la ley de Hooke y las ecuaciones de movimiento que resultan de ésta. En este capítulo estudiamos el trabajo realizado por la fuerza de resorte. En el capítulo 14 sobre oscilaciones, analizaremos el movimiento de un objeto bajo la influencia de la fuerza de resorte.

6.1 Oportunidad de autoexamen

Algunas fuerzas de la naturaleza dependen del cuadrado inverso de la distancia entre los objetos elevada al cuadrado. ¿Cómo depende de la distancia entre los objetos la energía potencial asociada con una fuerza así?

6.5 Conservación de la energía mecánica

Hemos definido la energía potencial en referencia a un sistema de objetos. Examinaremos diferentes clases de sistemas generales en capítulos posteriores; pero aquí nos enfocaremos en un tipo específico de sistema: un **sistema aislado** que, por definición, es un sistema de objetos que ejercen fuerzas entre sí, pero para los cuales ninguna fuerza exterior al sistema causa cambios de energía dentro del sistema. Esto significa que no se transfiere energía hacia adentro del sistema ni hacia afuera de éste. Esta situación tan común es muy importante en la ciencia y en ingeniería, y ha sido estudiada ampliamente. Uno de los conceptos fundamentales de la física se refiere a la energía dentro de un sistema aislado.

Para investigar este concepto, comenzamos con una definición de la **energía mecánica**, E , como la suma de la energía cinética y la energía potencial:

$$E = K + U. \quad (6.17)$$

(Más adelante, cuando avancemos más allá de la mecánica, agregaremos otras clases de energía a esta suma y la llamaremos *energía total*).

Para cualquier proceso mecánico que ocurra dentro de un sistema aislado y comprenda sólo fuerzas conservativas, la energía mecánica total se conserva. Esto significa que la energía mecánica total permanece constante en el tiempo:

$$\Delta E = \Delta K + \Delta U = 0. \quad (6.18)$$

Una forma alternativa de escribir este resultado (que deduciremos más adelante) es

$$K + U = K_0 + U_0, \quad (6.19)$$

donde K_0 y U_0 son la energía cinética inicial y la energía potencial inicial, respectivamente. Esta relación, que se llama ley de **conservación de la energía mecánica**, no implica que la energía cinética del sistema no pueda cambiar, o que la energía potencial sola permanezca constante. Lo que expresa es que sus cambios se compensan exactamente y por lo tanto se contrarrestan uno a otro. Vale repetir que la conservación de la energía mecánica es válida sólo para fuerzas conservativas y para un sistema aislado, para el cual se puede despreciar la influencia de fuerzas externas.

DERIVACIÓN 6.1

Como ya hemos visto en la ecuación 6.7, si una fuerza conservativa hace trabajo, entonces el trabajo causa un cambio en la energía potencial:

$$\Delta U = -W.$$

(Si la fuerza que se está considerando no es conservativa, esta relación no es válida en general, y la conservación de la energía mecánica no es válida.)

En el capítulo 5 aprendimos que la relación entre el cambio en energía cinética y el trabajo que realiza una fuerza es (ecuación 5.15):

$$\Delta K = W.$$

(continúa)

(continuación)

Combinando estos dos resultados, obtenemos

$$\Delta U = -\Delta K \Rightarrow \Delta U + \Delta K = 0.$$

Usando $\Delta U = U - U_0$ y $\Delta K = K - K_0$, encontramos

$$0 = \Delta U + \Delta K = U - U_0 + K - K_0 = U + K - (U_0 + K_0) \Rightarrow \\ U + K = U_0 + K_0.$$

Observe que la derivación 6.1 no hizo ninguna referencia a la trayectoria específica por la cual la fuerza realizó el trabajo que causó el reacomodo. De hecho, usted no necesita saber ningún detalle acerca del trabajo ni de la fuerza, salvo que la fuerza es conservativa. Tampoco necesita saber cuántas fuerzas conservativas actúan. Si hay presente más de una fuerza conservativa, usted interpreta ΔU como la suma de todos los cambios de energía potencial, y W como el trabajo total realizado por todas las fuerzas conservativas, y la derivación sigue siendo válida.

La ley de conservación de la energía nos permite resolver fácilmente un enorme número de problemas que incluyen sólo fuerzas conservativas, problemas que habrían sido muy difíciles de resolver sin esta ley. Más adelante, en este capítulo, se presentará el teorema más general del trabajo y la energía para la mecánica, que incluye fuerzas no conservativas. Esta ley nos permitirá resolver una gama todavía más amplia de problemas, incluyendo los que comprenden la fricción.

La ecuación 6.19 introduce nuestra primera ley de conservación, la ley de conservación de la energía mecánica. Los capítulos 18 y 20 extenderán esta ley para incluir también la energía térmica (calor). El capítulo 7 presentará una ley de conservación para el momento lineal. Cuando expliquemos la rotación en el capítulo 10, encontraremos una ley de conservación para el momento angular. Al estudiar la electricidad y el magnetismo, encontraremos una ley de conservación para la carga neta (capítulo 21), y al ver la física de partículas elementales (capítulo 39), encontraremos leyes de conservación para otras cantidades diversas. Esta lista tiene el propósito de que usted analice un tema central de la física: el descubrimiento de las leyes de conservación y su uso para determinar la dinámica de diversos sistemas.

Antes de resolver un problema de muestra, es oportuno hacer un comentario más sobre el concepto de un sistema aislado. En situaciones que incluyen el movimiento de objetos bajo la influencia de la fuerza gravitacional de la Tierra, el sistema aislado al que aplicamos la ley de conservación de la energía realmente consiste en el objeto móvil más toda la Tierra. Sin embargo, al usar la aproximación de que la fuerza gravitacional es una constante, suponemos que la Tierra es infinitamente masiva (y que el objeto móvil está cercano a la superficie de la Tierra). Por lo tanto, el reacomodo del sistema no puede dar por resultado ningún cambio en la energía cinética de la Tierra. De modo que calculamos todos los cambios en la energía cinética y energía potencial sólo para el “socio minoritario”: el objeto que se mueve bajo la influencia de la fuerza gravitacional. Esta fuerza es conservativa e interna al sistema que consiste en la Tierra más el objeto móvil, de modo que se cumplen todas las condiciones para la utilización de la ley de conservación de la energía.

Ejemplos específicos de situaciones que incluyen objetos que se mueven bajo la influencia de la fuerza gravitacional son el movimiento de proyectiles y el movimiento de péndulos que ocurren cerca de la superficie de la Tierra.



FIGURA 6.8 Ilustración de una posible trayectoria de proyectil (parábola roja) desde el patio hasta el campamento, abajo y enfrente del portón del castillo. La línea azul indica la horizontal.

PROBLEMA RESUELTO 6.1 La defensa con catapulta

Su tarea es defender el castillo de Neuschwanstein de sus atacantes (figura 6.8). Usted tiene una catapulta con la que puede arrojar una roca con una rapidez de lanzamiento de 14.2 m/s desde el patio, por arriba de los muros del castillo hasta el campamento de los atacantes, frente al castillo, a una elevación de 7.20 m debajo de la del patio.

PROBLEMA

¿Cuál es la rapidez que tendrá la roca al tocar el suelo en el campamento de los atacantes? (Desprecie la resistencia del aire.)

SOLUCIÓN**PIENSE**

Podemos resolver este problema aplicando la ley de conservación de la energía mecánica. Una vez que la catapulta lanza una roca, sólo la fuerza gravitacional de la gravedad actúa sobre la roca. Así, la energía mecánica total se conserva, lo cual significa que la suma de las energías cinética y potencial de la roca siempre será igual a la energía mecánica total.

ESBOCE

En la figura 6.9 se muestra la trayectoria de la roca, donde la rapidez inicial de la roca es v_0 , la energía cinética inicial K_0 , la energía potencial inicial U_0 y la altura inicial y_0 . La rapidez final es v , la energía cinética final es K , la energía potencial final es U y la altura final es y .

INVESTIGUE

Podemos usar la conservación de la energía mecánica para escribir

$$E = K + U = K_0 + U_0,$$

donde E es la energía mecánica total. La energía cinética del proyectil se puede expresar como

$$K = \frac{1}{2}mv^2,$$

donde m es la masa del proyectil y v es su rapidez cuando toca el suelo. La energía potencial del proyectil se puede expresar como

$$U = mgy,$$

donde y es la componente vertical del vector de posición del proyectil cuando toca el suelo.

SIMPLIFIQUE

Sustituimos K y U en $E = K + U$ para obtener

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + mgy = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgy_0.$$

La masa de la roca, m , se cancela, y nos quedamos con

$$\frac{1}{2}v^2 + gy = \frac{1}{2}v_0^2 + gy_0.$$

Despejamos la rapidez:

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2g(y_0 - y)}. \quad (6.20)$$

CALCULE

De acuerdo con el planteamiento del problema, $y_0 - y = 7.20$ m y $v_0 = 14.2$ m/s. Así, encontramos la rapidez final, para

$$v = \sqrt{(14.2 \text{ m/s})^2 + 2(9.81 \text{ m/s}^2)(7.20 \text{ m})} = 18.51766724 \text{ m/s}.$$

REDONDEE

La altura relativa se nos dio con tres cifras significativas, de modo que presentamos nuestra respuesta final como

$$v = 18.5 \text{ m/s}.$$

VUELVA A REVISAR

Nuestra respuesta para la rapidez de la roca al tocar tierra frente al castillo es de 18.5 m/s, en comparación con la rapidez inicial de 14.2 m/s, lo cual parece razonable. Esta rapidez tiene que ser mayor debido al incremento de la diferencia en energía potencial gravitacional, y nos tranquiliza que nuestra respuesta pase esta sencilla prueba.

Cómo sólo nos interesaba la rapidez en el impacto, ni siquiera necesitamos conocer el ángulo inicial de lanzamiento θ_0 para resolver el problema. Todos los ángulos de lanzamiento darán el

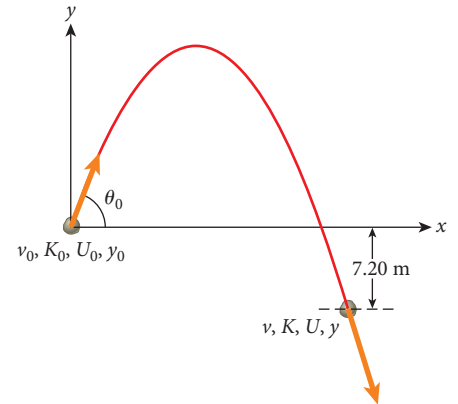


FIGURA 6.9 Trayectoria de la roca lanzada por la catapulta.

(continúa)

(continuación)

mismo resultado (para una rapidez de lanzamiento dada), lo cual es un hallazgo algo sorprendente. (Por supuesto, si usted estuviera en esta situación, es obvio que querría apuntar suficientemente alto para salvar el muro del castillo, y con suficiente precisión para dar en el campamento de los atacantes.)

Podemos también resolver este problema usando los conceptos de movimiento de proyectil, lo cual es útil para volver a revisar nuestra respuesta y para mostrar el poder que tiene la aplicación del concepto de conservación de la energía. Comenzamos escribiendo las componentes del vector inicial de velocidad \vec{v}_0 :

$$v_{x0} = v_0 \cos \theta_0$$

y

$$v_{y0} = v_0 \sin \theta_0.$$

La componente final x de la velocidad, v_x , es igual a la componente inicial x de la velocidad inicial v_{x0} ,

$$v_x = v_{x0} = v_0 \cos \theta_0.$$

La componente final de la velocidad en la dirección y puede obtenerse a partir del resultado del análisis del movimiento del proyectil, en el capítulo 3:

$$v_y^2 = v_{y0}^2 - 2g(y - y_0).$$

Por lo tanto, la rapidez final de la roca cuando toca el suelo es

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \\ &= \sqrt{(v_0 \cos \theta_0)^2 + (v_{y0}^2 - 2g(y - y_0))} \\ &= \sqrt{v_0^2 \cos^2 \theta_0 + v_0^2 \sin^2 \theta_0 - 2g(y - y_0)}. \end{aligned}$$

Recordando que $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$, podemos simplificar más y obtener

$$v = \sqrt{v_0^2(\cos^2 \theta_0 + \sin^2 \theta_0) - 2g(y - y_0)} = \sqrt{v_0^2 - 2g(y - y_0)} = \sqrt{v_0^2 + 2g(y_0 - y)}.$$

Esto es lo mismo que la ecuación 6.20, que obtuvimos usando la conservación de la energía. Aun cuando el resultado final sea el mismo, el proceso de solución basado en la conservación de la energía fue considerablemente más fácil que el basado en la cinemática.

6.2 Oportunidad de autoexamen

En el problema resuelto 6.1, despreciamos la resistencia del aire. Explique de manera cualitativa cómo habría cambiado nuestra respuesta final si hubiésemos incluido los efectos de la resistencia del aire.

Como puede ver por el problema resuelto 6.1, la aplicación de la conservación de la energía mecánica nos equipa con una poderosa técnica para resolver problemas que parecen más bien complicados a primera vista.

En general, podemos determinar la rapidez final como función de la elevación en situaciones en las que actúa la fuerza gravitacional. Por ejemplo, considere la secuencia de imágenes de la figura 6.10. Se sueltan dos pelotas al mismo tiempo desde la misma altura en la parte más alta de dos rampas con diferentes formas. En el extremo inferior de las rampas, ambas pelotas llegan a la misma elevación inferior. Por lo tanto, en ambos casos, la diferencia de altura entre los puntos inicial y final es la misma. Ambas pelotas también experimentan fuerzas normales además de la fuerza de gravedad; sin embargo, las fuerzas normales no realizan ningún trabajo porque son perpendiculares a la superficie de contacto. Así, el producto escalar de la fuerza normal y los vectores de desplazamiento dan cero. (Hay una pequeña fuerza de fricción, pero es despreciable en este caso.) Las consideraciones de con-



FIGURA 6.10 Carrera de dos pelotas que bajan por diferentes inclinaciones, desde la misma altura.

servación de la energía (vea la ecuación 6.20 en el problema resuelto 6.1) nos dicen que la rapidez de ambas pelotas en el extremo inferior de las rampas debería ser la misma.

$$v = \sqrt{2g(y_0 - y)}.$$

Esta ecuación es un caso especial de la ecuación 6.20, con $v_0 = 0$. Observe que, dependiendo de la curva de la parte inferior de la rampa, este resultado podía ser más bien difícil de obtener usando la segunda ley de Newton. Sin embargo, aunque las velocidades en el extremo superior y en el extremo inferior de las rampas son las mismas para ambas pelotas, usted no puede concluir de este resultado que ambas pelotas llegan a la parte inferior al mismo tiempo. La secuencia de imágenes muestra claramente que éste no es el caso.

6.3 Oportunidad de autoexamen

¿Por qué la pelota de color más claro llega al fondo en la figura 6.10 antes que la otra pelota?

6.6 Trabajo y energía para la fuerza de resorte

En la sección 6.3 encontramos que la energía potencial almacenada en un resorte es: $U_s = \frac{1}{2}kx^2$, donde k es la constante del resorte, y x es el desplazamiento desde la posición de equilibrio. Aquí elegimos que la constante aditiva sea cero, lo cual corresponde a tener $U_s = 0/x$ con $k = 0$. Usando el principio de la conservación de la energía, podemos encontrar la velocidad v como función de la posición. Primero, podemos escribir, en general, para la energía mecánica total:

$$E = K + U_s = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2. \quad (6.21)$$

Una vez que conocemos la energía mecánica total, podemos despejar la velocidad de esta ecuación. ¿Cuál es la energía mecánica total? El punto de la elongación máxima de un resorte desde la posición de equilibrio se llama **amplitud**, A . Cuando el desplazamiento llega a la amplitud, la velocidad es en un instante cero. En este punto, la energía mecánica total de un objeto que oscila unido a un resorte es

$$E = \frac{1}{2}kA^2.$$

Sin embargo, la conservación de la energía mecánica significa que éste es el valor de la energía para cualquier punto de la oscilación del resorte. Sustituyendo la expresión anterior para E en la ecuación 6.21, se obtiene

$$\frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2. \quad (6.22)$$

De la ecuación 6.22 podemos obtener una expresión para la rapidez como función de la posición:

$$v = \sqrt{(A^2 - x^2) \frac{k}{m}}. \quad (6.23)$$

Observe que no nos apoyamos en la cinemática para obtener este resultado, ya que dicho procedimiento es más bien desafiante: otra prueba de que usar los principios de la conservación (en este caso, conservación de la energía mecánica) puede rendir formidables resultados. Volveremos a la ecuación del movimiento para una masa unido a un resorte en el capítulo 14.

PROBLEMA RESUELTO 6.2 La bala humana

En un acto circense favorito, llamado “la bala humana”, se dispara una persona desde un largo cañón, generalmente con una gran cantidad de humo y una sonora detonación para dar efecto teatral. Antes de que los hermanos italianos Zacchini, inventaran al cañón de aire comprimido para disparar balas humanas en la década de 1920, el inglés George Farini usaba un cañón de resorte para este propósito en la década de 1870.

Suponga que alguien quiere recrear el acto de la bala humana con resorte, de Farini, con un resorte colocado dentro de un cañón. Suponga que el cañón tiene una longitud de 4.00 m, con un resorte que se extiende en toda la longitud del cañón. Además, el cañón apunta de manera vertical, hacia el techo de la carpa del circo. La bala humana se hace bajar al interior del cañón y comprime el resorte hasta cierto punto. Se agrega una fuerza exterior para comprimir todavía más el resorte, hasta una longitud de sólo 0.70 m. A una altura de 7.50 m arriba de la boca del cañón, hay una marca en la carpa que la bala humana, de 1.75 m de altura y masa de 68.4 kg, se supone que debe tocar en el punto más alto de su trayectoria. Al quitar la fuerza externa, se libera el resorte y éste dispara a la bala humana verticalmente hacia arriba.

(continúa)

(continuación)

PROBLEMA 1

¿Cuál es el valor de la constante del resorte que se necesita para lograr esta proeza?

SOLUCIÓN 1

PIENSE

Apliquemos las consideraciones de conservación de la energía para resolver este problema. La energía potencial se almacena inicialmente en el resorte y luego se convierte a energía potencial gravitacional en el ápice del vuelo de la bala humana. Como punto de referencia para nuestros cálculos, seleccionamos la boca del cañón y colocamos ahí el origen de nuestro sistema de coordenadas. Para lograr la hazaña, se necesita suministrar energía, mediante la compresión del resorte, suficiente para que la parte superior de la cabeza de la bala humana se eleve a una altura de 7.50 m arriba del punto cero que hemos elegido. Como la persona tiene una altura de 1.75 m, sus pies tienen que elevarse sólo $h = 7.50 \text{ m} - 1.75 \text{ m} = 5.75 \text{ m}$. Podemos especificar todos los valores de posición para la bala humana en la coordenada y como la posición de la parte inferior de sus pies.

ESBOCE

Para aclarar este problema, apliquemos la conservación de la energía en diferentes instantes. La figura 6.11a) muestra la posición inicial de equilibrio del resorte. En la figura 6.11b), la fuerza externa \vec{F} y el peso de la bala humana comprimen el resorte en 3.30 m hasta una longitud de 0.70 m. Cuando se suelta el resorte, la bala humana se acelera y tiene una velocidad \vec{v}_c cuando pasa por la posición de equilibrio del resorte (vea la figura 6.11c). Desde esta posición, la bala humana se tiene que elevar 5.75 m y llegar a la marca (figura 6.11e) con velocidad cero.

INVESTIGUE

Somos libres de elegir arbitrariamente el punto cero para la energía potencial gravitacional. Elegimos poner en cero la energía potencial gravitacional en la posición de equilibrio del resorte sin carga, como se muestra en la figura 6.11a).

En el instante representado en la figura 6.11b), la bala humana tiene una energía cinética cero, y las energías potenciales de la fuerza de resorte y la gravedad. Por lo tanto, la energía total en este instante es

$$E = \frac{1}{2}ky_b^2 + mgy_b.$$

En el instante representado en la figura 6.11c), la bala humana tiene sólo energía cinética, y energía potencial cero:

$$E = \frac{1}{2}mv_c^2.$$

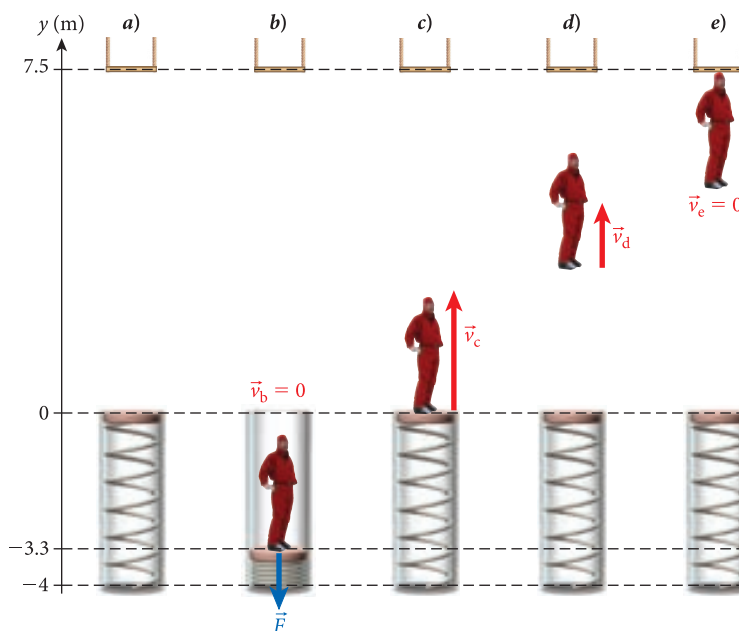


FIGURA 6.11 El acto de la bala humana en cinco diferentes instantes.

Inmediatamente después de este instante, la bala humana se despegas del resorte, vuela por el aire como se muestra en la figura 6.11*d*) y, por último, llega al punto más alto (figura 6.11*e*). En el punto más alto, tiene sólo energía potencial gravitacional y no tiene ninguna energía cinética (porque el resorte está diseñado para hacerlo llegar el punto más alto sin ninguna rapidez residual):

$$E = mgy_e.$$

SIMPLIFIQUE

La conservación de la energía exige que la energía total permanezca igual. Igualando la primera y la tercera de las expresiones para la energía E igual, obtenemos

$$\frac{1}{2}ky_b^2 + mgy_b = mgy_e.$$

Podemos reacomodar esta ecuación para obtener la constante de resorte:

$$k = 2mg \frac{y_e - y_b}{y_b^2}.$$

CALCULE

De acuerdo con la información dada y el origen del sistema de coordenadas que hemos seleccionado, $y_b = -3.30$ m y $y_e = 5.75$ m. Así encontramos, para la constante de resorte que es necesaria:

$$k = 2(68.4 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2) \frac{5.75 \text{ m} - (-3.30 \text{ m})}{(3.30 \text{ m})^2} = 1115.26 \text{ N/m}.$$

REDONDEE

Todos los valores numéricos usados en el cálculo tienen tres cifras significativas, de modo que nuestra respuesta final es

$$k = 1.12 \cdot 10^3 \text{ N/m}.$$

VUELVA A REVISAR

Cuando se comprime el resorte inicialmente, la energía potencial almacenada en el resorte es

$$U = \frac{1}{2}ky_b^2 = \frac{1}{2}(1.12 \cdot 10^3 \text{ N/m})(3.30 \text{ m})^2 = 6.07 \text{ kJ}.$$

La energía potencial gravitacional ganada por la bala humana es

$$U = mg\Delta y = (68.4 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2)(9.05 \text{ m}) = 6.07 \text{ kJ},$$

que es la misma que la energía almacenada al inicio en el resorte. Nuestro valor calculado para la constante de resorte tiene sentido.

Observe que la masa de la bala humana entra en la ecuación para la constante de resorte. Podemos darle vuelta a esto y expresar que el mismo cañón con el mismo resorte disparará a personas de diferentes masas a distintas alturas.

PROBLEMA 2

¿Cuál es la rapidez que alcanza la bala humana cuando pasa por la posición de equilibrio del resorte?

SOLUCIÓN 2

Ya hemos determinado que nuestra selección de origen implica que, en este instante, la bala humana tiene sólo energía cinética. Haciendo esta energía cinética igual a la energía potencial alcanzada en el ápice de su trayectoria, encontramos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv_c^2 &= mgy_e \Rightarrow \\ v_c &= \sqrt{2gy_e} = \sqrt{2(9.81 \text{ m/s}^2)(5.75 \text{ m})} = 10.6 \text{ m/s}. \end{aligned}$$

Esta rapidez corresponde a 23.7 mph.

6.3 Ejercicio en clase

¿Cuál es la aceleración máxima que experimenta la bala humana del problema resuelto 6.2?

- a) 1.00g
- b) 2.14g
- c) 3.25g
- d) 4.48g
- e) 7.30g

6.4 Ejercicio en clase

Una pelota de masa m se lanza verticalmente hacia arriba con una rapidez inicial v . ¿Cuál de las siguientes ecuaciones describe correctamente la altura máxima, h , de la pelota?

- a) $h = \sqrt{\frac{v}{2g}}$
- b) $h = \frac{g}{\frac{1}{2}v^2}$
- c) $h = \frac{2mv}{g}$
- d) $h = \frac{mv^2}{g}$
- e) $h = \frac{v^2}{2g}$

6.4 Oportunidad de autoexamen

Gráfique las energías potencial y cinética de la bala humana del problema resuelto 6.2 como función de la coordenada y . ¿Para qué valor del desplazamiento es máxima la rapidez de la bala humana? (*Pista:* Esto sucede no exactamente en $y = 0$, sino en un valor de $y < 0$.)

EJEMPLO 6.2 Saltador de bungee

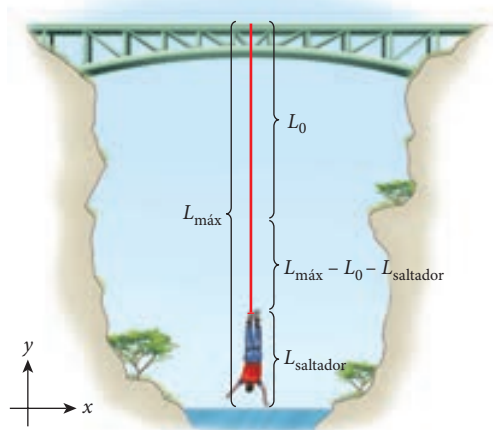


FIGURA 6.12 Un saltador de bungee tiene que calcular cuál es la longitud de una cuerda bungee que pueda usar con seguridad.

Un saltador de bungee localiza un puente adecuado, con una altura de 75.0 m sobre el río que pasa debajo, como se muestra en la figura 6.12. El saltador tiene una masa de $m = 80.0$ kg, y una altura $L_{\text{saltador}} = 1.85$ m. Podemos considerar una cuerda de bungee como un resorte. La constante de resorte de la cuerda de bungee es $k = 50.0$ N/m. Suponga que la masa de la cuerda de bungee es despreciable comparada con la del saltador.

PROBLEMA

El saltador quiere saber la máxima longitud de la cuerda de bungee que puede usar con seguridad para este salto.

SOLUCIÓN

Estamos buscando la longitud sin estirar de la cuerda de bungee, L_0 , como la mediría el saltador de pie sobre el puente. La distancia del puente al agua es $L_{\text{máx}} = 75.0$ m. La conservación de la energía nos dice que la energía potencial gravitacional que tiene el saltador, cuando salta del puente, se convertirá en energía potencial almacenada en la cuerda de bungee. La energía potencial gravitacional del saltador sobre el puente es

$$U_g = mgy = mgL_{\text{máx}},$$

suponiendo que la energía potencial gravitacional es cero a nivel del agua. Antes de iniciar su salto, él tiene energía cinética cero, de modo que su energía total cuando está encima del puente es

$$E_{\text{arriba}} = mgL_{\text{máx}}.$$

En la parte inferior del salto, donde la cabeza del saltador toca el agua, la energía potencial almacenada en la cuerda de bungee es

$$U_s = \frac{1}{2}ky^2 = \frac{1}{2}k(L_{\text{máx}} - L_{\text{saltador}} - L_0)^2,$$

donde $L_{\text{máx}} - L_{\text{saltador}} - L_0$ es la longitud que se estira la cuerda de bungee más allá de su longitud sin estirar. (Aquí tenemos que restar la estatura del saltador de la altura del puente para obtener la longitud máxima, $L_{\text{máx}} - L_{\text{saltador}}$, hasta donde se permite que se estire la cuerda de bungee, suponiendo que está amarrada en sus tobillos.) Como el saltador de bungee está momentáneamente en reposo en el punto más bajo de su salto, la energía cinética es cero en ese punto y la energía total es entonces

$$E_{\text{abajo}} = \frac{1}{2}k(L_{\text{máx}} - L_{\text{saltador}} - L_0)^2.$$

Por la conservación de la energía mecánica, sabemos que $E_{\text{arriba}} = E_{\text{abajo}}$, y así encontramos

$$mgL_{\text{máx}} = \frac{1}{2}k(L_{\text{máx}} - L_{\text{saltador}} - L_0)^2.$$

Despejando la longitud necesaria sin estirar de la cuerda de bungee nos da

$$L_0 = L_{\text{máx}} - L_{\text{saltador}} - \sqrt{\frac{2mgL_{\text{máx}}}{k}}.$$

Introduciendo los números dados, obtenemos

$$L_0 = (75.0 \text{ m}) - (1.85 \text{ m}) - \sqrt{\frac{2(80.0 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2)(75.0 \text{ m})}{50.0 \text{ N/m}}} = 24.6 \text{ m}.$$

Por seguridad, el saltador haría bien en usar una cuerda de bungee más corta que esto, y en probarla con una masa simulada similar a la suya.

6.5 Ejercicio en clase

En el momento de estiramiento máximo de la cuerda de bungee en el ejemplo 6.2, ¿cuál es la aceleración neta que experimenta el saltador (en términos de $g = 9.81 \text{ m/s}^2$)?

- 0g
- 1.0 g, dirigida hacia abajo.
- 1.0 g, dirigida hacia arriba.
- 2.1 g, dirigida hacia abajo.
- 2.1 g, dirigida hacia arriba.

6.5 Oportunidad de autoexamen

¿Puede usted deducir una expresión para la aceleración que experimenta el saltador de bungee en el máximo estiramiento de la cuerda de bungee? ¿Cómo depende esta aceleración de la constante de resorte de la cuerda de bungee?

Energía potencial de un objeto suspendido de un resorte

Vimos en el problema resuelto 6.2 que la energía potencial inicial de la bala humana tiene contribuciones de la fuerza de resorte y de la fuerza gravitacional. En el ejemplo 5.4, establecimos que al suspender un objeto de masa m de un resorte con constante de resorte k se corre la posición de equilibrio del resorte de cero a y_0 , dada por la condición de equilibrio,

$$ky_0 = mg \Rightarrow y_0 = \frac{mg}{k}. \quad (6.24)$$

La figura 6.13 muestra las fuerzas que actúan sobre un objeto suspendido de un resorte cuando está en diferentes posiciones. Esta figura muestra dos elecciones distintas del origen del eje vertical de coordenadas: en la figura 6.13a), la coordenada vertical se llama y y tiene el cero en la posición de equilibrio del extremo del resorte sin la masa suspendida de éste; en la figura 6.13b) el nuevo punto de equilibrio, y_0 , con el objeto suspendido del resorte, se calcula de acuerdo con la ecuación 6.24. Este nuevo punto de equilibrio es el origen del eje, y la coordenada vertical se llama s . El extremo del resorte está ubicado en $s = 0$. El sistema está en equilibrio porque la fuerza que ejerce el resorte sobre el objeto equilibra la fuerza gravitacional que actúa sobre el objeto:

$$\vec{F}_s(y_0) + \vec{F}_g = 0.$$

En la figura 6.13c), el objeto se ha desplazado hacia abajo alejándose de la nueva posición de equilibrio, de modo que $y = y_1$ y $s = s_1$. Ahora hay una fuerza neta ascendente que tiende a reponer el objeto a la nueva posición de equilibrio:

$$\vec{F}_{\text{net}}(s_1) = \vec{F}_s(y_1) + \vec{F}_g.$$

Si en vez de esto, el objeto se desplaza hacia arriba, por encima de la nueva posición de equilibrio, como se muestra en la figura 6.13d), hay una fuerza neta hacia abajo que tiende a poner el objeto en la nueva posición de equilibrio:

$$\vec{F}_{\text{net}}(s_2) = \vec{F}_s(y_2) + \vec{F}_g.$$

Podemos calcular la energía potencial del objeto y del resorte para estas dos elecciones del sistema de coordenadas y demostrar que sólo difieren por una constante. Comenzamos definiendo la

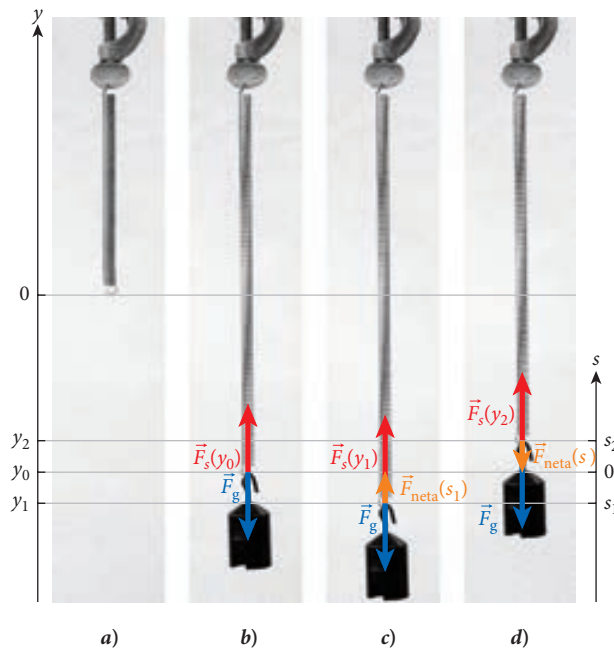


FIGURA 6.13 a) Un resorte suspendido verticalmente con su extremo en la posición de equilibrio en $y = 0$. b) Un objeto de masa m cuelga en reposo del mismo resorte, con el extremo del resorte estirado ahora en $y = y_0$ o $s = 0$. c) El extremo del resorte con el objeto suspendido está en $y = y_1$ o $s = s_1$. d) El extremo del resorte con el objeto suspendido está en $y = y_2$ o $s = s_2$.

energía potencial del objeto conectado al resorte, tomando y como la variable y suponiendo que la energía potencial es cero en $y = 0$:

$$U(y) = \frac{1}{2}ky^2 + mgy.$$

Retomando la relación $y = s - y_0$, podemos expresar esta energía potencial en términos de la variable s :

$$U(s) = \frac{1}{2}k(s - y_0)^2 + mg(s - y_0).$$

Reacomodando, obtenemos

$$U(s) = \frac{1}{2}ks^2 - ksy_0 + \frac{1}{2}ky_0^2 + mgs - mgy_0.$$

Sustituyendo $ky_0 = mg$, de la ecuación 6.24, obtenemos:

$$U(s) = \frac{1}{2}ks^2 - (mg)s + \frac{1}{2}(mg)y_0 + mgs - mgy_0.$$

Así, encontramos que la energía potencial en términos de s es

$$U(s) = \frac{1}{2}ks^2 - \frac{1}{2}mgy_0. \tag{6.25}$$

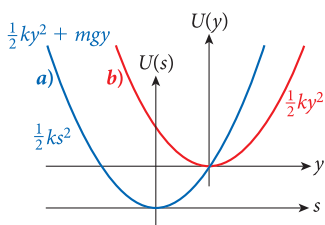


FIGURA 6.14 Funciones de energía potencial para los dos ejes de coordenadas verticales utilizados en la figura 6.13.

La figura 6.14 muestra las funciones de la energía potencial para estos dos ejes de coordenadas. La curva azul en la figura 6.14 muestra la energía potencial como función de la coordenada vertical y , con una elección de energía potencial cero en $y = 0$, correspondiente al resorte suspendido verticalmente sin el objeto conectado a éste. La nueva posición de equilibrio, y_0 , se determina por el desplazamiento que sucede cuando se fija al resorte un objeto de masa m , como se calcula usando la ecuación 6.24. La curva roja en la figura 6.14 representa la energía potencial como función de la coordenada vertical s , con la posición de equilibrio elegida como $s = 0$. Las dos curvas de energía potencial $U(y)$ y $U(s)$ son parábolas, desplazadas una de otra por una constante simple.

Así podemos expresar la energía potencial de un objeto de masa m suspendido de un resorte vertical en términos del desplazamiento s con respecto a un punto de equilibrio como

$$U(s) = \frac{1}{2}ks^2 + C,$$

donde C es una constante. Para muchos problemas, podemos elegir cero como el valor de esta constante, lo cual nos permite escribir

$$U(s) = \frac{1}{2}ks^2.$$

Este resultado nos lleva a usar el mismo potencial de fuerza de resorte para diferentes masas fijadas en el extremo de un resorte simplemente corriendo el origen a la nueva posición de equilibrio (por supuesto, esto sólo funciona si no ponemos demasiada masa en el extremo del resorte y lo sobreestiramos más allá de su límite de elasticidad).

Por último, con la introducción de la energía potencial, podemos extender y aumentar el teorema del trabajo y la energía cinética del capítulo 5. Al incluir también la energía potencial, encontramos el **teorema del trabajo y la energía**.

$$W = \Delta E = \Delta K + \Delta U \tag{6.26}$$

donde W es el trabajo realizado por una fuerza externa, ΔK es el cambio de energía cinética y ΔU es el cambio en la energía potencial. Esta relación significa que el trabajo externo realizado sobre un sistema puede cambiar la energía total del sistema.

6.7 Fuerzas no conservativas y el teorema del trabajo y la energía

¿Se viola la conservación de la energía en la presencia de fuerzas no conservativas? La expresión *no conservativas* parece implicar que se está violando y, ciertamente, la energía *mecánica* total no se conserva. ¿A dónde, entonces, va la energía? La sección 6.2 mostró que la fuerza de fricción no realiza trabajo, sino más bien disipa energía mecánica convirtiéndola en energía interna de excitación, que puede ser energía de vibración, energía de deformación, energía química o energía eléctrica, dependiendo del material de que esté hecho el objeto y de la forma específica de la fuerza de fricción. En la sección 6.2, W_f se define como la energía total disipada por fuerzas no

conservativas convirtiéndola en energía interna y luego en otras formas de energía además de la energía mecánica. Si agregamos este tipo de energía a la energía mecánica total, obtenemos la **energía total**:

$$E_{\text{total}} = E_{\text{mecánica}} + E_{\text{otra}} = K + U + E_{\text{otra}}. \quad (6.27)$$

Aquí, E_{otra} representa a todas las otras formas de energía que no son energías cinéticas ni potenciales. El cambio en las otras formas de energía es exactamente el valor negativo de la energía disipada por la fuerza de fricción al pasar del estado inicial del sistema al estado final:

$$\Delta E_{\text{otra}} = -W_f.$$

La energía total se conserva; es decir, permanece constante en el tiempo, incluso para fuerzas no conservativas. Éste es el punto más importante de este capítulo:

La energía total —la suma de todas las formas de energía, mecánica o de otro tipo— se conserva siempre en un sistema aislado.

También podemos escribir esta ley de la conservación de la energía en la forma que expresa que el cambio en la energía total de un sistema aislado es cero:

$$\Delta E_{\text{total}} = 0. \quad (6.28)$$

Como todavía no sabemos exactamente lo que es esta energía interna ni cómo calcularla, puede parecer que no podemos usar consideraciones de energía cuando al menos una de las fuerzas es no conservativa. Sin embargo, éste no es el caso. Para el caso en que sólo actúan fuerzas conservativas, hemos encontrado (véase la ecuación 6.18) que la energía mecánica total se conserva, o $\Delta E = \Delta K + \Delta U = 0$, donde E se refiere a la energía mecánica total. En presencia de fuerzas no conservativas, combinando las ecuaciones 6.28 y 6.26 nos da

$$W_f = \Delta K + \Delta U. \quad (6.29)$$

Esta relación es una generalización del teorema del trabajo y la energía. En ausencia de fuerzas no conservativas, $W_f = 0$, y la ecuación 6.29 se reduce a la ley de conservación de energía mecánica, ecuación 6.19. Al aplicar cualquiera de estas dos ecuaciones, usted debe elegir dos veces: un principio y un fin. Por lo general, esta decisión es obvia, pero algunas veces se debe tener cuidado, como se demuestra en el siguiente problema resuelto.

PROBLEMA RESUELTO 6.3 Bloque empujado hacia afuera de una mesa

Considere un bloque sobre una mesa. Un resorte fijado a la pared empuja este bloque, que se desliza por la mesa y luego cae al suelo. El bloque tiene una masa $m = 1.35$ kg. La constante de resorte es $k = 560$ N/m, y el resorte se ha comprimido en 0.11 m. El bloque se desliza una distancia $d = 0.65$ m por la mesa de altura $h = 0.75$ m. El coeficiente de fricción cinética entre el bloque y la mesa es $\mu_k = 0.16$.

PROBLEMA

¿Qué rapidez tendrá el bloque cuando llegue al suelo?

SOLUCIÓN

PIENSE

A primera vista, este problema no parece ser uno en el que podamos aplicar la conservación de la energía mecánica, porque está en juego la fuerza no conservativa de fricción. Sin embargo, podemos utilizar el teorema del trabajo y la energía, ecuación 6.29. Sin embargo, para estar seguros de que el bloque realmente sale de la mesa, calculamos primero la energía total impartida al bloque por el resorte y nos aseguramos de que la energía potencial almacenada en el resorte comprimido sea suficiente para vencer la fuerza de fricción.

ESBOCE

La figura 6.15a) muestra el bloque de masa m empujado por el resorte. La masa se desliza sobre la mesa una distancia d y luego cae al suelo, que está a una distancia h bajo la mesa.

(continúa)

(continuación)

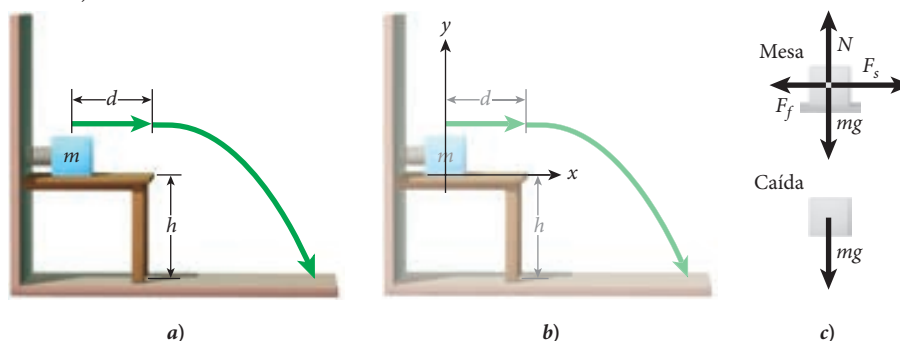


FIGURA 6.15 a) El bloque de masa m es empujado fuera de una mesa por un resorte. b) Se sobrepone un sistema de coordenadas sobre el bloque y la mesa. c) Diagramas de cuerpo libre del bloque mientras se mueve en la mesa y cae.

Elegimos el origen de nuestro sistema de coordenadas de tal manera que el bloque comience en $x = y = 0$, con el eje x a lo largo de la superficie inferior del bloque, y el eje y a través de su centro (figura 6.15b). El origen del sistema de coordenadas se puede colocar en cualquier punto; pero es importante fijar un origen, porque todas las energías potenciales se tienen que expresar en relación con algún punto de referencia.

INVESTIGUE

Paso 1: Analicemos la situación del problema sin la fuerza de fricción. En este caso, el bloque tiene inicialmente energía potencial del resorte y no tiene energía cinética, ya que está en reposo. Cuando el bloque toca el piso, tiene energía cinética y energía potencial gravitacional negativa. La conservación de la energía mecánica da por resultado

$$K_0 + U_0 = K + U \Rightarrow 0 + \frac{1}{2} kx_0^2 = \frac{1}{2} mv^2 - mgh. \tag{i}$$

De manera usual, despejaríamos la rapidez de esta ecuación y después sustituiríamos los números. Sin embargo, como necesitaremos de nuevo las dos expresiones, vamos a evaluarlas para la energía potencial:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} kx_0^2 &= 0.5(560 \text{ N/m})(0.11 \text{ m})^2 = 3.39 \text{ J} \\ mgh &= (1.35 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2)(0.75 \text{ m}) = 9.93 \text{ J}. \end{aligned}$$

Ahora, despejando la rapidez de la ecuación (i) da como resultado

$$v = \sqrt{\frac{2}{m} \left(\frac{1}{2} kx_0^2 + mgh \right)} = \sqrt{\frac{2}{1.35 \text{ kg}} (3.39 \text{ J} + 9.93 \text{ J})} = 4.44 \text{ m/s}.$$

Paso 2: Ahora incluimos la fricción. Nuestra consideración permanece casi sin cambio, salvo que también incluimos la energía disipada por la fuerza no conservativa de fricción. Encontramos la fuerza de fricción usando el diagrama de cuerpo libre superior en la figura 6.15c). Podemos ver que la fuerza normal es igual al peso del bloque, y escribir

$$N = mg.$$

La fuerza de fricción está dada por

$$F_k = \mu_k N = \mu_k mg.$$

Podemos entonces escribir la energía disipada por la fuerza de fricción como

$$W_f = -\mu_k mgd.$$

Al aplicar la generalización del teorema del trabajo y la energía, decidimos que el tiempo inicial sea cuando el bloque está a punto de comenzar a moverse (vea la figura 6.15a), y que el tiempo final sea cuando el bloque llegue al borde de la mesa y esté a punto de comenzar la porción de caída libre de su trayectoria. Sea K_{arriba} la energía cinética en el tiempo final, elegido para

asegurarnos de que el bloque llega al final de la mesa. Usando la ecuación 6.29 y el valor que calculamos arriba para la energía potencial inicial del bloque, encontramos:

$$\begin{aligned} W_f &= \Delta K + \Delta U = K_{\text{arriba}} - \frac{1}{2} kx_0^2 = -\mu_k mgd \\ K_{\text{arriba}} &= \frac{1}{2} kx_0^2 - \mu_k mgd \\ &= 3.39 \text{ J} - (0.16)(1.35 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2)(0.65 \text{ m}) \\ &= 3.39 \text{ J} - 1.38 \text{ J} = 2.01 \text{ J}. \end{aligned}$$

Como la energía cinética $K_{\text{arriba}} > 0$, el bloque puede vencer la fricción y deslizarse afuera de la mesa. Ahora podemos calcular la rapidez del bloque al tocar el piso.

SIMPLIFIQUE

Para esta parte del problema, decidimos que el tiempo inicial sea cuando el bloque está en el borde de la mesa, para aprovechar los cálculos que ya hemos hecho. El tiempo final es cuando el bloque toca el suelo. (Si eligiéramos que el principio sea como el que se muestra en la figura 6.15a), nuestro resultado sería el mismo.)

$$\begin{aligned} W_f &= \Delta K + \Delta U = 0 \\ \frac{1}{2} mv^2 - K_{\text{arriba}} + 0 - mgh &= 0, \\ v &= \sqrt{\frac{2}{m}(K_{\text{arriba}} + mgh)}. \end{aligned}$$

CALCULE

Al sustituir los valores numéricos, obtenemos

$$v = \sqrt{\frac{2}{1.35 \text{ kg}}(2.01 \text{ J} + 9.93 \text{ J})} = 4.20581608 \text{ m/s}.$$

REDONDEE

Todos los valores numéricos se dieron con tres cifras significativas, de modo que tenemos

$$v = 4.21 \text{ m/s}.$$

VUELVA A REVISAR

Como puede ver, el aporte principal a la rapidez del bloque en el impacto proviene de la porción de caída libre de su trayectoria. ¿Por qué pasamos por el paso intermedio de calcular el valor de K_{arriba} , en vez de simplemente usar la fórmula, $v = \sqrt{2(\frac{1}{2} kx_0^2 - \mu_k mgd + mgh) / m}$, que obtuvimos de la generalización del teorema del trabajo y la energía? Necesitábamos calcular primero K_{arriba} para asegurarnos de que es positiva, lo cual significa que la energía impartida al bloque por el resorte es suficiente para exceder el trabajo que está por hacer contra la fuerza de fricción. Si K_{arriba} hubiera resultado negativa, el bloque se habría detenido en la mesa. Por ejemplo, si hubiéramos tratado de resolver el problema descrito en el problema resuelto 6.3 con un coeficiente de fricción cinética entre el bloque y la mesa de $\mu_k = 0.50$ en vez de $\mu_k = 0.16$, habríamos hallado que

$$K_{\text{arriba}} = 3.39 \text{ J} - 4.30 \text{ J} = -0.91 \text{ J},$$

lo cual es imposible.

6.6 Ejercicio en clase

En una práctica de *curling* (un deporte de hielo que consiste en empujar piedras lisas), una piedra de 19.96 kg de masa recibe una velocidad inicial sobre el hielo de 2.46 m/s. El coeficiente de fricción cinética entre la piedra y el hielo es de 0.0109. ¿A qué distancia se desliza la piedra antes de detenerse?

- | | |
|-----------|-----------|
| a) 18.7 m | d) 39.2 m |
| b) 28.3 m | e) 44.5 m |
| c) 34.1 m | |

Como muestra el problema resuelto 6.3, las consideraciones de energía siguen siendo una formidable herramienta para realizar cálculos que de otra manera serían muy difíciles, incluso en la presencia de fuerzas no conservativas. Sin embargo, el principio de conservación de la energía mecánica no se puede aplicar tan sencillamente cuando están presentes fuerzas no conservativas, y usted tiene que tomar en cuenta la energía disipada por estas fuerzas.

6.8 Energía potencial y estabilidad

Regresemos a la relación entre fuerza y energía potencial. Quizás usted pueda obtener una mejor percepción física de esta relación si visualiza la curva de energía potencial como la pista de una montaña rusa. Esta analogía no es perfecta, porque una montaña rusa se mueve en un plano bidimensional, o incluso en un espacio tridimensional, no en una dimensión, y hay una pequeña cantidad de fricción entre los carritos y la pista. Con todo, es una buena aproximación suponer que hay conservación de la energía mecánica. El movimiento del carrito se puede describir entonces mediante una función de la energía potencial.

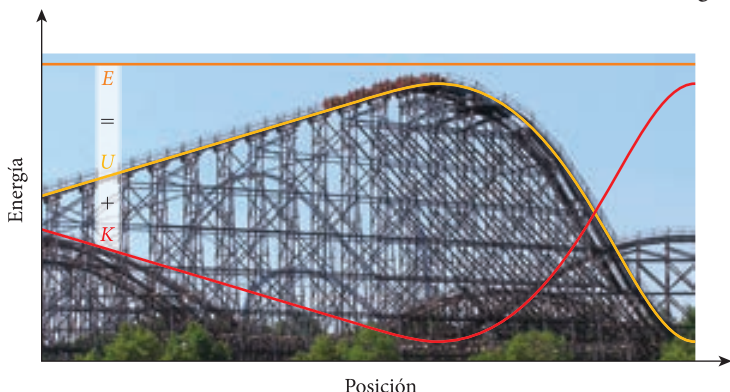


FIGURA 6.16 Energía total, potencial y cinética para una montaña rusa.

La figura 6.16 muestra gráficas de la energía potencial (línea amarilla que sigue el contorno de la pista), la energía total (línea horizontal anaranjada), y la energía cinética (diferencia entre estas dos, la línea roja) como función de la posición para un segmento del trayecto en la montaña rusa. Usted puede ver que la energía cinética tiene un mínimo en el punto más alto de la pista, donde la rapidez de los carritos es mínima, y la rapidez aumenta al moverse los carritos cuesta abajo. Todos estos efectos son consecuencia de la conservación de la energía mecánica total.

La figura 6.17 muestra gráficas de una función de la energía potencial (inciso a) y de la fuerza correspondiente (inciso b). Como la energía potencial se puede determinar sólo dentro del límite de una constante aditiva, el valor cero de la energía potencial en la figura 6.17a) se establece en el valor mínimo. Sin embargo, para todas las consideraciones físicas, esto es irrelevante. Por otro lado, el valor cero para la fuerza no se puede elegir arbitrariamente.

En la figura 6.17) están marcados con líneas verticales grises los tres puntos especiales del eje de coordenadas x . Estos puntos indican dónde tiene valor cero la fuerza. Como la fuerza es la derivada de la energía potencial con respecto a la coordenada x , la energía potencial tiene un valor extremo —un máximo o un mínimo— en cada uno de dichos puntos. Usted puede ver con claridad que las energías potenciales en x_1 y x_3 representan mínimos, y la energía potencial en x_2 tiene un máximo. En los tres puntos, un objeto no sufriría aceleración, porque está ubicado en un valor extremo, donde la fuerza es cero. Como no hay fuerza, la segunda ley de Newton nos dice que no hay aceleración. Así, estos puntos son puntos de equilibrio.

Puntos de equilibrio

Los puntos de equilibrio en la figura 6.17 representan dos clases de equilibrio diferentes. Los puntos x_1 y x_3 representan puntos de equilibrio estable, y x_2 es un punto de equilibrio inestable. Lo que distingue los puntos de equilibrio estable e inestable es la respuesta a perturbaciones (pequeños cambios de posición alrededor de la posición de equilibrio).

Los puntos de equilibrio en la figura 6.17 representan dos clases de equilibrio diferentes. Los puntos x_1 y x_3 representan puntos de equilibrio estable, y x_2 es un punto de equilibrio inestable. Lo que distingue los puntos de equilibrio estable e inestable es la respuesta a perturbaciones (pequeños cambios de posición alrededor de la posición de equilibrio).

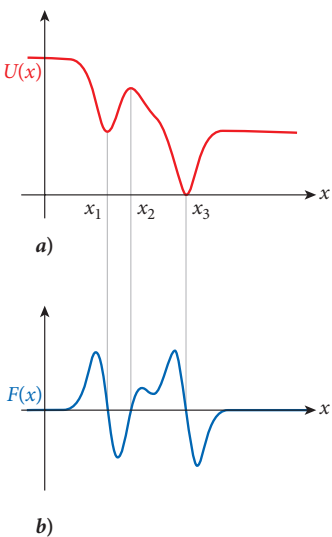


FIGURA 6.17 a) Energía potencial como función de la posición; b) la fuerza que corresponde a la energía potencial, como función de la posición.

Definición

En los **puntos de equilibrio estable**, pequeñas perturbaciones dan por resultado pequeñas oscilaciones alrededor del punto de equilibrio. En los **puntos de equilibrio inestable**, pequeñas perturbaciones dan por resultado un movimiento acelerado que se aleja del punto de equilibrio.

Aquí puede ser de ayuda la analogía de la montaña rusa: si usted está sentado en un carrito de montaña rusa en el punto x_1 o en el punto x_3 y alguien da un empujón al carrito, éste sólo se moverá hacia adelante y hacia atrás sobre la pista, porque usted está en un punto local de energía mínima. Sin embargo, si el carrito recibe el mismo empujón cuando está en reposo en x_2 , el resultado será que el carrito rodará cuesta abajo.

Lo que hace que un punto de equilibrio sea estable o inestable, desde el punto de vista matemático, es el valor de la segunda derivada de la función de la energía potencial; es decir, la curvatura. Una curvatura negativa significa un máximo local de la función de la energía potencial, y por lo tanto un punto de equilibrio inestable; una curvatura positiva indica un punto de equilibrio

estable. Por supuesto, también existe la situación entre el equilibrio estable y el inestable, entre la curvatura positiva y la negativa. Éste es un equilibrio metaestable, con curvatura local cero; es decir un valor de cero para la segunda derivada de la función de la energía potencial.

Puntos de inflexión

La figura 6.18a) muestra la misma función de la energía potencial que la figura 6.17, pero con la adición de líneas horizontales para cuatro diferentes valores de la energía mecánica total (E_1 a E_4). Para cada valor de esta energía total y para cada punto de la curva de energía potencial, podemos calcular el valor de la energía cinética por simple resta. Consideremos primero el valor mayor de la energía mecánica total que se muestra en la figura, E_1 (línea azul horizontal):

$$K_1(x) = E_1 - U(x). \quad (6.30)$$

La energía cinética, $K_1(x)$, está representada en la figura 6.18b) por la curva azul, que es claramente una versión invertida de la curva de energía potencial de la figura 6.18a). Sin embargo, su altura absoluta no es arbitraria, sino el resultado de la ecuación 6.30. Como antes se mencionó, podemos agregar siempre una constante aditiva arbitraria a la energía potencial, pero entonces nos vemos forzados a agregar la misma constante aditiva a la energía mecánica total, de modo que la diferencia entre ambas, la energía cinética, permanezca sin cambio.

Para los demás valores de la energía mecánica total en la figura 6.18, surge una complicación adicional: la condición de que la energía cinética tiene que ser igual o mayor que cero. Esta condición significa que la energía cinética no se define en una región donde $E_i - U(x)$ es negativa. Para la energía mecánica total de E_2 , la energía cinética es mayor que cero sólo para $x \geq a$, como se indica en la figura 6.18b) por la curva verde. Así, un objeto que se mueva con la energía total E_2 de derecha a izquierda en la figura 6.18 llegará al punto $x = a$ y ahí tendrá velocidad cero. Al observar la figura 6.17, usted ve que la fuerza en ese punto es positiva, empujando al objeto a la derecha; es decir, haciéndolo dar vuelta. Por eso este punto se llama **punto de inflexión**. Moviéndose a la derecha, este objeto aumentará su energía cinética y seguirá la misma curva de energía cinética de derecha a izquierda, haciendo que su trayectoria sea reversible. Este comportamiento es consecuencia de la conservación de la energía mecánica total.

Definición

Los **puntos de inflexión** son puntos en los que la energía cinética es cero y donde una fuerza neta aleja al objeto de este punto.

Un objeto con una energía total igual a E_4 , en la figura 6.18, tiene dos puntos de inflexión en su trayectoria: $x = e$ y $x = f$. El objeto sólo se puede mover entre estos dos puntos. Está atrapado en este intervalo, y no puede escapar. Quizá la analogía de la montaña rusa sea nuevamente útil: un carrito que se suelta en el punto $x = e$ se moverá por la hondonada en la curva de energía potencial a la derecha, hasta llegar al punto $x = f$, donde invertirá la dirección y se moverá de regreso a $x = e$, sin tener nunca la energía mecánica total para escapar de la hondonada. La región en que el objeto está atrapado a menudo se llama *pozo de potencial*.

Quizá la situación más interesante es aquella para la cual la energía total es E_3 . Si un objeto entra desde la derecha en la figura 6.18 con energía E_3 , se reflejará en el punto de inflexión donde $x = d$, en completa analogía con la situación en $x = a$ para el objeto con energía E_2 . Sin embargo, hay otra parte permitida de la trayectoria, más hacia la izquierda, en el intervalo $b \leq x \leq c$. Si el objeto comienza en el intervalo, queda atrapado en una hondonada, igual que el objeto con energía E_4 . Entre los intervalos permitidos $b \leq x \leq c$ y $x \geq d$ hay una *región prohibida* que un objeto con energía mecánica total E_3 no puede cruzar.

Avance: física atómica

Al estudiar la física atómica, nos encontraremos de nuevo con las curvas de energía potencial. Se dice que partículas con energías tales como E_4 en la figura 6.18, atrapadas entre dos puntos de inflexión, están en *estados vinculados*. Uno de los fenómenos más interesantes en la física atómica y nuclear sucede en situaciones como la que se muestra en la figura 6.18 para una energía mecánica total de E_3 . A partir de nuestras consideraciones sobre mecánica clásica en este capítulo,

6.7 Ejercicio en clase

¿Cuál de los dibujos representa un punto de equilibrio estable para la pelota sobre su superficie de apoyo?

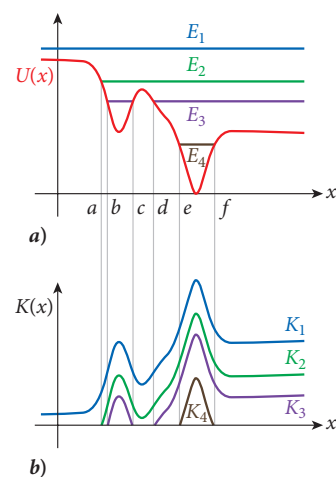
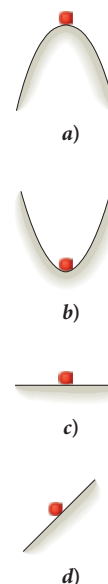


FIGURA 6.18 a) La misma función de la energía potencial que en la figura 6.17. Se muestran las líneas que representan cuatro diferentes valores de la energía total, E_1 a E_4 . b) Las funciones de la energía cinética correspondientes a estas cuatro energías totales, y la función de la energía potencial en la parte superior. Las líneas verticales grises marcan los puntos de inflexión.

esperamos que un objeto que esté en un estado vinculado entre $b \leq x \leq c$ no pueda escapar. Sin embargo, en aplicaciones de física atómica y nuclear, una partícula en tal estado vinculado tiene una pequeña probabilidad de escapar de este pozo de potencial y, a través de la clásica región prohibida, llegar al interior de la región $x \geq d$. Este proceso se llama *tunneling*. Dependiendo de la altura y amplitud de la barrera, la probabilidad de *tunneling* puede ser bastante grande y conducir a un escape rápido, o bastante pequeña y conducir a un escape muy lento. Por ejemplo, el isótopo ^{235}U del elemento uranio, que se usa en las plantas eléctricas de fisión nuclear y que se presenta en forma natural en la Tierra, tiene una vida media de más de 700 millones de años, que es el tiempo promedio que transcurre hasta que la partícula alfa (un grupo fuertemente ligado de dos neutrones y dos protones en un núcleo) hace un túnel a través de su barrera de potencial haciendo que decaiga el núcleo de uranio. En contraste, el isótopo ^{238}U tiene una vida media de 4 500 millones de años. Así, mucho del ^{235}U original presente en la Tierra se ha desintegrado. El hecho de que el ^{235}U representa sólo 0.7% de todo el uranio que se encuentra en forma natural significa que el primer indicio de que una nación está intentando usar energía nuclear para cualquier propósito es la adquisición de equipo que puede separar ^{235}U del ^{238}U , mucho más abundante (99.3%), que no es adecuado para la producción de energía por fisión nuclear.

El párrafo anterior se incluyó para estimular su apetito por las cosas por venir. Para entender los procesos de la física atómica y nuclear, usted necesita familiarizarse con algunos otros conceptos. Sin embargo, las consideraciones básicas de energía introducidas aquí quedarán virtualmente sin cambio.

LO QUE HEMOS APRENDIDO | GUÍA DE ESTUDIO PARA EXAMEN

- La energía potencial, U , es la energía almacenada en la configuración de un sistema de objetos que ejercen fuerzas entre sí.
- La energía potencial gravitacional se define como $U_g = mgy$.
- La energía potencial asociada con la elongación de un resorte desde su posición de equilibrio en $x = 0$ es $U_s(x) = \frac{1}{2}kx^2$.
- Una fuerza conservativa es una fuerza para la cual el trabajo realizado a lo largo de cualquier trayectoria cerrada es cero. Una fuerza que no cumple este requisito se llama fuerza no conservativa.
- Para cualquier fuerza conservativa, el cambio en energía potencial debido a algún reacomodo espacial de un sistema es igual al valor negativo del trabajo realizado por la fuerza conservativa durante este reacomodo espacial.
- La relación entre una energía potencial y la correspondiente fuerza conservativa es

$$\Delta U = U(x) - U(x_0) = - \int_{x_0}^x F_x(x') dx'$$
- En situaciones unidimensionales, la componente de la fuerza se puede obtener de la energía potencial usando

$$F_x(x) = - \frac{dU(x)}{dx}.$$
- La energía mecánica, E , es la suma de la energía cinética y la energía potencial: $E = K + U$.
- La energía mecánica total se conserva para cualquier proceso mecánico dentro de un sistema aislado que incluya sólo fuerzas conservativas: $\Delta E = \Delta K + \Delta U = 0$. Una forma alternativa de expresar esta conservación de la energía mecánica es $K + U = K_0 + U_0$.
- La energía total —la suma de todas las formas de energía, mecánica u otras— siempre se conserva en un sistema aislado. Esto es válido para fuerzas tanto conservativas como no conservativas: $E_{\text{total}} = E_{\text{mecánica}} + E_{\text{otra}} = K + U + E_{\text{otra}} = \text{constante}$.
- Los problemas de energía que incluyen fuerzas no conservativas se pueden resolver usando el teorema del trabajo y la energía: $W_f = \Delta K + \Delta U$.
- En los puntos de equilibrio estable, pequeñas perturbaciones producen pequeñas oscilaciones alrededor del punto de equilibrio; en los puntos de equilibrio inestable, pequeñas perturbaciones producen un movimiento acelerado que se aleja del punto de equilibrio.
- Los puntos de inflexión son puntos en los que la energía cinética es cero y una fuerza neta aleja al objeto del punto.

TÉRMINOS CLAVE

energía potencial, p. 169
fuerza conservativa, p. 171
fuerza no conservativa, p. 171
sistema aislado, p. 177

energía mecánica, p. 177
conservación de la energía
mecánica, p. 177
amplitud, p. 181

teorema del trabajo y la
energía, p. 186
energía total, p. 187
puntos de equilibrio estable, p. 190

puntos de equilibrio
inestable, p. 190
puntos de inflexión,
p. 191

NUEVOS SÍMBOLOS Y ECUACIONES

U , energía potencial

W_f , energía disipada por una fuerza de fricción

$U_g = mgy$, energía potencial gravitacional

$U_s(x) = \frac{1}{2}kx^2$, energía potencial de un resorte

$K + U = K_0 + U_0$, conservación de la energía mecánica

A , amplitud

$W_f = \Delta K + \Delta U$, teorema del trabajo y la energía

RESPUESTAS A LAS OPORTUNIDADES DE AUTOEXAMEN

6.1 La energía potencial es proporcional al inverso de la distancia entre los dos objetos. Ejemplos de estas fuerzas son la fuerza de gravedad (vea el capítulo 12) y la fuerza electrostática (vea el capítulo 21).

6.2 Para manejar este problema agregando la resistencia del aire, habríamos introducido el trabajo realizado por la resistencia del aire, que se puede considerar como una fuerza de fricción. Habríamos modificado nuestra expresión de conservación de la energía para reflejar el hecho de que la fuerza de fricción realiza el trabajo, W_f

$$W_f + K + U = K_0 + U_0.$$

La solución se habría realizado en forma numérica porque el trabajo realizado por la fricción, en este caso, dependería de la distancia que viaja realmente la roca por el aire.

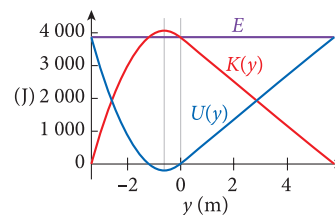
6.3 La pelota de color más claro desciende primero a una elevación inferior y, por lo tanto, convierte primero más de su energía potencial en energía cinética. Mayor energía cinética significa mayor rapidez. Por lo tanto, la pelota de color más claro alcanza rapidezces más altas más pronto y puede moverse al extremo inferior de la pista más rápidamente, aun cuando la longitud de su trayectoria sea mayor.

6.4 La rapidez es máxima donde la energía cinética está al máximo.

$$K(y) = U(-3.3 \text{ m}) - U(y) = (3856 \text{ J}) - (671 \text{ J/m})y - (557.5 \text{ J/m}^2)y^2$$

$$\frac{d}{dy} K(y) = -(671 \text{ J/m}) - (1115 \text{ J/m}^2)y = 0 \Rightarrow y = -0.602 \text{ m}$$

$$v(-0.602 \text{ m}) = \sqrt{2K(-0.602 \text{ m})/m} = 10.89 \text{ m/s.}$$



Observe que el valor para el cual la rapidez es máxima es la posición de equilibrio del resorte una vez que está cargado con la bala humana.

6.5 La fuerza neta en el estiramiento máximo es $F = k(L_{\text{máx}} - L_{\text{saltador}} - L_0) - mg$. Por lo tanto, la aceleración en este punto es $a = k(L_{\text{máx}} - L_{\text{saltador}} - L_0)/m - g$. Sustituyendo la expresión que encontramos para L_0 , obtenemos

$$a = \sqrt{\frac{2gL_{\text{máx}}k}{m}} - g.$$

La aceleración máxima aumenta proporcionalmente a la raíz cuadrada de la constante de resorte. Si se desea saltar desde una gran altura, $L_{\text{máx}}$, se necesita una cuerda bungee muy suave.

PRÁCTICA PARA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Lineamientos de problemas resueltos: conservación de la energía

1. Muchos de los lineamientos para resolución de problemas dados en el capítulo 5 se aplican a problemas que incluyen también la conservación de la energía. Es importante identificar el sistema y determinar el estado de los objetos dentro de éste en diferentes tiempos clave, tales como el inicio y el final de cada tipo de movimiento. También debe usted identificar cuáles fuerzas en la situación son conservativas o no conservativas, porque afectan el sistema en formas diferentes.

2. Trate de seguir el comportamiento de cada clase de energía a lo largo de toda la situación del problema. ¿Cuándo tiene

el objeto energía cinética? ¿La energía potencial gravitacional aumenta o disminuye? ¿Dónde está el punto de equilibrio de un resorte?

3. Recuerde que usted puede elegir dónde es cero la energía potencial, de modo que trate de determinar qué elección simplificaría los cálculos.

4. Casi siempre es útil un croquis, y con frecuencia también es útil un diagrama de cuerpo libre. En algunos casos es buena idea trazar gráficas de energía potencial, energía cinética y energía mecánica total.

PROBLEMA RESUELTO 6.4 Artista del trapecio

PROBLEMA

Una artista circense del trapecio comienza su movimiento con el trapecio en reposo en un ángulo de 45.0° respecto a la vertical. Las cuerdas del trapecio tienen una longitud de 5.00 m. ¿Cuál es su rapidez en el punto más bajo de su trayectoria?

(continúa)

(continuación)

SOLUCIÓN

PIENSE

Inicialmente, la trapecista tiene sólo energía potencial gravitacional. Podemos elegir un sistema de coordenadas en el que $y = 0$ esté en el punto más bajo de su trayectoria, de modo que la energía potencial es cero en ese punto más bajo. Cuando la trapecista está en el punto más bajo, su energía cinética estará en un máximo. Podemos entonces igualar la energía potencial gravitacional inicial con la energía cinética final de la trapecista.

ESBOCE

Representamos a la trapecista en la figura 6.19 como un objeto de masa m suspendido de una cuerda de longitud ℓ . Indicamos la posición de la trapecista a un valor dado del ángulo θ mediante el círculo azul. Se llega al punto más bajo de la trayectoria en $\theta = 0$, y esto lo indicamos en la figura 6.19 mediante un círculo gris.

La figura muestra que la trapecista está a una distancia ℓ (la longitud de la cuerda) por debajo del techo en el punto más bajo, y a una distancia $\ell \cos \theta$ debajo del techo para todos los demás valores de θ . Esto significa que ella está a una altura $h = \ell - \ell \cos \theta = \ell(1 - \cos \theta)$ arriba del punto más bajo de la trayectoria cuando el trapecio forma un ángulo θ con la vertical.

INVESTIGUE

Se tira del trapecio hasta un ángulo inicial θ_0 relativo a la vertical, y por lo tanto a una altura $h = \ell(1 - \cos \theta_0)$ sobre el punto más bajo de la trayectoria, de acuerdo con nuestro análisis de la figura 6.19. La energía potencial de esta deflexión máxima, θ_0 , es, por lo tanto,

$$E = K + U = 0 + U = mg\ell(1 - \cos \theta_0).$$

Éste también es el valor para la energía mecánica total, porque la trapecista tiene energía cinética cero en los puntos de máxima deflexión. Para cualquier otra deflexión, la energía es la suma de las energías cinética y potencial:

$$E = mg\ell(1 - \cos \theta) + \frac{1}{2}mv^2.$$

SIMPLIFIQUE

Al despejar la rapidez de esta ecuación, obtenemos

$$mg\ell(1 - \cos \theta_0) = mg\ell(1 - \cos \theta) + \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow$$

$$mg\ell(\cos \theta - \cos \theta_0) = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow$$

$$|v| = \sqrt{2g\ell(\cos \theta - \cos \theta_0)}.$$

Aquí nos interesa la rapidez para $|v(\theta = 0)|$, que es

$$|v(\theta = 0)| = \sqrt{2g\ell(\cos 0 - \cos \theta_0)} = \sqrt{2g\ell(1 - \cos \theta_0)}.$$

CALCULE

La condición inicial es $\theta_0 = 45^\circ$. Al sustituir los números, encontramos

$$|v(0^\circ)| = \sqrt{2(9.81 \text{ m/s}^2)(5.00 \text{ m})(1 - \cos 45^\circ)} = 5.360300809 \text{ m/s}.$$

REDONDEE

Todos los valores numéricos se especificaron con tres cifras significativas, de modo que presentamos nuestra respuesta como

$$|v(0^\circ)| = 5.36 \text{ m/s}.$$

VUELVA A REVISAR

Primero, la verificación obvia de unidades: m/s es la unidad SI para la velocidad y la rapidez. La rapidez de la trapecista en el punto más bajo es de 5.36 m/s (12 mph), que parece consistente con lo que vemos en el circo.

Podemos realizar otra verificación en la fórmula $|v(\theta = 0)| = \sqrt{2g\ell(1 - \cos \theta_0)}$ considerando los casos límite para el ángulo inicial θ_0 para ver si dan resultados razonables. En este caso, los valores limitantes para θ_0 son 90° , donde la trapecista comienza en forma horizontal, y 0° , donde

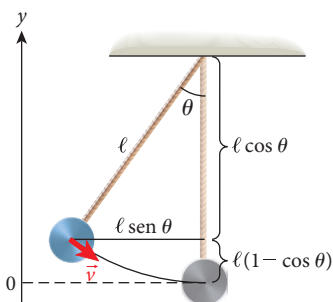


FIGURA 6.19 Geometría de la oscilación o trayectoria de una trapecista.

comienza de manera vertical. Si usamos $\theta_0 = 0$, el trapecio está simplemente suspendido en reposo, y esperamos rapidez cero, una expectación corroborada por nuestra fórmula. Por otro lado, si usamos $\theta_0 = 90^\circ$, o $\cos \theta_0 = \cos 90^\circ = 0$, obtenemos el resultado límite $\sqrt{2g\ell}$, que es el mismo resultado que una caída libre desde el techo hasta el punto más bajo de la oscilación del trapecio. De nuevo, este límite es como se esperaba, lo cual nos da confianza adicional en nuestra solución.

PROBLEMA RESUELTO 6.5 En trineo en la colina de Mickey Mouse

PROBLEMA

Un niño en un trineo parte del reposo y se desliza cuesta abajo de la colina de Mickey Mouse, cubierta de nieve, como se muestra en la figura 6.20. La masa conjunta del niño y el trineo es de 23.0 kg. La colina de Mickey Mouse forma un ángulo $\theta = 35.0^\circ$ con la horizontal. La superficie de la colina tiene una longitud de 25.0 m. Cuando el niño y el trineo llegan al pie de la colina, continúan desliziéndose en un campo horizontal cubierto de nieve. El coeficiente de fricción cinética entre el trineo y la nieve es de 0.100. ¿A qué distancia se mueven el niño y el trineo sobre el campo horizontal antes de detenerse?



FIGURA 6.20 Un niño se desliza en trineo cuesta abajo en la colina de Mickey Mouse.

SOLUCIÓN

PIENSE

El niño y el trineo comienzan con energía cinética cero y terminan con energía cinética cero, y tienen una energía potencial gravitacional en la cumbre de la colina. Al deslizarse hacia abajo, ganan energía cinética. Al pie de la colina, su energía potencial es cero, y tienen energía cinética. Sin embargo, el niño y el trineo continuamente pierden energía debido a la fricción. Así, el cambio en energía potencial será igual a la energía perdida por fricción. Debemos tener en cuenta el hecho de que la fuerza de fricción será diferente cuando el trineo está sobre la colina que cuando está sobre el campo llano.

ESBOCE

En la figura 6.21 se muestra un croquis del niño desliziéndose en la colina de Mickey Mouse.

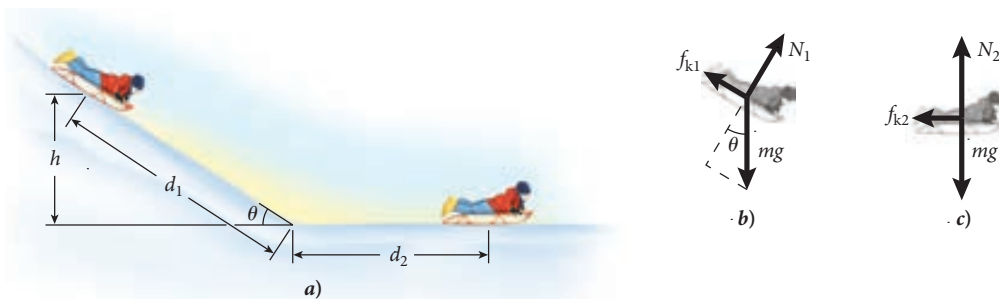


FIGURA 6.21 a) Croquis del trineo en la colina de Mickey Mouse y sobre el campo llano, mostrando el ángulo de inclinación y las distancias. b) Diagrama de cuerpo libre para el trineo en la colina de Mickey Mouse. c) Diagrama de cuerpo libre para el trineo en el campo llano.

INVESTIGUE

El niño y el trineo comienzan con energía cinética cero y terminan con energía cinética cero. Llamamos d_1 a la longitud de la colina, y llamamos d_2 a la distancia que el niño y el trineo viajan sobre el campo llano, como se muestra en la figura 6.21a). Suponiendo que la energía potencial gravitacional del niño es cero en el pie de la colina, el cambio en la energía potencial gravitacional desde la cumbre hasta el campo llano es

$$\Delta U = mgh,$$

donde m es la masa conjunta del niño y el trineo, y

$$h = d_1 \sin \theta.$$

(continúa)

(continuación)

La fuerza de fricción es diferente sobre la pendiente y sobre el campo llano, porque la fuerza normal es diferente. De la figura 6.21b), la fuerza de fricción sobre la colina es

$$f_{k1} = \mu_k N_1 = \mu_k mg \cos \theta.$$

De la figura 6.21c), la fuerza de fricción sobre el campo llano es

$$f_{k2} = \mu_k N_2 = \mu_k mg.$$

La energía disipada por fricción, W_f , es igual a la energía disipada por fricción al deslizarse sobre la colina, W_1 , más la energía disipada al deslizarse sobre el campo llano, W_2 :

$$W_f = W_1 + W_2.$$

La energía disipada por fricción en la colina de Mickey Mouse es

$$W_1 = f_{k1} d_1,$$

y la energía disipada por fricción en el campo llano es

$$W_2 = f_{k2} d_2.$$

SIMPLIFIQUE

De acuerdo con las tres ecuaciones anteriores, la energía total disipada por fricción está dada por

$$W_f = f_{k1} d_1 + f_{k2} d_2.$$

Al sustituir las dos expresiones para las fuerzas de fricción en esta ecuación nos da

$$W_f = (\mu_k mg \cos \theta) d_1 + (\mu_k mg) d_2.$$

El cambio en la energía potencial se obtiene combinando la ecuación $\Delta U = mgh$ con la expresión obtenida para la altura, $h = d_1 \text{ sen } \theta$:

$$\Delta U = mg d_1 \text{ sen } \theta.$$

Como el trineo está en reposo en la cumbre de la colina, así como al final del trayecto, tenemos $\Delta K = 0$, y por lo tanto, de acuerdo con la ecuación 6.29, en este caso, $\Delta U = W_f$. Ahora podemos igualar el cambio en energía potencial con la energía disipada por fricción:

$$mg d_1 \text{ sen } \theta = (\mu_k mg \cos \theta) d_1 + (\mu_k mg) d_2.$$

Cancelando mg en ambos lados y despejando la distancia que viajan el niño y el trineo sobre el campo llano, obtenemos

$$d_2 = \frac{d_1 (\text{sen } \theta - \mu_k \cos \theta)}{\mu_k}.$$

CALCULE

Al sustituir los valores numéricos dados, obtenemos

$$d_2 = \frac{(25.0 \text{ m})(\text{sen} 35.0^\circ - 0.100 \cdot \cos 35.0^\circ)}{0.100} = 122.9153 \text{ m}.$$

REDONDEE

Todos los valores numéricos se especificaron con tres cifras significativas, de modo que presentamos nuestra respuesta como

$$d_2 = 123 \text{ m}.$$

VUELVA A REVISAR

La distancia que se mueve el trineo sobre el campo llano es un poco más larga que un campo de fútbol americano, lo cual parece ciertamente posible después de salir de una colina empinada de 25 m de longitud.

Podemos volver a revisar nuestra respuesta suponiendo que la fuerza de fricción entre el trineo y la nieve es la misma en la colina de Mickey Mouse que en el campo llano.

$$f_k = \mu_k mg.$$

El cambio en energía potencial sería entonces igual aproximadamente a la energía disipada por fricción para toda la distancia en que se mueve el trineo:

$$mgd_1 \sin\theta = \mu_k mg(d_1 + d_2).$$

La distancia aproximada recorrida en el campo llano sería entonces de

$$d_2 = \frac{d_1(\sin\theta - \mu_k)}{\mu_k} = \frac{(25.0 \text{ m})(\sin 35.0^\circ - 0.100)}{0.100} = 118 \text{ m}.$$

Este resultado es cercano pero menor que nuestra respuesta de 123 m, que esperábamos porque la fuerza de fricción en el campo llano es mayor que la fuerza de fricción en la colina. Así, nuestra respuesta parece razonable.

Los conceptos de potencia que se introdujeron en el capítulo 5 se pueden combinar con la conservación de la energía mecánica para obtener una interesante percepción sobre la generación de energía eléctrica por la conversión de la energía potencial gravitacional.

PROBLEMA RESUELTO 6.6 Energía producida por las Cataratas del Niágara

PROBLEMA

Las Cataratas del Niágara vierten un promedio de $5\,520 \text{ m}^3$ de agua en una caída de 49.0 m cada segundo. Si toda la energía potencial de esa agua se pudiese convertir en energía eléctrica, ¿cuánta potencia eléctrica podrían generar las Cataratas del Niágara?

SOLUCIÓN

PIENSE

La masa de un metro cúbico de agua es de 1 000 kg. El trabajo realizado por el agua al caer es igual al cambio en su energía potencial gravitacional. La potencia media es el trabajo por unidad de tiempo.

ESBOCE

Un croquis del eje vertical de coordenadas se superpone a una foto de las Cataratas del Niágara en la figura 6.22.

INVESTIGUE

La potencia media está dada por el trabajo por unidad de tiempo:

$$\bar{P} = \frac{W}{t}.$$

El trabajo que realiza el agua que cae es igual al cambio en la energía potencial gravitacional,

$$\Delta U = W.$$

El cambio en energía potencial gravitacional de una masa dada m de agua al caer una distancia h está dada por

$$\Delta U = mgh.$$

SIMPLIFIQUE

Podemos combinar las tres ecuaciones anteriores para obtener

$$\bar{P} = \frac{W}{t} = \frac{mgh}{t} = \left(\frac{m}{t}\right)gh.$$



FIGURA 6.22 Cataratas del Niágara, en la figura se muestra una elevación h para la caída del agua de la catarata.

(continúa)

(continuación)

CALCULE

Primero calculamos la masa del agua que se mueve en las cataratas por unidad de tiempo, a partir del volumen dado de agua por unidad de tiempo, usando la densidad del agua:

$$\frac{m}{t} = \left(5\,520 \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \right) \left(\frac{1\,000 \text{ kg}}{\text{m}^3} \right) = 5.52 \cdot 10^6 \text{ kg/s.}$$

La potencia media es entonces

$$\bar{P} = (5.52 \cdot 10^6 \text{ kg/s}) (9.81 \text{ m/s}^2) (49.0 \text{ m}) = 2\,653.4088 \text{ MW.}$$

REDONDEE

Redondeamos a tres cifras significativas:

$$\bar{P} = 2.65 \text{ GW.}$$

VUELVA A REVISAR

Nuestro resultado es comparable con la producción de plantas eléctricas grandes, del orden de 1 000 MW (1 GW). La capacidad combinada de generación eléctrica de todas las plantas hidroeléctricas en las Cataratas del Niágara tiene un pico de 4.4 GW durante la temporada de aguas altas en la primavera, lo cual es cercano a nuestra respuesta. Sin embargo, usted puede preguntarse cómo produce electricidad el agua simplemente al caer de las Cataratas del Niágara. La respuesta es que no lo hace. En vez de esto, una gran fracción del agua del Río Niágara se desvía aguas arriba de las cataratas y se envía por túneles, donde mueve generadores de energía eléctrica. El agua que pasa por las cascadas durante el día y en la temporada turística de verano es sólo alrededor de 50% del caudal del Río Niágara. Este flujo se reduce todavía más, hasta 10%, y se desvía más agua para la generación de energía durante la noche y en el invierno.

PREGUNTAS DE OPCIÓN MÚLTIPLE

6.1 Un bloque con masa de 5.0 kg se desliza sin fricción con rapidez de 8.0 m/s sobre la superficie horizontal de una mesa, hasta que choca y se adhiere a una masa de 4.0 kg fijada a un resorte horizontal (con constante de resorte de $k = 2\,000.0$ N/m), que a su vez está fijado a una pared. ¿Qué tanto se comprime el resorte antes de que las masas entren en reposo?

- a) 0.40 m c) 0.30 m e) 0.67 m
b) 0.54 m d) 0.020 m

6.2 Un péndulo oscila en un plano vertical. En la parte inferior de la oscilación, la energía cinética es de 8 J y la energía potencial gravitacional es de 4 J. En la posición más alta de la oscilación, las energías cinética y potencial gravitacional son

- a) energía cinética = 0 J, y energía potencial gravitacional = 4 J.
b) energía cinética = 12 J, y energía potencial gravitacional = 0 J.
c) energía cinética = 0 J, y energía potencial gravitacional = 12 J.
d) energía cinética = 4 J, y energía potencial gravitacional = 8 J.
e) energía cinética = 8 J, y energía potencial gravitacional = 4 J.

6.3 Una pelota con una masa de 0.5 kg se suelta desde el reposo en el punto A, que está 5 m arriba del fondo de un tanque de aceite, como se muestra en la figura. En B, que está 2 m arriba del fondo del tanque, la pelota tiene una rapidez de

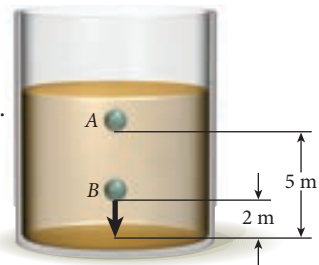
6 m/s. El trabajo realizado sobre la pelota por la fuerza de fricción del fluido es

- a) +15 J. c) -15 J. e) -5.7 J.
b) +9 J. d) -9 J.

6.4 Un niño lanza tres canicas idénticas desde la misma altura sobre el nivel del suelo, de modo que aterrizan en la azotea plana de un edificio.

Las canicas se lanzan con la misma rapidez inicial. La primera canica, canica A, se lanza con un ángulo de 75° sobre la horizontal, y las canicas B y C se lanzan con ángulos de lanzamiento de 60° y 45° , respectivamente. Despreciando la resistencia del aire, clasifique las canicas de acuerdo con la rapidez con la que golpean la azotea.

- a) $A < B < C$
b) $C < B < A$
c) A y C tienen la misma rapidez; B tiene una menor rapidez.
d) B tiene la rapidez mayor; A y C tienen la misma rapidez.
e) A, B y C golpean la azotea con la misma rapidez.



6.5 ¿Cuál de las siguientes *no* es una función válida de energía potencial para la fuerza de resorte $F = -kx$?

- a) $(\frac{1}{2})kx^2$ c) $(\frac{1}{2})kx^2 - 10 \text{ J}$ e) Ninguna de las anteriores es válida.
 b) $(\frac{1}{2})kx^2 + 10 \text{ J}$ d) $-(\frac{1}{2})kx^2$

6.6 Usted estira con la mano un resorte hasta un desplazamiento x desde su posición de equilibrio y luego lo vuelve a poner de manera lenta en la posición de equilibrio. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

- a) El ΔU del resorte es positivo.
 b) El ΔU del resorte es negativo.
 c) El ΔU de su mano es positivo.
 d) El ΔU de su mano es negativo.
 e) Ninguna de las afirmaciones anteriores es verdadera.

6.7 En la pregunta 6, ¿cuál es el trabajo realizado por la mano?

- a) $-(\frac{1}{2})kx^2$ d) cero.
 b) $+(\frac{1}{2})kx^2$ e) Ninguna de las anteriores.
 c) $(\frac{1}{2})mv^2$, donde v es la rapidez de la mano.

6.8 ¿Cuál de las siguientes *no* es una unidad de energía?

- a) newton-metro c) kilowatt-hora e) Todas las anteriores.
 b) joule d) $\text{kg m}^2/\text{s}^2$

6.9 Un resorte tiene una constante de resorte de 80 N/m . ¿Cuánta energía potencial almacena cuando se estira en 1.0 cm ?

- a) $4.0 \cdot 10^{-3} \text{ J}$ c) 80 J e) 0.8 J
 b) 0.40 J d) 800 J

PREGUNTAS

6.10 ¿Puede ser negativa la energía cinética de un objeto? ¿Puede ser negativa la energía potencial de un objeto?

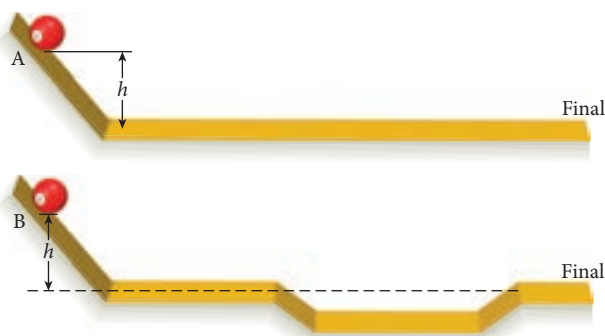
6.11 a) Si usted salta de una mesa al suelo, ¿se conserva su energía mecánica? Si no, ¿a dónde va? b) Un auto que va por un camino se estrella contra un árbol. ¿Se conserva la energía mecánica del auto? Si no, ¿a dónde va?

6.12 ¿Cuánto trabajo realiza usted cuando sostiene una bolsa de víveres mientras está de pie en reposo? ¿Cuánto trabajo hace cuando carga la misma bolsa una distancia horizontal d por el lote de estacionamiento de la tienda de víveres?

6.13 Se coloca una flecha en un arco; se tira de la cuerda del arco, y se dispara la flecha verticalmente hacia arriba; la flecha luego regresa hacia abajo y se clava en el suelo. Describa todos los cambios que ocurren en el trabajo y la energía.

6.14 Dos bolas de billar idénticas parten de la misma altura y al mismo tiempo y ruedan por diferentes pistas, como se ve en la figura,

- a) ¿Cuál bola tiene la rapidez más alta al final?
 b) ¿Cuál llegará primero al final?



6.15 Una chica con masa de 49.0 kg está en un columpio, que tiene una masa de 1.0 kg . Suponga que usted tira de ella desde atrás hasta que su centro de masa esté a 2.0 m arriba del suelo. Luego la deja ir y ella oscila y regresa al mismo punto. ¿Son conservativas todas las fuerzas que actúan sobre la chica y el columpio?

6.16 ¿Se puede definir una función de energía potencial por la fuerza de fricción?

6.17 ¿Puede ser negativa la energía potencial de un resorte?

6.18 Un extremo de una banda elástica se fija, y usted tira del otro extremo para trazar una trayectoria *cerrada* complicada. Si usted fuera a medir la fuerza elástica F en cada punto y tomara su producto escalar con los desplazamientos locales $\vec{F} \cdot \Delta \vec{r}$, y luego sumara todos estos productos, ¿qué obtendría usted?

6.19 ¿Puede una función de energía potencial única identificarse con una fuerza conservativa en particular?

6.20 En el paracaidismo deportivo, la componente vertical de la velocidad del paracaidista es típicamente cero en el momento de salir del avión. La componente vertical de la velocidad aumenta luego hasta que el paracaidista alcanza la rapidez terminal (vea el capítulo 4). Hagamos un modelo simplificado de este movimiento. Supongamos que la componente horizontal de la velocidad es cero. La componente vertical de la velocidad aumenta en forma lineal, con una aceleración $a_y = -g$, hasta que el paracaidista alcanza velocidad terminal, después de lo cual permanece constante. Así, nuestro modelo simplificado supone caída libre sin resistencia de aire, seguida de caída con rapidez constante. Trace la energía cinética, la energía potencial y la energía total como función del tiempo para este modelo.

6.21 Un proyectil de masa m se lanza desde el suelo en $t = 0$, con una rapidez v_0 y a un ángulo θ_0 sobre la horizontal. Suponiendo que la resistencia del aire es despreciable, escriba las energías cinética, potencial y total del proyectil como funciones explícitas del tiempo.

6.22 La "altura de energía, H , de una aeronave de masa m a una altitud h y con rapidez v se define como su energía total (considerando el cero de la energía potencial a nivel del suelo) dividida entre su peso. Así, la altura de energía es una cantidad con unidades de longitud.

- a) Deduzca una expresión para la altura de energía, H , en términos de las cantidades m , h y v .

b) Un jet Boeing 747 con masa de $3.5 \cdot 10^5$ kg está avanzando en vuelo nivelado a 250.0 m/s a una altitud de 10.0 km. Calcule el valor de su altura de energía.

Nota: La altura de energía es la altitud máxima que una aeronave puede alcanzar haciendo “zoom” (entrando en ascenso vertical sin cambiar el empuje del motor). Sin embargo, esta maniobra no se recomienda para un 747.

6.23 Un cuerpo de masa m se mueve en una dimensión bajo la influencia de una fuerza, $F(x)$ que depende sólo de la posición del cuerpo.

a) Pruebe que la segunda ley de Newton y la ley de conservación de la energía para este cuerpo son exactamente equivalentes.

b) Explique luego por qué la ley de conservación de la energía se considera que es de mayor importancia que la segunda ley de Newton.

6.24 El amarre molecular en una molécula diatómica como la de nitrógeno (N_2) se puede modelar por el potencial de Lennard-Jones, que tiene la forma

$$U(x) = 4U_0 \left[\left(\frac{x_0}{x} \right)^{12} - \left(\frac{x_0}{x} \right)^6 \right],$$

donde x es la distancia de separación entre los dos núcleos, y x_0 y U_0 son constantes. Determine, en términos de estas constantes, lo siguiente:

a) La correspondiente función de la fuerza.

b) La separación de equilibrio x_0 , que es el valor de x para el cual dos átomos experimentan fuerza cero entre ellos, y

c) La naturaleza de la interacción (repulsiva o atractiva) para separaciones mayores y menores que x_0 .

6.25 Una partícula de masa m que se mueve en el plano xy está confinada por una función potencial bidimensional $U(x, y) = \frac{1}{2}k(x^2 + y^2)$.

a) Deduzca una expresión para la fuerza neta, $\vec{F} = F_x \hat{x} + F_y \hat{y}$.

b) Encuentre el punto de equilibrio en el plano xy .

c) Describa en forma cualitativa el efecto de la fuerza neta.

d) ¿Cuál es la magnitud de la fuerza neta sobre la partícula en la coordenada (3.0, 4.0) en cm, si $k = 10$ N/cm?

e) ¿Cuáles son los puntos de inflexión si la partícula tiene 10.0 J de energía mecánica total?

6.26 Para una roca que se deja caer desde el reposo desde una altura h , para calcular la rapidez inmediatamente antes de tocar el suelo, usamos la conservación de la energía mecánica, y escribimos $mgh = \frac{1}{2}mv^2$. La masa se cancela, y despejamos v . Un error muy común cometido por algunos estudiantes de física principiantes es suponer, con base en la apariencia de esta ecuación, que deben igualar la energía cinética a la energía potencial en el mismo punto del espacio. Por ejemplo, para calcular la rapidez v_1 de la roca a cierta altura $y_1 < h$, a menudo escriben $mgy_1 = \frac{1}{2}mv_1^2$ y despejan v_1 . Explique por qué este procedimiento es incorrecto.

PROBLEMAS

Una • y dos •• indican un nivel creciente de dificultad.

Sección 6.1

6.27 ¿Cuál es la energía potencial gravitacional de un libro de 2.0 kg que está 1.25 m arriba del suelo?

6.28 a) Si la energía potencial gravitacional de una roca de 40.0 kg es de 500. J en relación con un valor de 0 en el suelo, ¿a qué altura está la roca arriba del suelo?

b) Si la roca se subiera al doble de su altura original, ¿cómo cambiaría el valor de la energía potencial gravitacional?

6.29 Una roca con masa de 0.773 kg está suspendida de una cuerda con longitud de 2.45 m en la Luna, donde la aceleración gravitacional es una sexta parte de la Tierra. ¿Cuál es el cambio en energía potencial gravitacional de esta roca cuando se mueve de tal manera que el ángulo de la cuerda cambia de 3.31° a 14.01° ? (Ambos ángulos medidos respecto a la vertical.)

6.30 Un niño de 20.0 kg está en un columpio suspendido de cuerdas con longitud $L = 1.50$ m. Considere que el cero de la energía potencial gravitacional está en la posición del niño cuando las cuerdas están horizontales.

a) Determine la energía potencial gravitacional del niño cuando está en el punto más bajo de la trayectoria circular.

b) Determine la energía potencial gravitacional cuando las cuerdas formen un ángulo de 45.0° respecto a la vertical.

c) Con base en estos resultados, ¿cuál posición tiene la mayor energía potencial?

Sección 6.3

6.31 Un auto de 1.50×10^3 kg viaja 2.50 km cuesta arriba por un camino inclinado a velocidad constante. El camino inclinado tiene un ángulo de 3.0° respecto a la horizontal. ¿Cuál es el cambio en la energía potencial del auto? ¿Cuál es el trabajo neto sobre el auto?

6.32 Se necesita una fuerza constante de 40.0 N para conservar un auto viajando con rapidez constante cuando se mueve 5.0 km por un camino. ¿Cuánto trabajo se realiza? ¿El trabajo se realiza sobre el auto o el auto realiza el trabajo?

6.33 Una piñata con masa de 3.27 kg se ata a una cuerda atada a un gancho en el techo. La longitud de la cuerda es de 0.81 m, y la piñata se suelta desde el reposo de una posición inicial en la que la cuerda forma un ángulo de 56.5° con la vertical. ¿Cuál es el trabajo que realiza la gravedad en el momento en que la cuerda está en posición vertical por primera vez?

Sección 6.4

•**6.34** Una partícula se mueve a lo largo del eje x sujeta a la siguiente función de la energía potencial $U(x) = 1/x + x^2 + x - 1$.

a) Expresé la fuerza experimentada por la partícula como función de x .

b) Grafique esta fuerza y la función de la energía potencial.

c) Determine la fuerza neta sobre la partícula en la coordenada $x = 2.00$ m.

•6.35 Calcule la fuerza $F(y)$ asociada con cada una de las siguientes energías potenciales:

a) $U = ay^3 - by^2$ b) $U = U_0 \sin(cy)$

•6.36 La energía potencial de cierta partícula está dada por $U = 10x^2 + 35z^3$. Encuentre el vector fuerza que se ejerce sobre la partícula.

Sección 6.5

6.37 Se lanza una pelota al aire y alcanza una altura de 5.00 m. Usando consideraciones de conservación de la energía, determine su rapidez inicial.

6.38 Una bala de cañón con masa de 5.99 kg se dispara de un cañón a un ángulo de 50.21° con respecto a la horizontal, y con una rapidez inicial de 52.61 m/s. Cuando la bala llega al punto más alto de su trayectoria, ¿cuál es el aumento en su energía potencial en relación con el punto desde el que se disparó?

6.39 Un balón de basquetbol con masa de 0.624 kg se dispara desde una altura vertical de 1.2 m a una rapidez de 20.0 m/s. Después de alcanzar su altura máxima, el balón entra al aro en su trayecto de bajada, a 3.05 m sobre el suelo. Usando el principio de conservación de la energía, determine la rapidez del balón inmediatamente antes de entrar al aro.

•6.40 Un compañero de clase lanza un libro de 1.0 kg desde una altura de 1.0 m sobre el suelo directamente hacia arriba. El libro llega a una altura máxima de 3.0 m sobre el suelo, y comienza a caer. Suponga que 1.0 m sobre el suelo es el nivel de referencia para la energía potencial gravitacional cero. Determine

- a) La energía potencial gravitacional del libro cuando toca el suelo.
- b) La velocidad del libro inmediatamente antes de tocar el suelo.

•6.41 Suponga que usted lanza una pelota de 0.052 kg con una rapidez de 10.0 m/s a un ángulo de 30.0° sobre la horizontal desde un edificio de 12.0 m de altura.

- a) ¿Cuál será su energía cinética cuando toca el suelo?
- b) ¿Cuál será su rapidez cuando toca el suelo?

•6.42 Una cadena uniforme con masa total m se coloca extendida sobre una mesa sin fricción y se mantiene estacionaria de modo que un tercio de su longitud, $L = 1.00$ m, cuelga de manera vertical del borde de la mesa. Luego se suelta la cadena. Determine la rapidez de la cadena en el instante en que sólo un tercio de su longitud permanece en la mesa.

•6.43 a) Si usted está en el extremo superior de una pista para tobogán de trineo de 40.0 m de altura, ¿qué tan rápido irá usted en la base, suponiendo que puede ignorar la fricción entre el trineo y la pista?

- b) ¿La pendiente de la pista afecta la rapidez que usted tiene al llegar a la base?
- c) Si no ignora la pequeña fuerza de fricción, ¿la pendiente de la pista afecta el valor de la rapidez en la base?

Sección 6.6

6.44 Un bloque con masa de 0.773 kg unido a un resorte con constante de resorte de 239.5 N/m oscila verticalmente con amplitud de 0.551 m. ¿Cuál es la rapidez de este bloque a una distancia de 0.331 m de la posición de equilibrio?

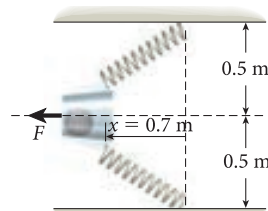
6.45 Un resorte con $k = 10.0$ N/cm se estira inicialmente 1.00 cm desde su longitud de equilibrio.

- a) ¿Cuánta energía adicional se necesita para estirar más el resorte hasta 5.00 cm más allá de su longitud de equilibrio?
- b) Desde esta nueva posición, ¿cuánta energía se necesita para comprimir el resorte a 5.00 cm a partir de su posición de equilibrio?

•6.46 Una bola de arcilla de 5.00 kg se lanza hacia abajo desde una altura de 3.00 m con una rapidez de 5.00 m/s sobre un resorte con $k = 1\,600$ N/m. La arcilla comprime al resorte cierta cantidad máxima antes de detenerse de manera momentánea.

- a) Encuentre la compresión máxima del resorte.
- b) Encuentre el trabajo total realizado sobre la arcilla durante la compresión del resorte.

•6.47 Una resorte horizontal consiste en dos resortes ligeros idénticos (con constantes de resorte de 30.0 N/m) y un receptáculo ligero que aloja una piedra de 1.00 kg. Cada resorte tiene una longitud de equilibrio de 50.0 cm. Cuando los resortes están en equilibrio, se alinean verticalmente. Suponga



que el receptáculo que contiene la masa se retrae hasta $x = 70.0$ m a la izquierda desde la vertical, y luego se suelta. Determine

- a) La energía mecánica total del sistema.
- b) La rapidez de la piedra en $x = 0$.

•6.48 Suponga que la piedra del problema 6.47 se lanza verticalmente, y la masa es mucho menor ($m = 0.100$ kg). Considere que el cero de la energía potencial gravitacional está en el punto de equilibrio,

- a) Determine la energía mecánica total del sistema.
- b) ¿Con qué rapidez se mueve la piedra al pasar por el punto de equilibrio?

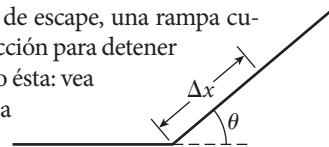
Sección 6.7

6.49 Un bombero de 80.0 kg se desliza por un poste de 3.00 m aplicando una fuerza de fricción de 400. N contra el poste con sus manos. Si se desliza desde el reposo, ¿cuál será su rapidez al llegar al suelo?

6.50 Una pelota de plástico llena de aire de 0.100 kg se lanza verticalmente hacia arriba con una rapidez inicial de 10.0 m/s. A una altura de 3.00 m, la rapidez de la pelota es de 3.00 m/s. ¿Qué fracción de su energía original se ha perdido por la fricción del aire?

6.51 ¿Cuánta energía mecánica se pierde por fricción si un esquiador de 55.0 kg se desliza sobre una pendiente de esquiar con rapidez constante de 14.4 m/s? La pendiente tiene una longitud de 123.5 m y forma un ángulo de 14.7° respecto a la horizontal.

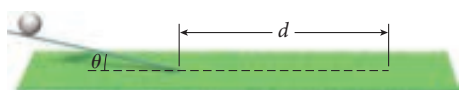
•6.52 Un camión con masa de 10 212 kg que se mueve con una rapidez de 61.2 mph ha perdido los frenos. Afortunadamente, el conductor encuentra un carril de escape, una rampa cubierta de grava que utiliza la fricción para detener un camión en situaciones como ésta: vea la figura. En este caso, la rampa forma un ángulo $\theta = 40.15^\circ$



con la horizontal, y la grava tiene un coeficiente de fricción de 0.634 con los neumáticos del camión. ¿Qué distancia, a lo largo de la rampa (Δx) recorre el camión antes de detenerse?

•6.53 Un deportista de snowboard, con masa de 70.1 kg (incluyendo equipo y ropa) se desliza por una pendiente con ángulo $\theta = 37.1^\circ$ con la horizontal, comenzando con una rapidez de 5.1 m/s. El coeficiente de fricción cinética es de 0.116. ¿Cuál es el trabajo neto realizado sobre él en los primeros 5.72 s de su descenso?

•6.54 Los cuidadores de los campos de golf usan un medidor de Stimpson para determinar la “rapidez” de sus campos. Un medidor de Stimpson es una barra recta de aluminio con una ranura en V por la cual puede rodar una pelota de golf. Está diseñada para soltar la pelota cuando el ángulo de la barra con el suelo llegue a un valor $\theta = 20.0^\circ$. La pelota (masa = 1.62 oz = 0.0459 kg) rueda hacia abajo 30.0 pulgadas en la barra y luego continúa rodando varios pies sobre el césped. La distancia que rueda por el césped se llama la “lectura”. La prueba se realiza en una zona nivelada del green, y se consideran aceptables lecturas entre 7 y 12 ft. Para una lectura del medidor de Stimpson de 11.1 ft, ¿cuál es el coeficiente de fricción entre la pelota y el césped? (La pelota rueda y no se desliza, como por lo general suponemos al considerar la fricción; pero ello no cambia el resultado en este caso.)



•6.55 Un bloque de 1.00 kg se empuja hacia arriba y hacia abajo por un tablón áspero de longitud $L = 2.00$ m, inclinado 30.0° sobre la horizontal. Desde la base, se empuja una distancia $L/2$ hacia arriba, luego se empuja de regreso una distancia $L/4$, y finalmente se empuja de nuevo hacia arriba hasta que llega al borde superior. Si el coeficiente de fricción cinética entre el bloque y el tablón es de 0.300, determine el trabajo realizado sobre el bloque por la fuerza de fricción.

••6.56 Un bloque de 1.00 kg que está inicialmente en reposo en el extremo superior de un plano inclinado de 4.00 m con una pendiente de 45.0° comienza a deslizarse hacia abajo. La mitad superior del plano inclinado es sin fricción, mientras que la parte inferior es áspera, con un coeficiente de fricción cinética $\mu_k = 0.300$.

a) ¿Con qué rapidez se mueve el bloque a la mitad de la trayectoria sobre el plano inclinado, antes de entrar a la sección áspera?

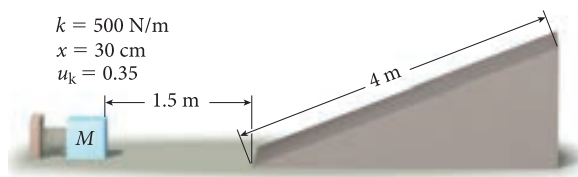
b) ¿Con qué rapidez se mueve el bloque en el extremo inferior del plano inclinado?

••6.57 Se usa un resorte con una constante de resorte de 500. N/m para impulsar una masa de 0.500 kg hacia arriba sobre un plano inclinado. El resorte se comprime 30.0 cm desde su posición de equilibrio y lanza la masa desde el reposo por una superficie horizontal y hacia el plano inclinado. El plano inclinado tiene una longitud de 4.00 m y una inclinación de 30.0° . Tanto el plano como la superficie horizontal tienen un coeficiente de fricción cinética con la masa de 0.350. Cuando el resorte se comprime, la masa está a 1.50 m del extremo inferior del plano inclinado.

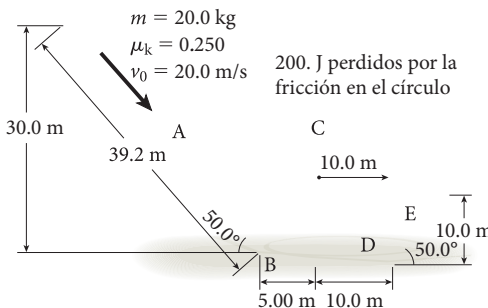
a) ¿Cuál es la rapidez de la masa cuando llega al extremo inferior del plano?

b) ¿Cuál es la rapidez de la masa cuando llega al extremo superior del plano?

c) ¿Cuál es el trabajo total que realiza la fricción desde el principio hasta el final del movimiento de la masa?

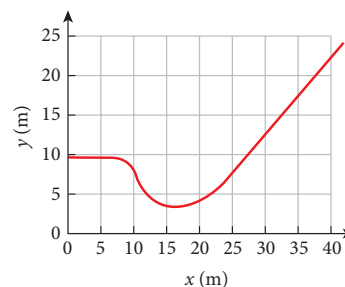


••6.58 El trineo que se muestra en la figura sale del punto de partida con una velocidad de 20.0 m/s. Use el teorema del trabajo y la energía para calcular la rapidez del trineo al final de la pista, o la máxima altura a la que llega si se detiene antes de llegar al final.



Sección 6.8

•6.59 En el segmento de la pista de la montaña rusa que se muestra en la figura, un carrito con masa de 237.5 kg se mueve de izquierda a derecha y comienza a $x = 0$ con una rapidez de 16.5 m/s. Suponiendo que la disipación de la energía



debida a la fricción es suficientemente pequeña para ignorarla, ¿dónde está el punto de inflexión de esta trayectoria?

•6.60 Una esquiadora de 70.0 kg que se mueve horizontalmente a 4.50 m/s encuentra una pendiente con una inclinación de 20.0° .

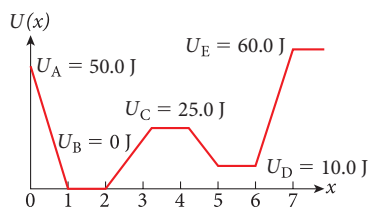
a) ¿A qué distancia hacia arriba de la pendiente se moverá la esquiadora antes de detenerse de manera momentánea, ignorando la fricción?

b) ¿A qué distancia hacia arriba de la pendiente se moverá la esquiadora si el coeficiente de fricción cinética entre los esquís y la nieve es de 0.100?

•6.61 Una partícula de 0.200 kg se mueve a lo largo del eje x , sujeta a la función de la energía potencial que se muestra en la figura, donde $U_A = 50.0$ J, $U_B = 0$ J, $U_C = 25.0$ J, $U_D = 10.0$ J, y $U_E = 60.0$ J a lo largo de la trayectoria. Si la partícula estaba al inicio en $x = 4$ m y tenía una energía mecánica total de 40.0 J, determine:

a) la rapidez de la partícula en $x = 3$ m;

- b) la rapidez de la partícula en $x = 4.50$ m, y
 c) los puntos de inflexión de la partícula.

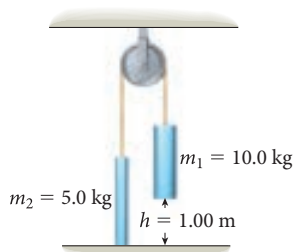


Problemas adicionales

6.62 Una pelota con una masa de 1.84 kg se deja caer desde una altura $y_1 = 1.49$ m, y luego rebota hacia arriba hasta una altura de $y_2 = 0.87$ m. ¿Cuánta energía mecánica se pierde en el rebote? Se ha encontrado experimentalmente que el efecto de la resistencia del aire es despreciable en este caso y usted lo puede ignorar.

6.63 Un auto con una masa de 987 kg viaja por un segmento horizontal de una autopista con una rapidez de 64.5 mph. De manera repentina, el conductor tiene que pisar duro el freno para tratar de esquivar un auto accidentado. El auto no tiene frenos ABS (sistema de frenado antibloqueo), y las ruedas se bloquean, haciendo que el auto se deslice cierta distancia antes de que se detenga debido a la fuerza de fricción entre los neumáticos y la superficie del camino. El coeficiente de fricción cinética es de 0.301. ¿Cuánta energía mecánica se pierde convertida en calor en este proceso?

6.64 Dos masas están conectadas por una cuerda ligera que pasa por una polea ligera, sin fricción, como se muestra en la figura. La masa de 10.0 kg se suelta y cae una distancia vertical de 1.00 m antes de tocar el suelo. Use la conservación de la energía mecánica para determinar:



- a) Con qué rapidez se mueve la masa de 5.00 kg inmediatamente antes de que la de 10.0 kg toque el suelo, y
 b) la altura máxima que alcanza la masa de 5.00 kg.

6.65 En 1896, en Waco, Texas, William George Crush, propietario del Ferrocarril K-T (o “Katy”), estacionó dos locomotoras en los extremos opuestos de una vía de 6.4 km de longitud, las encendió, amarró sus aceleradores en posición abierta y luego las dejó chocar de frente a toda velocidad frente a 30 000 espectadores. Cientos de personas sufrieron heridas por los trozos que salieron disparados, y varios perdieron la vida. Suponiendo que cada locomotora pesaba $1.2 \cdot 10^6$ N y que su aceleración a lo largo de la vía era constante, 0.26 m/s², ¿cuál fue la energía cinética total de las dos locomotoras inmediatamente antes de la colisión?



6.66 Un pitcher de béisbol puede lanzar una pelota de 5.00 oz con una rapidez de 90.0 mph, medida por una pistola de radar. Suponiendo que la fuerza que ejerce el pitcher sobre la pelota

actúa por una distancia de dos longitudes de brazo, cada una de 28.0 in, ¿cuál es la fuerza promedio que ejerce el pitcher sobre la pelota?

6.67 Un balón de fútbol de 1.50 kg tiene una rapidez de 20.0 m/s cuando está a 15.0 m arriba del suelo. ¿Cuál es la energía total del balón?

6.68 Si se necesita una fuerza promedio de 5.5 N para empujar un dardo de 4.5 g y 6.0 cm dentro de una pistola de dardos, suponiendo que el cañón de la pistola carece de fricción, ¿con qué rapidez saldrá el dardo de la pistola?

6.69 Un saltador de altura se acerca a la barra a 9.0 m/s. ¿Cuál es la altura máxima que alcanza el saltador si no usa ningún empuje adicional desde el suelo y se está moviendo a 7.0 m/s cuando pasa por encima de la barra?

6.70 Un carrito de montaña rusa se mueve a 2.00 m/s en la cima de la primera colina ($h = 40.0$ m). Ignorando la fricción y la resistencia del aire, ¿con qué rapidez se moverá el carrito en la cima de la siguiente colina, que tiene una altura de 15.0 m?

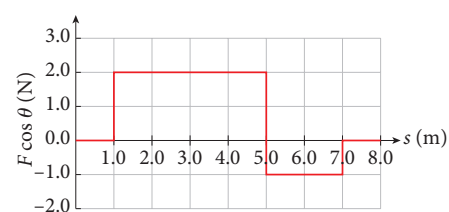
6.71 Usted está en un columpio que tiene una cadena de 4.0 m de largo. Si su desplazamiento máximo respecto de la vertical es de 35°, ¿con qué rapidez se moverá usted en la parte más baja del arco?

6.72 Un camión desciende por un camino sinuoso de montaña. Cuando el camión está a 680 m sobre el nivel del mar y viaja a 15 m/s, fallan los frenos. ¿Cuál es la máxima rapidez posible del camión al pie de la montaña, que está a 550 m sobre el nivel del mar?

6.73 Tarzán se lanza colgado de una liana desde su casa hasta una rama de un árbol vecino, ubicado a una distancia horizontal de 10.0 m y 4.00 m más bajo que su punto de partida. Asombrosamente, la liana ni se estira ni se rompe; por lo tanto, la trayectoria de Tarzán es una porción de una circunferencia. Si Tarzán comienza con rapidez cero, ¿cuál es su rapidez cuando llega a la rama?

6.74 La gráfica muestra la componente ($F \cos \theta$) de la fuerza neta que actúa sobre un bloque de 2.0 kg cuando se mueve a lo largo de una superficie horizontal plana. Encuentre

- a) El trabajo neto que se realiza sobre el bloque.
 b) La rapidez final del bloque si parte del reposo en $s = 0$.



6.75 Un cohete modelo de 3.00 kg se lanza en forma vertical hacia arriba con rapidez inicial suficiente para alcanzar una altura de $1.00 \cdot 10^2$ m, aunque la resistencia del aire (una fuerza no conservativa) realiza un trabajo de $-8.00 \cdot 10^2$ J sobre el cohete. ¿A qué altura habría subido el cohete si no hubiera resistencia del aire?

6.76 Una masa de 0.500 kg se fija a un resorte horizontal con $k = 100$. N/m. La masa se desliza sobre una superficie sin fricción. El resorte se estira 25.0 cm desde el equilibrio, y luego la masa se libera desde el reposo.

- a) Encuentre la energía mecánica del sistema.
 b) Encuentre la rapidez de la masa cuando se ha movido 5.00 cm.
 c) Encuentre la rapidez máxima de la masa.

•6.77 Usted ha decidido mover un refrigerador (masa = 81.3 kg, incluyendo todo su contenido) al otro lado del cuarto. Usted lo desliza por el piso en una trayectoria recta con longitud de 6.35 m, y el coeficiente de fricción cinética entre el piso y el refrigerador es de 0.437. Feliz de su logro, sale del departamento. Su compañero de cuarto llega, se pregunta por qué el refrigerador está del otro lado del cuarto, lo carga (¡su compañero de cuarto es fuerte!) y lo vuelve a colocar donde estaba originalmente. ¿Cuánto trabajo mecánico neto han realizado ustedes dos?

•6.78 Un bloque de 1.00 kg comprime 20.0 cm un resorte para el cual $k = 100$ N/m, y luego se libera para moverse por una mesa horizontal sin fricción, donde topa con otro resorte con $k = 50.0$ N/m y lo comprime. Determine

- a) La energía mecánica total del sistema.
 b) La rapidez de la masa cuando se mueve con libertad entre los resortes, y
 c) La compresión máxima del segundo resorte.

•6.79 Un bloque de 1.00 kg está en reposo contra un resorte ligero, comprimido, en el extremo inferior de un plano áspero inclinado en un ángulo de 30.0° ; el coeficiente de fricción cinética entre el bloque y el plano es $\mu_k = 0.100$. Suponga que el resorte se comprime 10.0 cm desde su longitud de equilibrio. Luego se libera el resorte y el bloque se separa del resorte y se desliza hacia arriba del plano inclinado a una distancia de sólo 2.00 cm más allá de la longitud normal del resorte antes de detenerse. Determine

- a) el cambio en energía mecánica total del sistema, y
 b) la constante de resorte, k .

•6.80 Una pelota de 0.100 kg se deja caer desde una altura de 1 m y aterriza sobre un receptáculo ligero (aproximadamente sin masa) montado encima de un resorte ligero vertical, inicialmente con su longitud de equilibrio. La compresión máxima del resorte debe ser de 10.0 cm.

- a) ¿Cuál es la constante de resorte necesaria?
 b) Suponga que usted ignora el cambio en la energía gravitacional de la pelota durante la compresión de 10 cm. ¿Cuál es la diferencia porcentual entre la constante de resorte calculada para este caso y la respuesta obtenida en el inciso a)?

•6.81 Una masa de 1.00 kg fijada a un resorte con constante de resorte de 100. N/m oscila horizontalmente sobre una mesa lisa sin fricción con una amplitud de 0.500 m. Cuando la masa está a 0.250 m de la posición de equilibrio, determine:

- a) su energía mecánica total;
 b) la energía potencial del sistema y la energía cinética de la masa;
 c) la energía cinética de la masa cuando está en el punto de equilibrio.
 d) Suponga que había fricción entre la masa y la mesa, de modo que la amplitud se reduce a la mitad después de cierto tiempo. ¿Por qué factor ha cambiado la energía cinética máxima de la masa?

e) ¿Por qué factor ha cambiado la energía potencial máxima?

•6.82 Bolo, la bala humana, es expulsado desde un cañón de 3.50 m de longitud. Si Bolo ($m = 80.0$ kg) tiene una rapidez de 12.0 m/s en

el ápice de su trayectoria, 15.0 m arriba del suelo, ¿cuál fue la fuerza promedio que se ejerció sobre él mientras estaba en el cañón?

•6.83 Una masa de 1.00 kg está suspendida de manera vertical de un resorte con $k = 100$ N/m y oscila con una amplitud de 0.200 m. En la parte más alta de su oscilación, la masa es golpeada de tal manera que de forma instantánea se mueve hacia abajo con una rapidez de 1.00 m/s. Determine

- a) su energía mecánica total;
 b) con qué rapidez se mueve cuando cruza el punto de equilibrio, y
 c) su nueva amplitud.

•6.84 Un corredor llega a la cima de una colina con una rapidez de 6.50 m/s. Desciende 50.0 m y luego asciende 28.0 m a la cima de la siguiente colina. Su rapidez es ahora de 4.50 m/s. El corredor tiene una masa de 83.0 kg. La distancia total que cubre el corredor es de 400.0 m, y hay una resistencia constante al movimiento de 9.00 N. Use consideraciones de energía para encontrar el trabajo realizado por el corredor a lo largo de la distancia total recorrida.

•6.85 Se deja caer un paquete sobre una banda transportadora horizontal. La masa del paquete es m , la rapidez de la banda es v , y el coeficiente de fricción cinética entre el paquete y la banda es μ_k .

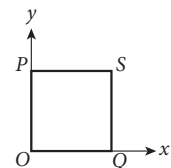
- a) ¿Cuánto tarda el paquete en dejar de deslizarse sobre la banda?
 b) ¿Cuál es el desplazamiento del paquete durante este tiempo?
 c) ¿Cuál es la energía disipada por la fricción?
 d) ¿Cuál es el trabajo total realizado por el sistema?

•6.86 Un padre ejerce una fuerza de $2.40 \cdot 10^2$ N para tirar de un trineo con su hija (masa combinada de 85.0 kg) por una superficie horizontal. La cuerda con la que tira del trineo forma un ángulo de 20.0° con la horizontal. El coeficiente de fricción cinética es de 0.200, y el trineo se mueve una distancia de 8.00 m. Encuentre

- a) el trabajo realizado por el padre;
 b) el trabajo realizado por la fuerza de fricción, y
 c) el trabajo total realizado por todas las fuerzas.

•6.87 Una fuerza variable que actúa sobre una partícula de 0.100 kg que se mueve en el plano xy está dado por $F(x, y) = (x^2 \hat{x} + y^2 \hat{y})$ N, donde x y y están en metros. Suponga que, debido a esta fuerza, la partícula se mueve desde el origen, O , al punto S , con coordenadas (10.0 m, 10.0 m). Las coordenadas de los puntos P y Q son (0 m, 10.0 m) y (10.0 m, 0 m), respectivamente. Determine el trabajo realizado por la fuerza cuando la partícula se mueve por cada una de las siguientes trayectorias:

- a) OPS c) OS e) OQSP
 b) OQS d) OPSQO



••6.88 En el problema 6.87, suponga que había fricción entre la partícula de 0.100 kg y el plano xy , con $\mu_k = 0.100$. Determine el trabajo neto realizado por todas las fuerzas sobre la partícula cuando toma cada una de las siguientes trayectorias:

- a) OPS c) OS e) OQSP
 b) OQS d) OPSQO

Momento y colisiones

7



FIGURA 7.1 Un superpetrolero.

LO QUE APRENDEREMOS	206
7.1 Momento lineal	206
Definición de momento	206
Momento y fuerza	207
Momento y energía cinética	208
7.2 Impulso	208
Ejemplo 7.1 Jonrón en béisbol	209
7.3 Conservación del momento lineal	210
7.4 Colisiones elásticas en una dimensión	212
Caso especial 1: masas iguales	213
Caso especial 2: un objeto inicialmente en reposo	214
Ejemplo 7.2 Fuerza media en una pelota de golf	215
7.5 Colisiones elásticas en dos o tres dimensiones	216
Colisiones con muros	216
Colisiones de dos objetos en dos dimensiones	216
Problema resuelto 7.1 <i>Curling</i>	218
7.6 Colisiones totalmente inelásticas	220
Ejemplo 7.3 Colisión frontal	221
Péndulo balístico	221
Pérdida de energía cinética en colisiones totalmente inelásticas	222
Problema resuelto 7.2 Ciencia forense	223
Explosiones	224
Ejemplo 7.4 Desintegración de un núcleo de radón	225
Ejemplo 7.5 Física de partículas	226
7.7 Colisiones parcialmente inelásticas	227
Colisión parcialmente inelástica con una pared	228
7.8 El billar y el caos	228
El demonio de Laplace	229
LO QUE HEMOS APRENDIDO/ GUÍA DE ESTUDIO PARA EXAMEN	229
Práctica para resolución de problemas	231
Problema resuelto 7.3 Caída de un huevo	232
Problema resuelto 7.4 Colisión con un auto estacionado	233
Preguntas de opción múltiple	235
Preguntas	236
Problemas	237

LO QUE APRENDEREMOS

- El momento de un objeto es el producto de su velocidad y su masa. El momento es una cantidad vectorial y apunta en la misma dirección que el vector velocidad.
- La segunda ley de Newton se puede expresar de un modo más general como sigue: la fuerza neta sobre un objeto es igual a la derivada del momento del objeto con respecto al tiempo.
- El cambio de momento, llamado *impulso*, es la integral con respecto al tiempo de la fuerza neta que causa el cambio de momento.
- En todas las colisiones se conserva el momento.
- Además de la conservación del momento, las colisiones elásticas tienen también la propiedad de que la energía cinética total se conserva.
- En las colisiones totalmente inelásticas, se pierde la cantidad máxima de energía cinética, y los objetos colisionantes se adhieren uno a otro. La energía cinética total no se conserva, pero el momento sí.
- Las colisiones que no son ni elásticas ni totalmente inelásticas son parcialmente inelásticas, y el cambio en la energía cinética es proporcional al cuadrado del coeficiente de restitución.
- La física de las colisiones tiene una conexión directa con la investigación de frontera de la ciencia del caos.

Los superpetroleros para transportar petróleo alrededor del mundo son los barcos más grandes jamás construidos (figura 7.1). Pueden llegar a tener una masa (incluyendo la carga) de 650 000 toneladas, y cargar hasta 2 millones de barriles (84 millones de galones = 318 millones de litros) de petróleo. Sin embargo, su gran tamaño da lugar a problemas prácticos. Los superpetroleros son demasiado grandes para entrar a la mayoría de los puertos marítimos, y tienen que atracar en plataformas mar adentro, cerca de la costa, para descargar su petróleo. Además, pilotear un buque de este tamaño es extremadamente difícil. Por ejemplo, cuando el capitán da la orden de poner en reversa las máquinas y hacer alto, el barco puede continuar avanzando ¡más de tres millas!

La cantidad física que hace que un objeto grande en movimiento sea difícil de detener es el momento lineal o *momento*, que es el tema de este capítulo. El momento es una propiedad fundamental asociada con el movimiento de un objeto, similar a la energía cinética. Además, tanto el momento como la energía dan lugar a importantes leyes de conservación en la física. Sin embargo, el momento es una cantidad vectorial, mientras que la energía es una cantidad escalar. Así, trabajar con el momento exige tener en cuenta los ángulos y las componentes, como lo hicimos para la fuerza en el capítulo 4.

La importancia del momento se hace más evidente cuando hablamos de colisiones entre dos o más objetos. En este capítulo examinamos varias colisiones en una y dos dimensiones. En capítulos posteriores usaremos la conservación del momento en situaciones diferentes, en escalas ampliamente variadas: desde el estallido de partículas elementales hasta la colisión de galaxias.

7.1 Momento lineal

Para los términos *fuerza*, *posición*, *velocidad* y *aceleración*, las definiciones físicas precisas son bastante cercanas al uso de esas palabras en el lenguaje diario. Con el término *momento*, la situación es más análoga a la de *energía*, para la cual sólo hay una conexión vaga entre el uso coloquial y el significado físico preciso. Usted algunas veces escucha que la campaña de un candidato político dado gana “momento” o que la legislación gana “momento” en el Congreso. Con frecuencia, se dice también de los equipos deportivos o de los jugadores individuales que ganan o pierden “momento”. Lo que estas expresiones implican es que los objetos de los que se dice que ganan momento se han vuelto más difíciles de detener. Sin embargo, la figura 7.2 muestra que ¡incluso objetos con gran momento se pueden detener!

Definición de momento

En física, el **momento** se define como el producto de la masa de un objeto por su velocidad:

$$\vec{p} = m\vec{v}. \quad (7.1)$$

Como puede ver, la letra minúscula \vec{p} es el símbolo para el momento lineal. La velocidad \vec{v} es un vector y se multiplica por una cantidad escalar, la masa m . El producto, por lo tanto, también es un vector. El vector del momento, \vec{p} , y el vector velocidad, \vec{v} , son paralelos entre sí y señalan en



FIGURA 7.2 Prueba de choque de un avión de combate mediante un trineo de cohetes. Pruebas como ésta se pueden usar para mejorar el diseño de estructuras críticas tales como los reactores nucleares, para que soporten el impacto de un choque de avión.

la misma dirección. Como una consecuencia simple de la ecuación 7.1, la magnitud del momento es

$$p = mv.$$

El momento también se llama *momento lineal*, para distinguirlo del momento angular, un concepto que estudiaremos en el capítulo 10 que habla sobre rotación. Las unidades del momento son kg m/s. A diferencia de la unidad para energía, la unidad para el momento no tiene un nombre especial. La magnitud del momento abarca un amplio rango. En la tabla 7.1 se muestran momentos de diversos objetos, desde partículas subatómicas hasta un planeta en órbita alrededor del Sol.

Momento y fuerza

Tomemos la derivada de la ecuación 7.1 con respecto al tiempo. Usamos la regla del producto de diferenciación, para obtener

$$\frac{d}{dt} \vec{p} = \frac{d}{dt} (m\vec{v}) = m \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{dm}{dt} \vec{v}.$$

Por ahora, suponemos que la masa del objeto no cambia y, por lo tanto, el segundo término es cero. Como la derivada de la velocidad con respecto al tiempo es la aceleración, tenemos

$$\frac{d}{dt} \vec{p} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} = \vec{F},$$

de acuerdo con la segunda ley de Newton. La relación

$$\vec{F} = \frac{d}{dt} \vec{p} \tag{7.2}$$

es una forma equivalente de la segunda ley de Newton. Esta forma es más general que $\vec{F} = m\vec{a}$ porque también es válida en casos en los que la masa no es constante en el tiempo. Esta distinción se volverá importante cuando examinemos el movimiento de cohetes en el capítulo 8. Como la ecuación 7.2 es una ecuación vectorial, también podemos escribirla en componentes cartesianas:

$$F_x = \frac{dp_x}{dt}; \quad F_y = \frac{dp_y}{dt}; \quad F_z = \frac{dp_z}{dt}.$$

Tabla 7.1 Momentos de varios objetos

Objeto	Momento (kg m/s)
Partícula alfa (α) de la desintegración de ^{238}U	$9.53 \cdot 10^{-20}$
Bola rápida en béisbol, 90 mph	5.75
Rinoceronte embistiendo	$3 \cdot 10^4$
Automóvil avanzando en autopista	$5 \cdot 10^4$
Superpetrolero con rapidez de crucero	$4 \cdot 10^9$
La Luna girando en órbita alrededor de la Tierra	$7.58 \cdot 10^{25}$
La Tierra girando en órbita alrededor del Sol	$1.78 \cdot 10^{29}$

7.1 Ejercicio en clase

Una escena típica de un juego de fútbol americano colegial de sábado por la tarde: un *linebacker* con masa de 95 kg corre con una rapidez de 7.8 m/s, y un receptor con masa de 74 kg corre con una rapidez de 9.6 m/s. Denotamos la magnitud del momento y la energía cinética del *linebacker* por p_l y K_l , respectivamente, y la magnitud del momento y la energía cinética del receptor como p_w y K_w . ¿Cuál sistema de desigualdades es correcto?

- a) $p_l > p_w, K_l > K_w$
- b) $p_l < p_w, K_l > K_w$
- c) $p_l > p_w, K_l < K_w$
- d) $p_l < p_w, K_l < K_w$

Momento y energía cinética

En el capítulo 5 establecimos la relación $K = \frac{1}{2}mv^2$ (ecuación 5.1) entre la energía cinética K , la rapidez v y la masa m . Podemos usar $p = mv$ para obtener

$$K = \frac{mv^2}{2} = \frac{m^2v^2}{2m} = \frac{p^2}{2m}.$$

Esta ecuación nos da una importante relación entre energía cinética, masa y momento:

$$K = \frac{p^2}{2m}. \tag{7.3}$$

En este punto, usted puede preguntarse por qué necesitamos reformular los conceptos de fuerza y energía cinética en términos del momento. Esta reformulación es bastante más que un juego matemático. Veremos que el momento se conserva en las colisiones y en las desintegraciones, y este principio proporcionará una manera extremadamente útil de encontrar soluciones de problemas complicados. Estas relaciones del momento con la fuerza y la energía cinética serán muy útiles al trabajar en la resolución de tales problemas. Primero, sin embargo, necesitamos explorar la física del cambio de momento con un poco más de detalle.

7.2 Impulso

El cambio en el momento se define como la diferencia entre el momento final (subíndice f) y el momento inicial (subíndice i):

$$\Delta\vec{p} \equiv \vec{p}_f - \vec{p}_i.$$

Para ver por qué esta definición es útil, tenemos que hacer un poco de matemáticas. Comencemos explorando más la relación entre fuerza y momento sólo un poco más. Podemos integrar cada componente de la ecuación $\vec{F} = d\vec{p} / dt$ en el tiempo. Para la integral sobre F_x , por ejemplo, obtenemos

$$\int_{t_i}^{t_f} F_x dt = \int_{t_i}^{t_f} \frac{dp_x}{dt} dt = \int_{p_{x,i}}^{p_{x,f}} dp_x = p_{x,f} - p_{x,i} \equiv \Delta p_x.$$

Esta ecuación requiere explicarse. En el segundo paso hemos realizado una sustitución de variables para transformar una integración con respecto al tiempo a una integración con respecto al momento. La figura 7.3a) ilustra esta relación: el área bajo la curva $F_x(t)$ es el cambio en momento, Δp_x . Podemos obtener ecuaciones similares para las componentes y y z .

Al combinarlas en una ecuación vectorial, obtenemos el siguiente resultado:

$$\int_{t_i}^{t_f} \vec{F} dt = \int_{t_i}^{t_f} \frac{d\vec{p}}{dt} dt = \int_{\vec{p}_i}^{\vec{p}_f} d\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i \equiv \Delta\vec{p}.$$

La fuerza integral con respecto al tiempo se llama **impulso**, \vec{J} :

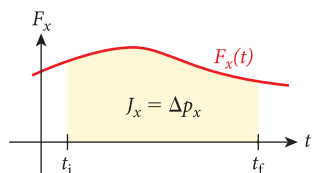
$$\vec{J} \equiv \int_{t_i}^{t_f} \vec{F} dt. \tag{7.4}$$

Esta definición nos da inmediatamente la relación entre el impulso y el cambio de momento:

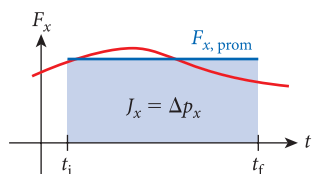
$$\vec{J} = \Delta\vec{p}. \tag{7.5}$$

De la ecuación 7.5 podemos calcular el cambio de momento en cierto intervalo de tiempo, si sabemos la dependencia de la fuerza con respecto al tiempo. Si la fuerza es constante o tiene alguna forma que podamos integrar, entonces simplemente evaluamos la integral de la ecuación 7.4. Sin embargo, podemos también definir una fuerza media,

$$\vec{F}_{\text{prom}} = \frac{\int_{t_i}^{t_f} \vec{F} dt}{\int_{t_i}^{t_f} dt} = \frac{1}{t_f - t_i} \int_{t_i}^{t_f} \vec{F} dt = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_i}^{t_f} \vec{F} dt. \tag{7.6}$$



a)



b)

FIGURA 7.3 a) El impulso (área amarilla) es la integral con respecto al tiempo de la fuerza; b) el mismo impulso como resultado de una fuerza media.

Esta integral nos da

$$\vec{J} = \vec{F}_{\text{prom}} \Delta t. \quad (7.7)$$

Usted puede pensar que esta transformación es trivial en cuanto a que da la misma información que la ecuación 7.5. Después de todo, la integración todavía está allí, oculta en la definición de la fuerza media. Esto es verdad, pero algunas veces sólo nos interesa la fuerza media. La medición del intervalo de tiempo, Δt , a lo largo del cual actúa una fuerza, así como el impulso resultante que recibe un objeto, nos dice la fuerza media que experimenta el objeto durante ese intervalo de tiempo. La figura 7.3b) ilustra la relación entre la fuerza promediada en el tiempo, el cambio de momento y el impulso.

EJEMPLO 7.1 Jonrón en béisbol

Un pitcher de ligas mayores lanza una bola rápida que cruza el plato de “home” con una rapidez de 90.0 mph (40.23 m/s), con un ángulo de 5.0° debajo de la horizontal. Un bateador la golpea para un jonrón, lanzándola con una rapidez de 110.0 mph (49.17 m/s), en un ángulo de 35.0° arriba de la horizontal (figura 7.4). Se requiere que la masa de una pelota de béisbol sea de entre 5 y 5.25 oz; digamos que la masa de la pelota aquí sea de 5.10 oz (0.145 kg).

PROBLEMA 1

¿Cuál es la magnitud del impulso del bate que recibe la pelota?

SOLUCIÓN 1

El impulso es igual al cambio de momento de la pelota. Por desgracia no hay atajos. Debemos calcular $\Delta \vec{v} \equiv \vec{v}_f - \vec{v}_i$ para las componentes x y y por separado, sumarlas como vectores y, finalmente, multiplicar por la masa de la pelota:

$$\Delta v_x = (49.17 \text{ m/s})(\cos 35.0^\circ) - (40.23 \text{ m/s})(\cos 185.0^\circ) = 80.35 \text{ m/s}$$

$$\Delta v_y = (49.17 \text{ m/s})(\sin 35.0^\circ) - (40.23 \text{ m/s})(\sin 185.0^\circ) = 31.71 \text{ m/s}$$

$$\Delta v = \sqrt{\Delta v_x^2 + \Delta v_y^2} = \sqrt{(80.35)^2 + (31.71)^2} \text{ m/s} = 86.38 \text{ m/s}$$

$$\Delta p = m \Delta v = (0.145 \text{ kg})(86.38 \text{ m/s}) = 12.5 \text{ kg m/s}.$$

Evite un error común:

Es tentador simplemente sumar las magnitudes de los vectores de momento inicial y final, porque señalan en forma aproximada en direcciones opuestas. Este método daría como resultado $\Delta p_{\text{incorrecta}} = m(v_1 + v_2) = 12.96 \text{ kg m/s}$. Como puede ver, esta respuesta es bastante cercana a la correcta, con una desviación de sólo 3%. Puede servir como un primer estimado, si usted se da cuenta de que los vectores apuntan en direcciones casi opuestas y que, en tal caso, la resta vectorial implica una suma de las dos magnitudes. Sin embargo, para obtener la respuesta correcta, usted tiene que pasar por los cálculos indicados arriba.

PROBLEMA 2

Un video de alta rapidez muestra que el contacto entre la pelota y el bate dura apenas alrededor de 1 ms (0.001 s). Suponga, para el jonrón que estamos considerando, que el contacto duró 1.20 ms. ¿Cuál fue la magnitud de la fuerza media ejercida sobre la pelota por el bate durante ese tiempo?

SOLUCIÓN 2

La fuerza se puede calcular simplemente usando la fórmula para el impulso:

$$\begin{aligned} \Delta \vec{p} &= \vec{J} = \vec{F}_{\text{prom}} \Delta t \\ \Rightarrow F_{\text{prom}} &= \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{12.5 \text{ kg m/s}}{0.00120 \text{ s}} = 10.4 \text{ kN}. \end{aligned}$$

¡Esta fuerza es aproximadamente la misma que el peso de un equipo completo de béisbol! El choque del bate y la pelota da por resultado una importante compresión de la pelota, como se muestra en la figura 7.5.

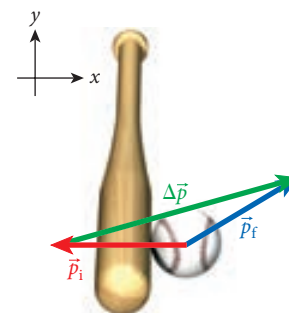


FIGURA 7.4 Pelota de béisbol al ser golpeada por un bate. Se muestran los vectores de momento inicial (rojo) y final (azul), así como el vector de impulso (en verde).



FIGURA 7.5 Una pelota de béisbol comprimiéndose al ser golpeada por un bate.



FIGURA 7.6 Secuencia en el tiempo que muestra una prueba de colisión y la función de las bolsas de aire, los cinturones de seguridad y las zonas de estrujamiento en la reducción de las fuerzas que actúan sobre el conductor durante un choque. Se puede ver, en la segunda fotografía de la secuencia, la bolsa de aire desplegándose.

7.2 Ejercicio en clase

Si la pelota de béisbol en el ejemplo 7.1 fuese golpeada de modo que tuviera la misma rapidez de 110 mph después de separarse del bate, pero saliera con un ángulo de 38° arriba de la horizontal, el impulso que recibiría sería:

- a) mayor.
- b) menor.
- c) el mismo.

Algunos importantes dispositivos de seguridad, tales como las bolsas de aire y los cinturones de seguridad en los automóviles, utilizan la ecuación 7.7 que relaciona el impulso, la fuerza media y el tiempo. Si el auto que usted está manejando choca con otro vehículo o con un objeto estacionario, el impulso —es decir, el cambio de momento de su auto— es bastante grande y se puede producir en un intervalo de tiempo muy corto. La ecuación 7.7 entonces da como resultado una fuerza media muy grande:

$$\vec{F}_{\text{prom}} = \frac{\vec{J}}{\Delta t}.$$

Si su auto no tuviera cinturones de seguridad ni bolsas de aire, una parada repentina podría hacer que su cabeza golpeará el parabrisas y experimentara el impulso en tan sólo unos pocos milisegundos. Esto podría dar como resultado una gran fuerza media que actuaría sobre su cabeza provocándole heridas o incluso la muerte. Las bolsas de aire y los cinturones de seguridad están diseñados para alargar tanto como sea posible el tiempo en el que ocurre el cambio de momento. Aumentar al máximo este tiempo y hacer que el cuerpo del conductor desacelere en contacto con la bolsa de aire reduce al mínimo la fuerza que actúa sobre el conductor, reduciendo así en gran medida el daño (vea la figura 7.6).

7.1 Oportunidad de autoexamen

¿Puede usted pensar en otros artículos de la vida diaria que estén diseñados para reducir al mínimo la fuerza media para un impulso dado?

7.3 Ejercicio en clase

Varios autos se diseñan con zonas activas de compresión en el frente, las cuales sufren daños severos durante los choques frontales. El propósito de este diseño es

- a) Reducir el impulso que experimenta el conductor durante la colisión.
- b) Aumentar el impulso que experimenta el conductor durante la colisión.
- c) Reducir el tiempo de colisión y así reducir la fuerza que actúa sobre el conductor.
- d) Aumentar el tiempo de colisión y así reducir la fuerza que actúa sobre el conductor.
- e) Hacer la reparación tan costosa como sea posible.

7.3 Conservación del momento lineal

Suponga que dos objetos chocan entre sí. Entonces, rebotan alejándose uno de otro, como dos bolas de billar en acción. Esta clase de colisión se llama **colisión elástica** (por lo menos es aproximadamente elástica, como veremos más adelante). Otro ejemplo de colisión es la de un auto subcompacto con un camión de 18 ruedas, en la que los dos vehículos se adhieren uno al otro. Esta clase de colisión se llama **colisión totalmente inelástica**. Antes de ver con exactitud lo que quieren decir los términos *colisión elástica* y *colisión inelástica*, veamos los momentos, \vec{p}_1 y \vec{p}_2 , de dos objetos durante una colisión.

Encontramos que la suma de los dos momentos después de la colisión es la misma que la suma de los dos momentos antes de la colisión (el subíndice i1 indica el valor inicial para el objeto 1, inmediatamente antes de la colisión, y el subíndice f1 indica el valor final para el mismo objeto):

$$\vec{p}_{f1} + \vec{p}_{f2} = \vec{p}_{i1} + \vec{p}_{i2}. \tag{7.8}$$

Esta ecuación es la expresión básica de la ley de **conservación del momento lineal total**, el resultado más importante de este capítulo y la segunda ley de conservación con la que nos hemos encontrado (la primera fue la ley de conservación de la energía, en el capítulo 6). Veamos primero su deducción y luego consideremos las consecuencias.

DEDUCCIÓN 7.1

Durante una colisión, el objeto 1 ejerce una fuerza sobre el objeto 2. Llamemos a esta fuerza $\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$. Usando la definición de impulso y su relación con el cambio de momento, obtenemos el cambio de momento del objeto 2 durante la colisión:

$$\int_{t_i}^{t_f} \vec{F}_{1 \rightarrow 2} dt = \Delta \vec{p}_2 = \vec{p}_{f2} - \vec{p}_{i2}.$$

Aquí despreciamos las fuerzas externas; si existen, generalmente son despreciables en comparación con $\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$ durante la colisión. Los tiempos inicial y final se seleccionan para abarcar el tiempo del proceso de colisión. Además, también está presente la fuerza $\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$, que ejerce el objeto 2 sobre el objeto 1. El mismo argumento anterior nos lleva a

$$\int_{t_i}^{t_f} \vec{F}_{2 \rightarrow 1} dt = \Delta \vec{p}_1 = \vec{p}_{f1} - \vec{p}_{i1}.$$

La tercera ley de Newton (vea el capítulo 4) nos dice que estas fuerzas son iguales en magnitud y opuestas entre sí, $\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$, o

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} + \vec{F}_{2 \rightarrow 1} = 0.$$

La integración de esta ecuación da como resultado

$$0 = \int_{t_i}^{t_f} (\vec{F}_{2 \rightarrow 1} + \vec{F}_{1 \rightarrow 2}) dt = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}_{2 \rightarrow 1} dt + \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}_{1 \rightarrow 2} dt = \vec{p}_{f1} - \vec{p}_{i1} + \vec{p}_{f2} - \vec{p}_{i2}.$$

Agrupando en un lado los vectores de momento iniciales, y los vectores de momento finales en el otro, nos da la ecuación 7.8:

$$\vec{p}_{f1} + \vec{p}_{f2} = \vec{p}_{i1} + \vec{p}_{i2}.$$

La ecuación 7.8 expresa el principio de conservación del momento lineal. La suma de los vectores finales de momento es exactamente igual que la suma de los vectores iniciales de momento. Observe que esta ecuación no depende de ningunas condiciones particulares para la colisión. Es válida para todas las colisiones de dos cuerpos, elásticas o inelásticas.

Usted puede objetar que quizás están presentes otras fuerzas. En una colisión de bolas de billar, por ejemplo, hay una fuerza de fricción debida a la rodadura o deslizamiento de cada bola por la mesa. En la colisión de dos autos, la fricción actúa entre los neumáticos y el camino. Sin embargo, lo que caracteriza a una colisión es que aparece un impulso muy grande debido a una fuerza de contacto muy grande durante un tiempo relativamente corto. Si usted integra las fuerzas externas durante el tiempo de colisión, obtiene sólo impulsos muy pequeños o moderados. Por lo tanto, las fuerzas externas generalmente se pueden despreciar con seguridad en los cálculos de la dinámica de las colisiones, y podemos tratar colisiones de dos cuerpos como si sólo estuvieran actuando fuerzas internas. Supondremos que estamos tratando con un sistema aislado, que es un sistema sin fuerzas externas.

Además, el mismo argumento es válido si hay más de dos objetos que participan en la colisión, o si no hay ninguna colisión. Mientras la fuerza externa neta sea cero, el momento total de la interacción de objetos se conservará:

$$\text{Si } \vec{F}_{\text{neta}} = 0 \text{ entonces } \sum_{k=1}^n \vec{p}_k = \text{constante.} \quad (7.9)$$

La ecuación 7.9 es la formulación general de la ley de conservación de momento. Regresaremos a esta formulación general en el capítulo 8, cuando hablemos sobre sistemas de partículas. En lo que resta de este capítulo consideramos sólo casos idealizados en los que la fuerza neta externa es despreciablemente pequeña y, por lo tanto, el momento total se conserva siempre en todos los procesos.

7.4 Colisiones elásticas en una dimensión

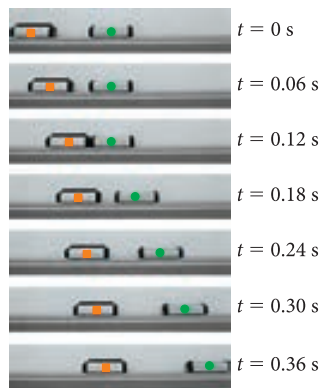


FIGURA 7.7 Secuencia de video de una colisión entre dos carritos de masas desiguales sobre un riel de aire. El carrito con el punto anaranjado lleva una barra metálica negra para aumentar su masa.

La figura 7.7 muestra la colisión de dos carritos sobre una pista casi sin fricción. La colisión se grabó en video, y la figura incluye siete cuadros de este video, tomados a intervalos de 0.06 s. El carrito marcado con un círculo verde está inicialmente en reposo. El carrito marcado con el cuadrado anaranjado tiene una masa mayor y está entrando desde la izquierda. La colisión sucede en el cuadro marcado con el tiempo $t = 0.12$ s. Usted puede ver que, después de la colisión, ambos carritos se mueven a la derecha; pero el carrito más ligero se mueve con una rapidez bastante mayor. (La rapidez es proporcional a la distancia horizontal entre las marcas de los carritos en los cuadros de video adyacentes.) En seguida deduciremos las ecuaciones que se pueden usar para determinar las velocidades de las carretas después de la colisión.

¿Qué es exactamente una colisión elástica? Como sucede con tantos otros conceptos en física, es una idealización. En prácticamente todas las colisiones, se convierte por lo menos algo de energía cinética, en otras formas de energía que no se conservan. Las otras formas pueden ser calor o sonido o la energía para deformar un objeto, por ejemplo. Sin embargo, una colisión elástica se define como una colisión en la que la energía cinética de los objetos que chocan se conserva. Esta definición no significa que cada objeto que participa en la colisión retiene su energía cinética. La energía cinética se puede transferir de un objeto al otro; pero, *en una colisión elástica, la suma de la energía cinética tiene que permanecer constante.*

Consideraremos objetos que se mueven en una dimensión y usaremos la notación $p_{i1,x}$ para el momento inicial, y $p_{f1,x}$ para el momento final del objeto 1. (Usaremos el subíndice x para recordarnos a nosotros mismos que éstas podrían igualmente ser las componentes x del vector bidimensional o tridimensional.) Del mismo modo, denotamos los momentos inicial y final del objeto 2 por $p_{i2,x}$ y $p_{f2,x}$. Como estamos restringidos a colisiones en una dimensión, la ecuación para conservación de la energía cinética se puede escribir como

$$\frac{p_{f1,x}^2}{2m_1} + \frac{p_{f2,x}^2}{2m_2} = \frac{p_{i1,x}^2}{2m_1} + \frac{p_{i2,x}^2}{2m_2}. \tag{7.10}$$

(Para movimiento en una dimensión, el cuadrado de la componente x del vector es también el cuadrado del valor absoluto del vector.) La ecuación para conservación del momento en la dirección x se puede escribir como

$$p_{f1,x} + p_{f2,x} = p_{i1,x} + p_{i2,x}. \tag{7.11}$$

(Recuerde que el momento se conserva en cualquier colisión en la que las fuerzas externas sean despreciables.)

Veamos más de cerca las ecuaciones 7.10 y 7.11. ¿Qué es lo que se conoce y qué es lo que no se conoce? Típicamente, conocemos las dos masas y las componentes de los vectores iniciales de momento, y queremos encontrar los vectores finales de momento después de la colisión. El cálculo se puede hacer porque las ecuaciones 7.10 y 7.11 nos dan dos ecuaciones para dos incógnitas, $p_{f1,x}$ y $p_{f2,x}$. Esto es, con mucho, el uso más común de estas ecuaciones; pero también es posible, por ejemplo, calcular las dos masas si se conocen los vectores inicial y final de momento.

Vamos a encontrar los vectores finales del momento:

$$\begin{aligned} p_{f1,x} &= \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) p_{i1,x} + \left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2} \right) p_{i2,x} \\ p_{f2,x} &= \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2} \right) p_{i1,x} + \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \right) p_{i2,x}. \end{aligned} \tag{7.12}$$

La deducción 7.2 nos muestra cómo se obtiene este resultado. Le ayudará a usted a resolver problemas similares.

DEDUCCIÓN 7.2

Comenzamos con las ecuaciones para la conservación de energía y de momento, y agrupamos todas las cantidades asociadas con el objeto 1 en el lado izquierdo, y las asociadas con el objeto 2, en el lado derecho. La ecuación 7.10 para la energía cinética (conservada) se vuelve entonces:

$$\frac{p_{f1,x}^2}{2m_1} - \frac{p_{i1,x}^2}{2m_1} = \frac{p_{i2,x}^2}{2m_2} - \frac{p_{f2,x}^2}{2m_2}$$

o

$$m_2(p_{f1,x}^2 - p_{i1,x}^2) = m_1(p_{i2,x}^2 - p_{f2,x}^2). \quad (i)$$

Reacomodando la ecuación 7.11 para conservación del momento, obtenemos

$$p_{f1,x} - p_{i1,x} = p_{i2,x} - p_{f2,x}. \quad (ii)$$

En seguida, dividimos el lado izquierdo y derecho de la ecuación (i) entre los lados correspondientes de la ecuación (ii). Para hacer esta división, usamos la identidad algebraica $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$. Este proceso da por resultado

$$m_2(p_{i1,x} + p_{f1,x}) = m_1(p_{i2,x} + p_{f2,x}). \quad (iii)$$

Ahora podemos despejar $p_{f1,x}$ de la ecuación (ii) y sustituir la expresión $p_{i1,x} + p_{i2,x} - p_{f2,x}$ en la ecuación (iii):

$$\begin{aligned} m_2(p_{i1,x} + [p_{i1,x} + p_{i2,x} - p_{f2,x}]) &= m_1(p_{i2,x} + p_{f2,x}) \\ 2m_2p_{i1,x} + m_2p_{i2,x} - m_2p_{f2,x} &= m_1p_{i2,x} + m_1p_{f2,x} \\ p_{f2,x}(m_1 + m_2) &= 2m_2p_{i1,x} + (m_2 - m_1)p_{i2,x} \\ p_{f2,x} &= \frac{2m_2p_{i1,x} + (m_2 - m_1)p_{i2,x}}{m_1 + m_2}. \end{aligned}$$

Este resultado es una de las dos componentes deseadas de la ecuación 7.12. Podemos obtener la otra componente despejando $p_{f2,x}$ de la ecuación (ii), y sustituir la expresión $p_{i1,x} + p_{i2,x} - p_{f1,x}$ en la ecuación (iii). También podemos obtener el resultado para $p_{f1,x}$ del resultado para $p_{f2,x}$ que acabamos de deducir, intercambiando los subíndices 1 y 2. Al final de cuentas, es arbitrario cuál objeto se etiqueta 1 o 2 y, por lo tanto, las ecuaciones resultantes deben ser simétricas con el intercambio de las dos etiquetas. El uso de este principio de simetría es formidable y muy cómodo. (¡Pero cuesta algo de trabajo acostumbrarse al principio!)

Con el resultado de los momentos finales, podemos también obtener expresiones para las velocidades finales usando $p_x = mv_x$:

$$\begin{aligned} v_{f1,x} &= \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) v_{i1,x} + \left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2} \right) v_{i2,x} \\ v_{f2,x} &= \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2} \right) v_{i1,x} + \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \right) v_{i2,x}. \end{aligned} \quad (7.13)$$

Estas ecuaciones para las velocidades finales parecen, a primera vista, muy similares a las de los momentos finales (ecuación 7.12). Sin embargo, hay una diferencia importante: en el segundo término del lado derecho de la ecuación para $v_{f1,x}$ el numerador es $2m_2$ en vez de $2m_1$; y a la inversa, el numerador es ahora $2m_1$ en vez de $2m_2$ en el primer término de la ecuación para $v_{f2,x}$.

Como último punto en esta exposición general, encontremos la velocidad relativa, $v_{f1,x} - v_{f2,x}$, después de la colisión:

$$\begin{aligned} v_{f1,x} - v_{f2,x} &= \left(\frac{m_1 - m_2 - 2m_1}{m_1 + m_2} \right) v_{i1,x} + \left(\frac{2m_2 - (m_2 - m_1)}{m_1 + m_2} \right) v_{i2,x} \\ &= -v_{i1,x} + v_{i2,x} = -(v_{i1,x} - v_{i2,x}). \end{aligned} \quad (7.14)$$

Vemos que *en las colisiones elásticas, la velocidad relativa simplemente cambia de signo*, $\Delta v_f = -\Delta v_i$. Regresaremos a este resultado más adelante en este capítulo. No debe usted tratar de memorizar las expresiones generales para el momento y la velocidad en las ecuaciones 7.13 y 7.14, sino más bien estudiar el método que hemos usado para deducirlas. En seguida examinaremos dos casos especiales de estos resultados generales.

Caso especial 1: masas iguales

Si $m_1 = m_2$, las expresiones generales de la ecuación 7.12 se simplifican considerablemente, porque los términos proporcionales a $m_1 - m_2$ son iguales a cero y las relaciones $2m_1/(m_1 + m_2)$ y $2m_2/(m_1 + m_2)$ se vuelven iguales a uno. Entonces obtenemos el resultado extremadamente simple

$$\begin{aligned} p_{f1,x} &= p_{i2,x} \\ p_{f2,x} &= p_{i1,x}. \end{aligned} \quad (\text{para el caso especial donde } m_1 = m_2) \quad (7.15)$$

Este resultado significa que, en cualquier colisión elástica de dos objetos de masas iguales que se mueven en una dimensión, los dos objetos simplemente *intercambian* sus momentos. El momento inicial del objeto 1 se vuelve el momento final del objeto 2. Lo mismo es verdad para las dos velocidades:

$$\begin{aligned} v_{f1,x} &= v_{i2,x} \\ v_{f2,x} &= v_{i1,x} \end{aligned} \quad (\text{para el caso especial en el que } m_1 = m_2) \quad (7.16)$$

Caso especial 2: un objeto inicialmente en reposo

Ahora supongamos que los dos objetos en una colisión no tienen necesariamente la misma masa, pero uno de los dos está inicialmente en reposo, es decir tiene momento cero. Sin perder la generalidad, podemos decir que el objeto 1 es el que está en reposo. (Recuerde que las ecuaciones no varían por intercambio de los subíndices 1 y 2.) Usando las expresiones generales en la ecuación 7.12 y haciendo $p_{i1,x} = 0$, obtenemos

$$\begin{aligned} p_{f1,x} &= \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2} \right) p_{i2,x} \\ p_{f2,x} &= \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \right) p_{i2,x} \end{aligned} \quad (\text{para el caso especial en el que } p_{i1,x} = 0) \quad (7.17)$$

Del mismo modo, obtenemos para las velocidades finales

$$\begin{aligned} v_{f1,x} &= \left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2} \right) v_{i2,x} \\ v_{f2,x} &= \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \right) v_{i2,x} \end{aligned} \quad (\text{para el caso especial en el que } p_{i1,x} = 0) \quad (7.18)$$

Si $v_{i2,x} > 0$, el objeto 2 se mueve de izquierda a derecha, con la asignación convencional del eje x positivo apuntando a la derecha. Esta situación se muestra en la figura 7.7. Dependiendo de cuál masa es mayor, la colisión puede tener uno de cuatro resultados:

1. $m_2 > m_1 \Rightarrow (m_2 - m_1)/(m_2 + m_1) > 0$: la velocidad final del objeto 2 señala en la misma dirección pero se reduce en magnitud.
2. $m_2 = m_1 \Rightarrow (m_2 - m_1)/(m_2 + m_1) = 0$: el objeto 2 se queda en reposo, y el objeto 1 se mueve con la velocidad inicial del objeto 2.
3. $m_2 < m_1 \Rightarrow (m_2 - m_1)/(m_2 + m_1) < 0$: el objeto 2 rebota de regreso; cambia el sentido de su vector velocidad.
4. $m_2 \ll m_1 \Rightarrow (m_2 - m_1)/(m_2 + m_1) \approx -1$ y $2m_2/(m_1 + m_2) \approx 0$: el objeto 1 permanece en reposo, y el objeto 2 invierte aproximadamente su velocidad. Esta situación ocurre, por ejemplo, en la colisión de una pelota con el suelo. En esta colisión, el objeto 1 es toda la Tierra, y el objeto 2 es la pelota. Si la colisión es suficientemente elástica, la pelota rebota de regreso con la misma rapidez que tenía inmediatamente antes de la colisión, pero en sentido opuesto: hacia arriba en vez de hacia abajo.

7.4 Ejercicio en clase

Suponga que ocurre una colisión elástica en una dimensión, como la que se muestra en la figura 7.7, donde el carrito marcado con el punto verde está inicialmente en reposo y el carrito marcado con el punto anaranjado tiene inicialmente $v_{\text{naranja}} > 0$, es decir, se mueve de izquierda a derecha. ¿Qué puede usted decir acerca de las masas de los dos carritos?

- a) $m_{\text{naranja}} < m_{\text{verde}}$
- b) $m_{\text{naranja}} > m_{\text{verde}}$
- c) $m_{\text{naranja}} = m_{\text{verde}}$

7.5 Ejercicio en clase

En la situación que se muestra en la figura 7.7, suponga que la masa del carrito con el punto anaranjado es mucho mayor que la del carrito con el punto verde. ¿Qué resultado esperaría usted?

- a) El resultado es aproximadamente el mismo que se muestra en la figura.
- b) El carrito con el punto anaranjado se mueve con velocidad casi sin cambio después de la colisión, y el carrito con el punto verde se mueve con una velocidad casi del doble de la velocidad inicial del carrito con el punto anaranjado.
- c) Ambos carritos se mueven casi con la misma rapidez que la que tenía el carrito con el punto anaranjado antes de la colisión.
- d) El carrito con el punto anaranjado se detiene, y el carrito con el punto verde se mueve a la derecha con la misma rapidez que tenía originalmente el carrito con el punto anaranjado.

7.6 Ejercicio en clase

En la situación que se muestra en la figura 7.7, si la masa del carrito con el punto verde (originalmente en reposo) es mucho mayor que la del carrito con el punto anaranjado, ¿qué resultado espera usted?

- a) El resultado es aproximadamente el mismo que se muestra en la figura.
- b) El carrito con el punto anaranjado se mueve con una velocidad casi sin cambio después de la colisión, y el carrito con el punto verde se mueve a una velocidad casi al doble de la velocidad del carrito con el punto anaranjado.
- c) Ambos carritos se mueven casi con la misma rapidez que tenía el carrito con el punto anaranjado antes del choque.
- d) El carrito con el punto verde se mueve con una rapidez muy baja ligeramente hacia la derecha, y el carrito con el punto anaranjado rebota hacia la izquierda con casi la misma rapidez que tenía al principio.

EJEMPLO 7.2 Fuerza media en una pelota de golf

Un *driver* es un palo de golf que se usa para golpear a una pelota de golf de manera que viaje una distancia larga. La cabeza de un *driver* tiene una masa típica de 200 g. Un golfista experimentado puede impartir a la cabeza del palo una rapidez de alrededor de 40.0 m/s. La masa de una pelota de golf es de 45.0 g. La pelota permanece en contacto con la cara del *driver* por 0.500 ms.

PROBLEMA

¿Cuál es la fuerza media que ejerce el *driver* sobre la pelota de golf?

SOLUCIÓN

La pelota de golf está inicialmente en reposo. Como la cabeza del *driver* y la pelota están en contacto sólo por un tiempo corto, podemos considerar que la colisión entre ellos es elástica. Podemos usar la ecuación 7.18 para calcular la rapidez de la pelota, $v_{f1,x}$, después de la colisión con la cabeza del *driver*

$$v_{f1,x} = \left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2} \right) v_{i2,x},$$

donde m_1 es la masa de la pelota de golf, m_2 es la masa de la cabeza del *driver*, y $v_{i2,x}$ es la rapidez de la cabeza del *driver*. La rapidez de la pelota al separarse de la cara de la cabeza del *driver* es, en este caso,

$$v_{f1,x} = \frac{2(0.200 \text{ kg})}{0.0450 \text{ kg} + 0.200 \text{ kg}} (40.0 \text{ m/s}) = 65.3 \text{ m/s}.$$

Observe que, si la cabeza del *driver* fuera mucho más masiva que la pelota, la pelota alcanzaría el doble de la rapidez de la cabeza del *driver*. Sin embargo, en ese caso, el golfista tendría problemas para dar a la cabeza del palo una rapidez sustancial. El cambio de momento de la pelota de golf es

$$\Delta p = m\Delta v = mv_{f1,x}.$$

El impulso es, entonces,

$$\Delta p = F_{\text{media}} \Delta t,$$

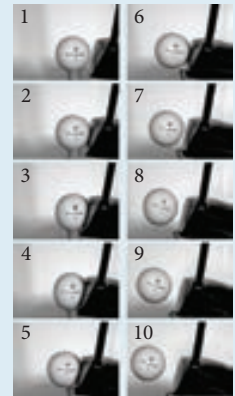
donde F_{media} es la fuerza media que ejerce la cabeza del *driver*, y Δt es el tiempo durante el cual están en contacto la cabeza del *driver* y la pelota. La fuerza media es, entonces,

$$F_{\text{media}} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{mv_{f1,x}}{\Delta t} = \frac{(0.045 \text{ kg})(65.3 \text{ m/s})}{0.500 \cdot 10^{-3} \text{ s}} = 5880 \text{ N}.$$

Por lo tanto, el *driver* ejerce una fuerza muy grande sobre la pelota. Esta fuerza comprime notablemente la pelota, como se muestra en la secuencia de video en la Oportunidad de autoexamen 7.2. También observe que el *driver* no impulsa a la pelota en la dirección horizontal, y que le imparte un giro muy rápido. Por lo tanto, una descripción del golpe de una pelota de golf con el *driver* exige un análisis más detallado.

7.2 Oportunidad de autoexamen

La figura muestra una secuencia de video de alta velocidad de la colisión de un palo de golf con una pelota de golf. La pelota experimenta una notable deformación, pero se recupera casi en su totalidad antes de despegarse de la cara del palo. Por lo tanto, esta colisión se puede aproximar a una colisión elástica unidimensional. Comente sobre la rapidez de la pelota relativa a la del palo después de la colisión y sobre cómo se aplican a este resultado los casos que hemos presentado.



Colisión de un palo de golf con una pelota de golf.

7.5 Colisiones elásticas en dos o tres dimensiones

7.7 Ejercicio en clase

Elija la afirmación correcta:

- En una colisión elástica de un objeto con un muro, la energía se puede conservar o no.
- En una colisión elástica de un objeto con un muro, el momento se puede conservar o no.
- En una colisión elástica de un objeto con un muro, el ángulo de incidencia es igual al ángulo final.
- En una colisión elástica de un objeto con un muro, el vector de momento original no cambia como resultado de la colisión.
- En una colisión elástica de un objeto con un muro, el muro no puede cambiar el momento del objeto porque el momento se conserva.

7.8 Ejercicio en clase

Elija la afirmación correcta:

- Cuando un objeto en movimiento choca con un objeto estacionario, el ángulo entre los vectores velocidad de los dos objetos después de la colisión siempre es de 90° .
- Para una colisión de la vida real entre un objeto que se mueve y un objeto estacionario, el ángulo entre los vectores velocidad de los dos objetos después de la colisión nunca es menor de 90° .
- Cuando un objeto en movimiento tiene un choque de frente con un objeto estacionario, el ángulo entre los dos vectores velocidad después de la colisión es de 90° .
- Cuando un objeto en movimiento choca de frente y elásticamente con un objeto estacionario de la misma masa, el objeto que se mueve se detiene y el otro objeto se mueve con la velocidad original del objeto en movimiento.
- Cuando un objeto en movimiento choca elásticamente con un objeto estacionario de la misma masa, el ángulo entre los dos vectores velocidad después de la colisión no puede ser de 90° .

Colisiones con muros

Para comenzar nuestra explicación de las colisiones bidimensionales y tridimensionales, consideramos la colisión elástica de un objeto con un muro sólido. En el capítulo 4, que trata sobre fuerzas, vimos que una superficie sólida ejerce una fuerza sobre un objeto que tiende a penetrar la superficie. Dichas fuerzas son fuerzas normales: se dirigen perpendicularmente a la superficie (figura 7.8). Si una fuerza normal actúa sobre un objeto que choca con un muro, la fuerza normal sólo puede transmitir un impulso perpendicular al muro; la fuerza normal no tiene una componente paralela al muro. Por lo tanto, la componente de momento del objeto dirigida a lo largo del muro no cambia, $p_{f\parallel} = p_{i\parallel}$. Además, para una colisión elástica, tenemos la condición de que la energía cinética del objeto que choca con el muro tiene que permanecer constante. Esto tiene sentido, porque el muro permanece en reposo (está conectado con la tierra y tiene una masa mucho mayor que la pelota). La energía cinética del objeto es $K = p^2/2m$, ya que sabemos que $p_f^2 = p_i^2$.

Como $p_f^2 = p_{f\parallel}^2 + p_{f\perp}^2$ y $p_i^2 = p_{i\parallel}^2 + p_{i\perp}^2$, obtenemos $p_{f\perp}^2 = p_{i\perp}^2$. Los únicos dos resultados posibles de la colisión son entonces $p_{f\perp} = p_{i\perp}$ y $p_{f\perp} = -p_{i\perp}$. Sólo para la segunda solución, la componente perpendicular del momento señala hacia afuera del muro después de la colisión, de modo que es la única solución física.

Para resumir, cuando un objeto choca elásticamente con un muro, la magnitud del vector de momento del objeto permanece sin cambio, como también la componente del momento dirigida a lo largo de la pared; la componente del momento perpendicular a la pared cambia de signo, pero mantiene el mismo valor absoluto. El ángulo de incidencia θ_i sobre el muro (figura 7.8) es entonces también el mismo que el ángulo de reflexión, θ_f :

$$\theta_i = \cos^{-1} \frac{p_{i\perp}}{p_i} = \cos^{-1} \frac{p_{f\perp}}{p_f} = \theta_f. \quad (7.19)$$

Veremos nuevamente esta misma relación cuando estudiemos la luz y su reflexión en un espejo, en el capítulo 32.

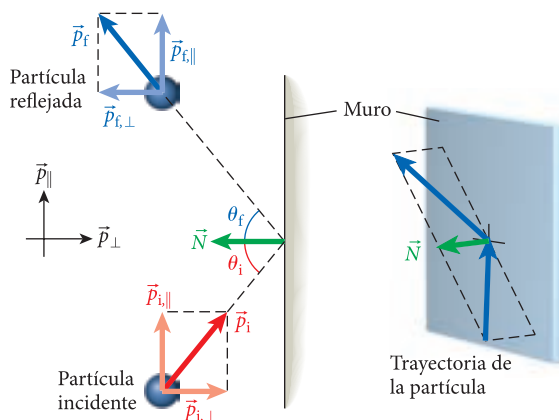


FIGURA 7.8 Colisión elástica de un objeto con un muro. El símbolo \perp representa la componente del momento perpendicular al muro, y el símbolo \parallel representa la componente del momento paralela al muro.

Colisiones de dos objetos en dos dimensiones

Acabamos de ver que los problemas con colisiones elásticas en una dimensión se pueden resolver siempre si tenemos la velocidad inicial o las condiciones iniciales del momento para los dos objetos que chocan, así como sus masas. Nuevamente, esto es verdad porque tenemos dos ecuaciones para las dos cantidades incógnitas, $p_{f1,x}$ y $p_{f2,x}$.

Para colisiones en dos dimensiones, cada uno de los vectores finales de momento tiene dos componentes. Así, esta situación nos da cuatro incógnitas que determinar. ¿Cuántas ecuaciones tenemos a nuestra disposición? La conservación de la energía cinética, nuevamente, proporciona una de ellas. La conservación del momento lineal da ecuaciones independientes para las direcciones x y y . Por lo

tanto, tenemos sólo tres ecuaciones para las cuatro incógnitas. A menos que se especifique una condición adicional para la colisión, no hay una solución única para el momento final.

Para colisiones en tres dimensiones la situación es todavía peor. Aquí necesitamos determinar dos vectores, cada uno con tres componentes, lo cual da un total de seis incógnitas. Sin embargo, tenemos sólo cuatro ecuaciones: una para la conservación de la energía y la tres ecuaciones de conservación de las componentes x , y y z del momento.

Incidentalmente, este hecho es lo que hace interesante el juego de billar o pool desde el punto de vista físico. Los momentos finales de dos bolas después de la colisión se determinan por la región de sus superficies esféricas en la que las bolas se golpean una a otra. Hablando de colisiones de bolas de billar, se puede hacer una observación interesante. Suponga que el objeto 2 está inicialmente en reposo y ambos objetos tienen la misma masa. La conservación del momento da por resultado

$$\begin{aligned}\vec{p}_{f1} + \vec{p}_{f2} &= \vec{p}_{i1} \\ (\vec{p}_{f1} + \vec{p}_{f2})^2 &= (\vec{p}_{i1})^2 \\ p_{f1}^2 + p_{f2}^2 + 2\vec{p}_{f1} \cdot \vec{p}_{f2} &= p_{i1}^2.\end{aligned}$$

Aquí elevamos al cuadrado la ecuación de la conservación del momento y luego usamos las propiedades del producto escalar. Por otro lado, la conservación de la energía cinética nos lleva a

$$\begin{aligned}\frac{p_{f1}^2}{2m} + \frac{p_{f2}^2}{2m} &= \frac{p_{i1}^2}{2m} \\ p_{f1}^2 + p_{f2}^2 &= p_{i1}^2,\end{aligned}$$

Para $m_1 = m_2 = m$. Si restamos este resultado del anterior, obtenemos

$$2\vec{p}_{f1} \cdot \vec{p}_{f2} = 0. \quad (7.20)$$

Sin embargo, el producto escalar de dos vectores es cero sólo si los dos vectores son perpendiculares entre sí, o si uno de ellos tiene longitud cero. Esta última condición se da en la colisión frontal de dos bolas de billar, después de la cual la bola blanca (la golpeada por el taco) permanece en reposo ($\vec{p}_{f1} = 0$) y la otra bola se aleja con el momento que tenía inicialmente la bola blanca. En todas las colisiones no frontales, ambas bolas se mueven, y lo hacen en direcciones perpendiculares entre sí.

Usted puede hacer un sencillo experimento para ver si el ángulo de 90° entre los vectores finales de velocidad funciona cuantitativamente. Ponga dos monedas sobre una hoja de papel, como se muestra en la figura 7.9. Marque la posición de una de ellas (la que va a servir de objetivo) sobre el papel, dibujando un círculo alrededor de ella. Luego dé un empujón a la otra moneda impulsándola hacia la moneda objetivo (figura 7.9a). Las monedas rebotarán entre ellas y se deslizarán un poco, antes de que las fuerzas de fricción las pongan en reposo (figura 7.9b). Luego trace una línea de la posición final de la moneda objetivo al círculo que dibujó, como se muestra en la figura 7.9c), y de aquí deduzca la trayectoria de la otra moneda. Las imágenes de los incisos a) y b) están superpuestas en la imagen del inciso c) de la figura para mostrar los movimientos de las monedas antes y después de la colisión, indicados por las flechas rojas. Midiendo el ángulo entre las dos líneas negras de la figura 7.9c) se encuentra $\theta = 80^\circ$, de modo que el resultado teórico de $\theta = 90^\circ$ no es del todo correcto para este experimento. ¿Por qué?

Lo que despreciamos en nuestra deducción es el hecho de que —para colisiones entre monedas o bolas de billar— algo de la energía cinética de cada objeto está asociada con la rotación y la transferencia de energía debida a la rotación, así como el hecho de que tal colisión no es completamente elástica. Sin embargo, la regla de 90° que acabamos de deducir es buena como primera aproximación para dos monedas en colisión. Usted puede realizar un experimento similar de este

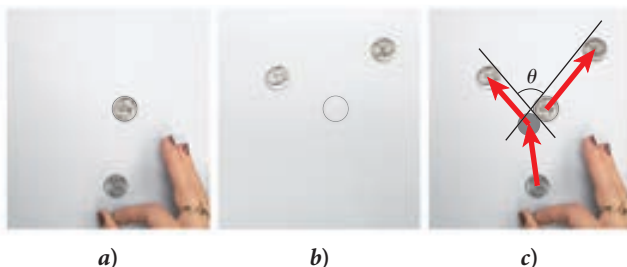
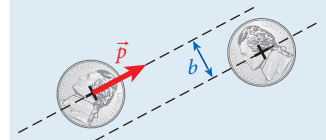


FIGURA 7.9 Colisión entre dos monedas estadounidenses de cinco centavos (nickels).

7.3 Oportunidad de autoexamen

El experimento de la figura 7.9 especifica el ángulo entre las dos monedas después de la colisión, pero no los ángulos individuales de deflexión. Para obtener estos ángulos individuales, usted también tiene que saber qué tan descentrado está el punto de impacto en cada objeto, factor conocido como *parámetro de impacto*. De manera cuantitativa, el parámetro de impacto, b , es la distancia que tendría que moverse la trayectoria original, paralelamente a sí misma para una colisión frontal (vea la figura). ¿Puede usted producir un croquis de la dependencia de los ángulos de deflexión con respecto al parámetro de impacto? (*Pista:* Usted puede hacer esto experimentalmente como se muestra en la figura 7.9, o puede pensar primero en casos límite y luego tratar de interpolar entre ellos.)



7.4 Oportunidad de autoexamen

Suponga que hacemos exactamente el mismo experimento que se muestra en la figura 7.9, pero reemplazamos una de las monedas estadounidenses de cinco centavos por una de 10 centavos, más ligera, o por una de 25 centavos, más pesada. ¿Qué cambia? (*Pista:* Nuevamente, usted puede explorar la respuesta haciendo el experimento.)

tipo en cualquier mesa de billar; encontrará que el ángulo de movimiento entre las dos bolas de billar no es exactamente de 90° , pero esta aproximación le dará una buena idea de hacia dónde irá su bola blanca después de que impacte a la bola objetivo.

PROBLEMA RESUELTO 7.1 *Curling*

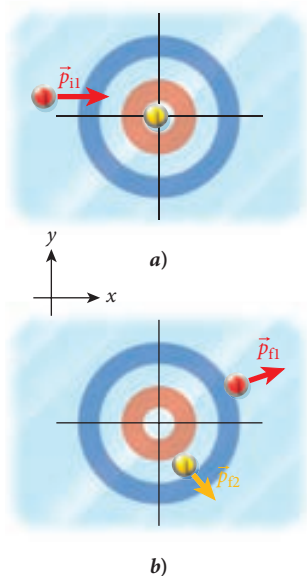


FIGURA 7.10 Vista desde arriba de la colisión de dos piedras de *curling*: a) inmediatamente antes de la colisión; b) inmediatamente después de la colisión.

El deporte de *curling* se trata enteramente de colisiones. Un jugador desliza una “piedra” de granito de 19.0 kg (42.0 lb) por el hielo, a una distancia aproximada de 35 a 40 m dentro del área del blanco (círculos concéntricos con retículas). Los equipos se turnan para deslizar piedras, y la piedra que al final queda más cercana a la diana del blanco gana. Siempre que la piedra de un equipo sea la más cercana a la diana, el otro equipo trata de sacarla del camino, como se muestra en la figura 7.10.

PROBLEMA

La piedra roja de *curling* que se muestra en la figura 7.10 tiene una velocidad inicial de 1.60 m/s en la dirección x y se desvía, después de chocar con la piedra amarilla, a un ángulo de 32.0° en relación con el eje x . ¿Cuáles son los dos vectores finales del momento inmediatamente después de esta colisión elástica, y cuál es la suma de las energías cinéticas de las piedras?

SOLUCIÓN

PIENSE

La conservación del momento nos dice que la suma de los vectores de momento de ambas piedras antes de la colisión es igual a la suma de los vectores de momentos de ambas piedras después de la colisión. La conservación de la energía nos dice que, en una colisión elástica, la suma de las energías cinéticas de ambas piedras antes de la colisión es igual a la suma de las energías cinéticas de ambas piedras después de la colisión. Antes de la colisión, la piedra roja (piedra 1) tiene momento y energía cinética porque se está moviendo, mientras que la piedra amarilla (piedra 2) está en reposo y no tiene momento ni energía cinética. Después de la colisión, ambas piedras tienen momento y energía cinética. Debemos calcular el momento en términos de las componentes x y y .

ESBOCE

En la figura 7.11a) se muestra un croquis de los vectores de momento de las dos piedras antes y después de la colisión. Las componentes x y y de los vectores de momento después de la colisión se muestran en la figura 7.11b).

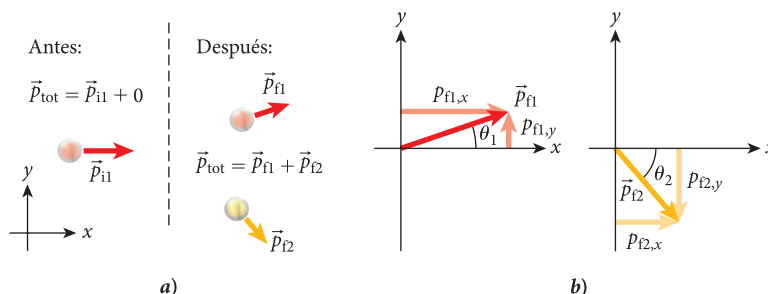


FIGURA 7.11 a) Croquis de los vectores de momento antes y después de que choquen las piedras. b) Las componentes x y y de los vectores de momento de las dos piedras después de la colisión.

INVESTIGUE

La conservación de momento dicta que la suma de los momentos de las dos piedras antes de la colisión debe ser igual a la suma de los momentos de las dos piedras después de la colisión. Conocemos los momentos de ambas piedras antes de la colisión, y nuestra tarea es calcular sus momentos después de ella, con base en las direcciones dadas de esos momentos. Para las componentes x podemos escribir

$$p_{i1,x} + 0 = p_{f1,x} + p_{f2,x}.$$

para las componentes y y podemos escribir

$$0 + 0 = p_{f1,y} + p_{f2,y}.$$

El problema especifica que la piedra 1 se desvía en $\theta_1 = 32.0^\circ$. De acuerdo con la regla de los 90° que dedujimos para colisiones perfectamente elásticas entre masas iguales, la piedra 2 se tiene que desviar en $\theta_2 = -58.0^\circ$. Por lo tanto, en la dirección x obtenemos

$$p_{i1,x} = p_{f1,x} + p_{f2,x} = p_{f1} \cos \theta_1 + p_{f2} \cos \theta_2. \quad (i)$$

y en la dirección y tenemos

$$0 = p_{f1,y} + p_{f2,y} = p_{f1} \sin \theta_1 + p_{f2} \sin \theta_2. \quad (ii)$$

Como conocemos los dos ángulos y el momento inicial de la piedra 1, necesitamos despejar dos cantidades incógnitas de un sistema de dos ecuaciones. Estas incógnitas son las magnitudes de los momentos finales p_{f1} y p_{f2} .

SIMPLIFIQUE

Resolvemos este sistema de ecuaciones por sustitución directa. Podemos despejar p_{f1} de la ecuación del componente y (ii)

$$p_{f1} = -p_{f2} \frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1} \quad (iii)$$

y sustituir en la ecuación del componente x (i) para obtener

$$p_{i1,x} = \left(-p_{f2} \frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1} \right) \cos \theta_1 + p_{f2} \cos \theta_2.$$

Podemos reacomodar esta ecuación para obtener

$$p_{f2} = \frac{p_{i1,x}}{\cos \theta_2 - \sin \theta_2 \cot \theta_1}.$$

CALCULE

Primero calculamos la magnitud del momento inicial de la piedra 1:

$$p_{i1,x} = mv_{i1,x} = (19.0 \text{ kg})(1.60 \text{ m/s}) = 30.4 \text{ kg m/s}.$$

Podemos entonces calcular la magnitud del momento final de la piedra 2:

$$p_{f2} = \frac{30.4 \text{ kg m/s}}{(\cos -58.0^\circ) - (\sin -58.0^\circ)(\cot 32.0^\circ)} = 16.10954563 \text{ kg m/s}.$$

La magnitud del momento final de la piedra 1 es

$$p_{f1} = -p_{f2} \frac{\sin(-58.0^\circ)}{\sin(32.0^\circ)} = 25.78066212 \text{ kg m/s}.$$

Ahora podemos responder a la pregunta que se refiere a la suma de las energías cinéticas de las dos piedras después de la colisión. Como la colisión es elástica, podemos simplemente calcular la energía cinética inicial de la piedra roja (la amarilla estaba en reposo). Así, nuestra respuesta es

$$K = \frac{p_{i1}^2}{2m} = \frac{(30.4 \text{ kg m/s})^2}{2(19.0 \text{ kg})} = 24.32 \text{ J}.$$

REDONDEE

Como todos los valores numéricos se especificaron con tres cifras significativas, presentamos la magnitud del momento final de la primera piedra como

$$p_{f1} = 25.8 \text{ kg m/s}.$$

(continúa)

7.5 Oportunidad de autoexamen

Vuelva a revisar los resultados para los momentos finales de las dos piedras en el problema resuelto 7.1, calculando las energías cinéticas individuales de las dos piedras después de la colisión para verificar que su suma sea ciertamente igual a la energía cinética inicial.

(continuación)

La dirección de la primera piedra es de $+32.0^\circ$ con respecto a la horizontal. Reportamos la magnitud del momento final de la segunda piedra como

$$p_{f2} = 16.1 \text{ kg m/s.}$$

La dirección de la segunda piedra es de -58.0° con respecto a la horizontal.

La energía cinética total de las dos piedras después de la colisión es

$$K = 24.3 \text{ J.}$$

7.6 Colisiones totalmente inelásticas

En todas las colisiones que no son completamente elásticas, la conservación de la energía cinética ya no es válida. Estas colisiones se llaman *inelásticas* porque algo de la energía cinética inicial se convierte en energía interna de excitación, deformación, vibración o (finalmente) calor. A primera vista, esta conversión de energía puede hacer parecer más complicada la tarea de calcular los vectores finales de momento o de velocidad de los objetos en colisión. Sin embargo, éste no es el caso; en particular, el álgebra se vuelve considerablemente más fácil para el caso límite de colisiones totalmente inelásticas.

Una colisión totalmente inelástica es aquella en la que los objetos en colisión se adhieren uno al otro después de chocar. Este resultado implica que ambos objetos tienen el mismo vector velocidad después de la colisión: $\vec{v}_{f1} = \vec{v}_{f2} \equiv \vec{v}_f$. (De modo que la *velocidad relativa* entre los dos objetos que chocan es cero después de la colisión.) Usando $\vec{p} = m\vec{v}$ y la conservación del momento, obtenemos el vector final de velocidad:

$$\vec{v}_f = \frac{m_1\vec{v}_{i1} + m_2\vec{v}_{i2}}{m_1 + m_2}. \quad (7.21)$$

Esta útil fórmula le permite resolver prácticamente todos los problemas con colisiones totalmente inelásticas. La deducción 7.3 muestra cómo se obtuvo esta fórmula.

DEDUCCIÓN 7.3

Comenzamos con la ley de conservación del momento total (ecuación 7.8):

$$\vec{p}_{f1} + \vec{p}_{f2} = \vec{p}_{i1} + \vec{p}_{i2}.$$

Ahora usamos $\vec{p} = m\vec{v}$ y obtenemos

$$m_1\vec{v}_{f1} + m_2\vec{v}_{f2} = m_1\vec{v}_{i1} + m_2\vec{v}_{i2}.$$

La condición de que la colisión sea totalmente inelástica implica que las velocidades finales sean iguales para ambos objetos. Por lo tanto, tenemos la ecuación 7.21:

$$\begin{aligned} m_1\vec{v}_f + m_2\vec{v}_f &= m_1\vec{v}_{i1} + m_2\vec{v}_{i2} \\ (m_1 + m_2)\vec{v}_f &= m_1\vec{v}_{i1} + m_2\vec{v}_{i2} \\ \vec{v}_f &= \frac{m_1\vec{v}_{i1} + m_2\vec{v}_{i2}}{m_1 + m_2}. \end{aligned}$$

7.9 Ejercicio en clase

En una colisión totalmente inelástica entre un objeto en movimiento y un objeto estacionario, los dos objetos

- Se adherirán uno a otro.
- Rebotarán uno contra el otro, perdiendo energía.
- Rebotarán uno contra el otro, sin perder energía.

Observe que la condición de que la colisión sea totalmente inelástica implica que las velocidades finales sean las mismas para ambos objetos. En general, los vectores finales de momento de los objetos pueden tener magnitudes bastante diferentes.

Sabemos, por la tercera ley de Newton (vea el capítulo 4), que las fuerzas que se ejercen dos objetos entre sí durante una colisión son iguales en magnitud. Sin embargo, los cambios en la velocidad —es decir, las aceleraciones que experimentan los dos objetos en una colisión totalmente inelástica— pueden ser por completo diferentes. El siguiente ejemplo ilustra el fenómeno.

EJEMPLO 7.3 Colisión frontal

Considere un choque frontal de una SUV grande, con masa $M = 3\,023\text{ kg}$, y un auto compacto con masa $m = 1\,184\text{ kg}$. Cada vehículo tiene una rapidez inicial de $v = 22.35\text{ m/s}$ (50 mph) y se mueven en sentidos opuestos (figura 7.12). De modo que, como se muestra en la figura, podemos decir que v_x es la velocidad inicial del auto compacto, y $-v_x$ es la velocidad inicial de la SUV. Ambos vehículos chocan uno contra otro y quedan enganchados entre sí; lo cual es una colisión totalmente inelástica.

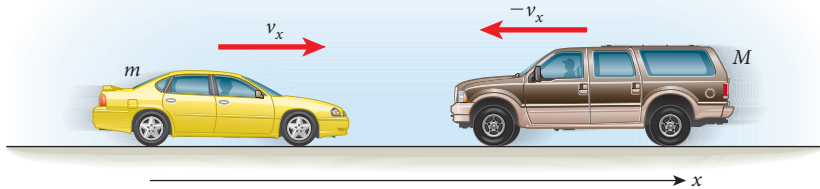


FIGURA 7.12 Choque frontal de dos vehículos con diferentes masas y rapidez idénticas.

PROBLEMA

¿Cuáles son los cambios de las velocidades de los dos autos en la colisión? (Desprecie la fricción entre los neumáticos y el camino.)

SOLUCIÓN

Primero calculamos la velocidad final que tiene la masa combinada inmediatamente después de la colisión. Para hacer este cálculo, simplemente usamos la ecuación 7.21 y obtenemos

$$\begin{aligned} v_{f,x} &= \frac{mv_x - Mv_x}{m + M} = \left(\frac{m - M}{m + M} \right) v_x \\ &= \frac{1\,184\text{ kg} - 3\,023\text{ kg}}{1\,184\text{ kg} + 3\,023\text{ kg}} (22.35\text{ m/s}) = -9.77\text{ m/s}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el cambio de velocidad para la SUV resulta

$$\Delta v_{\text{SUV},x} = -9.77\text{ m/s} - (-22.35\text{ m/s}) = 12.58\text{ m/s}.$$

Sin embargo, el cambio de velocidad para el auto compacto es

$$\Delta v_{\text{compacto},x} = -9.77\text{ m/s} - (22.35\text{ m/s}) = -32.12\text{ m/s}.$$

Obtenemos las aceleraciones medias correspondientes dividiendo los cambios de velocidades entre el intervalo de tiempo, Δt , durante el cual tiene lugar la colisión. Este intervalo de tiempo es, obviamente, el mismo para ambos vehículos, lo cual significa que la magnitud de la aceleración experimentada por el cuerpo del conductor del auto compacto es mayor que la que experimentó el cuerpo del conductor de la SUV, por un factor de $32.12/12.58 = 2.55$.

Sólo por este resultado, es claro que es más seguro estar en la SUV en esta colisión frontal que en el auto compacto. Recuerde que este resultado es verdadero aun cuando la tercera ley de Newton diga que las fuerzas ejercidas por los dos vehículos entre sí son las mismas (compare el ejemplo 4.6).

Péndulo balístico

Un **péndulo balístico** es un dispositivo que se puede usar para medir las rapidez a boca de cañón de proyectiles disparados con armas de fuego. Consiste en un bloque de un material dentro del cual se dispara el arma. Este bloque está suspendido, de modo que forma un péndulo (figura 7.13). Por el ángulo de deflexión del péndulo y las masas conocidas de la bala, m , y del bloque, M , podemos calcular la rapidez de la bala inmediatamente antes de impactar el bloque.

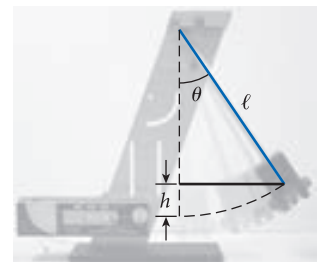
Para obtener una expresión para la rapidez de la bala en términos del ángulo de deflexión, tenemos que calcular la rapidez de la combinación bala más bloque, inmediatamente después de que la bala se incruste en el bloque. Esta colisión es un ejemplo de colisión totalmente inelástica

7.6 Oportunidad de autoexamen

Usted puede comenzar con la tercera ley de Newton y usar el hecho de que las fuerzas que ejercen los autos entre sí son iguales. Use los valores de las masas dados en el ejemplo 7.3. ¿Cuál es el coeficiente de las aceleraciones de los dos autos?



a)



b)

FIGURA 7.13 Péndulo balístico que se usa en un laboratorio de física introductoria.

y, por lo tanto, podemos aplicar la ecuación 7.21. Como el péndulo está en reposo antes de que la bala le pegue, la rapidez de la combinación bloque más bala es

$$v = \frac{m}{m + M} v_b,$$

donde v_b es la rapidez de la bala antes de impactar el bloque y v es la rapidez de las masas combinadas inmediatamente después del impacto. La energía cinética de la bala es $K_b = \frac{1}{2}mv_b^2$ inmediatamente antes de impactar el bloque, mientras que inmediatamente después de la colisión, la combinación bloque más bala tiene la energía cinética

$$K = \frac{1}{2}(m + M)v^2 = \frac{1}{2}(m + M)\left(\frac{m}{m + M}v_b\right)^2 = \frac{1}{2}mv_b^2\frac{m}{m + M} = \frac{m}{m + M}K_b. \quad (7.22)$$

Es claro que la energía cinética no se conserva en el proceso mientras la bala se incrusta en el bloque. (Con un péndulo balístico real, la energía cinética se transforma en deformación de la bala y el bloque. En esta versión de demostración, la energía cinética se transfiere al trabajo de fricción entre la bala y el bloque.) La ecuación 7.22 muestra que la energía cinética total (y con ésta, la energía mecánica total) se reduce por un factor de $m/(m + M)$. Sin embargo, después de la colisión, la combinación bloque más bala mantiene su energía total remanente durante el movimiento subsecuente de péndulo, convirtiendo toda la energía cinética inicial de la ecuación 7.22 en energía potencial en el punto más alto:

$$U_{\text{máx}} = (m + M)gh = K = \frac{1}{2}\left(\frac{m^2}{m + M}\right)v_b^2. \quad (7.23)$$

Como puede ver por la figura 7.13b), la altura h y el ángulo θ se relacionan mediante $h = \ell(1 - \cos\theta)$, donde ℓ es la longitud del péndulo. (Hemos encontrado la misma relación en el problema resuelto 6.4.) Sustituyendo este resultado en la ecuación 7.23, obtenemos

$$(m + M)g\ell(1 - \cos\theta) = \frac{1}{2}\left(\frac{m^2}{m + M}\right)v_b^2 \Rightarrow v_b = \frac{m + M}{m}\sqrt{2g\ell(1 - \cos\theta)}. \quad (7.24)$$

Es claro por la ecuación 7.24 que prácticamente cualquier rapidez de bala se puede medir mediante un péndulo balístico, siempre y cuando la masa del bloque, M , se elija de manera adecuada. Por ejemplo, si usted dispara un tiro de Magnum calibre .357 ($m = 0.125$ kg) en un bloque ($M = 40.0$ kg) suspendido de una soga de 1.00 m de longitud, la deflexión es de 25.4°, y la ecuación 7.24 le permite deducir que la rapidez a boca de cañón de esta bala disparada con la pistola específica que usted usó es de 442 m/s (que es un valor típico para este tipo de munición).

Pérdida de energía cinética en colisiones totalmente inelásticas

Como acabamos de ver, la energía cinética total no se conserva en colisiones totalmente inelásticas. ¿Cuánta energía cinética se pierde en el caso general? Podemos hallar esta pérdida tomando la diferencia entre la energía cinética inicial, K_i , y la energía cinética final, K_f :

$$K_{\text{pérdida}} = K_i - K_f.$$

La energía cinética total inicial es la suma de las energías cinéticas individuales de los dos objetos antes de la colisión:

$$K_i = \frac{p_{i1}^2}{2m_1} + \frac{p_{i2}^2}{2m_2}.$$

La energía cinética total final para el caso en el que dos objetos se adhieren uno al otro y se mueven como uno solo, con una masa total de $m_1 + m_2$ y velocidad \vec{v}_f , usando la ecuación 7.21, es

$$\begin{aligned} K_f &= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_f^2 \\ &= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\left(\frac{m_1\vec{v}_{i1} + m_2\vec{v}_{i2}}{m_1 + m_2}\right)^2 \\ &= \frac{(m_1\vec{v}_{i1} + m_2\vec{v}_{i2})^2}{2(m_1 + m_2)}. \end{aligned}$$

7.7 Oportunidad de autoexamen

Si usted usa una bala con la mitad de la masa de una bala calibre .357 Magnum y la misma rapidez, ¿cuál es el ángulo de deflexión?

7.10 Ejercicio en clase

Un péndulo balístico se usa para medir la rapidez de una bala disparada por una pistola. La masa de la bala es de 50.0 g, y la masa del bloque es de 20.0 kg. Cuando la bala impacta el bloque, la masa combinada se eleva una distancia vertical de 5.00 cm. ¿Cuál era la rapidez de la bala al impactar el bloque?

- a) 397 m/s d) 479 m/s
- b) 426 m/s e) 503 m/s
- c) 457 m/s

Ahora podemos tomar la diferencia entre las energías cinéticas inicial y final, y obtener la pérdida de energía cinética:

$$K_{\text{pérdida}} = K_i - K_f = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (\vec{v}_{i1} - \vec{v}_{i2})^2. \quad (7.25)$$

La deducción de este resultado entraña un poco de álgebra, que se omite aquí. Lo que importa; sin embargo, es que la diferencia en las velocidades iniciales —es decir, la velocidad relativa inicial— entra en la ecuación para pérdida de energía. Exploraremos la importancia de este hecho en la siguiente sección y, nuevamente, en el capítulo 8, cuando consideremos el movimiento del centro de masa.

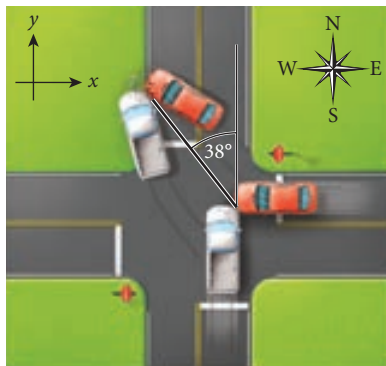
7.11 Ejercicio en clase

Suponga que la masa 1 en un principio está en reposo y la masa 2 se mueve al inicio con rapidez $v_{i,2}$. En una colisión totalmente inelástica entre los dos objetos, la pérdida de energía cinética, en términos de la energía cinética inicial, es mayor para

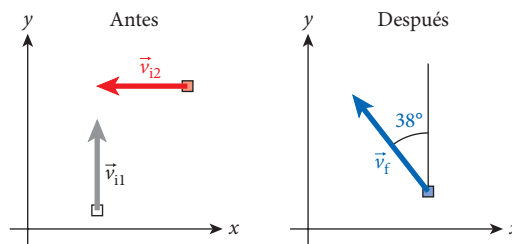
- a) $m_1 \ll m_2$ c) $m_1 = m_2$
 b) $m_1 \gg m_2$

PROBLEMA RESUELTO 7.2 Ciencia forense

La figura 7.14a) muestra un croquis de un accidente de tránsito. La camioneta blanca (auto 1) con masa $m_1 = 2\,209$ kg estaba viajando hacia el norte e impactó al auto rojo que iba hacia el oeste (auto 2) con masa $m_2 = 1\,474$ kg. Cuando los dos vehículos chocaron, se engancharon entre sí. Las marcas de deslizamiento en el camino revelan la ubicación exacta de la colisión, y la dirección en la que los dos vehículos se deslizaron inmediatamente después. Esta dirección se midió como 38° en relación con la dirección inicial de la velocidad de la camioneta blanca. La camioneta blanca tenía el derecho de paso, porque el vehículo rojo tenía un señalamiento de alto. El conductor del auto rojo, sin embargo, alegó que el conductor de la camioneta blanca se estaba moviendo con una rapidez de por lo menos 50 mph (22 m/s), aunque el límite de rapidez en la zona era de 25 mph (11 m/s). Además, el conductor del auto rojo alegaba que se había detenido frente al señalamiento de alto y estaba entonces conduciendo por la intersección con una rapidez menor de 25 mph cuando la camioneta blanca lo impactó. Como el conductor de la camioneta estaba sobrepasando el límite de rapidez, legalmente habría perdido el derecho de paso y habría sido declarado responsable del accidente.



a)



b)

FIGURA 7.14 a) Croquis de la escena del accidente. b) Vectores velocidad de los dos vehículos antes y después de la colisión.

PROBLEMA

¿La versión del accidente según el conductor del auto rojo puede ser correcta?

SOLUCIÓN

PIENSE

Es claro que la colisión es totalmente inelástica y, por lo tanto, sabemos que la velocidad de los vehículos engancharon entre sí después de la colisión está dada por la ecuación 7.21. Se nos dan los ángulos de las velocidades iniciales de ambos vehículos y el ángulo del vector final de velocidad de los dos vehículos combinados. Sin embargo, no se nos dan las magnitudes de estas tres velocidades. Por lo tanto, tenemos una ecuación y tres incógnitas. Por lo anterior, para resolver este problema, sólo necesitamos determinar la relación de la magnitud de la velocidad inicial del auto 1 a la magnitud de la velocidad inicial del auto 2. Aquí la velocidad inicial es la velocidad del vehículo inmediatamente antes de ocurrir la colisión.

(continúa)

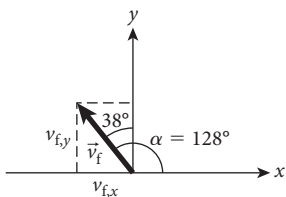


FIGURA 7.15 Componentes del vector velocidad de los dos vehículos combinados después de la colisión.

(continuación)

ESBOCE

En la figura 7.14b) se muestra un croquis de los vectores velocidad de los dos autos antes y después de la colisión. En la figura 7.15 se muestra un croquis de las componentes del vector velocidad de los dos vehículos adheridos entre sí después de la colisión.

INVESTIGUE

Usando el sistema de coordenadas que se muestra en la figura 7.14a), la camioneta blanca (auto 1) tiene sólo un componente y para su vector velocidad, $\vec{v}_{i1} = v_{i1}\hat{y}$, donde v_{i1} es la rapidez inicial de la camioneta blanca. El auto rojo (auto 2) tiene una componente de velocidad sólo en la dirección negativa x , $\vec{v}_{i2} = -v_{i2}\hat{x}$. La velocidad final, \vec{v}_f , de los vehículos adheridos entre sí después de la colisión, expresada en términos de las velocidades iniciales, está dada por

$$\vec{v}_f = \frac{m_1\vec{v}_{i1} + m_2\vec{v}_{i2}}{m_1 + m_2}.$$

SIMPLIFIQUE

Sustituyendo las velocidades iniciales en esta ecuación para la velocidad final da

$$\vec{v}_f = v_{f,x}\hat{x} + v_{f,y}\hat{y} = \frac{-m_2v_{i2}}{m_1 + m_2}\hat{x} + \frac{m_1v_{i1}}{m_1 + m_2}\hat{y}.$$

Las componentes del vector de velocidad final, $v_{f,x}$ y $v_{f,y}$, se muestran en la figura 7.15. Por trigonometría, obtenemos una expresión para la tangente del ángulo de la velocidad final como el cociente de sus componentes y x :

$$\tan \alpha = \frac{v_{f,y}}{v_{f,x}} = \frac{\frac{m_1v_{i1}}{m_1 + m_2}}{\frac{-m_2v_{i2}}{m_1 + m_2}} = -\frac{m_1v_{i1}}{m_2v_{i2}}.$$

Así, podemos encontrar la rapidez inicial del auto 1 en términos de la rapidez inicial del auto 2:

$$v_{i1} = -\frac{m_2 \tan \alpha}{m_1} v_{i2}.$$

Tenemos que ser cuidadosos con el valor del ángulo α . No es 38° , como usted podría concluir por un examen descuidado de la figura 7.14b). En vez de esto, el ángulo es de $38^\circ + 90^\circ = 128^\circ$, como se muestra en la figura 7.15, porque los ángulos se deben medir en relación con el eje x positivo cuando se usa la fórmula de la tangente, $\tan \alpha = v_{f,y} / v_{f,x}$.

CALCULE

Con este resultado y los valores conocidos de las masas de los dos vehículos, encontramos

$$v_{i1} = -\frac{(1\,474 \text{ kg})(\tan 128^\circ)}{2\,209 \text{ kg}} v_{i2} = 0.854066983v_{i2}.$$

REDONDEE

El ángulo en el que los dos vehículos se mueven después de la colisión se especificó con dos cifras significativas, de modo que reportamos nuestra respuesta con dos cifras significativas:

$$v_{i1} = 0.85v_{i2}.$$

La camioneta blanca (auto 1) se estaba moviendo a una rapidez más lenta que el auto rojo (auto 2). La narración del conductor del auto rojo no es congruente con los hechos. Aparentemente, el conductor de la camioneta blanca no estaba sobrepasando el límite de velocidad en el momento de la colisión, y el causante del accidente fue el conductor del auto rojo al no respetar el señalamiento de alto.

7.8 Oportunidad de autoexamen

Para revisar nuevamente el resultado del problema resuelto 7.2, estime cuál habría sido el ángulo de deflexión si la camioneta blanca hubiera estado viajando con una rapidez de 50 mph y el auto rojo hubiera estado viajando con una rapidez de 25 mph inmediatamente antes de la colisión.

Explosiones

En colisiones totalmente inelásticas, dos o más objetos se fusionan en uno y se mueven al unísono con el mismo momento total después de la colisión como antes de ésta. También es posible el proceso inverso. Si un objeto se mueve con momento inicial \vec{p}_i y luego estalla en fragmentos, el proceso de la explosión sólo genera fuerzas internas entre los fragmentos. Como la explosión

tiene lugar en un tiempo muy corto, el impulso debido a las fuerzas externas por lo general se puede despreciar. En tal situación, de acuerdo con la tercera ley de Newton, el momento total se conserva. Este resultado implica que la suma de los vectores de los momentos de los fragmentos tiene que totalizar el vector inicial de momento del objeto

$$\vec{P}_i = \sum_{k=1}^n \vec{P}_{fk}. \quad (7.26)$$

Esta ecuación que relaciona el momento del objeto que estalla justo antes de la explosión con la suma de los vectores de los momentos de los fragmentos justo después de la explosión es exactamente la misma que la ecuación para una colisión totalmente inelástica, salvo que los subíndices para los estados inicial y final se intercambian. En particular, si un objeto se fracciona en dos fragmentos, la ecuación 7.26 coincide con la ecuación 7.21, con los índices i y f intercambiados:

$$\vec{v}_i = \frac{m_1 \vec{v}_{f1} + m_2 \vec{v}_{f2}}{m_1 + m_2}. \quad (7.27)$$

Esta relación nos permite, por ejemplo, reconstruir la velocidad inicial si conocemos las velocidades y las masas de los fragmentos. Además, podemos calcular la energía liberada en una fragmentación que da dos fragmentos, por la ecuación 7.25, de nuevo con los subíndices i y f intercambiados:

$$K_{\text{liberada}} = K_f - K_i = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (\vec{v}_{f1} - \vec{v}_{f2})^2. \quad (7.28)$$

EJEMPLO 7.4 Desintegración de un núcleo de radón

El radón es un gas que se produce por la desintegración radiactiva de los núcleos pesados que existen naturalmente, tales como el torio y el uranio. El gas radón se puede respirar al interior de los pulmones, donde se desintegra más. El núcleo de un átomo de radón tiene una masa de 222 u, donde u es una unidad de masa atómica (que se introducirá en el capítulo 40). Suponga que el núcleo está en reposo cuando se desintegra en un núcleo de polonio con masa de 218 u y un núcleo de helio con masa de 4 u (llamado partícula alfa), liberando 5.59 MeV de energía cinética.

PROBLEMA

¿Cuáles son las energías cinéticas para el núcleo de polonio y la partícula alfa?

SOLUCIÓN

El núcleo de polonio y la partícula alfa se emiten en direcciones opuestas. Diremos que la partícula alfa se emite con una rapidez v_{x1} en la dirección x positiva, y el núcleo de polonio se emite con rapidez v_{x2} en la dirección x negativa. La masa de la partícula alfa es $m_1 = 4u$, y la masa del núcleo de polonio es $m_2 = 218u$. La velocidad inicial del núcleo de radón es cero, de modo que podemos usar la ecuación 7.27 para escribir

$$\vec{v}_i = 0 = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2},$$

que nos da

$$m_1 v_{x1} = -m_2 v_{x2}. \quad (i)$$

Usando la ecuación 7.28, podemos expresar la energía cinética liberada por la desintegración del núcleo de radón

$$K_{\text{liberada}} = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_{x1} - v_{x2})^2. \quad (ii)$$

Podemos entonces usar la ecuación (i) para expresar la velocidad del núcleo de polonio en términos de la velocidad de la partícula alfa:

$$v_{x2} = -\frac{m_1}{m_2} v_{x1}.$$

(continúa)

(continuación)

Al sustituir la ecuación (i) en la ecuación (ii) obtenemos

$$K_{\text{liberada}} = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \left(v_{x1} + \frac{m_1}{m_2} v_{x1} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2 v_{x1}^2}{m_1 + m_2} \left(\frac{m_1 + m_2}{m_2} \right)^2. \quad (\text{iii})$$

Al reacomodar la ecuación (iii),

$$K_{\text{liberada}} = \frac{1}{2} \frac{m_1 (m_1 + m_2) v_{x1}^2}{m_2} = \frac{1}{2} m_1 v_{x1}^2 \frac{m_1 + m_2}{m_2} = K_1 \left(\frac{m_1 + m_2}{m_2} \right),$$

donde K_1 es la energía cinética de la partícula alfa. La energía cinética es entonces

$$K_1 = K_{\text{liberada}} \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} \right).$$

Al introducir los valores numéricos, obtenemos la energía cinética de la partícula alfa:

$$K_1 = (5.59 \text{ MeV}) \left(\frac{218}{4 + 218} \right) = 5.49 \text{ MeV}.$$

La energía cinética, K_2 , del núcleo de polonio es entonces

$$K_2 = K_{\text{liberada}} - K_1 = 5.59 \text{ MeV} - 5.49 \text{ MeV} = 0.10 \text{ MeV}.$$

La partícula alfa recibe la mayor parte de la energía cinética cuando se desintegra el núcleo de radón, y esta energía es suficiente para dañar el tejido circundante en los pulmones.

EJEMPLO 7.5 Física de partículas

Las leyes de conservación del momento y de la energía son esenciales para analizar los productos de las colisiones de partículas a altas energías, tales como las que se producen en el Tevatron de Fermilab, cerca de Chicago, Illinois, actualmente el acelerador protón-antiprotón con la energía más alta del mundo. (Un acelerador llamado LHC, siglas de Large Hadron Collider, inició operaciones en 2009 en el Laboratorio CERN en Ginebra, Suiza, y será más potente que el Tevatron. Sin embargo, el LHC es un acelerador protón-protón.)

En el acelerador Tevatron, los físicos de partículas hacen chocar protones y antiprotones con energías totales de 1.96 TeV (de aquí proviene el nombre). Recuerde que $1 \text{ eV} = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$; de modo que $1.96 \text{ TeV} = 1.96 \cdot 10^{12} \text{ eV} = 3.1 \cdot 10^{-7} \text{ J}$. El Tevatron está configurado de tal manera que los protones y los antiprotones se mueven en el anillo de colisiones en direcciones opuestas, con vectores de momento que, para todo fin práctico, son exactamente opuestos. Los principales detectores de partículas, D-Zero y CDF, están ubicados en las regiones de interacción, donde chocan los protones y los antiprotones.

La figura 7.16a) muestra un ejemplo de una de estas colisiones. En esta imagen en pantalla, generada por computadora, de un evento específico de colisión en el detector D-Zero, el vector inicial de momento del protón apunta directo hacia la página, y el del antiprotón apunta directo hacia afuera de la página. De modo que el momento inicial total del sistema protón-antiprotón es cero. La explosión producida por esta colisión produce varios fragmentos, casi todos ellos registrados por el detector. Estas mediciones se indican en la imagen [figura 7.16a)]. Sobre esta imagen del evento se sobreponen los vectores de momento de las correspondientes partículas madre de estos fragmentos, con sus magnitudes y direcciones basadas en el análisis por computadora de la respuesta del detector. (La unidad de momento GeV/c, que se usa de manera común en la física de altas energías y se muestra en la figura, es la unidad de energía GeV dividida entre la rapidez de la luz.) En la figura 7.16b), los vectores de momento se han sumado gráficamente, dando un vector no cero, que se indica por una flecha verde más gruesa.

Sin embargo, la conservación del momento exige absolutamente que la suma de los vectores de momento de todas las partículas producidas en esta colisión sea cero. Así, la conservación del momento nos permite asignar el momento faltante, representado por la flecha verde, a una partícula que escapó sin ser detectada. Con la ayuda de este análisis del momento faltante, los físicos de Fermilab pudieron mostrar que el evento que aquí se muestra era uno el que produjo una partícula evasiva conocida como el cuark top.

7.9 Oportunidad de autoexamen

La longitud de cada flecha de los vectores en la figura 7.16b) es proporcional a la magnitud del vector de momento de cada partícula individual. ¿Puede determinar el momento de la partícula no detectada (flecha verde)?

Detector D-Zero en el Fermi National Accelerator Laboratory. Detector D-Zero en el Fermi National Accelerator Laboratory.

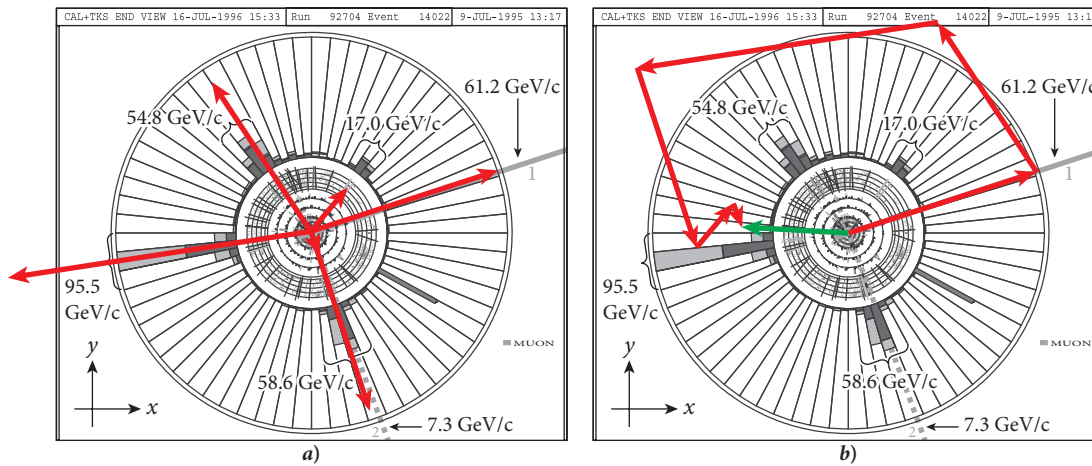


FIGURA 7.16 Imagen de evento en pantalla, generado por la oficina de colaboración y educación D-Zero en Fermilab, que muestra un evento de generación de un cuark top. a) Vectores de momento de las partículas detectadas producidas por el evento; b) suma gráfica de los vectores de momento, mostrando que la suma es no cero, indicada por la flecha verde más gruesa.

7.7 Colisiones parcialmente inelásticas

¿Qué sucede si una colisión no es ni elástica ni totalmente inelástica? La mayoría de las colisiones reales se encuentran en algún punto entre estos dos extremos, como vimos en el experimento del choque de monedas en la figura 7.9. Por lo tanto, es importante ver con más detalle las colisiones parcialmente inelásticas.

Ya hemos visto que la velocidad relativa de los dos objetos en una colisión elástica unidimensional simplemente cambia de signo. Esto también es cierto en colisiones elásticas bidimensionales y tridimensionales, aunque no lo probaremos aquí. La velocidad relativa se vuelve cero en las colisiones totalmente inelásticas. De modo que parece lógico definir la elasticidad de una colisión de una manera que incluya la relación entre las velocidades relativas inicial y final.

El **coeficiente de restitución**, que se simboliza ϵ , es la relación entre las magnitudes de las velocidades inicial y final en una colisión:

$$\epsilon = \frac{|\vec{v}_{f1} - \vec{v}_{f2}|}{|\vec{v}_{i1} - \vec{v}_{i2}|}. \quad (7.29)$$

Esta definición da un coeficiente de restitución de $\epsilon = 1$ para colisiones elásticas y $\epsilon = 0$ para colisiones totalmente inelásticas.

Primero, examinemos lo que sucede en el límite en el que uno de los dos objetos que chocan es el suelo (para todos los fines y propósitos, infinitamente maciso) y el otro es una pelota. Podemos ver, por la ecuación 7.29, que si el suelo no se mueve cuando la pelota rebota, $\vec{v}_{i1} = \vec{v}_{f1} = 0$, y podemos escribir para la rapidez de la pelota:

$$v_{f2} = \epsilon v_{i2}.$$

Si soltamos la pelota desde alguna altura, h_i , sabemos que alcanza una rapidez de $v_i = \sqrt{2gh_i}$ justo antes de chocar con el suelo. Si la colisión es elástica, la rapidez de la pelota inmediatamente después de la colisión es la misma, $v_f = v_i = \sqrt{2gh_i}$, y rebota de regreso a la misma altura desde la que se soltó. Si la colisión es por completo inelástica, como en el caso de una bola de plastilina que cae al suelo y simplemente se queda ahí, la rapidez final es cero. Para todos los casos intermedios, podemos encontrar el coeficiente de restitución por la altura h_f a la cual regresa la pelota:

$$\begin{aligned} h_f &= \frac{v_f^2}{2g} = \frac{\epsilon^2 v_i^2}{2g} = \epsilon^2 h_i \Rightarrow \\ \epsilon &= \sqrt{h_f / h_i}. \end{aligned}$$

7.10 Oportunidad de autoexamen

La pérdida máxima de energía cinética se obtiene en el límite de una colisión totalmente inelástica. ¿Qué fracción de esta pérdida máxima posible de energía se obtiene en el caso en el que $\epsilon = \frac{1}{2}$?

Usando esta fórmula para medir el coeficiente de restitución, encontramos $\epsilon = 0.58$ para pelotas de béisbol, usando las velocidades relativas típicas que ocurrirían en las colisiones pelota-bate en los juegos de las ligas mayores.

En general, podemos afirmar (sin prueba) que la pérdida de energía cinética en colisiones parcialmente inelásticas es

$$K_{\text{pérdida}} = K_i - K_f = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (1 - \epsilon^2) (\vec{v}_{i1} - \vec{v}_{i2})^2. \quad (7.30)$$

En el límite $\epsilon \rightarrow 1$, obtenemos $K_{\text{pérdida}} = 0$ —es decir, no hay pérdida de energía cinética, como se requiere para las colisiones elásticas—. Además, en el límite $\epsilon \rightarrow 0$, la ecuación 7.30 coincide con la liberación de energía para colisiones totalmente inelásticas mostradas anteriormente en la ecuación 7.28.

Colisión parcialmente inelástica con una pared

Si usted juega frontenis o squash, sabe que la pelota pierde energía cuando la golpea contra la pared. Mientras el ángulo con el que la pelota rebota de la pared en una colisión elástica es el mismo que el ángulo con el que incide en la pared, el ángulo final no es tan sencillo para una colisión parcialmente inelástica (figura 7.17).

La clave para obtener una primera aproximación de este ángulo es considerar sólo la fuerza normal, que actúa en una dirección perpendicular a la pared. Entonces la componente del momento dirigida a lo largo de la pared permanece sin cambio, igual que en una colisión elástica. Sin embargo, la componente del momento perpendicular a la pared no se invierte simplemente, sino que se reduce en magnitud por el coeficiente de restitución: $p_{f,\perp} = -\epsilon p_{i,\perp}$. Esta aproximación nos da un ángulo de reflexión relativo a la normal que es mayor que el ángulo inicial:

$$\theta_f = \cot^{-1} \frac{p_{f,\perp}}{p_{f,\parallel}} = \cot^{-1} \frac{\epsilon p_{i,\perp}}{p_{i,\parallel}} > \theta_i. \quad (7.31)$$

La magnitud del vector de momento final también cambia y se reduce a

$$p_f = \sqrt{p_{f,\parallel}^2 + p_{f,\perp}^2} = \sqrt{p_{i,\parallel}^2 + \epsilon^2 p_{i,\perp}^2} < p_i. \quad (7.32)$$

Si queremos una descripción cuantitativa, necesitamos incluir el efecto de una fuerza de fricción entre la pelota y la pared, que actúa durante la colisión. (Ésta es la razón de que las pelotas de squash y las de frontenis dejen marcas en las paredes.) Además, la colisión con la pared también cambia la rotación de la pelota y, por lo tanto, altera adicionalmente la dirección y la energía cinética de la pelota al rebotar. Sin embargo, las ecuaciones 7.31 y 7.32 permiten todavía una primera aproximación muy razonable para las colisiones parcialmente inelásticas con paredes.

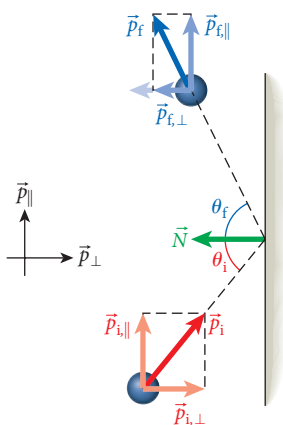


FIGURA 7.17 Colisión parcialmente inelástica de una pelota con una pared.

7.8 El billar y el caos

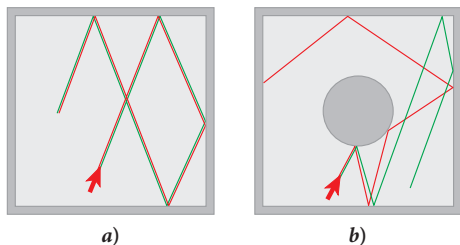


FIGURA 7.18 Colisiones de partículas con paredes, para dos partículas que comienzan muy cercanas entre sí y con el mismo momento: a) mesa ordinaria de billar; b) billar de Sinai.

Consideremos el billar de una manera abstracta. El sistema abstracto de billar es una mesa rectangular (o incluso cuadrada) en la que las partículas pueden andar rebotando y tener colisiones elásticas con los lados. Entre colisión y colisión, estas partículas se mueven en trayectorias rectas sin pérdida de energía. Cuando dos partículas comienzan a moverse estando cercanas entre sí, como en la figura 7.18a), permanecen cercanas entre sí. La figura muestra las trayectorias (líneas roja y verde) de las dos partículas, que comienzan juntas entre sí con el mismo momento inicial (indicado por una flecha roja) y se ve claramente que permanecen juntas.

La situación se vuelve cualitativamente diferente cuando se agrega una pared circular en el centro de la mesa de billar. Ahora, cada colisión con la pared separa más las partículas. En la figura 7.18b), usted puede ver que una colisión con la pared circular bastó para separar las líneas roja y verde definitivamente. Este tipo de sistema de billar se llama *billar de Sinai*, designado así por el académico ruso

Yakov Sinai (nació en 1935), quien lo estudió por primera vez en 1970. El billar de Sinai exhibe el **movimiento caótico** que sigue las leyes de la física —que aunque no es aleatorio— no se puede predecir porque cambia significativamente como resultado de pequeños cambios en las condiciones iniciales. Es sorprendente que los sistemas de billar de Sinai no se hayan explorado en su totalidad. Por ejemplo, apenas en la última década se han descrito las propiedades de extinción de estos sistemas. Los investigadores interesados en la física del caos ganan continuamente nuevo conocimiento acerca de estos sistemas.

El siguiente es un ejemplo de la investigación de los autores. Si usted bloquea las bolsas de una mesa de pool y corta un agujero en una pared lateral de una mesa convencional de pool y luego mide el tiempo que tarda una bola en llegar a este agujero y escapar, usted obtiene una distribución de decaimiento en el tiempo de ley de potencias: $N(t) = N(t=0)t^{-1}$, donde $N(t=0)$ es el número de bolas que se usan en el experimento y $N(t)$ es el número de bolas que quedan después del tiempo t . Sin embargo, si usted hiciera lo mismo con el billar de Sinai, obtendría una dependencia exponencial con respecto al tiempo: $N(t) = N(t=0)e^{-t/T}$.

Estos tipos de investigaciones no son simplemente especulaciones teóricas. Ensaye el siguiente experimento: coloque una bola de billar en la superficie de una mesa y manténgala firme. Luego sostenga una segunda bola de billar tan exactamente como pueda arriba de la primera, y suéltela desde una altura de unas pocas pulgadas (o centímetros). Usted verá que no se puede hacer que la bola superior rebote en la inferior más de tres o cuatro veces antes de salir en alguna dirección desconocida. Incluso si usted fija la ubicación de las dos bolas con precisión atómica, la bola superior rebotará lejos de la inferior después de sólo diez o quince veces. Lo anterior significa que la capacidad de predecir el resultado de este experimento no va más allá de unas pocas colisiones. Esta limitación de predictibilidad va al núcleo de la ciencia del caos. Es una de las principales razones, por ejemplo, para que sea imposible la predicción exacta del clima a largo plazo. Después de todo, las moléculas de aire rebotan también alejándose una de otra.

El demonio de Laplace

El marqués Pierre-Simon Laplace (1749-1827) fue un eminente físico francés y matemático del siglo XVIII. Vivió durante el tiempo de la Revolución Francesa y otras importantes revueltas sociales, caracterizadas por la lucha por la autodeterminación y la libertad. Ningún cuadro simboliza mejor esta lucha que *La libertad conduciendo al pueblo* (1830), de Eugène Delacroix (figura 7.19).

Laplace tuvo una interesante idea, conocida ahora como el *demonio de Laplace*. Razonaba que todo está hecho de átomos, y todos los átomos obedecen a ecuaciones diferenciales gobernadas por las fuerzas que actúan sobre ellos. Si las posiciones y velocidades iniciales de todos los átomos, junto con todas las leyes de las fuerzas se introducen a una gran computadora (él la llamaba un “intelecto”), entonces “para tal intelecto nada podría ser incierto, y el futuro, igual que el pasado, sería presente ante sus ojos”. Este razonamiento implica que todo está predeterminado; sólo somos engranes en un enorme aparato de relojería, y nadie tiene libre albedrío. Irónicamente, Laplace dio a conocer esta idea en un tiempo en el que bastantes personas creían que podrían lograr el libre albedrío si tan sólo pudieran derrocar a quienes estaban en el poder.

La caída del demonio de Laplace se da por la combinación de dos principios de física. Uno de ellos es de la ciencia del caos, que señala que la predictibilidad a largo plazo depende sensiblemente del conocimiento de las condiciones iniciales, como se ve en el experimento de las bolas de billar que rebotan. Este principio se aplica a las moléculas que interactúan entre ellas, como por ejemplo, las moléculas del aire. El otro principio físico señala la imposibilidad de especificar, tanto la posición como el momento de cualquier objeto, exactamente al mismo tiempo. Ésta es la relación de incertidumbre en la física cuántica (que se explica en el capítulo 36). Así, el libre albedrío está todavía vivo y sano: la predictibilidad a largo plazo de sistemas grandes o complejos como el clima o el cerebro humano es imposible. La combinación de la teoría del caos y la teoría cuántica asegura que ni el demonio de Laplace ni ninguna computadora puede de ninguna manera calcular ni predecir nuestras decisiones individuales.



FIGURA 7.19 *La libertad conduciendo al pueblo*, Eugène Delacroix (Louvre, París, Francia).

LO QUE HEMOS APRENDIDO | GUÍA DE ESTUDIO PARA EXAMEN

- El momento se define como el producto de la masa de un objeto y su velocidad: $\vec{p} = m\vec{v}$.
- La segunda ley de Newton se puede escribir como $\vec{F} = d\vec{p}/dt$.
- Impulso es el cambio en el momento de un objeto, y es igual a la integral en el tiempo de la fuerza externa aplicada: $\vec{J} = \Delta\vec{p} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F} dt$.
- En una colisión de dos objetos, los momentos se pueden intercambiar, pero la suma de los momentos de los objetos que chocan permanece constante: $\vec{p}_{f1} + \vec{p}_{f2} = \vec{p}_{i1} + \vec{p}_{i2}$. Ésta es la ley de conservación del momento total.
- La colisión puede ser elástica, totalmente inelástica o parcialmente inelástica.

- En las colisiones elásticas, la energía cinética total también permanece constante:

$$\frac{p_{f1}^2}{2m_1} + \frac{p_{f2}^2}{2m_2} = \frac{p_{i1}^2}{2m_1} + \frac{p_{i2}^2}{2m_2}.$$

- Para colisiones unidimensionales elásticas, en general, las velocidades finales de los dos objetos que chocan se pueden expresar como función de las velocidades iniciales:

$$v_{f1,x} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) v_{i1,x} + \left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2} \right) v_{i2,x}$$

$$v_{f2,x} = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2} \right) v_{i1,x} + \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \right) v_{i2,x}.$$

- En colisiones totalmente inelásticas, los objetos que chocan se adhieren uno a otro después de la colisión y tienen la misma velocidad: $\vec{v}_f = (m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2) / (m_1 + m_2)$.
- Todas las colisiones parcialmente inelásticas se caracterizan por un coeficiente de restitución, definido como el cociente de las magnitudes de las velocidades relativas final e inicial: $\epsilon = |\vec{v}_{f1} - \vec{v}_{f2}| / |\vec{v}_{i1} - \vec{v}_{i2}|$. La pérdida de energía cinética en una colisión parcialmente inelástica está entonces dada por

$$\Delta K = K_i - K_f = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (1 - \epsilon^2) (\vec{v}_{i1} - \vec{v}_{i2})^2.$$

TÉRMINOS CLAVE

momento, p. 206
 impulso, p. 208
 colisión elástica, p. 210

colisión totalmente inelástica, p. 210
 conservación del momento total, p. 210
 péndulo balístico, p. 221

coeficiente de restitución, p. 227
 movimiento caótico, p. 228

NUEVOS SÍMBOLOS Y ECUACIONES

$\vec{p} = m\vec{v}$, momento

$\vec{J} = \Delta\vec{p} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F} dt$, impulso

$\vec{p}_{f1} + \vec{p}_{f2} = \vec{p}_{i1} + \vec{p}_{i2}$, conservación del momento total

$\epsilon = \frac{|\vec{v}_{f1} - \vec{v}_{f2}|}{|\vec{v}_{i1} - \vec{v}_{i2}|}$, coeficiente de restitución

RESPUESTAS A LAS OPORTUNIDADES DE AUTOEXAMEN

7.1 goma para detener la puerta,
 guante de béisbol acojinado,
 tablero acojinado de auto,
 barriles llenos de agua frente a estribos de puentes en carreteras,
 cojinetes en soportes del aro de basquetbol,
 cojinetes en soportes del poste de gol en campo de fútbol americano,
 tapetes acojinados portátiles para piso de gimnasio,
 insertos acojinados para zapatos.

7.2 La colisión es la de una pelota de golf estacionaria golpeada por una cabeza de palo de golf en movimiento. La cabeza del driver tiene más masa que la pelota. Si tomamos la pelota como m_1 y como m_2 la cabeza del driver, entonces $m_2 > m_1$ y

$$v_{f1,x} = \left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2} \right) v_{i2,x}.$$

De modo que la rapidez de la pelota después del impacto será mayor que la rapidez de la cabeza del palo de golf por un factor de

$$\left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2} \right) = \frac{2}{\frac{m_1}{m_2} + 1} > 1$$

Si la cabeza del palo de golf es mucho más masiva que la de la pelota, entonces

$$\left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2} \right) \approx 2.$$

7.3 Tome dos monedas, cada una con radio R . Hágalas chocar con parámetro de impacto b .

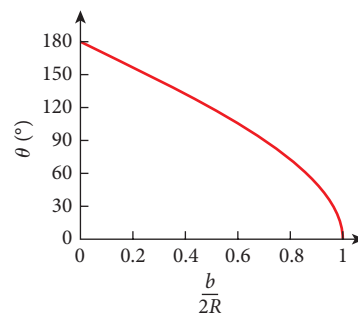
El ángulo de dispersión es θ .

$$b = 0 \rightarrow \theta = 180^\circ$$

$$b = 2R \rightarrow \theta = 0^\circ$$

La función completa es

$$\theta = 180^\circ - 2 \operatorname{sen}^{-1} \left(\frac{b}{2R} \right).$$



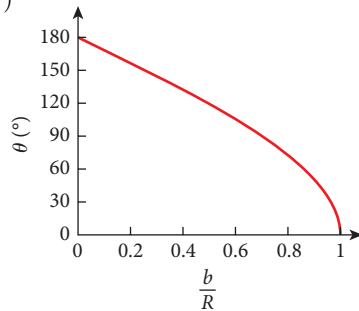
7.4 Suponga que la moneda más grande está en reposo y lanzamos una moneda más pequeña contra la mayor. Para $b = 0$, obtenemos $\theta = 180^\circ$ y para $b = R_1 + R_2$, obtenemos $\theta = 0^\circ$.

Para una moneda muy pequeña en movimiento que incide sobre una moneda muy grande estacionaria con radio R , obtenemos

$$b = R \cos(\theta/2)$$

$$\cos^{-1}\left(\frac{b}{R}\right) = \frac{\theta}{2}$$

$$\theta = 2 \cos^{-1}\left(\frac{b}{R}\right).$$



Suponga que la moneda más pequeña está en reposo y lanzamos contra ella una moneda más grande. Para $b = 0$, obtenemos $\theta = 0$ porque la moneda mayor continúa hacia adelante en una colisión frontal. Para $b = R_1 + R_2$, obtenemos $\theta = 0$.

7.5 La energía cinética inicial es

$$K_i = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} (19.0 \text{ kg})(1.60 \text{ m/s})^2 = 24.3 \text{ J}.$$

7.6 $F = ma$, y ambos experimentan la misma fuerza

$$m_{\text{SUV}} a_{\text{SUV}} = m_{\text{compacto}} a_{\text{compacto}}$$

$$\frac{a_{\text{compacto}}}{a_{\text{SUV}}} = \frac{m_{\text{SUV}}}{m_{\text{compacto}}} = \frac{3\,023 \text{ kg}}{1\,184 \text{ kg}} = 2.553.$$

$$7.7 \quad v_b = \frac{m+M}{m} \sqrt{2g\ell(1-\cos\theta)} \Rightarrow$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(1 - \frac{1}{2g\ell} \left(\frac{mv_b}{m+M}\right)^2\right)$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(1 - \frac{1}{2(9.81 \text{ m/s}^2)(1.00 \text{ m})} \left(\frac{(0.0625 \text{ kg})(442 \text{ m/s})}{0.0625 + 40.0 \text{ kg}}\right)^2\right)$$

$$\theta = 12.6^\circ$$

o aproximadamente la mitad del ángulo original.

7.8 Nuevamente, debemos tener cuidado con la tangente. La componente x es negativa y la componente y es positiva. De modo que debemos terminar en el segundo cuadrante con $90^\circ < \alpha < 180^\circ$.

$$\tan \alpha = \frac{-m_1 v_{i1}}{m_2 v_{i2}}$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{-m_1 v_{i1}}{m_2 v_{i2}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{-2\,209 \text{ kg } 50 \text{ mph}}{1\,474 \text{ kg } 25 \text{ mph}}\right)$$

$\alpha = 108^\circ$ o 18° respecto de la vertical, en comparación con 38° respecto de la vertical en la colisión real.

7.9 La longitud del vector de momento faltante es de 57 pixeles. La longitud del vector 95.5 GeV/c es de 163 pixeles. El momento faltante es entonces $(163/57)95.5 \text{ GeV/c} = 33 \text{ GeV/c}$.

7.10 La pérdida para $\epsilon = 0.5$ es

$$\begin{aligned} K_{\text{pérdida},0.5} &= K_i - K_f = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (1 - (0.5)^2) (\vec{v}_{i1} - \vec{v}_{i2})^2 \\ &= (0.75) \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (\vec{v}_{i1} - \vec{v}_{i2})^2 = 0.75 K_{\text{pérdida, máx}} \end{aligned}$$

PRÁCTICA PARA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Lineamientos de problemas resueltos: conservación del momento

1. La conservación del momento se aplica a sistemas aislados sin fuerzas externas que actúen sobre ellos. Asegúrese siempre de que el problema se refiere a una situación que satisfaga, o satisfaga aproximadamente, esta condición. También asegúrese de tomar en cuenta todas y cada una de las partes interactuantes del sistema; la conservación del momento se aplica al sistema completo, no sólo a un objeto.

2. Si la situación que usted analiza incluye una colisión o una explosión, identifique los momentos inmediatamente antes e inmediatamente después del suceso para usar la ecuación de

conservación del momento. Recuerde que un cambio en el momento total es igual a un impulso, pero éste puede ser una fuerza instantánea que actúa sólo por un instante, o una fuerza media que actúa durante un intervalo de tiempo.

3. Si el problema involucra una colisión, usted necesita discernir de qué tipo de colisión se trata. Si la colisión es perfectamente elástica, la energía cinética se conserva, pero esto no es verdad para otros tipos de colisiones.

4. Recuerde que el momento es un vector y se conserva en las direcciones x , y y z por separado. Para una colisión en más de una dimensión, usted puede necesitar información adicional para analizar por completo los cambios del momento.

PROBLEMA RESUELTO 7.3 Caída de un huevo

PROBLEMA

Un huevo en un contenedor especial se deja caer desde una altura de 3.70 m. El contenedor y el huevo tienen una masa combinada de 0.144 kg. Una fuerza neta de 4.42 N romperá el huevo. ¿Cuál es el tiempo mínimo en el que el sistema huevo/contenedor puede detenerse sin que se rompa el huevo?

SOLUCIÓN

PIENSE

Cuando se suelta el conjunto huevo/contenedor, se acelera con la aceleración debida a la gravedad. Cuando el conjunto llega al suelo, su velocidad pasa desde la velocidad final debida a la aceleración gravitacional a cero. Al detenerse, la fuerza que lo detiene, multiplicada por el intervalo de tiempo (el impulso) será igual a la masa del conjunto por el cambio de rapidez. El intervalo de tiempo durante el que tiene lugar el cambio de velocidad determinará si la fuerza que se ejerce sobre el huevo durante la colisión con el suelo romperá el huevo.

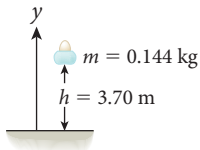


FIGURA 7.20 Un huevo en un contenedor especial se deja caer desde una altura de 3.70 m.

ESBOCE

El conjunto huevo/contenedor se deja caer desde el reposo, desde una altura $h = 3.70$ m (figura 7.20).

INVESTIGUE

Por la explicación sobre cinemática dada en el capítulo 2, sabemos que la rapidez final, v_y , del conjunto huevo/contenedor que resulta de la caída libre desde una altura y_0 a una altura final y , comenzando con una velocidad inicial v_{y0} , está dada por

$$v_y^2 = v_{y0}^2 - 2g(y - y_0). \quad (\text{i})$$

Sabemos que $v_{y0} = 0$ porque el conjunto huevo/contenedor se dejó caer desde el reposo. Definimos la altura final como $y = 0$ y la altura inicial como $y_0 = h$, como se muestra en la figura 7.20. Entonces, la ecuación (i) para la rapidez final en la dirección y se reduce a

$$v_y = \sqrt{2gh}. \quad (\text{ii})$$

Cuando el conjunto huevo/contenedor toca el piso, el impulso, \vec{J} , que se ejerce sobre el conjunto está dado por

$$\vec{J} = \Delta\vec{p} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt, \quad (\text{iii})$$

donde $\Delta\vec{p}$ es el cambio de momento del conjunto huevo/contenedor y \vec{F} es la fuerza ejercida para detenerlo. Suponemos que la fuerza es constante, de modo que podemos reescribir la integral en la ecuación (iii) como

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt = \vec{F}(t_2 - t_1) = \vec{F}\Delta t.$$

El momento del conjunto huevo/contenedor cambiará de $p = mv_y$ a $p = 0$ cuando toque el suelo, de modo que podemos escribir

$$\Delta p_y = 0 - (-mv_y) = mv_y = F_y \Delta t, \quad (\text{iv})$$

donde el término $-mv_y$ es negativo porque la velocidad del conjunto huevo/contenedor inmediatamente antes del impacto es en la dirección y negativa.

SIMPLIFIQUE

Ahora podemos despejar de la ecuación (iv) el intervalo de tiempo y sustituir la expresión para la velocidad final de la ecuación (ii):

$$\Delta t = \frac{mv_y}{F_y} = \frac{m\sqrt{2gh}}{F_y}. \quad (\text{v})$$

CALCULE

Al sustituir los valores numéricos, obtenemos

$$\Delta t = \frac{(0.144 \text{ kg})\sqrt{2(9.81 \text{ m/s}^2)(3.70 \text{ m})}}{4.42 \text{ N}} = 0.277581543 \text{ s.}$$

REDONDEE

Todos los valores numéricos de este problema se dieron con tres cifras significativas, de modo que presentamos nuestra respuesta como

$$\Delta t = 0.278 \text{ s.}$$

VUELVA A REVISAR

Desacelerar el conjunto huevo/contenedor desde su velocidad final a cero en un intervalo de tiempo de 0.278 s parece razonable. Observando la ecuación (v) vemos que la fuerza ejercida sobre el huevo al tocar tierra está dada por

$$F = \frac{mv_y}{\Delta t}.$$

Para una altura dada, podríamos reducir de varios modos la fuerza ejercida sobre el huevo. Primero, podríamos hacer más grande Δt construyendo algún tipo de zona de amortiguamiento en el contenedor. Segundo, podríamos hacer el conjunto tan ligero como fuera posible. Tercero, podríamos construir el contenedor de tal manera que tuviera una gran área superficial y, por lo tanto, una importante resistencia del aire, lo cual reduciría el valor de v_y en comparación con lo que se tiene en caída libre sin fricción.

PROBLEMA RESUELTO 7.4 Colisión con un auto estacionado**PROBLEMA**

Una camioneta en movimiento choca con un auto estacionado en el carril de paradas de emergencia de una carretera. Durante la colisión, los vehículos se adhieren uno al otro y se deslizan juntos hasta que se detienen. La camioneta en movimiento tiene una masa total de 1 982 kg (incluyendo al conductor), y el auto estacionado tiene una masa total de 966.0 kg. Si los vehículos se deslizan 10.5 m antes de llegar al reposo, ¿qué tan rápido iba la camioneta? El coeficiente de fricción cinética entre los neumáticos y el camino es de 0.350.

SOLUCIÓN**PIENSE**

Esta situación es una colisión totalmente inelástica de una camioneta en movimiento con un auto estacionado. La energía cinética de la combinación camioneta/auto después de la colisión se reduce por la energía disipada por la fricción, mientras se desliza la combinación camioneta/auto. La energía cinética de la combinación se puede relacionar con la rapidez inicial de la camioneta antes de la colisión.

ESBOCE

La figura 7.21 es un croquis de la camioneta en movimiento, m_1 , y el auto estacionado, m_2 . Antes de la colisión, la camioneta se mueve con una rapidez inicial de $v_{i1,x}$. Después de que la camioneta choca con el auto, los dos vehículos se deslizan juntos con una rapidez de $v_{f,x}$.

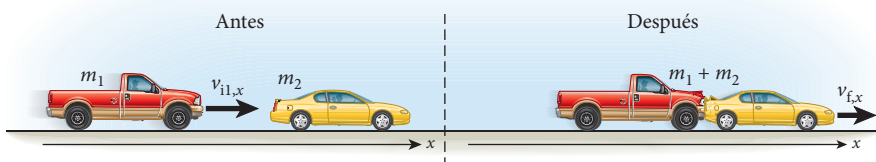


FIGURA 7.21 La colisión entre una camioneta en movimiento y un auto estacionado.

(continúa)

(continuación)

INVESTIGUE

La conservación del momento nos dice que la velocidad de los dos vehículos inmediatamente después de la colisión totalmente inelástica está dada por

$$v_{f,x} = \frac{m_1 v_{i1,x}}{m_1 + m_2}.$$

La energía cinética de la combinación inmediatamente después de la colisión es

$$K = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_{f,x}^2, \quad (\text{i})$$

donde, como es usual, $v_{f,x}$ es la rapidez final.

Terminamos de resolver este problema usando el teorema del trabajo y la energía del capítulo 6, $W_f = \Delta K + \Delta U$. En esta situación, la energía disipada por la fricción, W_f , sobre el sistema camioneta/auto es igual al cambio en energía cinética, ΔK , del sistema camioneta/auto, ya que $\Delta U = 0$. Entonces podemos escribir

$$W_f = \Delta K.$$

El cambio en la energía cinética es igual a cero (ya que la camioneta y el auto finalmente se detienen) menos la energía cinética del sistema camioneta/auto justo después de la colisión. El sistema se desliza una distancia d . La componente x de la fuerza de fricción que desacelera al sistema está dada por $f_x = -\mu_k N$, donde μ_k es el coeficiente de fricción cinética, y N es la magnitud de la fuerza normal. La fuerza normal tiene una magnitud igual al peso del sistema camioneta/auto, o $N = (m_1 + m_2)g$. La energía disipada es igual a la componente x de la fuerza de fricción por la distancia que desliza el sistema a lo largo del eje x , de modo que podemos escribir

$$W_f = f_x d = -\mu_k (m_1 + m_2)gd. \quad (\text{ii})$$

SIMPLIFIQUE

Podemos sustituir la rapidez final en la ecuación (i) para la energía cinética y obtener

$$K = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_{f,x}^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) \left(\frac{m_1 v_{i1,x}}{m_1 + m_2} \right)^2 = \frac{(m_1 v_{i1,x})^2}{2(m_1 + m_2)}.$$

Al combinar esta ecuación con el teorema del trabajo y la energía y la ecuación (ii) para la energía disipada por la fricción, obtenemos

$$\Delta K = W_f = 0 - \frac{(m_1 v_{i1,x})^2}{2(m_1 + m_2)} = -\mu_k (m_1 + m_2)gd.$$

Al despejar $v_{i1,x}$ obtenemos finalmente

$$v_{i1,x} = \frac{(m_1 + m_2)}{m_1} \sqrt{2\mu_k gd}.$$

CALCULE

Sustituyendo los valores numéricos obtenemos

$$v_{i1,x} = \frac{1982 \text{ kg} + 966 \text{ kg}}{1982 \text{ kg}} \sqrt{2(0.350)(9.81 \text{ m/s}^2)(10.5 \text{ m})} = 12.62996079 \text{ m/s}.$$

REDONDEE

Todos los valores numéricos dados en el problema se especificaron con tres cifras significativas. Por lo tanto, presentamos nuestro resultado como

$$v_{i1,x} = 12.6 \text{ m/s}.$$

VUELVA A REVISAR

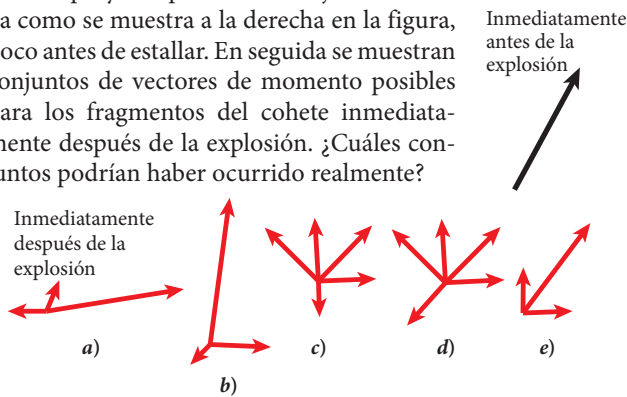
La rapidez inicial de la camioneta era de 12.6 m/s (28.2 mph), que está dentro del rango de rapidez normales para vehículos en carreteras y, por lo tanto, ciertamente dentro de la magnitud que se espera para nuestro resultado.

PREGUNTAS DE OPCIÓN MÚLTIPLE

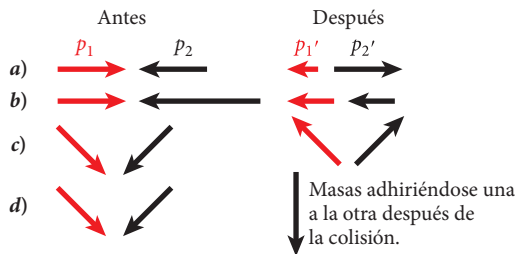
7.1 En muchas películas viejas del Oeste, un bandido es empujado tres metros hacia atrás después de que un sheriff le da un tiro. ¿Cuál afirmación describe mejor lo que le sucedió al sheriff después de que disparó su pistola?

- Quedó en la misma posición.
- Fue empujado hacia atrás uno o dos pasos.
- Fue empujado hacia atrás aproximadamente 3 metros.
- Fue empujado hacia adelante ligeramente.
- Fue empujado hacia arriba.

7.2 Un proyectil pirotécnico viaja hacia arriba como se muestra a la derecha en la figura, poco antes de estallar. En seguida se muestran conjuntos de vectores de momento posibles para los fragmentos del cohete inmediatamente después de la explosión. ¿Cuáles conjuntos podrían haber ocurrido realmente?



7.3 La figura muestra conjuntos de vectores de momento posibles antes y después de una colisión, sin actuar fuerzas externas. ¿Cuáles conjuntos podrían realmente haber ocurrido?



7.4 El valor del momento para un sistema es el mismo en un tiempo posterior que en un tiempo anterior si no hay

- colisiones entre partículas dentro del sistema.
- colisiones inelásticas entre partículas dentro del sistema.
- cambios de momento de las partículas individuales dentro del sistema.
- fuerzas internas que actúan entre las partículas dentro del sistema.
- fuerzas externas que actúan sobre las partículas del sistema.

7.5 Considere estas tres situaciones:

- Una pelota que se mueve a la derecha con una rapidez v se lleva al reposo.
- La misma pelota en reposo se lanza con una rapidez v hacia la izquierda.
- La misma pelota que se mueve a la izquierda con una rapidez v y que acelera hasta $2v$.

¿En cuál(es) situación(es) sufre la pelota el mayor cambio de momento?

- Situación i).
- Situación ii).
- Situación iii).
- Situación i) y ii).
- Las tres situaciones.

7.6 Considere dos carritos, de masas m y $2m$, en reposo sobre un riel de aire sin fricción. Si usted empuja el carrito con menor masa por 35 cm y luego el otro carrito por la misma distancia y con la misma fuerza, ¿cuál carrito sufre el mayor cambio de momento?

- El carrito con masa m tiene el mayor cambio.
- El carrito con masa $2m$ tiene el mayor cambio.
- El cambio de momento es el mismo para ambos carritos.
- Es imposible decirlo con la información dada.

7.7 Considere dos carros de masas m y $2m$ en reposo sobre un riel de aire sin fricción. Si usted empuja el carro con la menor masa durante 3 s y luego el otro carro durante el mismo tiempo y con la misma fuerza, ¿cuál carro sufre el mayor cambio de momento?

- El carro con masa m tiene el mayor cambio.
- El carro con masa $2m$ tiene el mayor cambio.
- El cambio de momento es el mismo para los dos carros.
- Es imposible decirlo con la información dada.

7.8 ¿Cuál de las siguientes afirmaciones sobre choques de autos son verdaderas y cuáles son falsas?

a) La ventaja esencial de seguridad de las zonas de amortiguamiento (partes del frente de un auto diseñadas para recibir la deformación máxima durante un choque frontal) se debe a que absorben la energía cinética y la convierten en deformación y alargando el tiempo efectivo de colisión, reduciendo así la fuerza media experimentada por el conductor.

b) Si el auto 1 tiene una masa m y rapidez v , y el auto 2 tiene una masa de $0.5m$ y rapidez de $1.5v$, entonces ambos autos tienen el mismo momento.

c) Si dos autos idénticos con rapidez idénticas chocan de frente, la magnitud del impulso recibido por cada auto y cada conductor es la misma que si un auto con la misma rapidez hubiera chocado de frente con una pared de concreto.

d) El auto 1 tiene una masa m y el auto 2 tiene una masa $2m$. En una colisión frontal entre estos autos cuando se mueven con rapidez idénticas en sentidos opuestos, el auto 1 experimenta mayor aceleración que el auto 2.

e) El auto 1 tiene masa m y el auto 2 tiene masa $2m$. En un choque frontal entre estos autos cuando se mueven con rapidez idénticas en sentidos opuestos, el auto 1 recibe un impulso de mayor magnitud que el que recibe el auto 2.

7.9 Un proyectil de pirotecnia se lanza hacia cierto ángulo por arriba de un gran plano horizontal. Cuando el proyectil llega al ápice de su vuelo, a una altura h sobre un punto que está a una distancia horizontal D del punto de lanzamiento, el proyectil estalla en dos pedazos iguales. Un pedazo invierte su velocidad y viaja directamente al punto de lanzamiento. ¿A qué distancia del punto de lanzamiento aterriza el otro pedazo?

- D
- $2D$
- $3D$
- $4D$

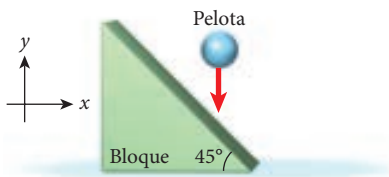
PREGUNTAS

7.10 Una astronauta queda varada durante una caminata espacial al fallar su mochila de propulsión a chorro. Afortunadamente, hay dos objetos cercanos a ella que puede empujar para impulsarse de regreso a la Estación Espacial Internacional (ISS, por sus siglas en inglés). El objeto A tiene la misma masa que la astronauta, y el objeto B es 10 veces más grande. Para lograr un momento dado hacia la EIE empujando uno de los objetos en dirección opuesta a la ISS, ¿cuál objeto debe empujar? Es decir, ¿cuál de ellos necesita menos trabajo para producir el mismo impulso? Inicialmente, la astronauta y los dos objetos están en reposo con respecto a la EIE. (*Pista:* Recuerde que el trabajo es fuerza por distancia y piense cómo se mueven los dos objetos cuando se les empuja.)

7.11 Considere un péndulo balístico (vea la sección 7.6) en el que una bala impacta un bloque de madera. El bloque de madera cuelga del techo y oscila hasta una altura máxima después del impacto. Típicamente, la bala se incrusta en el bloque. Dada la misma bala, la misma rapidez inicial de la bala y el mismo bloque, ¿cambiaría la altura máxima del bloque si la bala no fuese detenida por el bloque sino que lo atravesara? ¿Cambiaría la altura si la bala y su rapidez fueran las mismas pero el bloque fuese de acero y la bala rebotara directamente hacia atrás?

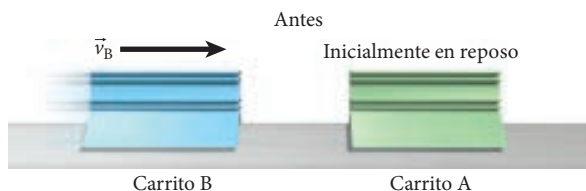
7.12 Un saltador de bungee se preocupa porque su cuerda elástica se podría romper si se sobreestira, y está considerando reemplazar la cuerda por un cable de acero de alta resistencia a la tensión. ¿Es una buena idea?

7.13 Una pelota cae en forma vertical hacia abajo sobre un bloque que tiene forma de cuña y reposa sobre hielo sin fricción. El bloque está inicialmente en reposo (vea la figura). Suponiendo que la colisión es perfectamente elástica, ¿se conserva el momento total del sistema bloque-pelota? ¿La energía cinética total del sistema bloque-pelota es exactamente la misma antes y después de la colisión? Explique.

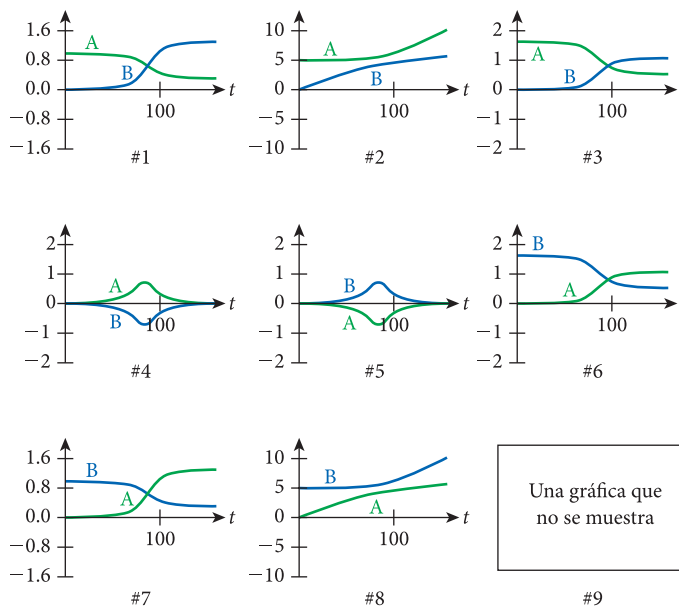


7.14 Para resolver problemas que se refieren a proyectiles que viajen por el aire aplicando la ley de conservación del momento se necesita evaluar el momento del sistema *inmediatamente* antes e *inmediatamente* después de la colisión o la explosión. ¿Por qué?

7.15 Dos carritos se mueven sobre un riel de aire, como se muestra en la figura. En el momento $t = 0$, el carrito B está en el origen, viajando en la dirección positiva x con rapidez v_B , y el carrito A está en reposo, como se muestra en el diagrama siguiente. Los carritos chocan, pero no se adhieren uno al otro.



Cada una de las figuras describe una posible gráfica de un parámetro físico con respecto al tiempo. Cada gráfica tiene dos curvas, una para cada carrito, y cada curva está rotulada con la letra del carrito. Para cada propiedad enumerada de a) a e), especifique la gráfica que puede corresponder a la propiedad; si no se muestra la gráfica de una propiedad, elija la opción 9.



- Las fuerzas que ejercen los carritos.
- Las posiciones de las carretas.
- Las velocidades de los carritos.
- Las aceleraciones de los carritos.
- Los momentos de los carritos.

7.16 Usando principios de momentos y de fuerzas, explique por qué una bolsa de aire reduce el daño en una colisión de automóviles.

7.17 Un cohete funciona expulsando gas (combustible) por sus boquillas a alta velocidad. Sin embargo, si tomamos como sistema el cohete y el combustible, explique cualitativamente por qué un cohete estacionario se puede mover.

7.18 Cuando lo golpean en la cara, un boxeador hará “deslizar el golpe”; es decir, si prevé el golpe, dejará que los músculos de su cuello se aflojen. Su cabeza entonces se mueve hacia atrás fácilmente por el golpe. Desde un punto de vista momento-impulso, explique por qué esto es mucho mejor que tensar los músculos del cuello y resistir el golpe.

7.19 Un vagón abierto de tren se mueve con rapidez v_0 por una vía de ferrocarril horizontal sin fricción, sin locomotora que tire de él. Comienza a llover. La lluvia cae verticalmente y comienza a llenar el vagón. ¿La rapidez del vagón disminuye, aumenta o permanece igual? Explique.

PROBLEMAS

Una • y dos •• indican un nivel creciente de dificultad del problema.

Sección 7.1

7.20 Clasifique los siguientes objetos del más alto al más bajo, en términos de energía.

- Un asteroide con masa de 10^6 kg y rapidez de 500 m/s.
- Un tren de alta rapidez con una masa de 180 000 kg y una rapidez de 300 km/h.
- Un *linebacker* de 120 kg con una rapidez de 10 m/s.
- Una bala de cañón de 10 kg con una rapidez de 120 m/s.
- Un protón con una masa de $6 \cdot 10^{-27}$ kg y una rapidez de $2 \cdot 10^8$ m/s.

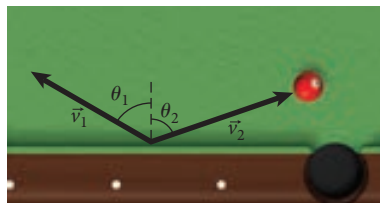
7.21 Un auto con masa de 1 200 kg, que se mueve con una rapidez de 72 mph en una carretera, rebasa a una pequeña SUV con una masa $1\frac{1}{2}$ veces mayor, que se mueve a $2/3$ de la rapidez del auto.

- ¿Cuál es el cociente del momento de la SUV respecto al auto?
- ¿Cuál es la relación de la energía cinética de la SUV respecto a la del auto?

7.22 El electrón-volt, eV, es una unidad de energía ($1 \text{ eV} = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$, $1 \text{ MeV} = 1.602 \cdot 10^{-13} \text{ J}$). Como la unidad de momento es una unidad de energía dividida entre una unidad de velocidad, los físicos nucleares por lo general especifican los momentos de los núcleos en unidades de MeV/ c , donde c es la rapidez de la luz ($c = 2.998 \cdot 10^9 \text{ m/s}$). En las mismas unidades, la masa de un protón ($1.673 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$) se da como $938.3 \text{ MeV}/c^2$. Si un protón se mueve con una rapidez de 17 400 km/s, ¿cuál es su momento en unidades de MeV/ c ?

7.23 Un balón de fútbol con una masa de 442 g rebota del marco de la portería y se desvía hacia arriba a un ángulo de 58.0° respecto a la horizontal. Inmediatamente después de la colisión, la energía cinética del balón es de 49.5 J. ¿Cuáles son las componentes vertical y horizontal del momento del balón inmediatamente después de golpear el marco?

•**7.24** Una bola de billar de masa $m = 0.250$ kg pega en el cojín de una mesa de billar con un ángulo $\theta_1 = 60.0^\circ$ y una rapidez $v_1 = 27.0$ m/s. Rebota en un ángulo $\theta_2 = 71.0^\circ$ y una rapidez $v_2 = 10.0$ m/s.



- ¿Cuál es la magnitud del cambio de momento de la bola de billar?
- ¿En qué dirección señala el vector del cambio de momento?

Sección 7.2

7.25 En la película *Superman*, Luisa Lane cae de un edificio y el superhéroe la atrapa en el aire. Suponiendo que Luisa, con una masa de 50.0 kg, cae con una velocidad terminal de 60.0 m/s, ¿cuánta fuerza ejerce Superman sobre ella si tarda 0.100 s

en desacelerarla hasta detenerla? Si Luisa puede soportar una aceleración máxima de 7 g, ¿cuánto debe tardar Superman como mínimo para detenerla después de que comienza a desacelerarla?

7.26 Uno de los eventos en los Scottish Highland Games es el lanzamiento de gavillas, en el que un saco de 9.09 kg de heno se lanza en forma vertical hacia arriba usando una horca. Durante un lanzamiento, la gavilla se lanza verticalmente hacia arriba con una rapidez inicial de 2.7 m/s.

- ¿Cuál es el impulso que ejerce la gravedad sobre la gavilla durante su movimiento ascendente (desde el lanzamiento hasta la altura máxima)?
- Despreciando la resistencia del aire, ¿cuál es el impulso que ejerce la gravedad sobre la gavilla durante su movimiento descendente (desde la altura máxima hasta que toca el suelo)?
- Usando el impulso total producido por la gravedad, determine cuánto tiempo está en el aire la gavilla.

7.27 Un corredor de 83.0 kg salta hacia adelante hacia la zona de anotación con una rapidez de 6.50 m/s. Un defensa de 115 kg, manteniendo los pies en el suelo, atrapa al corredor y le aplica una fuerza de 900. N en el sentido opuesto durante 0.750 s antes de que los pies del corredor toquen el suelo.

- ¿Cuál es el impulso que imparte el defensa al corredor?
- ¿Qué cambio produce el impulso en el momento del corredor?
- ¿Cuál es el momento del corredor cuando sus pies tocan el suelo?
- Si el defensa sigue aplicando la misma fuerza después de que los pies del corredor han tocado el suelo, ¿es ésta todavía la única fuerza que actúa para cambiar el momento del corredor?

7.28 Un pitcher de béisbol envía una bola rápida que cruza el plato de home a un ángulo de 7.25° respecto a la horizontal, con una rapidez de 88.5 mph. La pelota (con masa de 0.149 kg) es bateada de regreso por arriba de la cabeza del pitcher con un ángulo de 35.53° respecto a la horizontal y una rapidez de 102.7 mph. ¿Cuál es la magnitud del impulso que recibe la pelota?

•**7.29** Aunque no tienen masa, los fotones —que viajan a la velocidad de la luz— tienen momento. Los expertos en viajes espaciales han pensado en aprovechar este hecho para construir *velas solares*, formadas por grandes láminas de material que funcionarían reflejando los fotones. Como el momento del fotón se invertiría, la vela solar ejercería un impulso sobre él, y —de acuerdo con la tercera ley de Newton— el fotón también ejercería un impulso sobre la vela, dando una fuerza. En el espacio cercano a la Tierra, inciden alrededor de $3.84 \cdot 10^{21}$ fotones por metro cuadrado por segundo. En promedio, el momento de cada fotón es de $1.30 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$. Para una nave espacial de 1 000. kg que parte del reposo y fija a una vela cuadrada de 20.0 m de lado, ¿con qué rapidez podría la nave estarse moviendo después de 1 hora? ¿Después de una semana? ¿Después de un mes? ¿Cuánto tardaría la nave en adquirir una rapidez de 8 000. m/s, aproximadamente la rapidez del transbordador espacial en órbita?

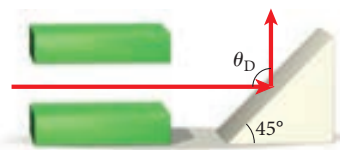
•7.30 En una fuerte tormenta cae 1.00 cm de lluvia sobre un techo plano horizontal en 30.0 min. Si el área del techo es de $100. \text{ m}^2$ y la velocidad terminal de la lluvia es de 5.00 m/s, ¿cuál es la fuerza media que la lluvia ejerce sobre el techo durante la tormenta?

•7.31 La NASA se ha interesado cada vez más en los asteroides cercanos a la Tierra. Estos objetos, que se han popularizado en recientes y exitosas películas, pueden pasar muy cerca de la Tierra, a escala cósmica, a veces tan cerca como 1 millón de millas. La mayoría son pequeños —menos de 500 m de diámetro— y, aunque un impacto con uno de los más pequeños podría ser peligroso, los expertos creen que puede no ser catastrófico para la humanidad. Un posible sistema de defensa contra asteroides cercanos a la Tierra se basa en impactar un asteroide que viene con un cohete para desviar su curso. Suponga que un asteroide relativamente pequeño con una masa de $2.10 \cdot 10^{10} \text{ kg}$ está viajando hacia la Tierra con una modesta rapidez de 12.0 km/s.

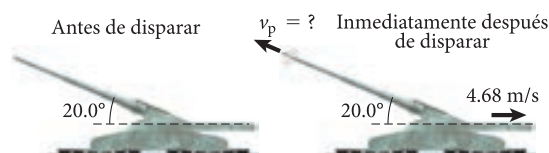
a) ¿Con qué rapidez tendría que moverse un cohete grande, con una masa de $8.00 \cdot 10^4 \text{ kg}$ cuando impacte de frente el asteroide, con objeto de detenerlo?

b) Una alternativa sería desviar el asteroide de su ruta en una pequeña cantidad para evitar que impacte la Tierra. ¿Con qué rapidez tendría que viajar el cohete del inciso a) al momento del impacto para desviar la ruta del asteroide en 1° ? En este caso, suponga que el cohete impacta el asteroide mientras viaja a lo largo de una línea perpendicular a la trayectoria del asteroide.

•7.32 En la electrónica de nanoescala, los electrones se pueden tratar como bolas de billar. La figura muestra un sencillo dispositivo que en la actualidad está en estudio, en el que un electrón choca elásticamente con una pared rígida (un transistor balístico de electrones). Las barras verdes representan electrodos que pueden aplicar una fuerza vertical de $8.0 \cdot 10^{-13} \text{ N}$ a los electrones. Si un electrón inicialmente tiene componentes de velocidad $v_x = 1.00 \cdot 10^5 \text{ m/s}$ y $v_y = 0$ y la pared está a 45° , el ángulo de deflexión θ_D es de 90° . ¿Por cuánto tiempo necesita aplicarse la fuerza vertical de los electrodos para obtener un ángulo de deflexión de 120° ?

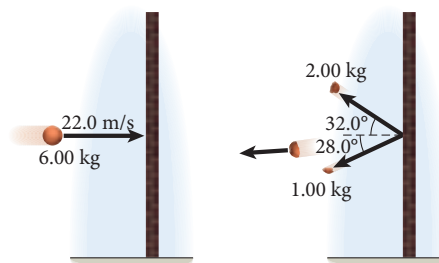


•7.33 El cañón ferroviario más grande que se ha construido se llamaba Gustav, y se usó de manera breve en la Segunda Guerra Mundial. El cañón, la montura y el vagón de tren tenían una masa total de $1.22 \cdot 10^6 \text{ kg}$. El cañón disparaba un proyectil con un diámetro de 80.0 cm y pesaba 7 502 kg. En el disparo que se ilustra en la figura, el cañón se ha elevado 20.0° sobre la horizontal. Si el cañón ferroviario estaba en reposo antes de disparar y se movía a la derecha con una rapidez de 4.68 m/s inmediatamente después de disparar, ¿cuál era la velocidad del proyectil al salir del cañón (velocidad a boca de cañón)? ¿Qué



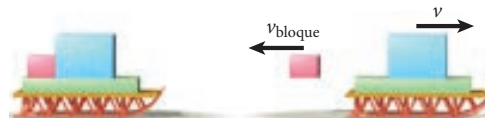
distancia viajaría el proyectil si se desprecia la resistencia del aire? Suponga que los ejes de las ruedas no tienen fricción.

••7.34 Una bola de arcilla de 6.00 kg se lanza directamente contra una pared perpendicular de ladrillos con una velocidad de 22.0 m/s y se quiebra en tres trozos que vuelan hacia atrás, como se muestra en la figura. La pared ejerce una fuerza sobre la bola de 2 640 N durante 1.00 s. Un trozo con masa de 2.00 kg viaja hacia atrás a una velocidad de 10.0 m/s y con un ángulo de 32.0° sobre la horizontal. Un segundo trozo con masa de 1.00 kg viaja a una velocidad de 8.00 m/s y un ángulo de 28.0° bajo la horizontal. ¿Cuál es la velocidad del tercer trozo?



Sección 7.3

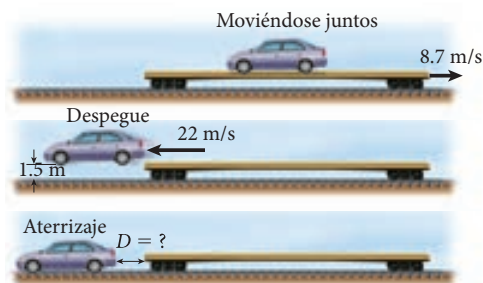
7.35 Un trineo que está inicialmente en reposo tiene una masa de 52.0 kg, incluyendo todo su contenido. A un bloque con una masa de 13.5 kg se expulsa a la izquierda con una rapidez de 13.6 m/s. ¿Cuál es la rapidez del trineo y el resto de su contenido?



7.36 Usted está varado a la mitad de una laguna congelada y sólo lleva su libro de física. Usted quiere poner en acción la física y lanza el libro de 5.00 kg. Si su masa es de 62.0 kg y lanza el libro a 13.0 m/s, ¿con qué rapidez se desliza usted sobre el hielo? (Ignore la fricción.)

7.37 Unos astronautas están jugando béisbol en la estación espacial internacional. Uno de ellos, con una masa de 50.0 kg, inicialmente en reposo, batea una pelota de béisbol. La pelota inicialmente se movía hacia el astronauta a 35.0 m/s, y después de ser bateada, rebota en la misma dirección con una rapidez de 45.0 m/s. La masa de una pelota de béisbol es de 0.14 kg. ¿Cuál es la velocidad de retroceso del astronauta?

•7.38 Un automóvil con una masa de 1 450 kg está estacionado sobre un vagón de plataforma en movimiento; esta plata-

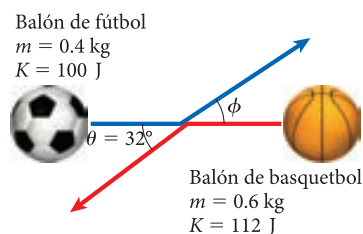


forma está a 1.5 m arriba del suelo. El vagón tiene una masa de 38 500 kg y se mueve a la derecha con una rapidez constante de 8.7 m/s sobre un riel sin fricción. El automóvil entonces acelera hacia la izquierda, saliendo del vagón con una rapidez de 22 m/s con respecto al suelo. Cuando el automóvil aterriza, ¿cuál es la distancia D entre éste y el extremo izquierdo del vagón de ferrocarril? Vea la figura.

•7.39 Tres personas flotan sobre una balsa circular de 120. kg en medio de una laguna en un día caluroso de verano. Deciden nadar, y todos saltan de la balsa al mismo tiempo y desde lugares uniformemente espaciados alrededor del perímetro de la balsa. Una persona, con una masa de 62.0 kg, salta de la balsa con una rapidez de 12.0 m/s. La segunda persona, con masa de 73.0 kg, salta con una rapidez de 8.00 m/s. La tercera persona, con masa de 55.0 kg, salta con una rapidez de 11.0 m/s. ¿Con qué rapidez se desvía la balsa de su posición original?

•7.40 Se dispara un misil verticalmente hacia arriba. En el punto más alto de su trayectoria se rompe en tres trozos de igual masa, los cuales se mueven de manera horizontal alejándose del punto de explosión. Un trozo viaja en una dirección horizontal de 28.0° al este del norte, con una rapidez de 30.0 m/s. El segundo trozo viaja en dirección horizontal de 12.0° de sur a oeste, con una rapidez de 8.0 m/s. ¿Cuál es la velocidad del trozo remanente? Dé tanto la rapidez como el ángulo.

••7.41 El *dodgeball* que fue en un tiempo deporte favorito del campo de juego, se está volviendo cada vez más popular entre adultos de todas las edades que quieren mantenerse en forma y que, incluso, forman ligas organizadas. El *gutball* es una variante menos popular del *dodgeball*, en el que se permite a los jugadores traer su propio equipo (típicamente sin normas) y lanzar tiros tramposos a la cara. En un torneo de *gutball* contra personas con la mitad de su edad, un profesor de física lanzó su balón de fútbol de 0.400 kg a un niño que lanzaba un balón de basquetbol de 0.600 kg. Los balones chocaron en el aire (vea la figura), y el de basquetbol salió volando con una energía de 95.0 J en un ángulo de 32.0° en relación con su trayectoria inicial. Antes de la colisión, la energía del balón de fútbol era de 100. J, y la energía del balón de basquetbol era de 112 J. ¿Con qué ángulo y rapidez se alejó de la colisión el balón de fútbol?

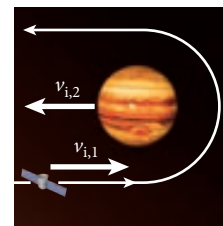


Sección 7.4

7.42 Dos coches “chocadores” de feria que se mueven en una superficie sin fricción chocan elásticamente. El primer coche se mueve a la derecha con una rapidez de 20.4 m/s y golpea por atrás al segundo coche que también se está moviendo a la derecha, pero con rapidez de 9.00 m/s. ¿Cuál es la rapidez del primer coche después de la colisión? La masa del primer coche es de 188 kg, y la masa del segundo coche es de 143 kg. Suponga que la colisión tiene lugar en una dimensión.

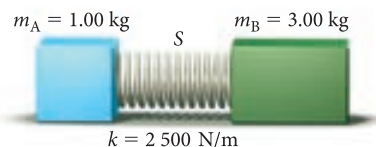
7.43 Un satélite con una masa de 274 kg se acerca a un planeta grande con una rapidez $v_{i,1} = 13.5$ km/s. El planeta se mue-

ve con una rapidez $v_{i,2} = 10.5$ km/s en sentido opuesto. El satélite orbita parcialmente alrededor del planeta y luego se aleja en dirección opuesta a su dirección original (vea la figura). Si esta interacción se aproxima a una colisión elástica en una dimensión, ¿cuál es la rapidez del satélite después de la colisión? Esto que se conoce como *efecto slingshot* se usa con frecuencia para acelerar sondas espaciales para viajes a partes distantes del Sistema Solar (vea el capítulo 12).



•7.44 Usted ve un par de zapatos atados entre sí y colgando de una línea telefónica. Usted lanza una piedra de 0.25 kg a uno de los zapatos (masa = 0.37 kg), y choca elásticamente con el zapato con una velocidad de 2.3 m/s en dirección horizontal. ¿A qué altura sube el zapato?

•7.45 El bloque A y el bloque B se fuerzan uno hacia el otro, comprimiendo entre ellos un resorte (con una constante de resorte $k = 2\,500$ N/m) hasta 3.00 cm desde su longitud de equilibrio. El resorte, que tiene masa despreciable, no está fijado a ninguno de los bloques y cae a la superficie después de expandirse. ¿Cuáles son las rapidezces del bloque A y del bloque B en este momento? (Suponga que la fricción entre los bloques y la superficie de apoyo es despreciable.)



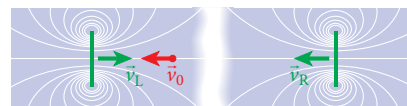
•7.46 Una partícula alfa (masa = 4.00 u) tiene una colisión frontal elástica con un núcleo (masa = 166 u) que está inicialmente en reposo. ¿Qué porcentaje de la energía cinética de la partícula alfa se transfiere al núcleo en la colisión?

•7.47 Usted observa que un carro de supermercado que está a 20.0 m se mueve con una velocidad de 0.70 m/s hacia usted. Usted lanza otro carro con una velocidad de 1.1 m/s directamente hacia el otro carro con objeto de interceptarlo. Cuando los dos carros chocan de manera elástica, permanecen en contacto por aproximadamente 0.2 s. Grafique la posición, la velocidad y la fuerza sobre ambos carritos como función del tiempo.

•7.48 Una bola de 0.280 kg tiene una colisión elástica frontal con una segunda bola que inicialmente está en reposo. La segunda bola se aleja con la mitad de la rapidez original de la primera bola.

- a) ¿Cuál es la masa de la segunda bola?
- b) ¿Qué fracción de la energía cinética inicial ($\Delta K/K$) se transfiere a la segunda bola?

••7.49 Los rayos cósmicos del espacio que llegan a la Tierra contienen algunas partículas con energías miles de millones de veces más altas que cualquiera que se pueda producir en el acelerador más grande. Un modelo que se propuso para de-



tecar estas partículas se muestra en forma esquemática en la figura. Dos fuentes muy poderosas de campos magnéticos se mueven una hacia la otra y reflejan repetidamente las partículas cargadas atrapadas entre ellas. (Estas fuentes de campos magnéticos se pueden describir de modo aproximado como paredes infinitamente pesadas de las cuales las partículas cargadas se reflejan elásticamente.) Las partículas de alta energía que impactan a la Tierra habrían sido reflejadas un gran número de veces para alcanzar las energías observadas. Un caso análogo con sólo unas pocas reflexiones demuestra este efecto. Suponga que una partícula tiene una velocidad inicial de -2.21 km/s (moviéndose en la dirección negativa x , a la izquierda). La pared izquierda se mueve a la derecha con una velocidad de 1.01 km/s, y la pared derecha se mueve a la izquierda con una velocidad de 2.51 km/s. ¿Cuál es la velocidad de la partícula después de seis colisiones con la pared izquierda y cinco colisiones con la pared derecha?

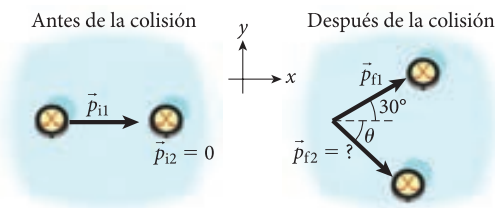
••7.50 Aquí tiene una demostración muy popular en clase que puede realizar en su casa. Coloque una pelota de golf encima de un balón de basquetbol, y deje caer el par desde el reposo de modo que caigan al suelo. (Por razones que deben quedar claras una vez que resuelva este problema, no intente hacer este experimento en el interior de su casa, sino afuera.) Con un poco de práctica, puede lograr la situación aquí descrita: la pelota de golf permanece encima del balón de basquetbol hasta que este último toca el suelo. La masa de la pelota de golf es de 0.0459 kg, y la del balón es de 0.619 kg.



- Si la pelota y el balón se sueltan desde una altura donde la parte baja del balón está a 0.701 m por arriba del suelo, ¿cuál es el valor absoluto del momento del balón inmediatamente antes de que toque el suelo?
- ¿Cuál es el valor absoluto del momento de la pelota de golf en ese instante?
- Trate la colisión del balón con el piso y la colisión de la pelota de golf con el balón como colisiones totalmente elásticas en una dimensión. ¿Cuál es la magnitud absoluta del momento de la pelota de golf después de estas colisiones?
- Ahora viene la pregunta interesante: ¿A qué altura, medida desde el suelo, rebotará la pelota de golf después de su colisión con el balón?

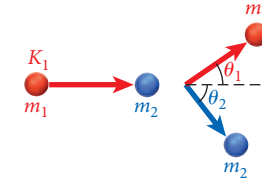
Sección 7.5

7.51 Un disco de hockey con masa de 0.250 kg viajando a lo largo de la línea azul (una línea recta azul sobre el hielo en una cancha de hockey) a 1.50 m/s choca con otro disco estacionario con la misma masa. El primer disco sale de la colisión en



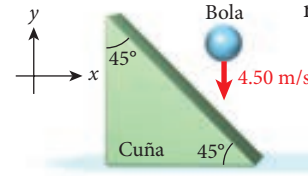
una dirección que está a 30.0° de la línea azul con una rapidez de 0.750 m/s (vea la figura). ¿Cuál es la dirección y la magnitud de la velocidad del segundo disco después de la colisión? ¿Es una colisión elástica?

•7.52 Una bola con masa $m = 0.210$ kg y energía cinética $K_1 = 2.97$ J choca de manera elástica con una segunda bola de la misma masa que está inicialmente en reposo. Después de la colisión, la primera bola se aleja con un ángulo $\theta_1 = 30.6^\circ$ respecto a la horizontal, como se muestra en la figura. ¿Cuál es la energía cinética de la primera bola después de la colisión?

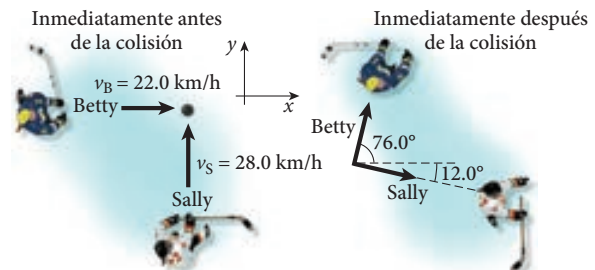


•7.53 Cuando usted abre la puerta al entrar a un cuarto con aire acondicionado, usted mezcla gas caliente con gas frío. Decir que un gas está caliente o frío realmente se refiere a su energía media; es decir, las moléculas de aire caliente tienen una energía cinética más alta que las del gas frío. La diferencia en energía cinética en los gases mezclados disminuye con el tiempo como resultado de las colisiones elásticas entre las moléculas de gas, que redistribuyen la energía. Considere una colisión bidimensional entre dos moléculas de nitrógeno (N_2 , peso molecular = 28.0 g/mol). Una molécula se mueve a 30.0° respecto a la horizontal con una velocidad de 672 m/s. Esta molécula choca con una segunda molécula que se mueve en la dirección horizontal negativa a 246 m/s. ¿Cuáles son las velocidades finales de las moléculas si la que tiene inicialmente más energía se mueve en la dirección vertical después de la colisión?

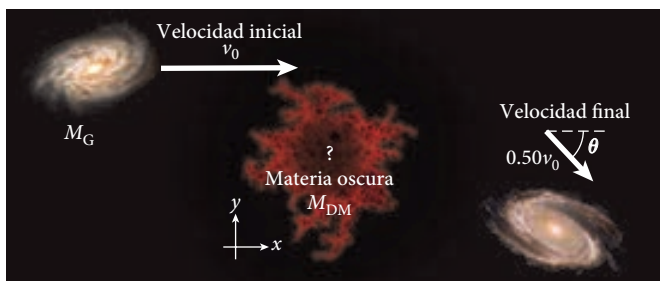
•7.54 Una bola cae verticalmente sobre una cuña que está sobre hielo sin fricción. La bola tiene una masa de 3.00 kg y la cuña tiene una masa de 5.00 kg. La bola se mueve con una rapidez de 4.50 m/s cuando impacta la cuña, que al inicio está en reposo (vea la figura). Suponiendo que la colisión es instantánea y perfectamente elástica, ¿cuáles son las velocidades de la bola y de la cuña después de la colisión?



••7.55 Betty Bodycheck ($m_B = 55.0$ kg, $v_B = 22.0$ km/h en la dirección x positiva) y Sally Slasher ($m_S = 45.0$ kg, $v_S = 28.0$ km/h en la dirección y positiva) están corriendo para llegar a un disco de hockey. Inmediatamente después de la colisión, Betty se mueve en una dirección que está a 76.0° en sentido antihorario de su dirección original, y Sally se dirige de regreso y a su derecha en una dirección que está a 12.0° del eje x . ¿Cuáles son las energías cinéticas finales de Betty y de Sally? ¿La colisión es elástica?



••7.56 Las teorías de cosmología y las mediciones actuales sugieren que sólo alrededor de 4% de la masa total del universo está compuesta de materia ordinaria. Alrededor de 22% de la masa está compuesta de *materia oscura*, que no emite ni refleja luz y sólo se puede observar por su interacción gravitacional con su entorno (vea el capítulo 12). Suponga que una galaxia con masa M_G se mueve en línea recta en la dirección x . Después de que interactúa con un cuerpo invisible de materia oscura con masa M_{DM} , la galaxia se mueve con 50% de su rapidez inicial en línea recta, en una dirección que está rotada en un ángulo θ de su velocidad inicial. Suponga que las velocidades inicial y final se dan para las posiciones en las que la galaxia está muy lejos del cuerpo de materia oscura, que la atracción gravitacional se puede despreciar en esas posiciones y que la materia oscura está inicialmente en reposo. Determine M_{DM} en términos de M_G , v_0 y θ .



Sección 7.6

7.57 Un vagón de ferrocarril de 1 439 kg que viaja con una rapidez de 12 m/s choca con un vagón idéntico en reposo. Si los carros se enganchan como resultado de la colisión, ¿cuál es su rapidez común (en m/s) después?

7.58 Los murciélagos son muy aficionados a atrapar insectos en el aire. Si un murciélago de 50.0 g que vuela en una dirección a 8.00 m/s atrapa un insecto de 5.00 g que vuela en la dirección opuesta a 6.00 m/s, ¿cuál es la rapidez del murciélago inmediatamente después de atrapar el insecto?

•7.59 Un auto compacto con una masa de 1 000. kg viaja con una rapidez de 33.0 m/s y choca de frente con un auto grande con una masa de 3 000. kg, que viaja en sentido opuesto con una rapidez de 30.0 m/s. Los dos autos se adhieren uno a otro. La duración de la colisión es de 100. ms. ¿Qué aceleración (en g) experimentan los ocupantes del auto pequeño? ¿Qué aceleración (en g) experimentan los ocupantes del auto grande?

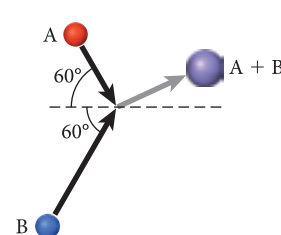
•7.60 Para determinar la velocidad a boca de cañón de una bala disparada de un rifle, usted dispara la bala de 2.00 g a un bloque de madera de 2.00 kg. El bloque está suspendido del techo por alambres y está inicialmente en reposo. Después de que la bala se incrusta en el bloque, el sistema oscila hasta una altura máxima de 0.500 m arriba de su posición inicial. ¿Cuál es la velocidad de la bala al salir del cañón del rifle?

•7.61 Un Cadillac de 2 000. kg y un Volkswagen de 1 000. kg se encuentran en una intersección. El semáforo se acaba de poner en verde, y el Cadillac, que se dirige al norte, avanza por la intersección. El Volkswagen, que viaja al este, no se detiene. El Volkswagen choca con la defensa delantera izquierda del Cadillac; luego los dos autos se adhieren uno al otro y se desli-

zan hasta detenerse. El oficial Tom, en respuesta al accidente, ve que las marcas de deslizamiento se dirigen 55.0° de norte a este desde el punto del impacto. El conductor del Cadillac, que es muy cuidadoso con el velocímetro, declara que iba viajando a 30.0 m/s cuando ocurrió el accidente. ¿A qué velocidad iba el Volkswagen inmediatamente antes del impacto?

•7.62 Dos bolas de masas iguales chocan y se adhieren una con otra, como se muestra en la figura. La velocidad inicial de la bola B es el doble de la de la bola A.

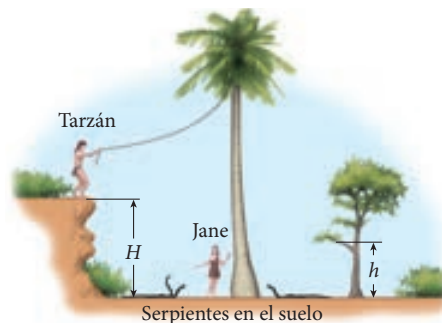
a) Calcule el ángulo sobre la horizontal del movimiento de la masa A + B después de la colisión.



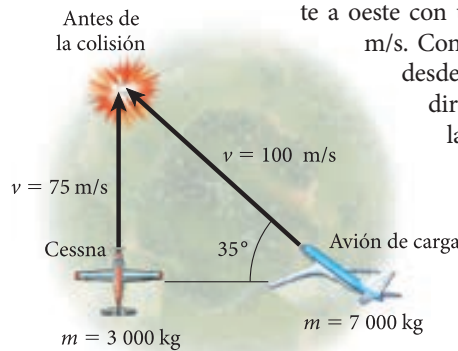
b) ¿Cuál es la relación de la velocidad final de la masa A + B con respecto a la velocidad inicial de la bola A, v_f/v_A ?

c) ¿Cuál es la relación de la energía final del sistema con respecto a la energía inicial del sistema, E_f/E_i ? ¿La colisión es elástica o inelástica?

••7.63 Tarzán se lanza con una liana, desde un peñasco, a rescatar a Jane, que está de pie en el suelo, rodeada de serpientes. Su plan es saltar del peñasco, asir a Jane en el punto más bajo de su oscilación y seguir los dos hasta un punto seguro de un árbol cercano (vea la figura). La masa de Tarzán es de 80.0 kg, la de Jane es de 40.0; la altura de la rama más baja del árbol meta es de 10.0 m, y Tarzán está inicialmente parado en un peñasco con una altura de 20.0 m. La longitud de la liana es de 30.0 m. ¿Con qué rapidez debe Tarzán lanzarse del peñasco para que él y Jane puedan llegar con éxito a la rama del árbol?

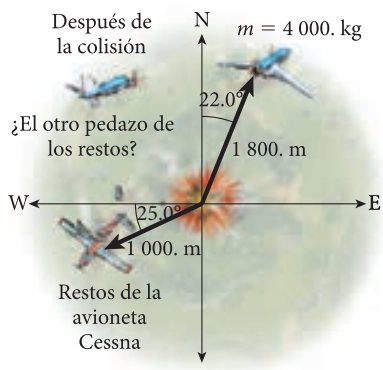


••7.64 Una avioneta Cessna de 3 000. kg que volaba al norte a 75.0 m/s a una altitud de 1 600. m sobre las selvas de Brasil chocó con un avión de carga de 7 000. kg que volaba a 35.0° de norte a oeste con una rapidez de 100. m/s. Con mediciones hechas desde un punto en tierra directamente debajo de la colisión, los restos del Cessna se encontraron 1 000. m a la redonda en un ángulo de 25.0° de sur a oeste, como se muestra en la figura. El avión de



El avión de

carga se rompió en dos pedazos. Los rescatistas ubicaron un trozo de 4 000. kg a 1 800. m del mismo punto en un ángulo de 22.0° al este del norte.



¿Dónde deben buscar el otro pedazo del avión de carga? Dé una distancia y una dirección partiendo del punto directamente debajo de la colisión.

Sección 7.7

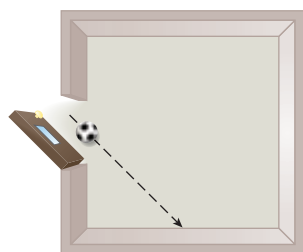
7.65 Los objetos que aparecen en la tabla se sueltan desde una altura de 85 cm. Se ha registrado la altura a la que pueden llegar después de rebotar. Determine el coeficiente de restitución para cada objeto

Objeto	H (cm)	h_1 (cm)	ϵ
Pelota de golf de largo alcance	85.0	62.6	
Pelota de tenis	85.0	43.1	
Bola de billar	85.0	54.9	
Pelota de mano	85.0	48.1	
Bola de madera	85.0	30.9	
Bola para rodamiento de acero	85.0	30.3	
Canica de vidrio	85.0	36.8	
Pelota de bandas de goma	85.0	58.3	
Pelota hueca de plástico duro	85.0	40.2	

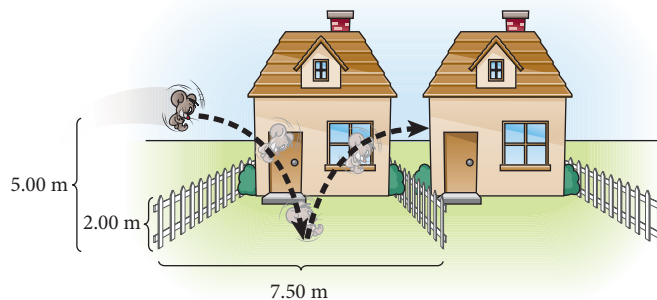
7.66 Una pelota de golf se suelta desde el reposo, desde una altura de 0.811 m arriba del suelo, y tiene una colisión con un coeficiente de restitución de 0.601. ¿Cuál es la máxima altura que alcanza esta pelota al rebotar hacia arriba después de esta colisión?

•7.67 Una bola de billar con masa de 0.162 kg tiene una rapidez de 1.91 m/s y choca con la banda de la mesa de billar a un ángulo de 35.9°. Para esta colisión, el coeficiente de restitución es de 0.841. ¿Cuál es el ángulo relativo a la banda (en grados) en el que se aleja la bola después de la colisión?

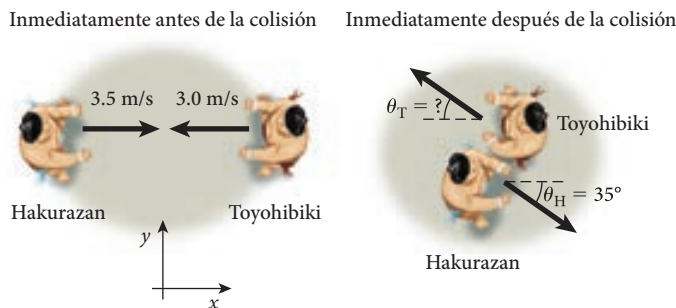
•7.68 Un balón de fútbol rueda afuera de un gimnasio saliendo por la puerta, al cuarto vecino. El cuarto adyacente mide 6.00 m por 6.00 m, con una puerta de 2.00 m de ancho, ubicada en el centro de la pared. El balón pega en el centro de una pared lateral a 45.0°. Si el coeficiente de restitución para el balón es de 0.700, ¿rebota el balón para regresar afuera del cuarto? (Observe que el balón rueda sin deslizarse, de modo que no se cede energía al piso.)



•7.69 En una caricatura de *Tom y Jerry*®, Tom el gato está persiguiendo a Jerry el ratón en un patio. La casa está en un barrio en el que todas las casas son exactamente iguales, cada una con un patio del mismo tamaño y con la misma cerca de 2.00 m alrededor de cada patio. En la caricatura, Tom enrolla a Jerry en forma de pelota y lo lanza sobre la cerca. Jerry se mueve como un proyectil, rebota en el centro del siguiente patio y continúa volando hacia la siguiente cerca, que está a una distancia de 7.50 m. Si la altura original de Jerry arriba del suelo, cuando fue lanzado, es de 5.00 m, su alcance original es de 15 m y el coeficiente de restitución es de 0.80, ¿llega a pasar sobre la siguiente cerca?



••7.70 Dos luchadores de sumo tienen una colisión inelástica. El primer luchador, Hakurazan, tiene una masa de 135 kg y se mueve hacia adelante en la dirección x positiva con una rapidez de 3.5 m/s. El segundo luchador, Toyohibiki, tiene una masa de 173 kg y se mueve en línea recta hacia Hakurazan con una rapidez de 3.0 m/s. Inmediatamente después de la colisión, Hakurazan se desvía a su derecha en 35° (vea la figura). En la colisión se pierde 10% de la energía cinética inicial del luchador. ¿Cuál es el ángulo en el que Toyohibiki se mueve inmediatamente después de la colisión?



••7.71 Un disco de hockey ($m = 170$ g y $v_0 = 2.00$ m/s) se desliza sin fricción sobre el hielo y choca con la barrera de la cancha a 30.0° respecto a la normal. El disco rebota de la barrera con un ángulo de 40.0° respecto a la normal. ¿Cuál es el coeficiente de restitución para el disco? ¿Cuál es el coeficiente de la energía cinética final con respecto a la energía cinética inicial?

Problemas adicionales

7.72 ¿Con qué rapidez tendría que estar viajando una mosca de 5.00 g para desacelerar en 5.00 mph un auto de 1 900. kg que viaja a 55.0 mph, si la mosca chocara con el auto en una colisión frontal totalmente inelástica?

7.73 Intentando anotar un touchdown, un tailback de 85 kg salta por encima de sus bloqueadores, alcanzando una rapidez horizontal de 8.9 m/s. Choca en el aire un poco antes de la línea de gol, con un linebacker de 110 kg que va en dirección opuesta con una rapidez de 8.0 m/s. El linebacker agarra al tailback.

- a) ¿Cuál es la rapidez del tailback y el linebacker unidos después de la colisión?
 b) ¿Anotará touchdown el tailback (suponiendo que ningún otro jugador tenga oportunidad de participar)?

7.74 El núcleo del torio-238 radiactivo, con una masa de alrededor de $3.8 \cdot 10^{-25}$ kg, se sabe que se desintegra emitiendo una partícula alfa con una masa de alrededor de $6.68 \cdot 10^{-27}$ kg. Si la partícula alfa se emite con una rapidez de $1.8 \cdot 10^7$ m/s, ¿cuál es la rapidez de retroceso del núcleo residual (que es el núcleo de un átomo de radón)?

7.75 Un astronauta de 60.0 kg dentro de una cápsula espacial de 7.00 m con masa de 500. kg está flotando sin gravedad en un extremo de la cápsula. Se impulsa con los pies contra la pared a una velocidad de 3.50 m/s hacia el otro extremo de la cápsula. ¿Cuánto tarda el astronauta en llegar a la pared opuesta?

7.76 La espectroscopia de Moessbauer es una técnica para estudiar las moléculas observando un átomo determinado dentro de ellas. Por ejemplo, las mediciones Moessbauer del hierro (Fe) dentro de la hemoglobina, la molécula encargada de transportar el oxígeno en la sangre, se pueden usar para determinar la flexibilidad de la hemoglobina. La técnica comienza con rayos X emitidos por los núcleos de átomos de ^{57}Co . Estos rayos X se usan luego para estudiar el Fe en la hemoglobina. La energía y el momento de cada rayo X son 14 keV y $14 \text{ keV}/c$ (vea el ejemplo 7.5 para una explicación de las unidades). Un núcleo de ^{57}Co retrocede al emitir un rayo X. Un solo núcleo de ^{57}Co tiene una masa de $9.52 \cdot 10^{-26}$ kg. ¿Cuáles son el momento y la energía cinética finales del núcleo de ^{57}Co ? ¿Cómo comparamos lo anterior con los valores para los rayos X?

7.77 Suponga que el núcleo de un átomo de radón, ^{222}Rn , tiene una masa de $3.68 \cdot 10^{-25}$ kg. Este núcleo radiactivo se desintegra emitiendo una partícula alfa con una energía de $8.79 \cdot 10^{-13}$ J. La masa de una partícula alfa es de $6.65 \cdot 10^{-27}$ g. Suponiendo que el núcleo de radón estaba inicialmente en reposo, ¿cuál es la velocidad del núcleo que queda después de la desintegración?

7.78 Una patinadora de tabla con masa de 35.0 kg está patinando en su patineta de 3.50 kg con una rapidez de 5.00 m/s. Salta hacia atrás de su patineta, enviando ésta hacia adelante con una rapidez de 8.50 m/s. ¿A qué velocidad se está moviendo la patinadora cuando sus pies tocan la tierra?

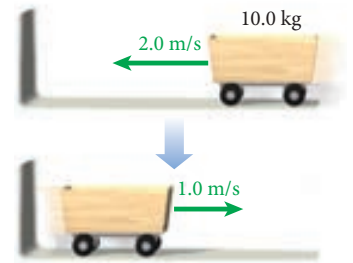
7.79 Durante un festival de patinaje en hielo, *Robin Hood on Ice*, un arquero de 50 kg está quieto de pie sobre patines de hielo. Suponga que la fricción entre los patines y el hielo es despreciable. El arquero dispara una flecha de 0.100 kg horizontalmente con una rapidez de 95.0 m/s. ¿A qué velocidad retrocede el arquero?

7.80 Los astronautas juegan atrapadas en la Estación Espacial Internacional. Uno de ellos, de 55.0 kg, inicialmente en reposo, lanza una pelota de béisbol con masa de 0.145 kg con una rapidez de 31.3 m/s. ¿Con qué rapidez retrocede el astronauta?

7.81 Una saltadora de bungee con masa de 55.0 kg alcanza una rapidez de 13.3 m/s moviéndose directamente hacia abajo cuando la cuerda elástica amarrada a sus pies comienza a tirar de ella de regreso hacia arriba. Después de 0.0250 s, la saltadora se dirige hacia arriba con una rapidez de 10.5 m/s. ¿Cuál es la fuerza media que la cuerda de bungee ejerce sobre la saltadora? ¿Cuál es el número promedio de g que experimenta la saltadora durante este cambio de dirección?

7.82 Una bola de arcilla de 3.0 kg con una rapidez de 21 m/s se lanza contra una pared y se pega a ella. ¿Cuál es la magnitud del impulso ejercido sobre la bola?

7.83 La figura muestra escenas de antes y después de una carreta chocando con una pared y rebotando. ¿Cuál es el cambio de momento de la carreta? (Suponga que la derecha es la dirección positiva en el sistema de coordenadas.)



7.84 La campeona de tenis Venus Williams es capaz de servir o lanzar una pelota a 127 mph.

a) Suponiendo que su raqueta está en contacto con la pelota de 57.0 g durante 0.250 s, ¿cuál es la fuerza media que ejerce la raqueta sobre la pelota?

b) ¿Qué fuerza media tendría que ejercer la raqueta de una oponente para devolver el servicio de Williams con una rapidez de 50.0 mph, suponiendo que la raqueta de la oponente también está en contacto con la pelota durante 0.250 s?

7.85 Tres pájaros vuelan en formación compacta. El primero, con una masa de 100. g, vuela a 35.0° al este del norte con una rapidez de 8.00 m/s. El segundo pájaro, con una masa de 123 g, vuela a 2.0° de este al norte con una rapidez de 11.0 m/s. El tercer pájaro, con una masa de 112 g, vuela a 22.0° de oeste al norte con una rapidez de 10.0 m/s. ¿Cuál es el vector de momento de la formación? ¿Cuál sería la rapidez y la dirección de un pájaro de 115 g con el mismo momento?

7.86 Una pelota de golf con masa de 45.0 g que se mueve con una rapidez de 120. km/h choca de frente con un tren francés de alta velocidad TGV con masa de $3.80 \cdot 10^3$ kg que viaja a 300. km/h. Suponiendo que la colisión es elástica, ¿cuál es la rapidez de la pelota de golf después de la colisión? (¡No trate de efectuar este experimento!)

7.87 En el juego de "bocce", el objetivo es colocar sus bolas (cada una con masa $M = 1.00$ kg) tan cerca como sea posible de la pequeña pelota blanca (la *pallina*, de masa $m = 0.045$ kg). Su primer lanzamiento posicionó su bola a 2.00 m a la izquierda de la pallina. Si su siguiente lanzamiento tiene una rapidez $v = 1.00$ m/s y el coeficiente de fricción cinética es $\mu_k = 0.20$, ¿cuáles son las distancias finales de sus dos bolas a la pallina en cada uno de los siguientes casos?

a) Usted lanza su bola desde la izquierda, golpeando su primera bola.

b) Usted lanza su bola desde la derecha, impactando la pallina. (Pista: Use el hecho de que $m \ll M$.)

•7.88 Un chico aburrido dispara un perdigón blando con una pistola de aire a un trozo de queso con masa de 0.25 kg que está sobre un bloque de hielo para mantenerlo fresco para los invitados a la comida. En un tiro determinado, su perdigón de 1.2 g se queda adherido al queso, haciendo que éste se deslice una distancia de 25 cm antes de detenerse. De acuerdo con el empaque en que vino la pistola, la velocidad a boca de cañón es de 65 m/s. ¿Cuál es el coeficiente de fricción entre el queso y el hielo?

•7.89 Unos niños están jugando un peligroso juego de pirotecnia. Amarran varios petardos a un cohete de juguete y lo lanzan al aire con un ángulo de 60° respecto al suelo. En el ápice de su trayectoria, elartilugio estalla, y el cohete se rompe en dos trozos iguales. Uno de los trozos tiene la mitad de la rapidez que tenía el cohete antes de estallar, y viaja verticalmente hacia arriba con respecto al suelo. Determine la rapidez y la dirección del otro trozo.

•7.90 Un balón de fútbol con masa de 0.265 kg está inicialmente en reposo y se pateada con un ángulo de 20.8° respecto a la horizontal. El balón recorre una distancia horizontal de 52.8 m después de la patada. ¿Cuál es el impulso que recibe el balón durante la patada? Suponga que no hay resistencia del aire.

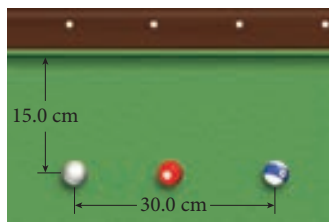
•7.91 Tarzán, Rey de la Selva (masa = 70.4 kg) coge una liana de 14.5 m de longitud que cuelga de una rama de un árbol. El ángulo de la liana era de 25.9° con respecto a la vertical cuando la cogió. En el punto más bajo de su trayectoria, recoge a Jane (masa = 43.4 kg) y continúa su movimiento de columpio. ¿Qué ángulo relativo a la vertical tendrá la liana cuando Tarzán y Jane lleguen al punto más alto de su trayectoria?

•7.92 Una bala con masa de 35.5 g se dispara horizontalmente de un arma de fuego. La bala se incrusta en un bloque de madera de 5.90 kg que está suspendido por cuerdas. La masa combinada oscila hacia arriba, llegando a una altura de 12.85 cm. ¿Cuál era la rapidez de la bala cuando salió del arma? (Aquí se puede ignorar la resistencia del aire.)

•7.93 Un disco de hockey de 170. g que se mueve en la dirección x positiva a 30.0 m/s es golpeado por un bastón en el tiempo $t = 2.00$ s, y se mueve en la dirección opuesta a 25.0 m/s. Si el disco está en contacto con el bastón durante 0.200 s, grafique el momento y la posición del disco, y la fuerza que actúa sobre éste como función del tiempo, de 0 a 5.00 s. Asegúrese de rotular los ejes de coordenadas con números razonables.

•7.94 Las bolas están sobre una mesa de billar como se muestra en la figura. Usted está jugando a rayas y su oponente a sólidos. Su plan es darle a su bola objetivo haciendo que la bola blanca rebote con la banda de la mesa.

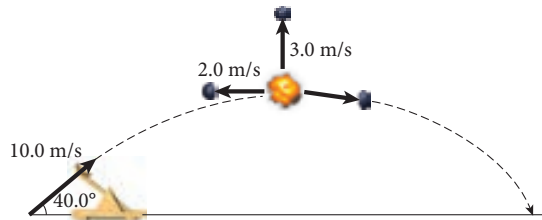
a) ¿Con qué ángulo relativo a la normal necesita incidir la bola blanca en la banda para una colisión puramente elástica?



b) Como un jugador que siempre observa, usted determina que, de hecho, las colisiones entre las bolas de billar y las bandas tienen un coeficiente de restitución de 0.600. ¿Qué ángulo escoge usted ahora para hacer el tiro?

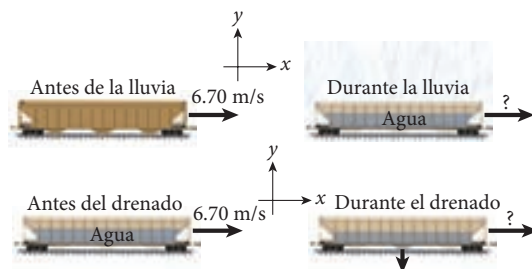
•7.95 Usted ha dejado caer su teléfono celular detrás de un librero muy largo, y no lo puede alcanzar ni desde arriba ni por los lados. Usted decide sacarlo haciendo chocar con él un llavero con llaves de modo que el llavero y el teléfono se deslicen hacia fuera. Si la masa del teléfono es de 0.111 kg, la masa del llavero es de 0.020 kg y la masa de cada llave es de 0.023 kg, ¿cuál es el número mínimo de llaves que necesita en el llavero de modo que las llaves y el teléfono salgan por el mismo lado del librero? Si su llavero tiene cinco llaves y la velocidad es de 1.21 m/s cuando golpea el teléfono celular, ¿cuáles son las velocidades finales del teléfono y el llavero? Suponga que la colisión es unidimensional y elástica, y desprecie la fricción.

•7.96 Después de haber insertado varios explosivos grandes en sus orificios, se lanza una bola de boliche al aire usando un lanzador de fabricación casera, y estalla en el aire. En el lanzamiento, la bola de 7.00 kg se lanza con una rapidez inicial de 10.0 m/s a un ángulo de 40.0°. Explota en el ápice de su trayectoria, rompiéndose en tres trozos de masas iguales. Un trozo sube verticalmente con una rapidez de 3.00 m/s. Otro trozo regresa en línea recta con rapidez de 2.00 m/s. ¿Cuál es la velocidad del tercer trozo (rapidez y dirección)?



•7.97 En esquí acuático se dice que ocurre una “venta de cochera” cuando un esquiador pierde el control, cae y los esquís vuelan en diferentes direcciones. En un incidente determinado, un esquiador novato estaba “peinando” la superficie del agua a 22.0 m/s cuando perdió el control. Un esquí, con una masa de 1.50 kg, voló a un ángulo de 12.0° a la izquierda de la dirección inicial del esquiador con una rapidez de 25.0 m/s. El otro esquí voló después del golpe a un ángulo de 5.00° a la derecha con una rapidez de 21.0 m/s. ¿Cuál era la velocidad del esquiador de 61.0 kg? Dé la rapidez y la dirección relativa al vector de velocidad inicial.

•7.98 Un vagón tolva descubierto de un tren rueda sin fricción ni resistencia del aire por una vía a nivel, con una rapidez constante de 6.70 m/s en la dirección x positiva. La masa del vagón es de $1.18 \cdot 10^5$ kg.



a) Al rodar el vagón, comienza una tormenta de lluvia de monzón, y el vagón comienza a acumular agua en su tolva (vea la figura). ¿Cuál es la rapidez del vagón después de que se acumulan $1.62 \cdot 10^4$ kg de agua en su tolva? Suponga que la lluvia cae verticalmente en la dirección y negativa.

b) La lluvia cesa y se abre una válvula en el fondo de la tolva para dejar salir el agua. La rapidez del vagón cuando se abre la válvula es nuevamente de 6.70 m/s en la dirección x positiva (vea la figura).

El agua drena verticalmente en la dirección y negativa. ¿Cuál es la rapidez del vagón después de que toda el agua ha salido?

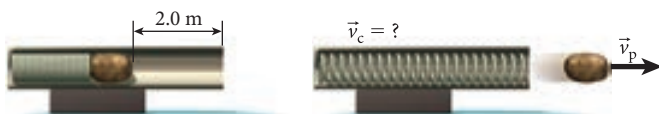
•7.99 Cuando una rebanada de pan de 99.5 g se inserta en un tostador, el resorte de expulsión del tostador se comprime 7.50 cm. Cuando el tostador expulsa la rebanada tostada, ésta llega a una altura de 3.0 cm arriba de su posición inicial. ¿Cuál es la fuerza media que ejerce el resorte de expulsión sobre el pan tostado? ¿Cuál es el tiempo durante el cual el resorte de expulsión empuja al pan tostado?

•7.100 Una estudiante con una masa de 60.0 kg salta verticalmente hacia arriba usando sus piernas para aplicar una fuerza promedio de 770. N al piso durante 0.250 s. Suponga que los momentos iniciales de la estudiante y la Tierra son cero. ¿Cuál es el momento de la estudiante inmediatamente después de este impulso? ¿Cuál es el momento de la Tierra después de este impulso? ¿Cuál es la rapidez de la Tierra después del impulso? ¿Qué fracción de la energía cinética total que la estudiante produce con sus piernas va a la Tierra? (La masa de la Tierra es de $5.98 \cdot 10^{24}$ kg.) Usando la conservación de la energía, ¿a qué altura salta la estudiante?

•7.101 Se usa un cañón de patatas para lanzar una patata en un lago congelado, como se muestra en la figura. La masa del cañón, m_c , es de 10.0 kg, y la masa de la patata, m_p , es de 0.850 kg. El resorte del cañón (con constante de resorte $k_c = 7.06 \cdot 10^3$ N/m) se comprime 2.00 m. Antes de lanzar la patata, el cañón está en reposo. La patata sale de la boca del cañón moviéndose horizontalmente a la derecha con una rapidez de $v_p = 175$ m/s. Desprecie los efectos de la rotación de la patata. Suponga que no hay fricción entre el cañón y el hielo del lago ni entre el interior del cañón y la patata.

a) ¿Cuáles son la dirección y la magnitud de la velocidad del cañón, v_c después de que la patata sale de la boca del cañón?

b) ¿Cuál es la energía mecánica total (potencial y cinética) del sistema patata/cañón antes y después de disparar la patata?



•7.102 Se usa un cañón de patatas para lanzar una patata sobre un lago congelado, como en el problema 7.101. Todas las cantidades son las mismas que en dicho problema, salvo que

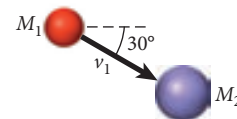
la patata tiene un diámetro mayor y es muy áspera, causando fricción entre el interior del cañón y la patata. La patata áspera sale de la boca del cañón moviéndose horizontalmente a la derecha con una rapidez de $v_p = 165$ m/s. Desprecie los efectos de la rotación de la patata.

a) ¿Cuáles son la dirección y la magnitud de la velocidad del cañón, v_c , después de que la patata áspera sale de la boca del cañón?

b) ¿Cuál es la energía mecánica total (potencial y cinética) del sistema patata/cañón antes y después de disparar la patata?

c) ¿Cuál es el trabajo, W_f , que realiza la fuerza de fricción sobre la patata áspera?

•7.103 Una partícula ($M_1 = 1.00$ kg) que se mueve a 30° hacia abajo de la horizontal con $v_1 = 2.50$ m/s impacta a una segunda partícula ($M_2 = 2.00$ kg), que estaba momentáneamente en reposo. Después de la colisión, la rapidez de M_1 se redujo a 0.50 m/s, y se movió en un ángulo de 32° respecto a la horizontal. Suponga que la colisión es elástica.



a) ¿Cuál es la rapidez de M_2 después de la colisión?

b) ¿Cuál es el ángulo entre los vectores de velocidad de M_1 y M_2 después de la colisión?

•7.104 Muchas colisiones nucleares son verdaderamente elásticas. Si un protón con energía cinética E_0 choca de manera elástica con otro protón en reposo y viaja a un ángulo de 25° con respecto a su trayectoria inicial, ¿cuál es su energía después de la colisión con respecto a su energía original? ¿Cuál es la energía final del protón que originalmente estaba en reposo?

•7.105 Un método para determinar la composición química de un material es la dispersión de Rutherford (en inglés, Rutherford backscattering, o RBS), nombrada en honor del científico que descubrió primero que un átomo contiene un núcleo de alta densidad positivamente cargado, y no carga positiva distribuida de manera uniforme (vea el capítulo 39). En la RBS, las partículas alfa se disparan en forma directa a un material objetivo, y se mide la energía de las partículas alfa que rebotan directamente hacia atrás. Una partícula alfa tiene una masa de $6.65 \cdot 10^{-27}$ kg. Una partícula alfa con una energía cinética inicial de 2.00 MeV choca elásticamente con el átomo X. Si la energía cinética de la partícula alfa retrodispersada es de 1.59 MeV, ¿cuál es la masa del átomo X? Suponga que el átomo X está inicialmente en reposo. Usted necesitará encontrar la raíz cuadrada de una expresión que dará como resultado dos respuestas posibles (si $a = b^2$, entonces $b = \pm \sqrt{a}$). Como usted sabe que el átomo X es más masivo que la partícula alfa, usted puede elegir la raíz correcta de acuerdo con esto. ¿Qué elemento es el átomo X? (Revise una tabla periódica de los elementos, donde se da una lista con la masa atómica como la masa en gramos de 1 mol de átomos, que corresponde a $6.02 \cdot 10^{23}$ átomos.)

8

PARTE 2 OBJETOS EXTENSOS, MATERIA Y MOVIMIENTO CIRCULAR

Sistemas de partículas y objetos extensos

LO QUE APRENDEREMOS 247

8.1 Centro de masa y centro de gravedad 247

Centro de masa combinado para dos objetos 248

Problema resuelto 8.1 Centro de masa de la Tierra y la Luna 248

Centro de masa combinado para varios objetos 250

Ejemplo 8.1 Contenedores de embarque 250

8.2 Momento del centro de masa 251

Colisiones de dos cuerpos 252

Retroceso 253

Problema resuelto 8.2 Retroceso de un cañón 253

Ejemplo 8.2 Manguera contra incendio 255

Movimiento general del centro de masa 255

8.3 Movimiento de cohetes 256

Ejemplo 8.3 Lanzamiento de un cohete a Marte 257

8.4 Cálculo del centro de masa 259

Sistemas de coordenadas tridimensionales no cartesianas 259

Inserto matemático: integrales de volumen 260

Ejemplo 8.4 Volumen de un cilindro 261

Ejemplo 8.5 Centro de masa de una media esfera 263

Centro de masa para objetos unidimensionales y bidimensionales 264

Problema resuelto 8.3 Centro de masa de una varilla larga y delgada 265

LO QUE HEMOS APRENDIDO/ GUÍA DE ESTUDIO PARA EXAMEN 266

Práctica para resolución de problemas 268

Problema resuelto 8.4 Encendido del cohete acelerador 268

Problema resuelto 8.5 Centro de masa de un disco con un agujero 270

Preguntas de opción múltiple 272

Preguntas 273

Problemas 274



FIGURA 8.1 La Estación Espacial Internacional (ISS) fotografiada desde el Transbordador Espacial *Discovery*.

LO QUE APRENDEREMOS

- El centro de masa es el punto en el que podemos imaginar que está concentrada toda la masa de un objeto.
- La posición del centro de masa combinado de dos o más objetos se encuentra tomando la suma de sus vectores de posición, multiplicados por sus masas individuales.
- El movimiento de traslación del centro de masa de un objeto extenso se puede describir por la mecánica newtoniana.
- El momento o ímpetu del centro de masa es la suma de los vectores de momento o ímpetu lineales de las partes de un sistema. Su derivada con respecto al tiempo es igual a la fuerza neta total externa que actúa sobre el sistema, una formulación extendida de la segunda ley de Newton.
- Para sistemas de dos partículas, trabajar en términos de momento o ímpetu del centro de masa y momento o ímpetu relativo en vez de los vectores de momento o ímpetu individuales da una percepción más profunda de la física de colisiones y fenómenos de retroceso.
- Los análisis de movimiento de cohetes tienen que considerar sistemas de masa variable. Esta variación lleva a una dependencia logarítmica de la velocidad del cohete con respecto al cociente de masa inicial a final.
- Es posible calcular la posición del centro de masa de un objeto extenso integrando su densidad de masa para su volumen total, multiplicado por el vector de posición, y luego dividir entre la masa total.
- Si un objeto tiene un plano de simetría, el centro de masa está en ese plano. Si el objeto tiene más de un plano de simetría, el centro de masa está en la línea o en el punto de intersección de los planos.

La Estación Espacial Internacional (ISS, por sus siglas en inglés), que se muestra en la figura 8.1, es un notable logro de la ingeniería. Su terminación está programada para 2011, aunque ha estado habitada continuamente desde el año 2000. Gira alrededor de la Tierra con una rapidez de más de 7.5 km/s, en una órbita que tiene una altura que va de 320 a 350 km sobre la superficie de la Tierra. Cuando los ingenieros rastrean la ISS, la consideran como una partícula puntual, aun cuando mide aproximadamente 109 m por 73 m por 25 m. Se supone que este punto representa el centro de la ISS; pero exactamente ¿cómo determinan los ingenieros dónde está el centro?

Todo objeto tiene un punto donde se puede considerar que está concentrada toda la masa del objeto. Algunas veces este punto, que se llama *centro de masa*, no está ni siquiera dentro del objeto. Este capítulo explica cómo calcular la ubicación del centro de masa, y muestra cómo usarlo para simplificar cálculos que se refieren a colisiones y conservación del momento. Hemos estado suponiendo en capítulos anteriores que los objetos podían tratarse como partículas. Este capítulo muestra por qué funciona esa suposición.

Este capítulo también explica los cambios en momento o ímpetu para la situación en que la masa de un objeto varía, así como su velocidad. Esto sucede con la propulsión por cohete, cuando la masa del combustible es frecuentemente mucho mayor que la masa del cohete en sí.

8.1 Centro de masa y centro de gravedad

Hasta ahora, hemos representado la posición de un objeto mediante coordenadas de un solo punto. Sin embargo, una aseveración como “un auto está ubicado en $x = 3.2$ m” con seguridad no quiere decir que el auto completo está ubicado en ese punto. Entonces, ¿qué sentido tiene dar la coordenada de un punto en particular para representar un objeto extenso? Las respuestas a esta pregunta dependen de la aplicación específica de que se trate. En las carreras de autos, por ejemplo, la posición de un auto se representa por la coordenada de la parte más frontal del auto. Cuando este punto cruza la línea de meta, la carrera está decidida. Por otro lado, en el fútbol, un gol sólo se cuenta si el balón completo ha cruzado la línea de gol. En este caso, tiene sentido representar la posición del balón por las coordenadas de la parte trasera del mismo. Sin embargo, estos ejemplos son excepciones. En casi todas las situaciones, hay una elección natural del punto que ha de representar la posición de un objeto extenso. Este punto se llama *centro de masa*.

Definición

El **centro de masa** es el punto en el que podemos imaginar que está concentrada toda la masa de un objeto.

Así, el centro de masa también es el punto en el que podemos imaginar que se concentra la fuerza de gravedad que actúa en todo el objeto. Si podemos imaginar que toda la masa se concentra en este punto, al calcular la fuerza debida a la gravedad, es legítimo llamar a este punto el *centro de gravedad*, un término que a menudo se puede usar en forma intercambiable con el de *centro de masa*. (Para ser precisos, debemos observar que estos dos términos sólo son equivalentes en situaciones en las que la fuerza gravitacional es constante en todas las partes del objeto. En el capítulo 12 veremos que esto no es el caso para objetos muy grandes.)

Es oportuno mencionar aquí que, si la densidad de masa de un objeto es constante, el centro de masa (centro de gravedad) se ubica en el centro geométrico del objeto. Así, para la mayoría de objetos en la experiencia diaria, es una conjetura inicial razonable que el centro de gravedad está en el punto medio del objeto. La deducción en este capítulo sustentará esta conjetura.

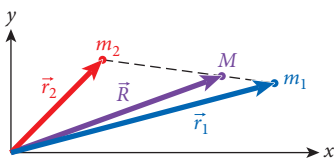


FIGURA 8.2 Ubicación del centro de masa para un sistema de dos masas m_1 y m_2 , donde $M = m_1 + m_2$.

Centro de masa combinado para dos objetos

Si tenemos dos objetos idénticos de igual masa y queremos encontrar el centro de masa para la combinación de los dos, es razonable suponer, por consideraciones de simetría, que el centro combinado de masa de este sistema está ubicado exactamente a mitad de camino entre los centros individuales de masa de los dos objetos. Si uno de los dos objetos es más masivo, entonces es igualmente razonable suponer que el centro de masa para la combinación está más cercano al objeto más masivo. Por lo tanto, tenemos una fórmula general para calcular la ubicación del centro de masa, \vec{R} , para dos masas, m_1 y m_2 , ubicadas en las posiciones \vec{r}_1 y \vec{r}_2 en un sistema arbitrario de coordenadas (figura 8.2):

$$\vec{R} = \frac{\vec{r}_1 m_1 + \vec{r}_2 m_2}{m_1 + m_2}. \tag{8.1}$$

Esta ecuación dice que el vector de posición del centro de masa es un promedio de los vectores de posición de los objetos individuales, multiplicados por sus masas. Tal definición es congruente con la evidencia empírica que acabamos de citar. Por ahora, usaremos esta ecuación como una definición operativa, y gradualmente deduciremos sus consecuencias. Más adelante, en este capítulo y en el siguiente, veremos razones adicionales por las que esta definición tiene sentido.

Observe que podemos escribir inmediatamente la ecuación vectorial 8.1 en coordenadas cartesianas como sigue:

$$X = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2}{m_1 + m_2}, \quad Y = \frac{y_1 m_1 + y_2 m_2}{m_1 + m_2}, \quad Z = \frac{z_1 m_1 + z_2 m_2}{m_1 + m_2}. \tag{8.2}$$

En la figura 8.2, la ubicación del centro de masa está exactamente en la línea recta (negra punteada) que conecta las dos masas. ¿Es éste un resultado general? ¿El centro de masa siempre está en esta línea? Si la respuesta es afirmativa, ¿por qué? Si la respuesta es negativa, ¿cuál es la condición especial que se necesita para que éste sea el caso? La respuesta es que éste es un resultado general para todos los sistemas de dos cuerpos: el centro de masa de tal sistema siempre está en la línea que conecta los dos objetos. Para ver esto, podemos colocar el origen del sistema de coordenadas en una de las dos masas de la figura 8.2, digamos m_1 . (Como sabemos, siempre podemos mover el origen de un sistema de coordenadas sin cambiar los resultados de física.) Usando la ecuación 8.1, vemos entonces que $\vec{R} = \vec{r}_2 m_2 / (m_1 + m_2)$, porque con esta selección de sistema de coordenadas, definimos \vec{r}_1 como cero. Así, los dos vectores \vec{R} y \vec{r}_2 apuntan en la misma dirección, pero \vec{R} es más corto por un factor de $m_2 / (m_1 + m_2) < 1$. Esto muestra que \vec{R} siempre está en la línea recta que conecta las dos masas.

8.1 Ejercicio en clase

En el caso que se muestra en la figura 8.2, ¿cuáles son las magnitudes relativas de las dos masas m_1 y m_2 ?

- a) $m_1 < m_2$
- b) $m_1 > m_2$
- c) $m_1 = m_2$
- d) Con base sólo en la información que se da en la figura, no es posible decidir cuál de las dos masas es mayor.

PROBLEMA RESUELTO 8.1 Centro de masa de la Tierra y la Luna

La Tierra tiene una masa de $5.97 \cdot 10^{24}$ kg, y la Luna tiene una masa de $7.36 \cdot 10^{22}$ kg. La Luna gira alrededor de la Tierra a una distancia de 384 000 km; es decir, el centro de la Luna está a una distancia de 384 000 km del centro de la Tierra, como se muestra en la figura 8.3a).

PROBLEMA

¿A qué distancia del centro de la Tierra está el centro de masa del sistema Tierra-Luna?

SOLUCIÓN**PIENSE**

El centro de masa del sistema Tierra-Luna se puede calcular considerando que el centro de la Tierra está ubicado en $x = 0$, y el centro de la Luna está localizado en $x = 384\,000$ km. El centro de masa del sistema Tierra-Luna estará a lo largo de una línea que conecta el centro de la Tierra con el centro de la Luna (como en la figura 8.3a).

ESBOCE

En la figura 8.3b) se presenta un croquis a escala que muestra la Tierra y la Luna.

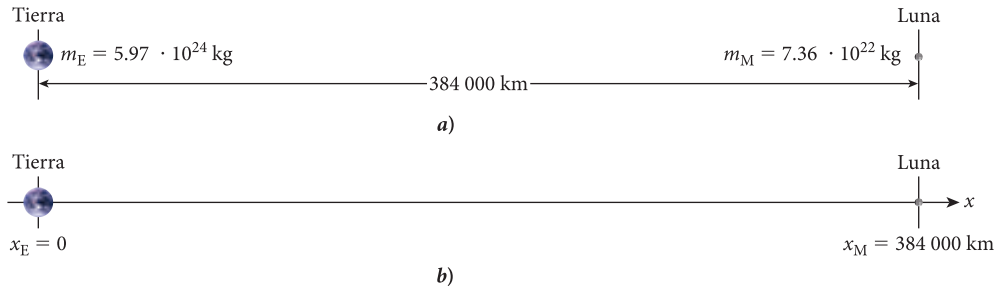


FIGURA 8.3 a) La Luna gira alrededor de la Tierra a una distancia de $384\,000$ km (dibujo a escala).
 b) Un croquis que muestra la Tierra en $x_E = 0$, y la Luna en $x_M = 384\,000$ km.

INVESTIGUE

Definimos un eje x y colocamos a la Tierra en $x_E = 0$, y la Luna en $x_M = 384\,000$ km. Podemos usar la ecuación 8.2 para obtener una expresión para la coordenada x del centro de masa del sistema Tierra-Luna:

$$X = \frac{x_E m_E + x_M m_M}{m_E + m_M}.$$

SIMPLIFIQUE

Como hemos colocado el origen de nuestro sistema de coordenadas en el centro de la Tierra, hacemos $x_E = 0$. Esto da como resultado

$$X = \frac{x_M m_M}{m_E + m_M}.$$

CALCULE

Al sustituir los valores numéricos, obtenemos la coordenada x del centro de masa del sistema Tierra-Luna:

$$X = \frac{x_M m_M}{m_E + m_M} = \frac{(384\,000 \text{ km})(7.36 \cdot 10^{22} \text{ kg})}{5.97 \cdot 10^{24} \text{ kg} + 7.36 \cdot 10^{22} \text{ kg}} = 4\,676.418 \text{ km}.$$

REDONDEE

Todos los valores numéricos se dieron con tres cifras significativas, de modo que presentamos nuestra respuesta como

$$X = 4\,680 \text{ km}.$$

VUELVA A REVISAR

Nuestro resultado está en kilómetros, que es la unidad correcta para una posición. El centro de masa del sistema Tierra-Luna está cerca del centro de la Tierra. Esta distancia es pequeña comparada con la distancia entre la Tierra y la Luna, lo cual tiene sentido porque la masa de la Tierra es mucho mayor que la de la Luna. De hecho, esta distancia es menor que el radio de la Tierra, $R_E = 6\,370$ km. La Tierra y la Luna en realidad giran cada una alrededor del centro común de masa. Así, la Tierra parece tambalearse al girar la Luna alrededor de ella.

Centro de masa combinado para varios objetos

La definición del centro de masa en la ecuación 8.1 se puede generalizar a un total de n objetos con diferentes masas, m_i , ubicadas en diferentes posiciones, \vec{r}_i . En este caso general,

$$\vec{R} = \frac{\vec{r}_1 m_1 + \vec{r}_2 m_2 + \dots + \vec{r}_n m_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^n \vec{r}_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n \vec{r}_i m_i, \tag{8.3}$$

donde M representa la masa combinada de todos los n objetos:

$$M = \sum_{i=1}^n m_i. \tag{8.4}$$

Al escribir la ecuación 8.3 en componentes cartesianas, obtenemos

$$X = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n x_i m_i; \quad Y = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n y_i m_i; \quad Z = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n z_i m_i. \tag{8.5}$$

La ubicación del centro de masa es un punto fijo relativo al objeto o al sistema de objetos, y no depende de la ubicación del sistema de coordenadas que se use para describirlo. Podemos demostrar esto tomando el sistema de la ecuación 8.3 y moviéndolo por \vec{r}_0 , lo que da por resultado una nueva posición del centro de masa, $\vec{R} + \vec{R}_0$. Con la ecuación 8.3, encontramos

$$\vec{R} + \vec{R}_0 = \frac{\sum_{i=1}^n (\vec{r}_0 + \vec{r}_i) m_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \vec{r}_0 + \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n \vec{r}_i m_i.$$

Así, $\vec{R}_0 = \vec{r}_0$, y la ubicación del centro de masa no cambia en relación con el sistema.

Ahora podemos determinar el centro de masa de un conjunto de objetos en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 8.1 Contenedores de embarque

Los contenedores grandes de carga, que se pueden transportar por camión, ferrocarril o barco, se fabrican en tamaños estándar. Uno de los tamaños más comunes es el contenedor ISO 20', que tiene una longitud de 6.1 m, una anchura de 2.4 m y una altura de 2.6 m. Se permite que este contenedor tenga una masa (incluido su contenido, por supuesto) hasta de 30 400 kg.

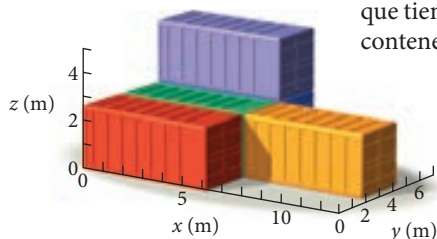


FIGURA 8.4 Contenedores de carga acomodados en la cubierta de un barco de contenedores.

PROBLEMA

Los cuatro contenedores de carga que se muestran en la figura 8.4 están en la cubierta de un barco de contenedores. Cada uno tiene una masa de 9 000 kg, salvo el rojo, que tiene una masa de 18 000 kg. Suponga que cada uno de los contenedores tiene un centro individual de masa en su centro geométrico. ¿Cuáles son las coordenadas x y y del centro de masa combinado de los contenedores? Use el sistema de coordenadas que se muestra en la figura para describir la ubicación de este centro de masa.

SOLUCIÓN

Necesitamos calcular las componentes cartesianas individuales del centro de masa, de modo que usaremos la ecuación 8.5. No parece haber un atajo que podamos utilizar.

Llamemos ℓ (6.1 m) a la longitud de cada contenedor, w (2.4 m) a la anchura de cada contenedor y m_0 (9 000 kg) a la masa del contenedor verde. La masa del contenedor rojo es entonces $2m_0$, y todos los demás tienen una masa de m_0 .

Primero, necesitamos calcular la masa combinada, M . De acuerdo con la ecuación 8.4, ésta es

$$\begin{aligned} M &= m_{\text{rojo}} + m_{\text{verde}} + m_{\text{naranja}} + m_{\text{azul}} + m_{\text{morado}} \\ &= 2m_0 + m_0 + m_0 + m_0 + m_0 \\ &= 6m_0. \end{aligned}$$

Para la coordenada x del centro de masa combinado, encontramos

$$\begin{aligned} X &= \frac{x_{\text{rojo}}m_{\text{rojo}} + x_{\text{verde}}m_{\text{verde}} + x_{\text{naranja}}m_{\text{naranja}} + x_{\text{azul}}m_{\text{azul}} + x_{\text{morado}}m_{\text{morado}}}{M} \\ &= \frac{\frac{1}{2}\ell 2m_0 + \frac{1}{2}\ell m_0 + \frac{3}{2}\ell m_0 + \frac{1}{2}\ell m_0 + \frac{1}{2}\ell m_0}{6m_0} \\ &= \frac{\ell(1 + \frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2})}{6} \\ &= \frac{2}{3}\ell = 4.1 \text{ m.} \end{aligned}$$

En el último paso, sustituimos ℓ por su valor, 6.1.

Del mismo modo, podemos calcular la coordenada y :

$$\begin{aligned} Y &= \frac{y_{\text{rojo}}m_{\text{rojo}} + y_{\text{verde}}m_{\text{verde}} + y_{\text{naranja}}m_{\text{naranja}} + y_{\text{azul}}m_{\text{azul}} + y_{\text{morado}}m_{\text{morado}}}{M} \\ &= \frac{\frac{1}{2}w 2m_0 + \frac{3}{2}wm_0 + \frac{3}{2}wm_0 + \frac{5}{2}wm_0 + \frac{5}{2}wm_0}{6m_0} \\ &= \frac{w(1 + \frac{3}{2} + \frac{3}{2} + \frac{5}{2} + \frac{5}{2})}{6} \\ &= \frac{3}{2}w = 3.6 \text{ m.} \end{aligned}$$

Aquí, nuevamente, sustituimos w por su valor numérico 2.4 m en el último paso. (Observe que redondeamos las dos coordenadas del centro de masa a dos cifras significativas para ser congruentes con los valores dados.)

8.1 Oportunidad de autoexamen

Determine la coordenada z del centro de masa del conjunto de contenedores de la figura 8.4.

8.2 Momento del centro de masa

Ahora podemos tomar la derivada con respecto al tiempo del vector de posición del centro de masa para obtener \vec{V} , el vector de velocidad del centro de masa. Tomamos la derivada con respecto al tiempo de la ecuación 8.3:

$$\vec{V} \equiv \frac{d}{dt} \vec{R} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{M} \sum_{i=1}^n \vec{r}_i m_i \right) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \frac{d}{dt} \vec{r}_i = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n \vec{p}_i. \quad (8.6)$$

Por ahora, hemos supuesto que la masa total, M , y las masas, m_i , de los objetos individuales, permanecen constantes. (Más adelante en este capítulo abandonaremos esta suposición y estudiaremos las consecuencias para el movimiento del cohete.) La ecuación 8.6 es una expresión para el vector de velocidad del centro de masa, \vec{V} . La multiplicación de ambos lados de la ecuación 8.6 por M da

$$\vec{P} = M\vec{V} = \sum_{i=1}^n \vec{p}_i. \quad (8.7)$$

Así encontramos que el momento o ímpetu del centro de masa, \vec{P} , es el producto de la masa total, M , y la velocidad del centro de masa, \vec{V} , y es la suma de todos los vectores de momento o ímpetu individuales.

Tomando la derivada con respecto al tiempo de ambos lados de la ecuación 8.7, obtenemos la segunda ley de Newton para el centro de masa:

$$\frac{d}{dt} \vec{P} = \frac{d}{dt} (M\vec{V}) = \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n \vec{p}_i \right) = \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt} \vec{p}_i = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i. \quad (8.8)$$

En el último paso usamos el resultado del capítulo 7 de que la derivada con respecto al tiempo del momento o ímpetu de la partícula i es igual a la fuerza neta, \vec{F}_i , que actúa en ella. Observe que, si

las partículas (objetos) en un sistema ejercen fuerzas entre ellos, dichas fuerzas no hacen un aporte neto a la suma de estas fuerzas en la ecuación 8.8. ¿Por qué? De acuerdo con la tercera ley de Newton, las fuerzas que dos objetos ejercen uno sobre otro son iguales en magnitud y de sentido opuesto. Por lo tanto, sumándolas se obtiene cero. Así, obtenemos la segunda ley de Newton para el centro de masa,

$$\frac{d}{dt} \vec{P} = \vec{F}_{\text{neto}}, \tag{8.9}$$

donde \vec{F}_{neto} es la suma de todas las fuerzas *externas* que actúan sobre el sistema de partículas.

El centro de masa tiene las mismas relaciones entre posición, velocidad, momento o ímpetu, fuerza y masa que se han establecido para partículas puntuales. Así es posible considerar el centro de masa de un objeto extenso o de un grupo de objetos como una partícula puntual. Esta conclusión justifica la aproximación que usamos en capítulos anteriores de que los objetos se pueden representar como puntos.

Colisiones de dos cuerpos

Una de las aplicaciones más interesantes del centro de masa se presenta con un marco de referencia cuyo origen se coloca en el centro de masa de un sistema de objetos interactuantes. Investiguemos el ejemplo más sencillo de esta situación. Considere un sistema que consiste en sólo dos objetos. En este caso, el momento o ímpetu total es la suma de los momentos o ímpetus individuales de acuerdo con la ecuación 8.7, es

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2. \tag{8.10}$$

En el capítulo 7 vimos que la velocidad relativa entre dos objetos que chocan juega un gran papel en las colisiones de dos cuerpos. Así, es natural definir el momento o ímpetu relativo como la mitad de la diferencia de momentos o ímpetus

$$\vec{p} = \frac{1}{2}(\vec{p}_1 - \vec{p}_2). \tag{8.11}$$

¿Por qué es el factor $\frac{1}{2}$ adecuado en esta definición? La respuesta es que en un marco de referencia del centro de momento o ímpetu (un marco en el que el centro de masa tiene momento o ímpetu cero), el momento o ímpetu del objeto 1 es \vec{p} y la del objeto 2 es $-\vec{p}$. Veamos cómo sucede esto.

La figura 8.5a) ilustra la relación entre el momento o ímpetu del centro de masa \vec{P} (flecha roja), el momento o ímpetu relativo \vec{p} (flecha azul) y los momentos o ímpetus de los objetos 1 y 2 (flechas negras). Podemos expresar los momentos o ímpetus individuales en términos del momento o ímpetu del centro de masa y los momentos o ímpetus relativos:

$$\begin{aligned} \vec{p}_1 &= \frac{1}{2} \vec{P} + \vec{p} \\ \vec{p}_2 &= \frac{1}{2} \vec{P} - \vec{p}. \end{aligned} \tag{8.12}$$

La mayor ventaja de pensar en términos de momento o ímpetu del centro de masa y momentos o ímpetus relativos se ve clara cuando consideramos una colisión entre los dos objetos. Durante una colisión, las fuerzas dominantes que actúan sobre los objetos son las fuerzas que ejercen uno sobre el otro. Estas fuerzas internas no entran en la suma de fuerzas en la ecuación 8.8, de modo que obtenemos, para la colisión de dos objetos:

$$\frac{d}{dt} \vec{p} = 0.$$

En otras palabras, el momento o ímpetu del centro de masa no cambia. Permanece igual durante una colisión de dos cuerpos. Esto es verdad para colisiones elásticas o totalmente inelásticas, o parcialmente inelásticas.

Para una colisión inelástica, donde los dos objetos se adhieren uno a otro después de chocar, encontramos en el capítulo 7 que la velocidad con la que se mueve la masa combinada es

$$\vec{v}_f = \frac{m_1 \vec{v}_{i1} + m_2 \vec{v}_{i2}}{m_1 + m_2}.$$

Si comparamos esta ecuación con la ecuación 8.6, vemos que esta velocidad es sólo la velocidad del centro de masa. En otras palabras, en el caso de una colisión totalmente inelástica, el momento o ímpetu relativo después de la colisión es cero.

Para colisiones elásticas, la energía cinética total se tiene que conservar. Si calculamos la energía cinética total en términos del momento o ímpetu total \vec{P} , y el momento o ímpetu relativo

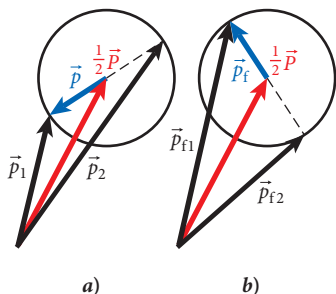


FIGURA 8.5 Relación entre vectores de momentos o ímpetus 1 y 2 (negro), momento o ímpetu de centro de masa (rojo) y momento relativo (azul) en algún marco de referencia: a) antes de una colisión elástica; b) después de la colisión elástica.

\vec{p} , el aporte del momento o ímpetu total tiene que permanecer constante, porque \vec{P} es constante. Este hallazgo implica que la energía cinética contenida en el movimiento relativo tiene también que permanecer constante. Como esta energía cinética, a su vez, es proporcional al cuadrado del vector del momento o ímpetu relativo, la magnitud del vector del momento o ímpetu relativo tiene que permanecer sin cambios durante una colisión elástica. Sólo puede cambiar la dirección de este vector. Como se muestra en la figura 8.5b), el nuevo vector del momento o ímpetu relativo después de la colisión elástica está sobre la circunferencia de un círculo con radio igual a la longitud del vector de momento o ímpetu relativo inicial, y cuyo centro está en el punto final del $\frac{1}{2}\vec{p}$. La situación descrita en la figura 8.5 implica que el movimiento se restringe a dos dimensiones espaciales. Para colisiones de dos cuerpos en tres dimensiones, el vector del momento o ímpetu relativo final se ubica sobre la superficie de una esfera, en vez del perímetro de un círculo.

En la figura 8.5, los vectores de momentos o ímpetus para la partícula 1 y la partícula 2 se grafican en algún marco arbitrario de referencia antes y después de la colisión entre las dos partículas. Podemos graficar los mismos vectores en un marco que se mueve con el centro de masa. (¡Acabamos de demostrar que el momento o ímpetu del centro de masa no cambia en la colisión!) La velocidad del centro de masa en tal marco móvil es cero, y en consecuencia, $\vec{P} = 0$ en dicho marco. En la ecuación 8.12 podemos ver entonces que, en este caso, los vectores de los momentos o ímpetus iniciales de las dos partículas son $\vec{p}_1 = +\vec{p}$ y $\vec{p}_2 = -\vec{p}$. En el centro móvil del marco de referencia, la colisión de dos partículas simplemente da por resultado una rotación del vector de momento o ímpetu relativo alrededor del origen, como se muestra en la figura 8.6, lo cual asegura de manera automática que se obedezcan las leyes de conservación del momento o ímpetu y la energía cinética (¡porque ésta es una colisión elástica!).

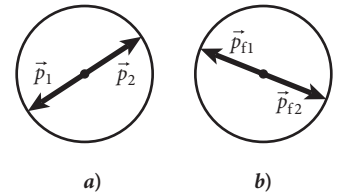


FIGURA 8.6 La misma colisión que en la figura 8.5, pero mostrada en el marco de centro de masa.

Retroceso

Cuando se dispara una bala de un arma de fuego, el arma **retrocede**; es decir, se mueve en la dirección opuesta a la dirección en que se dispara la bala. Otra demostración del mismo principio físico sucede si usted está sentado en un bote que está en reposo y lanza un objeto fuera: en ese momento el bote se mueve en la dirección opuesta a la del objeto. Usted también experimenta el mismo efecto si se para sobre un monopatín y arroja una pelota (razonablemente pesada). Este bien conocido efecto de retroceso se puede entender usando el marco de referencia que acabamos de desarrollar para la colisión de dos cuerpos. También es consecuencia de la tercera ley de Newton.

PROBLEMA RESUELTO 8.2 Retroceso de un cañón

Suponga que se dispara una bala de cañón con masa de 13.7 kg hacia un blanco que está a 2.30 km del cañón, que tiene una masa de 249.0 kg. La distancia, 2.30 km, también es el alcance máximo del cañón. El blanco y el cañón están a la misma elevación, y el cañón está en reposo sobre una superficie horizontal.

PROBLEMA

¿Cuál es la velocidad con que retrocederá el cañón?

SOLUCIÓN

PIENSE

Primero, nos damos cuenta de que el cañón sólo puede retroceder en dirección horizontal, porque la fuerza normal que ejerce el piso le evitará adquirir una componente vertical de velocidad. Utilizamos el hecho de que la componente x del momento o ímpetu del centro de masa del sistema (cañón y bala) permanece sin cambio en el proceso de disparar el cañón, porque la explosión de la pólvora dentro del cañón, que pone en movimiento a la bala, crea sólo fuerzas internas del sistema. No ocurre ninguna componente de fuerza neta externa en la dirección horizontal, porque las dos fuerzas externas (fuerza normal y gravedad) son verticales. La componente y de la velocidad del centro de masa cambia porque sí hay una componente de fuerza externa neta en la dirección y y cuando la fuerza normal aumenta para evitar que el cañón penetre en el suelo. Como la bala y el cañón están al inicio en reposo, el momento o ímpetu del centro de masa del sistema es inicialmente cero, y su componente x permanece en cero después de dispararse el cañón.

(continúa)

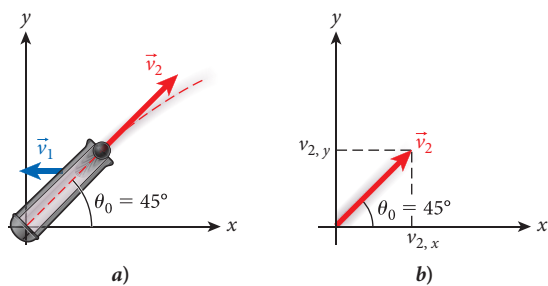


FIGURA 8.7 a) Bala que se dispara con un cañón; b) el vector velocidad inicial de la bala.

ESBOCE

La figura 8.7a) es un croquis del cañón en el instante del disparo. La figura 8.7b) muestra el vector velocidad de la bala, \vec{v}_2 , incluyendo las componentes x y y .

INVESTIGUE

Usando la ecuación 8.10 con subíndice 1 para el cañón y subíndice 2 para la bala, obtenemos

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = 0 \Rightarrow \vec{v}_1 = -\frac{m_2}{m_1} \vec{v}_2.$$

Para la componente horizontal de la velocidad, tenemos entonces

$$v_{1,x} = -\frac{m_2}{m_1} v_{2,x}. \quad (\text{i})$$

Podemos obtener la componente horizontal de la velocidad de la bala (en el disparo) con base en el hecho de que el alcance del cañón es de 2.30 km. En el capítulo 3 vimos que el alcance de una bala de cañón está relacionado con su velocidad inicial por $R = (v_0^2/g)(\sin 2\theta_0)$. El alcance máximo se alcanza para $\theta_0 = 45^\circ$ y es $R = v_0^2/g \Rightarrow v_0 = \sqrt{gR}$. Para $\theta_0 = 45^\circ$, la rapidez inicial y la componente horizontal de la velocidad están relacionadas por $v_{2,x} = v_0 \cos 45^\circ = v_0/\sqrt{2}$. Al combinar estos dos resultados, podemos relacionar el alcance máximo con la componente horizontal de la velocidad inicial de la bala:

$$v_{2,x} = \frac{v_0}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{gR}{2}}. \quad (\text{ii})$$

SIMPLIFIQUE

Al sustituir la ecuación (ii) en la ecuación (i), obtenemos el resultado que buscamos para:

$$v_{1,x} = -\frac{m_2}{m_1} v_{2,x} = -\frac{m_2}{m_1} \sqrt{\frac{gR}{2}}.$$

CALCULE

Al sustituir los números dados en el planteamiento del problema, obtenemos

$$v_{1,x} = -\frac{m_2}{m_1} \sqrt{\frac{gR}{2}} = -\frac{13.7 \text{ kg}}{249 \text{ kg}} \sqrt{\frac{(9.81 \text{ m/s}^2)(2.30 \cdot 10^3 \text{ m})}{2}} = -5.84392 \text{ m/s}.$$

REDONDEE

Al expresar nuestra respuesta con tres cifras significativas tenemos

$$v_{1,x} = -5.84 \text{ m/s}.$$

VUELVA A REVISAR

El signo menos significa que el cañón se mueve en sentido opuesto al de la bala, lo cual es razonable. La bala debe tener una velocidad mucho mayor que la del cañón, porque el cañón es mucho más masivo. La velocidad inicial de la bala era

$$v_0 = \sqrt{gR} = \sqrt{(9.81 \text{ m/s}^2)(2.3 \cdot 10^3 \text{ m})} = 150 \text{ m/s}.$$

El hecho de que nuestra respuesta para la velocidad del cañón es mucho menor que la velocidad inicial de la bala también parece razonable.

Se puede expulsar continuamente masa de un sistema, lo cual produce un retroceso continuo. Como ejemplo, consideremos la expulsión de agua de una manguera contra incendio.

EJEMPLO 8.2 Manguera contra incendio

PROBLEMA

¿Cuál es la magnitud de la fuerza, F , que actúa sobre un bombero que sostiene una manguera contra incendio que expulsa 360 L de agua por minuto con una rapidez a boca de boquilla $v = 39.0$ m/s, como se muestra en la figura 8.8?

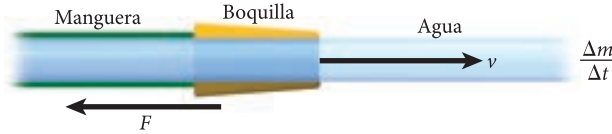


FIGURA 8.8 Una manguera contra incendio, de donde sale agua con una rapidez v .

SOLUCIÓN

Encontremos la masa total del agua que se expulsa por minuto. La densidad de masa del agua es $\rho = 1\,000 \text{ kg/m}^3 = 1.0 \text{ kg/L}$. Como $\Delta V = 360 \text{ L}$, obtenemos para la masa total del agua expulsada en un minuto:

$$\Delta m = \Delta V \rho = (360 \text{ L})(1.0 \text{ kg/L}) = 360 \text{ kg}.$$

El momento o ímpetu del agua es entonces $\Delta p = v \Delta m$, y, por la definición de la fuerza media, $F = \Delta p / \Delta t$, tenemos:

$$F = \frac{v \Delta m}{\Delta t} = \frac{(39.0 \text{ m/s})(360 \text{ kg})}{60 \text{ s}} = 234 \text{ N}.$$

Esta fuerza es considerable, por ello es tan peligroso que los bomberos suelten las mangueras contra incendio en operación: éstas serpentearían por todos lados con riesgo de causar lesiones.

8.2 Ejercicio en clase

Una manguera de jardín se usa para llenar un cubo de 20 L en 1 minuto. La velocidad del agua al salir de la manguera es de 1.05 m/s. ¿Qué fuerza se necesita para mantener la manguera inmóvil?

- a) 0.35 N d) 12 N
b) 2.1 N e) 21 N
c) 9.8 N

Movimiento general del centro de masa

Los objetos sólidos extensos pueden tener movimientos que parecen, a primera vista, bastante complicados. Un ejemplo de un movimiento así es el salto de altura. Durante la Olimpiada de 1968 en la ciudad de México, el atleta estrella estadounidense Dick Fosbury ganó una medalla de oro usando una nueva técnica de salto de altura, que se llamó desde entonces el “desplome Fosbury” (vea la figura 8.9). Si se ejecuta correctamente, la técnica permite al atleta cruzar por arriba de la barra mientras su centro de gravedad permanece debajo de la barra, lo cual agrega altura efectiva al salto.

La figura 8.10a) muestra una llave de tuercas que da vueltas por el aire en una serie de exposición múltiple de imágenes con intervalos de tiempo iguales entre cuadros sucesivos. Aunque este movimiento parece complicado, podemos usar lo que sabemos sobre el centro de masa para realizar un análisis sencillo de este movimiento. Si suponemos que toda la masa de la llave está concentrada en un punto, entonces este punto se moverá por el aire en una parábola bajo la influencia de la gravedad, como se explicó en el capítulo 3. Superpuesta en este movimiento hay una rotación de



FIGURA 8.9 Dick Fosbury libra la barra de salto de altura durante las finales de la Olimpiada en la ciudad de México, el 20 de octubre de 1968.

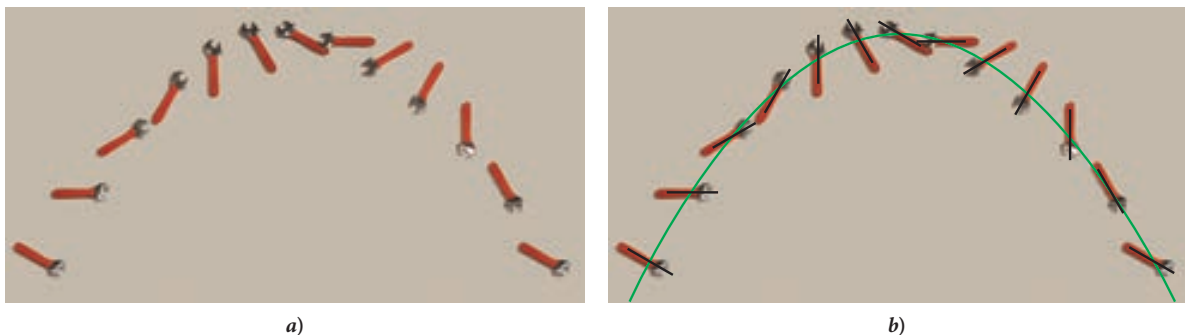


FIGURA 8.10 a) Serie de imágenes de exposición múltiple, procesada digitalmente, de una llave de tuercas lanzada al aire. b) la misma serie del inciso a), pero con una parábola superpuesta del movimiento del centro de masa.

la llave alrededor de su centro de masa. Usted puede ver claramente esta trayectoria parabólica en la figura 8.10b), donde una parábola superpuesta (verde) pasa por la ubicación del centro de masa de la llave en cada exposición. Además, una línea negra superpuesta gira con rapidez constante alrededor del centro de masa de la llave. Usted puede ver claramente que el mango de la llave está siempre alineado con la línea negra, indicando que la llave gira con rapidez constante alrededor del centro de masa (analizaremos este movimiento rotativo en el capítulo 10).

Las técnicas que aquí se presentan nos permiten analizar muchas clases de problemas complicados con objetos sólidos en movimiento, en términos de la superposición del movimiento del centro de masa y la rotación del objeto alrededor del centro de masa.

8.3 Movimiento de cohetes



FIGURA 8.11 Un cohete Delta II elevando un satélite GPS hasta su órbita.

El ejemplo 8.2 acerca de la manguera contra incendio es la primera situación que hemos examinado que se refiera a un cambio en el momento o ímpetu debido a un cambio en la masa más que en la velocidad. Otra situación importante en la que el cambio en el momento o ímpetu se debe al cambio en la masa es el movimiento de cohetes, en el que parte de la masa del cohete se expulsa por una o más toberas en la parte posterior (figura 8.11). El movimiento de cohetes es un caso importante del efecto de retroceso que se explicó en la sección 8.2. Un cohete no “empuja contra” nada. En vez de esto, su empuje hacia adelante proviene de la expulsión del propelente por su parte posterior, de acuerdo con la ley de conservación del momento total.

Con objeto de obtener una expresión para la aceleración de un cohete, consideraremos la expulsión del cohete de cantidades discretas de masa. Luego podemos acercarnos al límite continuo. Usemos un modelo de juguete de un cohete que se mueve en el espacio interestelar, impulsándose hacia adelante disparando balas desde su extremo posterior (figura 8.12). (Especificamos que el cohete está en el espacio interestelar para poder tratarlo junto con sus componentes como un sistema aislado, para el cual despreciamos las fuerzas externas.) Inicialmente, el cohete está en reposo. Todo el movimiento tiene lugar en la dirección x , de modo que podemos usar notación para movimiento unidimensional, con los signos de las componentes x de las velocidades (que, por simplicidad, llamaremos simplemente velocidades) indicando su dirección. Cada bala tiene una masa de Δm , y la masa inicial del cohete, incluyendo todas las balas, es m_0 . Cada bala se dispara con una velocidad v_c relativa al cohete, dando un momento de la bala $v_c \Delta m$.

Después de dispararse la primera bala, la masa del cohete se reduce a $m_0 - \Delta m$. El disparo de la bala no cambia el momento del centro de masa del sistema (cohete más bala). (Recuerde que éste es un sistema aislado, en el cual no actúan fuerzas netas externas.) Así, el cohete recibe un momento de retroceso opuesto al de la bala. El momento o ímpetu de la bala es

$$p_c = v_c \Delta m,$$

y el momento del cohete es

$$p_r = (m_0 - \Delta m)v_1,$$

donde v_1 es la velocidad del cohete después de disparar la bala. Como el momento o ímpetu se conserva, podemos escribir $p_r + p_c = 0$, y luego sustituir p_r y p_c de las dos expresiones anteriores:

$$(m_0 - \Delta m)v_1 + v_c \Delta m = 0.$$

Definimos el cambio en la velocidad, Δv_1 , del cohete después de disparar una bala como

$$v_1 = v_0 + \Delta v = 0 + \Delta v = \Delta v_1,$$

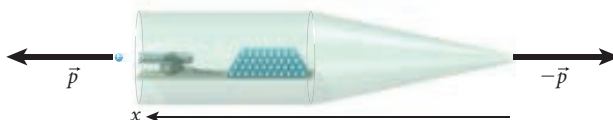


FIGURA 8.12 Modelo de juguete para la propulsión de cohete: disparando balas.

donde la suposición de que el cohete estaba inicialmente en reposo significa que $v_0 = 0$. Esto nos da la velocidad de retroceso del cohete debido al disparo de una bala:

$$\Delta v_1 = -\frac{v_c \Delta m}{m_0 - \Delta m}.$$

En el sistema móvil del cohete, podemos disparar la segunda bala. El disparo de la segunda bala reduce la masa del cohete de $m_0 - \Delta m$ a $m_0 - 2\Delta m$, lo cual da por resultado una velocidad adicional de retroceso de

$$\Delta v_2 = -\frac{v_c \Delta m}{m_0 - 2\Delta m}.$$

La velocidad total del cohete aumenta entonces a $v_2 = v_1 + \Delta v_2$. Después de disparar la bala n , el cambio de velocidad es

$$\Delta v_n = -\frac{v_c \Delta m}{m_0 - n\Delta m}. \quad (8.13)$$

Así, la velocidad del cohete después de disparar la bala n es

$$v_n = v_{n-1} + \Delta v_n.$$

Esta clase de ecuación, que definió el término n de una secuencia en donde cada término se expresa como una función de los términos precedentes, se llama *relación de recursión*. Se puede resolver de una forma sencilla usando una computadora. Sin embargo, podemos usar una aproximación muy útil para el caso en el que la masa emitida por unidad de tiempo es constante y pequeña en comparación con m , la masa total del cohete (dependiente del tiempo). En este límite obtenemos, a partir de la ecuación 8.13,

$$\Delta v = -\frac{v_c \Delta m}{m} \Rightarrow \frac{\Delta v}{\Delta m} = -\frac{v_c}{m}. \quad (8.14)$$

Aquí, v_c es la velocidad con que se expulsa la bala. En el límite $\Delta m \rightarrow 0$ obtenemos entonces la derivada

$$\frac{dv}{dm} = -\frac{v_c}{m}. \quad (8.15)$$

La solución de esta ecuación diferencial es

$$v(m) = -v_c \int_{m_0}^m \frac{1}{m'} dm' = -v_c \ln m \Big|_{m_0}^m = v_c \ln \left(\frac{m_0}{m} \right). \quad (8.16)$$

(Usted puede verificar que la ecuación 8.16 es ciertamente la solución de la ecuación 8.15, tomando la derivada de la ecuación 8.16 con respecto a m .)

Si m_i es el valor inicial de la masa total en algún tiempo t_i y m_f es la masa final en un tiempo posterior, podemos usar la ecuación 8.16 para obtener $v_i = v_c \ln (m_0/m_i)$ y $v_f = v_c \ln (m_0/m_f)$ para las velocidades inicial y final del cohete. Entonces, usando la propiedad de los logaritmos $\ln(a/b) = \ln a - \ln b$, encontramos la diferencia entre esas dos velocidades:

$$v_f - v_i = v_c \ln \left(\frac{m_0}{m_f} \right) - v_c \ln \left(\frac{m_0}{m_i} \right) = v_c \ln \left(\frac{m_i}{m_f} \right). \quad (8.17)$$

EJEMPLO 8.3 Lanzamiento de un cohete a Marte

Un procedimiento propuesto para enviar astronautas a Marte incluye armar una nave espacial en órbita alrededor de la Tierra, evitando así la necesidad de que la nave espacial venza la mayor parte de la gravedad de la Tierra en su partida. Suponga que dicha nave espacial tiene una capacidad de carga de 50 000 kg, 2 000 000 kg de combustible, y puede expulsar el propelente con una velocidad de 23.5 km/s (los propelentes actuales de cohetes producen una velocidad máxima de aproximadamente 5 km/s, pero con la propulsión electromagnética de cohetes se predice que producirá una velocidad quizá de 40 km/s).

(continúa)

(continuación)

PROBLEMA

¿Cuál es la velocidad final que puede alcanzar esta nave espacial, relativa a la velocidad que tenía inicialmente en su órbita alrededor de la Tierra?

SOLUCIÓN

Usando la ecuación 8.17 y sustituyendo los números dados en este problema, encontramos

$$v_f - v_i = v_c \ln\left(\frac{m_i}{m_f}\right) = (23.5 \text{ km/s}) \ln\left(\frac{2\,050\,000 \text{ kg}}{50\,000 \text{ kg}}\right) = (23.5 \text{ km/s})(\ln 41) = 87.3 \text{ km/s}.$$

Para comparación, el cohete Saturn V de etapas múltiples, que llevó a los astronautas a la Luna a finales de la década de 1960 y principios de la década de 1970, podía alcanzar una rapidez de sólo 12 km/s.

Sin embargo, incluso con tecnología avanzada como la propulsión electromagnética, los astronautas todavía tardarían varios meses en llegar a Marte, incluso con las condiciones más favorables. El *Mars Rover*, por ejemplo, tardó 207 días en viajar de la Tierra a Marte. La NASA estima que los astronautas en una misión como ésta recibirían aproximadamente de 10 a 20 veces más radiación que la dosis anual permisible para los trabajadores con radiación, lo cual llevaría a altas probabilidades de sufrir cáncer o daño cerebral. No se ha propuesto ningún mecanismo de blindaje que pudiera proteger a los astronautas de este peligro.

Otra manera, quizá más fácil, de pensar en el movimiento de cohetes es regresar a la definición del momento o ímpetu como el producto de la masa y la velocidad, y tomar la derivada con respecto al tiempo para obtener la fuerza. Sin embargo, ahora la masa del objeto puede también cambiar:

$$\vec{F}_{\text{neto}} = \frac{d}{dt} \vec{p} = \frac{d}{dt} (m\vec{v}) = m \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v} \frac{dm}{dt}.$$

(El último paso en esta ecuación representa la aplicación de la regla del producto de diferenciación del cálculo diferencial e integral.) Si ninguna fuerza externa está actuando sobre un objeto ($\vec{F}_{\text{neto}} = 0$) entonces obtenemos

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{v} \frac{dm}{dt}.$$

En el caso de movimiento de cohete (como se ilustra en la figura 8.13), el flujo de salida de propelente, dm/dt , es constante y crea el cambio en la masa del cohete. El propelente se mueve con velocidad constante, \vec{v}_c , relativa al cohete, de modo que obtenemos

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} = -\vec{v}_c \frac{dm}{dt}.$$

La combinación $v_c(dm/dt)$ se llama **empuje** del cohete. Es una fuerza y, por lo tanto, se mide en newtons:

$$\vec{F}_{\text{empuje}} = -\vec{v}_c \frac{dm}{dt}. \tag{8.18}$$

El empuje generado por los motores y aceleradores de cohete del Transbordador Espacial es de aproximadamente 31.3 MN (31.3 meganewtons, o aproximadamente 7.8 millones de libras). La masa inicial total del Transbordador Espacial, incluyendo la estructura, los tanques de combustible y el combustible de los cohetes, es ligeramente mayor que 2.0 millones kg; de modo que los motores y aceleradores del cohete del transbordador pueden producir una aceleración inicial de

$$a = \frac{\vec{F}_{\text{neto}}}{m} = \frac{3.13 \cdot 10^7 \text{ N}}{2.0 \cdot 10^6 \text{ kg}} = 16 \text{ m/s}^2.$$



FIGURA 8.13 Cohete en movimiento.

Esta aceleración es suficiente para elevar el transbordador desde la plataforma de lanzamiento contra la aceleración de la gravedad (-9.81 m/s^2). Una vez que el transbordador asciende y su masa disminuye, puede generar una aceleración mayor. Al gastarse el combustible, los motores principales se regulan para asegurar que la aceleración no exceda $3g$ (tres veces la aceleración gravitacional) para evitar dañar la carga o lesionar a los astronautas.

8.4 Cálculo del centro de masa

Hasta ahora no hemos tratado una pregunta clave: ¿cómo calculamos la ubicación del centro de masa para un objeto con forma arbitraria? Para responder a esta pregunta, encontremos la ubicación del centro de masa del martillo que se ilustra en la figura 8.14. Para hacer esto, podemos representar el martillo con pequeños cubos de tamaño idéntico, como se muestra en la parte inferior de la figura. Los centros de los cubos son sus centros de masa individuales, marcados con puntos rojos. Las flechas rojas son los vectores de posición de los cubos. Si aceptamos el conjunto de cubos como una buena aproximación al martillo, podemos usar la ecuación 8.3 para hallar el centro de masa del conjunto de cubos y, por ende, el del martillo.

Observe que no todos los cubos tienen la misma masa, porque las densidades del mango de madera y de la cabeza de hierro son muy diferentes. La relación entre densidad de masa (ρ), masa y volumen está dada por

$$\rho = \frac{dm}{dV}. \quad (8.19)$$

Si la densidad de masa es uniforme en todo un objeto, tenemos simplemente

$$\rho = \frac{M}{V} \quad (\text{para la constante } \rho). \quad (8.20)$$

Podemos entonces usar la densidad de masa y reescribir la ecuación 8.3:

$$\vec{R} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n \vec{r}_i m_i = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \rho(\vec{r}_i) V.$$

Aquí hemos supuesto que la densidad de masa de cada pequeño cubo es uniforme (pero posiblemente diferente de un cubo a otro) y que cada cubo tiene el mismo (pequeño) volumen, V .

Podemos obtener una aproximación cada vez mejor reduciendo el volumen de cada cubo y usando un número cada vez mayor de cubos. Este procedimiento le debe parecer muy familiar a usted, porque es exactamente lo que se hace en el cálculo diferencial e integral para llegar al límite para una integral. En este límite obtenemos, para la ubicación del centro de masa de un objeto con forma arbitraria:

$$\vec{R} = \frac{1}{M} \int_V \vec{r} \rho(\vec{r}) dV. \quad (8.21)$$

Aquí, la integral tridimensional de volumen abarca todo el volumen del objeto que se considera.

La siguiente pregunta que surge es qué sistema de coordenadas elegir con objeto de evaluar esta integral. Puede ser que usted nunca haya visto antes una integral tridimensional, y que haya trabajado sólo con integrales unidimensionales de la forma $\int f(x) dx$. Sin embargo, todas las integrales tridimensionales que usaremos en este capítulo se pueden reducir a (como máximo) tres integrales unidimensionales sucesivas, la mayoría de las cuales son muy sencillas de evaluar, siempre y cuando se seleccione un sistema de coordenadas adecuado.

Sistemas de coordenadas tridimensionales no cartesianas

El capítulo 1 presentó un sistema tridimensional de coordenadas ortogonales, el sistema de coordenadas cartesianas, con coordenadas x , y y z . Sin embargo, para algunas aplicaciones es matemáticamente más sencillo representar el vector de posición en otro sistema de coordenadas. Esta sección presenta brevemente dos sistemas tridimensionales que se usan comúnmente, que se pueden utilizar para especificar un vector en espacio tridimensional: las coordenadas esféricas y las coordenadas cilíndricas.

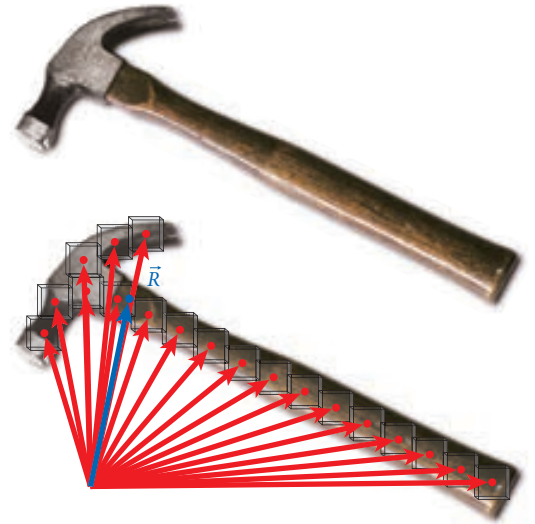


FIGURA 8.14 Cálculo del centro de masa de un martillo.

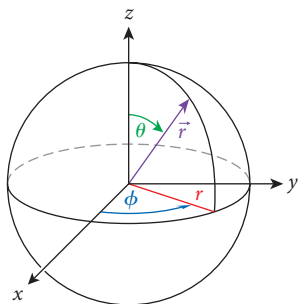


FIGURA 8.15 Sistema tridimensional de coordenadas esféricas.

Coordenadas esféricas

En las **coordenadas esféricas**, el vector de posición \vec{r} se representa con su longitud, r ; su ángulo polar relativo al eje positivo z , θ ; y el ángulo azimutal de la proyección del vector sobre el plano xy relativo al eje positivo x , ϕ (vea la figura 8.15).

Podemos obtener las coordenadas cartesianas del vector \vec{r} a partir de sus coordenadas esféricas mediante la transformación

$$\begin{aligned} x &= r \cos \phi \sin \theta \\ y &= r \sin \phi \sin \theta \\ z &= r \cos \theta. \end{aligned} \tag{8.22}$$

La transformación inversa, de coordenadas cartesianas a esféricas, es

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta &= \cos^{-1} \left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) \\ \phi &= \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right). \end{aligned} \tag{8.23}$$

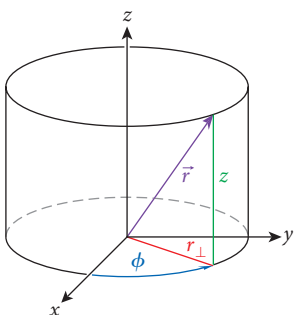


FIGURA 8.16 Sistema de coordenadas cilíndricas en tres dimensiones.

Coordenadas cilíndricas

Las **coordenadas cilíndricas** se pueden considerar como un intermedio entre los sistemas de coordenadas cartesianas y esféricas, en el sentido de que se conserva la coordenada cartesiana z ; pero las coordenadas cartesianas x y y se reemplazan por las coordenadas r_{\perp} y ϕ (figura 8.16). Aquí, r_{\perp} significa la longitud de la proyección del vector de posición \vec{r} sobre el plano xy , de modo que mide la distancia perpendicular al eje z . Igual que en las coordenadas esféricas, ϕ es el ángulo de la proyección del vector sobre el plano xy relativo al eje x positivo.

Obtenemos las coordenadas cartesianas a partir de las coordenadas cilíndricas mediante

$$\begin{aligned} x &= r_{\perp} \cos \phi \\ y &= r_{\perp} \sin \phi \\ z &= z. \end{aligned} \tag{8.24}$$

La transformación inversa, de coordenadas cartesianas a cilíndricas, es

$$\begin{aligned} r_{\perp} &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \phi &= \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right) \\ z &= z. \end{aligned} \tag{8.25}$$

Como regla práctica, usted debe usar un sistema de coordenadas cartesianas en su primer intento de describir cualquier situación física. Sin embargo, los sistemas de coordenadas cilíndricas y esféricas se prefieren frecuentemente cuando se trabaja con objetos que tienen simetría alrededor de un punto o una línea. Más adelante, en este capítulo, usaremos un sistema de coordenadas cilíndricas para realizar una integral tridimensional de volumen. El capítulo 9 explicará las coordenadas polares, que se pueden considerar como el equivalente bidimensional de las coordenadas ya sea cilíndricas o esféricas. Finalmente, en el capítulo 10, usaremos de nuevo las coordenadas cilíndricas y esféricas para resolver problemas un poco más complicados que necesitan integración.

Inserto matemático: integrales de volumen

Aun cuando el cálculo diferencial e integral es un prerrequisito para la física, muchas universidades permiten que los estudiantes tomen en forma simultánea cursos introductorios de física y de cálculo diferencial e integral. En general, este procedimiento funciona bien; pero cuando los estudiantes encuentran en la física integrales multidimensionales, a menudo es la primera vez que han visto esta notación. Por lo tanto, repasemos el procedimiento básico para realizar estas integraciones.

Si deseamos integrar cualquier función en un volumen tridimensional, necesitamos encontrar una expresión para el elemento de volumen dV en un sistema apropiado de coordenadas. A

menos que haya una razón extremadamente importante para no hacerlo, usted siempre debe usar sistemas de coordenadas ortogonales. Los tres sistemas comúnmente usados de coordenadas tridimensionales ortogonales son el cartesiano, el cilíndrico y el esférico.

Lo más fácil es expresar el elemento de volumen dV en coordenadas cartesianas; es simplemente el producto de los tres elementos individuales de las coordenadas (figura 8.17). La integral tridimensional de volumen escrita en coordenadas cartesianas es

$$\int_V f(\vec{r}) dV = \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} \left(\int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \left(\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} f(\vec{r}) dx \right) dy \right) dz. \quad (8.26)$$

En esta ecuación, $f(\vec{r})$ puede ser una función arbitraria de la posición. Los límites superior e inferior para las coordenadas individuales se denotan como x_{\min} , x_{\max} , \dots . La convención indica resolver primero la integral más interior y luego trabajar hacia el exterior. Para la ecuación 8.26, esto significa que debemos ejecutar primero la integración con respecto a x , luego la integración con respecto a y , y finalmente la integración con respecto a z . Sin embargo, cualquier otro orden es posible. Una forma igualmente válida de escribir la integral en la ecuación 8.26 es

$$\int_V f(\vec{r}) dV = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \left(\int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \left(\int_{z_{\min}}^{z_{\max}} f(\vec{r}) dz \right) dy \right) dx, \quad (8.27)$$

lo cual implica que el orden de integración es ahora z, y, x . ¿Por qué podría tener algún efecto el orden de integración? La única ocasión en que el orden de la integración es importante es cuando los límites de integración en una coordenada particular dependen de una de las otras coordenadas, o de las dos. El ejemplo 8.4 considerará una situación así.

Como el ángulo ϕ es una de las coordenadas en el sistema cilíndrico, el elemento de volumen no tiene forma de cubo. Para un ángulo diferencial dado, $d\phi$, el tamaño del elemento de volumen depende de qué tan lejos del eje z esté ubicado dicho elemento de volumen. Este tamaño aumenta linealmente con la distancia r_{\perp} del eje z (figura 8.18), y está dado por

$$dV = r_{\perp} dr_{\perp} d\phi dz. \quad (8.28)$$

La integral de volumen es entonces

$$\int_V f(\vec{r}) dV = \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} \left(\int_{\phi_{\min}}^{\phi_{\max}} \left(\int_{r_{\perp, \min}}^{r_{\perp, \max}} f(\vec{r}) r_{\perp} dr_{\perp} \right) d\phi \right) dz. \quad (8.29)$$

Nuevamente, el orden de integración se puede elegir para hacer la tarea tan sencilla como sea posible.

Finalmente, en coordenadas esféricas, usamos dos variables angulares, θ y ϕ (figura 8.19). Aquí, el tamaño del elemento de volumen para un valor dado de las coordenadas diferenciales depende de la distancia r al origen, así como del ángulo relativo al eje $\theta = 0$ (equivalente al eje z en coordenadas cartesianas o cilíndricas). El elemento de volumen diferencial en coordenadas esféricas es

$$dV = r^2 dr \sin \theta d\theta d\phi. \quad (8.30)$$

La integral de volumen en coordenadas esféricas está dada por

$$\int_V f(\vec{r}) dV = \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \left(\int_{\phi_{\min}}^{\phi_{\max}} \left(\int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} f(\vec{r}) \sin \theta d\theta \right) d\phi \right) r^2 dr. \quad (8.31)$$

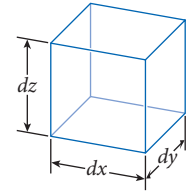


FIGURA 8.17 Elemento de volumen en coordenadas cartesianas.

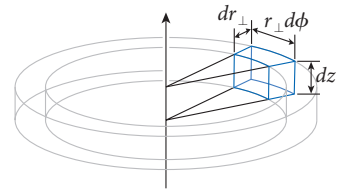


FIGURA 8.18 Elemento de volumen en coordenadas cilíndricas.

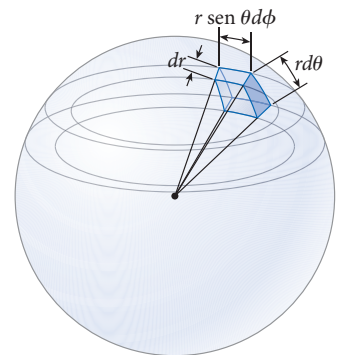


FIGURA 8.19 Elemento de volumen en coordenadas esféricas.

EJEMPLO 8.4 Volumen de un cilindro

Para ilustrar por qué puede ser más sencillo usar coordenadas no cartesianas en ciertas circunstancias, usemos integrales de volumen para hallar el volumen de un cilindro con radio R y altura H . Tenemos que integrar la función $f(\vec{r}) = 1$ sobre todo el cilindro para obtener el volumen.

(continúa)

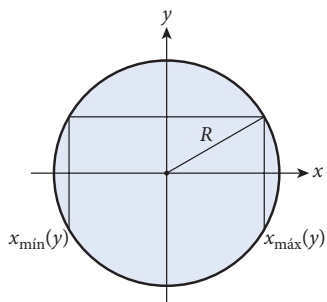


FIGURA 8.20 Superficie inferior de un cilindro recto de radio R .

(continuación)

PROBLEMA

Use una integral de volumen para encontrar el volumen de un cilindro recto de altura H y radio R .

SOLUCIÓN

En coordenadas cartesianas, colocamos el origen de nuestro sistema de coordenadas en el centro de la base circular del cilindro (superficie inferior), de modo que la forma en el plano xy sobre la que tenemos que integrar es un círculo con radio R (figura 8.20). La integral de volumen en coordenadas cartesianas es, entonces

$$\int_V dV = \int_0^H \left(\int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \left(\int_{x_{\min}(y)}^{x_{\max}(y)} dx \right) dy \right) dz. \tag{i}$$

La integral más interior se tiene que ejecutar primero, y es muy sencilla.

$$\int_{x_{\min}(y)}^{x_{\max}(y)} dx = x_{\max}(y) - x_{\min}(y). \tag{ii}$$

Los límites de integración dependen de y : $x_{\max} = \sqrt{R^2 - y^2}$ y $x_{\min} = -\sqrt{R^2 - y^2}$. Así, la solución de la ecuación (ii) es $x_{\max}(y) - x_{\min}(y) = 2\sqrt{R^2 - y^2}$. Sustituimos estos valores en la ecuación (i) y obtenemos

$$\int_V dV = \int_0^H \left(\int_{-R}^R 2\sqrt{R^2 - y^2} dy \right) dz. \tag{iii}$$

La más interior de estas dos integrales restantes se evalúa a

$$\int_{-R}^R 2\sqrt{R^2 - y^2} dy = \left[y\sqrt{R^2 - y^2} + R^2 \tan^{-1} \left(\frac{y}{\sqrt{R^2 - y^2}} \right) \right]_{-R}^R = \pi R^2.$$

Usted puede verificar este resultado observando la integral definida en una tabla de integrales. Al sustituir este resultado en la ecuación (iii), obtenemos finalmente nuestra respuesta:

$$\int_V dV = \int_0^H \pi R^2 dz = \pi R^2 \int_0^H dz = \pi R^2 H.$$

Como puede ver, obtener el volumen del cilindro fue bastante fastidioso en coordenadas cartesianas. ¿Qué tal si usamos coordenadas cilíndricas? De acuerdo con la ecuación 8.29, la integral de volumen es entonces

$$\begin{aligned} \int_V f(\vec{r}) dV &= \int_0^H \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^R r_{\perp} dr_{\perp} \right) d\phi \right) dz = \int_0^H \left(\int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} R^2 \right) d\phi \right) dz \\ &= \frac{1}{2} R^2 \int_0^H \left(\int_0^{2\pi} d\phi \right) dz = \frac{1}{2} R^2 \int_0^H 2\pi dz = \pi R^2 \int_0^H dz = \pi R^2 H. \end{aligned}$$

En este caso, fue mucho más fácil usar coordenadas cilíndricas, como consecuencia de la geometría del objeto sobre el cual teníamos que integrar.

8.2 Oportunidad de autoexamen

Usando coordenadas esféricas, demuestre que el volumen V de una esfera con radio R es $V = \frac{4}{3} \pi R^3$.

Ahora podemos regresar al problema de calcular la ubicación del centro de masa de un objeto. Para las componentes cartesianas del vector de posición, encontramos, por la ecuación 8.21:

$$X = \frac{1}{M} \int_V x \rho(\vec{r}) dV, \quad Y = \frac{1}{M} \int_V y \rho(\vec{r}) dV, \quad Z = \frac{1}{M} \int_V z \rho(\vec{r}) dV. \tag{8.32}$$

Si la densidad de masa para todo el objeto es constante, $\rho(\vec{r}) \equiv \rho$, podemos quitar este factor constante de la integral y obtener un caso especial de la ecuación 8.21 para densidad de masa constante:

$$\vec{R} = \frac{\rho}{M} \int_V \vec{r} dV = \frac{1}{V} \int_V \vec{r} dV \quad (\text{para } \rho \text{ constante}), \quad (8.33)$$

donde hemos usado la ecuación 8.20 en el último paso. Expresada en coordenadas cartesianas, obtenemos para este caso:

$$X = \frac{1}{V} \int_V x dV, \quad Y = \frac{1}{V} \int_V y dV, \quad Z = \frac{1}{V} \int_V z dV. \quad (8.34)$$

Las ecuaciones 8.33 y 8.34 indican que cualquier objeto que tenga un plano de simetría tiene su centro de masa ubicado en ese plano. Un objeto que tenga tres planos de simetría mutuamente perpendiculares (como un cilindro, un sólido rectangular o una esfera) tiene su centro de masa donde estos tres planos se intersecan; es decir, en su centro geométrico. El ejemplo 8.5 desarrolla más esta idea.

EJEMPLO 8.5 Centro de masa de una media esfera

PROBLEMA

Considere una media esfera sólida con densidad de masa constante, con radio R_0 (figura 8.21a). ¿Cuál es su centro de masa?

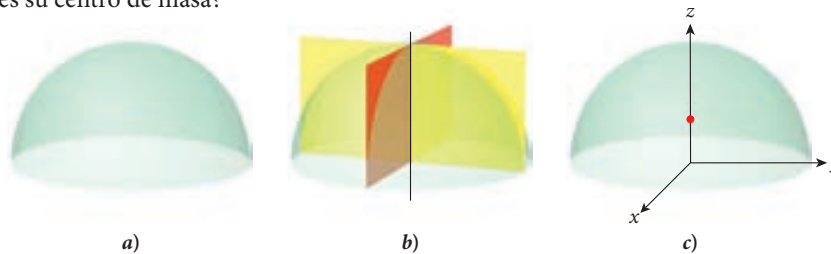


FIGURA 8.21 Determinación del centro de masa: a) media esfera; b) planos de simetría y eje de simetría; c) sistema de coordenadas, con la ubicación del centro de masa marcada por un punto rojo.

SOLUCIÓN

Como se muestra en la figura 8.21b), los planos de simetría pueden dividir este objeto en mitades iguales y especulares. Se muestran dos planos perpendiculares en rojo y amarillo; pero cualquier plano que pase por el eje vertical de simetría (indicado por la línea negra delgada) es un plano de simetría.

Ahora ubicamos el sistema de coordenadas de tal manera que un eje (el eje z , en este caso) coincida con este eje de simetría. Así nos aseguramos de que el centro de masa se ubique exactamente en ese eje. Como la distribución de masa es simétrica y los integrandos de las ecuaciones 8.33 u 8.34 son potencias impares de \vec{r} , la integral para X o Y debe tener el valor cero. Específicamente,

$$\int_{-a}^a x dx = 0 \text{ para todos los valores de la constante } a.$$

Al ubicar el sistema de coordenadas de manera que el eje z sea el eje de simetría asegura que $X = Y = 0$. Eso se muestra en la figura 8.21c), donde el origen del sistema de coordenadas se ubica en el centro de la superficie circular de la media esfera.

Ahora tenemos que encontrar el valor de la tercera integral en la ecuación 8.34:

$$Z = \frac{1}{V} \int_V z dV.$$

El volumen de la media esfera es la mitad del volumen de una esfera, o

$$V = \frac{2\pi}{3} R_0^3. \quad (i)$$

(continúa)

(continuación)

Para evaluar la integral para Z , usamos coordenadas cilíndricas, en las cuales el elemento de volumen diferencial está dado (vea la ecuación 8.28) como $dV = r_{\perp} dr_{\perp} d\phi dz$. La integral se evalúa entonces como sigue:

$$\begin{aligned} \int_V z dV &= \int_0^{R_0} \left(\int_0^{\sqrt{R_0^2 - z^2}} \left(\int_0^{2\pi} zr_{\perp} d\phi \right) dr_{\perp} \right) dz \\ &= \int_0^{R_0} z \left(\int_0^{\sqrt{R_0^2 - z^2}} r_{\perp} \left(\int_0^{2\pi} d\phi \right) dr_{\perp} \right) dz \\ &= 2\pi \int_0^{R_0} z \left(\int_0^{\sqrt{R_0^2 - z^2}} r_{\perp} dr_{\perp} \right) dz \\ &= \pi \int_0^{R_0} z(R_0^2 - z^2) dz \\ &= \frac{\pi}{4} R_0^4. \end{aligned}$$

Al combinar este resultado y la expresión para el volumen de una media esfera de la ecuación (i), obtenemos la coordenada z del centro de masa:

$$Z = \frac{1}{V} \int_V z dV = \frac{3}{2\pi R_0^3} \frac{\pi R_0^4}{4} = \frac{3}{8} R_0.$$

Observe que el centro de masa de un objeto no siempre tiene que estar ubicado dentro del objeto. En la figura 8.22 se muestran dos ejemplos obvios. Por consideraciones de simetría, se deduce que el centro de masa de la rosquilla [figura 8.22a)] está exactamente en el centro de su hoyo, en un punto fuera de la rosquilla. El centro de masa del bumerán [figura 8.22b)] está sobre el eje de simetría punteado, pero, nuevamente, fuera del objeto.

Centro de masa para objetos unidimensionales y bidimensionales

No todos los problemas que incluyen el cálculo del centro de masa se refieren a objetos tridimensionales. Por ejemplo, usted puede querer calcular el centro de masa de un objeto bidimensional como una placa plana de metal. Podemos escribir la ecuación para las coordenadas del centro de masa de un objeto bidimensional cuya densidad de masa de área (o masa por unidad de área) es $\sigma(\vec{r})$ modificando las expresiones para X y Y que se dan en la ecuación 8.32:

$$X = \frac{1}{M} \int_A x\sigma(\vec{r})dA, \quad Y = \frac{1}{M} \int_A y\sigma(\vec{r})dA, \tag{8.35}$$

donde la masa es

$$M = \int_A \sigma(\vec{r})dA. \tag{8.36}$$

Si la densidad de masa de área del objeto es constante, entonces $\sigma = M/A$, y podemos reescribir la ecuación 8.35 para obtener las coordenadas del centro de masa de un objeto bidimensional en términos del área, A , y las coordenadas x y y :

$$X = \frac{1}{A} \int_A x dA, \quad Y = \frac{1}{A} \int_A y dA, \tag{8.37}$$

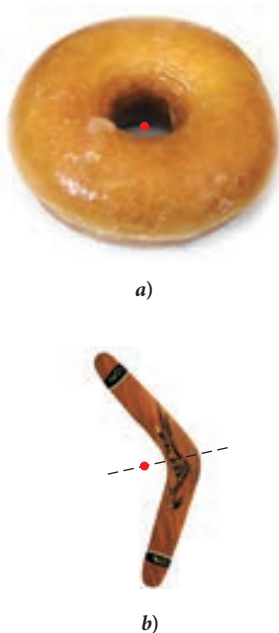


FIGURA 8.22 Objetos con un centro de masa (indicado por el punto rojo) fuera de su distribución de masa: a) rosquilla; b) bumerán. El eje de simetría del bumerán se muestra por una línea punteada.

donde el área total se obtiene de

$$A = \int_A dA. \quad (8.38)$$

Si el objeto es efectivamente unidimensional, como una varilla larga y delgada con longitud L y densidad de masa lineal (o masa por unidad de longitud) de $\lambda(x)$, la coordenada del centro de masa está dada por

$$X = \frac{1}{M} \int_L x \lambda(x) dx, \quad (8.39)$$

donde la masa es

$$M = \int_L \lambda(x) dx. \quad (8.40)$$

Si la densidad de masa lineal de la varilla es constante, entonces el centro de masa está claramente ubicado en el centro geométrico —la parte media de la varilla— y no se necesita ningún otro cálculo.

PROBLEMA RESUELTO 8.3 Centro de masa de una varilla larga y delgada

PROBLEMA

Una varilla larga y delgada está orientada a lo largo del eje x . Un extremo de la varilla está ubicado en $x = 1.00$ m, y el otro extremo está localizado en $x = 3.00$ m. La densidad de masa lineal de la varilla está dada por $\lambda(x) = ax^2 + b$, donde $a = 0.300$ kg/m³ y $b = 0.600$ kg/m. ¿Cuál es la masa de la varilla y cuál es la coordenada x de su centro de masa?

SOLUCIÓN

PIENSE

La densidad de masa lineal de la varilla no es uniforme, sino depende de la coordenada x . Por lo tanto, para obtener la masa debemos integrar la densidad de masa lineal a lo largo de la longitud de la varilla. Para obtener el centro de masa, necesitamos integrar la densidad de masa lineal, multiplicada por la distancia en la dirección x , y luego dividir entre la masa de la varilla.

ESBOCE

La figura 8.23 muestra la varilla larga y delgada orientada a lo largo del eje x .

INVESTIGUE

Obtenemos la masa de la varilla integrando la densidad de masa lineal, λ , sobre la varilla de $x_1 = 1.00$ m a $x_2 = 3.00$ m (vea la ecuación 8.40):

$$M = \int_{x_1}^{x_2} \lambda(x) dx = \int_{x_1}^{x_2} (ax^2 + b) dx = \left[a \frac{x^3}{3} + bx \right]_{x_1}^{x_2}.$$

Para encontrar la coordenada x del centro de masa de la varilla, X , evaluamos la integral de la diferencial de masa por x y luego dividimos entre la masa que acabamos de calcular (vea la ecuación 8.39):

$$X = \frac{1}{M} \int_{x_1}^{x_2} \lambda(x) x dx = \frac{1}{M} \int_{x_1}^{x_2} (ax^2 + b) x dx = \frac{1}{M} \int_{x_1}^{x_2} (ax^3 + bx) dx = \frac{1}{M} \left[a \frac{x^4}{4} + b \frac{x^2}{2} \right]_{x_1}^{x_2}.$$

SIMPLIFIQUE

Al evaluar en los límites superior e inferior, x_2 y x_1 , obtenemos la masa de la varilla:

$$M = \left[a \frac{x^3}{3} + bx \right]_{x_1}^{x_2} = \left(a \frac{x_2^3}{3} + bx_2 \right) - \left(a \frac{x_1^3}{3} + bx_1 \right) = \frac{a}{3} (x_2^3 - x_1^3) + b(x_2 - x_1).$$

(continúa)

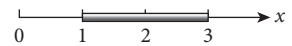


FIGURA 8.23 Una varilla larga y delgada orientada a lo largo del eje x .

(continuación)

Y, del mismo modo, encontramos la coordenada x del centro de masa de la varilla:

$$X = \frac{1}{M} \left[a \frac{x^4}{4} + b \frac{x^2}{2} \right]_{x_1}^{x_2} = \frac{1}{M} \left\{ \left(a \frac{x_2^4}{4} + b \frac{x_2^2}{2} \right) - \left(a \frac{x_1^4}{4} + b \frac{x_1^2}{2} \right) \right\},$$

que podemos simplificar a

$$X = \frac{1}{M} \left\{ \frac{a}{4} (x_2^4 - x_1^4) + \frac{b}{2} (x_2^2 - x_1^2) \right\}.$$

CALCULE

Al sustituir los valores numéricos, calculamos la masa de la varilla:

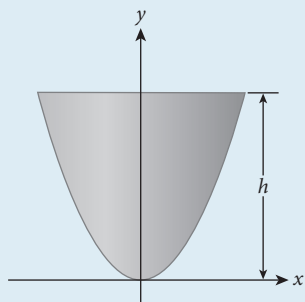
$$M = \frac{0.300 \text{ kg/m}^3}{3} \left((3.00 \text{ m})^3 - (1.00 \text{ m})^3 \right) + (0.600 \text{ kg/m})(3.00 \text{ m} - 1.00 \text{ m}) = 3.8 \text{ kg}.$$

Con los valores numéricos, la coordenada x de la varilla es

$$X = \frac{1}{3.8 \text{ kg}} \left\{ \frac{0.300 \text{ kg/m}^3}{4} \left((3.00 \text{ m})^4 - (1.00 \text{ m})^4 \right) + \frac{0.600 \text{ kg/m}}{2} \left((3.00 \text{ m})^2 - (1.00 \text{ m})^2 \right) \right\} = 2.210526316 \text{ m}.$$

8.3 Oportunidad de autoexamen

Se corta una placa de altura h de una lámina delgada de metal con densidad de masa uniforme, como se muestra en la figura. El arco inferior de la placa está definido por $y = 2x^2$. Demuestre que el centro de masa de esta placa está ubicado en $x = 0$ y $y = \frac{3}{5}h$.



REDONDEE

Todos los valores numéricos dados en el planteamiento del problema se especificaron con tres cifras significativas, de modo que presentemos nuestros resultados como

$$M = 3.80 \text{ kg}$$

y

$$X = 2.21 \text{ m}.$$

VUELVA A REVISAR

Para volver a revisar nuestra respuesta para la masa de la varilla, supongamos que la varilla tiene una densidad de masa constante igual a la densidad de masa lineal obtenida con $x = 2 \text{ m}$ (el punto medio de la varilla) en la expresión para λ en el problema, es decir,

$$\lambda = (0.3 \cdot 4 + 0.6) \text{ kg/m} = 1.8 \text{ kg/m}.$$

La masa de la varilla es entonces $m \approx 2 \text{ m} \cdot 1.8 \text{ kg/m} = 3.6 \text{ kg}$, lo cual es razonablemente cercano a nuestro cálculo exacto de $M = 3.80 \text{ kg}$.

Para volver a revisar la coordenada x del centro de masa de la varilla, suponemos nuevamente que la densidad de masa lineal es constante. Entonces el centro de masa estará ubicado en el punto medio de la varilla; es decir, $X \approx 2 \text{ m}$. Nuestra respuesta calculada es $X = 2.21 \text{ m}$, que está ligeramente a la derecha del punto medio de la varilla. Al observar la función para la densidad de masa lineal, vemos que la masa lineal de la varilla aumenta hacia la derecha, lo cual significa que el centro de masa de la varilla debe estar a la derecha del centro geométrico de la varilla. Nuestro resultado es, por lo tanto, razonable.

LO QUE HEMOS APRENDIDO | GUÍA DE ESTUDIO PARA EXAMEN

- El centro de masa es un punto en el que podemos imaginar que se concentra toda la masa de un objeto.
- La ubicación del centro de masa para un objeto de forma arbitraria está dada por $\vec{R} = \frac{1}{M} \int_V \vec{r} \rho(\vec{r}) dV$, donde la densidad de masa del objeto es $\rho = \frac{dm}{dV}$, la integración se extiende sobre el volumen total V del objeto, y M es su masa total.
- Cuando la densidad de masa es uniforme en todo el objeto, es decir $\rho = \frac{M}{V}$, el centro de masa es $\vec{R} = \frac{1}{V} \int_V \vec{r} dV$.
- Si un objeto tiene un plano de simetría, la ubicación del centro de masa debe estar en dicho plano.
- La ubicación del centro de masa para una combinación de varios objetos se puede encontrar

tomando el promedio de las posiciones de los centros de masa de los objetos individuales:

$$\vec{R} = \frac{\vec{r}_1 m_1 + \vec{r}_2 m_2 + \dots + \vec{r}_n m_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n \vec{r}_i m_i.$$

- El movimiento de un objeto extenso rígido se puede describir por el movimiento de su centro de masa.
- La velocidad del centro de masa está dada por la derivada de su vector de posición: $\vec{V} \equiv \frac{d}{dt} \vec{R}$.
- El momento o ímpetu del centro de masa para una combinación de varios objetos es $\vec{P} = M\vec{V} = \sum_{i=1}^n \vec{p}_i$.

Este momento o ímpetu obedece la segunda ley de

Newton: $\frac{d}{dt} \vec{P} = \frac{d}{dt} (M\vec{V}) = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{F}_{\text{neta}}$. Las fuerzas

internas dentro de los objetos no contribuyen a la suma de la que resulta la fuerza neta (porque siempre se presentan en pares acción-reacción que suman cero)

y por lo tanto no cambian el momento o ímpetu del centro de masa.

- Para un sistema de dos objetos, el momento o ímpetu total es $\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$, y el momento o ímpetu relativo es $\vec{p} = \frac{1}{2}(\vec{p}_1 - \vec{p}_2)$. En colisiones entre dos objetos, el momento o ímpetu o total permanece sin cambios.
- El movimiento de cohetes es un ejemplo de movimiento durante el cual la masa del objeto móvil no es constante. La ecuación de movimiento para un cohete en el espacio interestelar está dada por $\vec{F}_{\text{empuje}} = m\vec{a} = -\vec{v}_c \frac{dm}{dt}$, donde \vec{v}_c es la velocidad del propelente relativa al cohete y $\frac{dm}{dt}$ es la rapidez de cambio de masa debido al flujo de salida del propelente.
- La velocidad de un cohete como función de su masa está dada por $v_f - v_i = v_c \ln(m_i/m_f)$, donde los subíndices i y f indican masas y velocidades iniciales y finales.

TÉRMINOS CLAVE

centro de masa, p. 247
retroceso, p. 253
empuje, p. 258

coordenadas esféricas,
p. 260

coordenadas cilíndricas,
p. 260

NUEVOS SÍMBOLOS Y ECUACIONES

$\vec{R} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n \vec{r}_i m_i$, vector de posición de centro de masa combinado

$dV = r^2 dr \sin\theta d\theta d\phi$, elemento de volumen en coordenadas esféricas

$\vec{R} = \frac{1}{M} \int_V \vec{r} \rho(\vec{r}) dV$, centro de masa para un objeto extenso

\vec{F}_{empuje} , empuje de cohete

$dV = r_{\perp} dr_{\perp} d\phi dz$, elemento de volumen en coordenadas cilíndricas

RESPUESTAS A OPORTUNIDADES DE AUTOEXAMEN

8.1

$$\begin{aligned} Z &= \frac{z_{\text{rojo}} m_{\text{rojo}} + z_{\text{verde}} m_{\text{verde}} + z_{\text{naranja}} m_{\text{naranja}} + z_{\text{azul}} m_{\text{azul}} + z_{\text{morado}} m_{\text{morado}}}{M} \\ &= \frac{\frac{1}{2} h 2m_0 + \frac{1}{2} h m_0 + \frac{1}{2} h m_0 + \frac{1}{2} h m_0 + \frac{3}{2} h m_0}{6m_0} \\ &= \frac{w1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{3}{2}}{6} = \frac{2}{3} h = 1.7 \text{ m} \end{aligned}$$

Primero, evalúe la integral sobre el ángulo azimutal:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta &= [-\cos\theta]_0^{\pi} = -[\cos(\pi) - \cos(0)] = 2 \\ V &= 2 \int_0^R \left(\int_0^{2\pi} d\phi \right) r^2 dr \end{aligned}$$

8.2 Usamos coordenadas esféricas e integramos el ángulo θ de 0 a π , el ángulo ϕ de 0 a 2π y la coordenada radial r de 0 a R .

Ahora evalúe la integral del ángulo polar:

$$V = \int_0^R \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \right) d\phi \right) r^2 dr$$

$$\int_0^{2\pi} d\phi = [\phi]_0^{2\pi} = 2\pi$$

(continúa)

(continuación)

Finalmente,

$$V = 4\pi \int_0^R r^2 dr = 4\pi \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^R = \frac{4}{3} \pi R^3$$

8.3 $dA = x(y)dy; y = 2x^2 \Rightarrow x = \sqrt{y/2}$

$x(y) = 2\sqrt{y/2} = \sqrt{2y} dA = \sqrt{2y} dy$

$$Y = \frac{\int_0^h y \sqrt{2y} dy}{\int_0^h \sqrt{2y} dy} = \frac{\sqrt{2} \int_0^h y^{3/2} dy}{\sqrt{2} \int_0^h y^{1/2} dy} = \frac{\left[\frac{y^{5/2}}{5/2} \right]_0^h}{\left[\frac{y^{3/2}}{3/2} \right]_0^h}$$

$$Y = \frac{3}{5} h$$

PRÁCTICA PARA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Lineamientos de problemas resueltos: centro de masa

1. El primer paso para ubicar el centro de masa de un objeto o de un sistema de partículas es buscar planos de simetría. El centro de masa se debe ubicar sobre el plano de simetría, o en la línea de intersección de dos planos de simetría, o en el punto de intersección de más de dos planos.

2. Para formas complicadas, divida el objeto en formas geométricas más simples y calcule el centro de masa de cada forma individual. Luego combine los centros de masa individuales en un centro de masa general, usando el promedio de distancias y masas multiplicadas. Trate a los agujeros como objetos de masa negativa.

3. Cualquier movimiento de un objeto se puede tratar como una superposición del movimiento de su centro de masa (de acuerdo con la segunda ley de Newton) y la rotación del objeto alrededor de su centro de masa. Las colisiones a menudo se pueden analizar cómodamente considerando un marco de referencia con origen ubicado en el centro de masa.

4. Frecuentemente es inevitable la integración cuando usted necesita calcular el centro de masa. En un caso así, lo mejor es siempre pensar de manera cuidadosa acerca de la dimensionalidad de la situación y la elección del sistema de coordenadas (cartesianas, cilíndricas o esféricas).

PROBLEMA RESUELTO 8.4 Encendido del cohete acelerador

PROBLEMA

Suponga que una nave espacial tiene una masa inicial de 1 850 000 kg. Sin su propelente la nave tiene una masa de 50 000 kg. El cohete que genera potencia a la nave está diseñado para expulsar el propelente con una rapidez de 25 km/s con respecto al cohete, a un caudal constante de 15 000 kg/s. La nave está inicialmente en reposo en el espacio y viaja en línea recta. ¿Qué distancia viajará la nave espacial antes de que su cohete use todo el propelente y se apague?

SOLUCIÓN

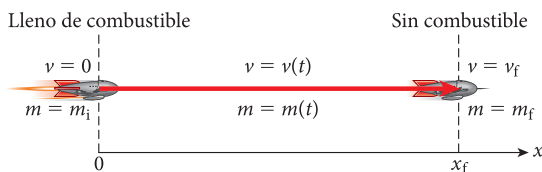
PIENSE

La masa total de propelente es la masa total de la nave espacial menos la masa de la nave espacial después de que todo su propelente ha sido expulsado. El cohete expulsa el propelente a un caudal constante, de modo que podemos calcular el tiempo durante el cual opera el cohete. Al gastarse el propelente, la masa de la nave disminuye y su rapidez aumenta. Si la nave parte del reposo, la rapidez $v(t)$ en cualquier tiempo mientras el cohete esté en operación se puede obtener por la ecuación 8.17, con la masa final de la nave reemplazada por la masa de la nave en ese tiempo. La distancia recorrida antes de que todo el propelente se agote está dada por la integral de la rapidez como función del tiempo.

ESBOCE

El vuelo de la nave espacial se traza en la figura 8.24.

FIGURA 8.24 Los diversos parámetros para la nave espacial mientras el cohete está en operación.



INVESTIGUE

Simbolizamos el caudal de expulsión del propelente por r_p . El tiempo $t_{\text{máx}}$ durante el cual operará el cohete está dado entonces por

$$t_{\text{máx}} = \frac{(m_i - m_f)}{r_p},$$

donde m_i es la masa inicial de la nave espacial y m_f es la masa de la nave espacial después de haberse expulsado todo el propelente. La distancia total que viaja la nave espacial en este intervalo de tiempo es la integral de la rapidez sobre el tiempo

$$x_f = \int_0^{t_{\text{máx}}} v(t) dt. \quad (\text{i})$$

Mientras está en operación el cohete, la masa de la nave en un tiempo t está dado por

$$m(t) = m_i - r_p t.$$

La rapidez de la nave espacial en cualquier tiempo después de que el cohete comienza a operar y antes de que se agote todo el propelente, está dado por (compare con la ecuación 8.17)

$$v(t) = v_c \ln\left(\frac{m_i}{m(t)}\right) = v_c \ln\left(\frac{m_i}{m_i - r_p t}\right) = v_c \ln\left(\frac{1}{1 - r_p t / m_i}\right), \quad (\text{ii})$$

donde v_c es la rapidez del propelente expulsado con respecto al cohete.

SIMPLIFIQUE

Ahora sustituimos en la ecuación (i) la dependencia de la rapidez de la nave espacial con respecto al tiempo por la que se deduce de la ecuación (ii), y obtenemos

$$x_f = \int_0^{t_{\text{máx}}} v(t) dt = \int_0^{t_{\text{máx}}} v_c \ln\left(\frac{1}{1 - r_p t / m_i}\right) dt = -v_c \int_0^{t_{\text{máx}}} \ln\left(\frac{1 - r_p t}{m_i}\right) dt. \quad (\text{iii})$$

Como $\int \ln(1 - ax) dx = \frac{ax - 1}{a} \ln(1 - ax) - x$ (usted puede buscar este resultado en una tabla de integrales), la integral se evalúa a

$$\begin{aligned} \int_0^{t_{\text{máx}}} \ln(1 - r_p t / m_i) dt &= \left[\left(\frac{r_p t / m_i - 1}{r_p / m_i} \right) \ln(1 - r_p t / m_i) - t \right]_0^{t_{\text{máx}}} \\ &= \left(\frac{r_p t_{\text{máx}} / m_i - 1}{r_p / m_i} \right) \ln(1 - r_p t_{\text{máx}} / m_i) - t_{\text{máx}} \\ &= (t_{\text{máx}} - m_i / r_p) \ln(1 - r_p t_{\text{máx}} / m_i) - t_{\text{máx}}. \end{aligned}$$

La distancia viajada es entonces

$$x_f = -v_c \left[(t_{\text{máx}} - m_i / r_p) \ln(1 - r_p t_{\text{máx}} / m_i) - t_{\text{máx}} \right].$$

CALCULE

El tiempo durante el cual está operando el cohete es

$$t_{\text{máx}} = \frac{m_i - m_f}{r_p} = \frac{1850\,000 \text{ kg} - 50\,000 \text{ kg}}{15\,000 \text{ kg/s}} = 120 \text{ s}.$$

Al sustituir los valores numéricos en el factor $1 - r_p t_{\text{máx}} / m_i$ obtenemos

$$1 - \frac{r_p t_{\text{máx}}}{m_i} = 1 - \frac{15\,000 \text{ kg/s} \cdot 120 \text{ s}}{1850\,000 \text{ kg}} = 0.027027.$$

(continúa)

(continuación)

Así, encontramos para la distancia viajada

$$x_f = -\left(25 \cdot 10^3 \text{ m/s}\right)\left[-(120 \text{ s}) + \left\{(120 \text{ s}) - \left(1.85 \cdot 10^6 \text{ kg}\right) / \left(15 \cdot 10^3 \text{ kg/s}\right)\right\} \ln(0.027027)\right] = 2.69909 \cdot 10^6 \text{ m.}$$

REDONDEE

Como la rapidez del propulente se dio con sólo dos cifras significativas, necesitamos redondear dicha exactitud:

$$x_f = 2.7 \cdot 10^6 \text{ m.}$$

VUELVA A REVISAR

Para volver a revisar nuestra respuesta para la distancia viajada, usamos la ecuación 8.17 para calcular la velocidad final de la nave espacial:

$$v_f = v_c \ln\left(\frac{m_i}{m_f}\right) = (25 \text{ km/s}) \ln\left(\frac{1.85 \cdot 10^6 \text{ kg}}{5 \cdot 10^4 \text{ kg}}\right) = 90.3 \text{ km/s.}$$

Si la nave espacial aceleraba a una tasa constante, la rapidez aumentaría linealmente con el tiempo, como se muestra en la figura 8.25, y la rapidez media durante el tiempo en que el propulente se estaba expulsando sería $\bar{v} = v_f/2$. Tomando esta rapidez media y multiplicándola por dicho tiempo obtenemos

$$x_{a\text{-const}} \approx \bar{v} t_{\text{máx}} = (v_f/2) t_{\text{máx}} = (90.3 / 2 \text{ km/s} \cdot 120 \text{ s}) / 2 = 5.4 \cdot 10^6 \text{ m.}$$

Esta distancia aproximada es mayor que nuestra respuesta calculada, porque en el cálculo la velocidad aumenta logarítmicamente en el tiempo hasta que alcanza el valor de 90.3 km/s. La aproximación es alrededor del doble de la distancia calculada, lo cual nos da confianza de que nuestra respuesta, por lo menos, tiene el orden de magnitud correcto.

La figura 8.25 muestra la solución exacta para $v(t)$ (curva roja). La distancia viajada, x_f , es el área bajo la curva roja. La línea azul muestra el caso en el que la aceleración constante da por resultado la misma velocidad final. Como usted puede ver, el área bajo la línea azul es aproximadamente el doble que bajo la curva roja. Como acabamos de calcular el área bajo la línea azul, $x_{a\text{-const}}$, y encontramos que es de alrededor del doble de nuestro resultado calculado, esto nos da confianza de que interpretamos correctamente.

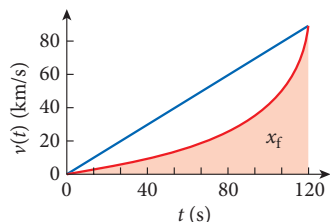


FIGURA 8.25 Comparación de la solución exacta para $v(t)$ (curva roja) con una solución para aceleración constante (línea azul).

PROBLEMA RESUELTO 8.5 Centro de masa de un disco con un agujero

PROBLEMA

¿Dónde está el centro de masa de un disco con un agujero rectangular (figura 8.26)? La altura del disco es $h = 11.0 \text{ cm}$, y su radio es $R = 11.5 \text{ cm}$. El agujero rectangular tiene una anchura $w = 7.0 \text{ cm}$ y una profundidad $d = 8.0 \text{ cm}$. El lado derecho del agujero está ubicado de tal manera que su punto medio coincide con el eje central del disco.

SOLUCIÓN

PIENSE

Una manera de enfocar este problema es escribir fórmulas matemáticas que describan la geometría tridimensional del disco con un agujero, y luego integrar sobre ese volumen para obtener las coordenadas del centro de masa. Si hiciéramos esto, nos encontraríamos con varias integrales difíciles. Una manera más simple de enfocar este problema es pensar en el disco con un agujero como un disco macizo *menos* un agujero rectangular. Es decir, tratamos el agujero como un objeto macizo con una masa negativa. Usando la simetría del disco macizo y del agujero, podemos especificar las coordenadas del centro de masa del disco macizo y las del centro de masa del agujero. Luego podemos combinar estas coordenadas, usando la ecuación 8.1, para encontrar el centro de masa del disco con un agujero.

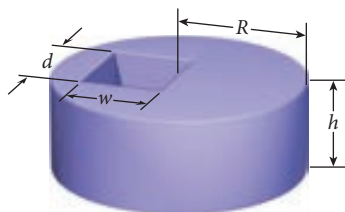


FIGURA 8.26 Vista tridimensional de un disco con un agujero rectangular.

ESBOCE

La figura 8.27a) muestra una vista aérea del disco con un agujero, con los ejes x y y asignados.

La figura 8.27b) muestra los dos planos de simetría del disco con un agujero. Un plano corresponde al plano xy , y el segundo es un plano a lo largo del eje x y perpendicular al plano xy . La línea en que los dos planos se intersecan está marcada con la letra A .

INVESTIGUE

El centro de masa debe estar a lo largo de la intersección de los dos planos de simetría. Por lo tanto, sabemos que el centro de masa sólo puede estar ubicado a lo largo del eje x . El centro de masa para el disco sin el agujero $x_d = 0$, es el origen del sistema de coordenadas, en $x_d = 0$, y el volumen del disco macizo es $V_d = \pi R^2 h$. Si el agujero fuese un objeto sólido con las mismas dimensiones ($h = 11.0$ cm, $w = 7.0$ cm y $d = 8.0$ cm), entonces tendría un volumen de $V_h = hwd$. Si este objeto sólido imaginado estuviera ubicado donde está el agujero, su centro de masa estaría en medio del agujero, a $x_h = -3.5$ cm. Ahora multiplicamos cada uno de los volúmenes por ρ , la densidad de masa del material del disco, para obtener las masas correspondientes, y asignamos una masa negativa al agujero. Entonces usamos la ecuación 8.1 para obtener la coordenada x del centro de masa:

$$X = \frac{x_d V_d \rho - x_h V_h \rho}{V_d \rho - V_h \rho} \quad (i)$$

Este método de tratar un agujero como un objeto de la misma forma y luego usar su volumen en los cálculos pero con masa (o carga) negativa es muy común en la física atómica y subatómica.

SIMPLIFIQUE

Podemos simplificar la ecuación (i) al observar que $x_d = 0$ y que ρ es un factor común:

$$X = \frac{-x_h V_h}{V_d - V_h}$$

Al sustituir las expresiones que obtuvimos antes para V_d y V_h , obtenemos

$$X = \frac{-x_h V_h}{V_d - V_h} = \frac{-x_h (hwd)}{\pi R^2 h - hwd} = \frac{-x_h wd}{\pi R^2 - wd}$$

Al definir el área del disco en el plano xy como $A_d = \pi R^2$ y el área del agujero en el plano xy como $A_h = wd$, podemos escribir

$$X = \frac{-x_h wd}{\pi R^2 - wd} = \frac{-x_h A_h}{A_d - A_h}$$

CALCULE

Al sustituir los números dados, encontramos que el área del disco es

$$A_d = \pi R^2 = \pi (11.5 \text{ cm})^2 = 415.475 \text{ cm}^2,$$

y el área del agujero es

$$A_h = wd = (7.0 \text{ cm})(8.0 \text{ cm}) = 56 \text{ cm}^2.$$

Por lo tanto, la ubicación del centro de masa del disco con el agujero (recuerde que $x_h = -3.5$ cm) es

$$X = \frac{-x_h A_h}{A_d - A_h} = \frac{-(-3.5 \text{ cm})(56 \text{ cm}^2)}{(415.475 \text{ cm}^2) - (56 \text{ cm}^2)} = 0.545239 \text{ cm}.$$

REDONDEE

Al expresar nuestra respuesta con dos cifras significativas, reportamos la coordenada x del centro de masa del disco con un agujero como

$$X = 0.55 \text{ cm}.$$

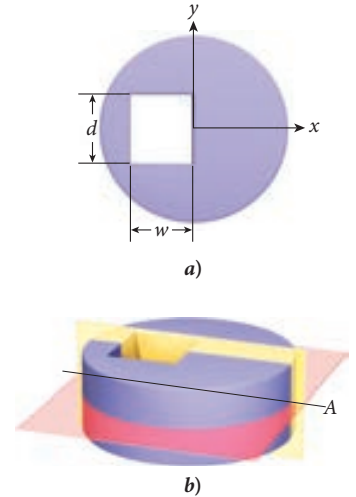


FIGURA 8.27 a) Vista aérea del disco con un agujero con un sistema de coordenadas asignado. b) Planos simétricos del disco con un agujero.

(continúa)

(continuación)

VUELVA A REVISAR

Este punto es un poco a la derecha del centro del disco sólido, por una distancia que es una pequeña fracción del radio del disco. Este resultado parece razonable porque quitar material del disco a la izquierda de $x = 0$ debe correr a la derecha el centro de gravedad, igual que lo calculamos.

PREGUNTAS DE OPCIÓN MÚLTIPLE

8.1 Un hombre, de pie sobre hielo sin fricción, lanza un bumerán que regresa a él. Elija la afirmación correcta:

- a) Como el momento o ímpetu del sistema hombre-bumerán se conserva, el hombre entrará en reposo al regresar el bumerán y sostenerlo en la misma posición desde la cual lo lanzó.
- b) Es imposible que el hombre lance un bumerán en esta situación.
- c) Es posible que el hombre lance un bumerán, pero como está parado sobre hielo sin fricción, el bumerán no puede regresar cuando lo lance.
- d) El momento o ímpetu total del sistema hombre-bumerán no se conserva, de modo que el hombre se estará deslizando hacia atrás sosteniendo el bumerán después de atraparlo.

8.2 Cuando un núcleo de bismuto-208 en reposo se desintegra, se produce talio-204, además de una partícula alfa (núcleo de helio-4). Los números de masa del bismuto-208, del talio-204 y del helio-4 son 208, 204 y 4, respectivamente. (El número de masa representa el número total de protones y neutrones en el núcleo.) La energía cinética del núcleo de talio es

- a) igual a la de la partícula alfa.
- b) menor que la de la partícula alfa.
- c) mayor que la de la partícula alfa.

8.3 Dos objetos con masas m_1 y m_2 se mueven a lo largo del eje x en sentido positivo, con rapidez v_1 y v_2 , respectivamente, donde v_1 es menor que v_2 . La rapidez del centro de masa de este sistema de dos cuerpos es

- a) menor que v_1 .
- b) igual a v_1 .
- c) igual a la media de v_1 y v_2 .
- d) mayor que v_1 y menor que v_2 .
- e) mayor que v_2 .

8.4 Un proyectil de artillería se está moviendo en una trayectoria parabólica cuando estalla en el aire. El proyectil se rompe en un número muy grande de fragmentos. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera? (Seleccione todas las que se apliquen.)

- a) La fuerza de la explosión aumentará el momento o ímpetu del sistema de fragmentos y, por lo tanto, el momento o ímpetu del proyectil *no* se conserva durante la explosión.
- b) La fuerza de la explosión es una fuerza interna y por ello no puede alterar el momento o ímpetu total del sistema.
- c) El centro de masa del sistema de fragmentos se seguirá moviendo en la trayectoria parabólica inicial hasta que el último fragmento toque el suelo.

d) El centro de masa del sistema de fragmentos continuará moviéndose sobre la trayectoria parabólica inicial hasta que el primer fragmento toque el suelo.

e) El centro de masa del sistema de fragmentos tendrá una trayectoria que depende del número de fragmentos y de sus velocidades inmediatamente después de la explosión.

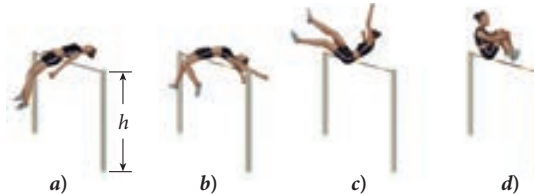
8.5 Un astronauta de 80 kg se separa de su nave espacial. Está a 15.0 m de distancia de la nave y en reposo relativo respecto a la nave. En un esfuerzo por regresar, lanza un objeto de 500 g con una rapidez de 8.0 m/s en dirección opuesta a la nave. ¿Cuánto tarda en regresar a la nave?

- a) 1 s
- b) 10 s
- c) 20 s
- d) 200 s
- e) 300 s

8.6 Usted se encuentra en la situación (¿realista?) de quedarse varado en una balsa de 300 kg (incluido usted mismo) en medio de una laguna, sin nada más que una pila de bolas de boliche de 7 kg y de pelotas de tenis de 55 g. Usando su conocimiento de propulsión de cohetes, usted decide comenzar lanzando bolas y pelotas de la balsa para moverse hacia la orilla. ¿Cuál de las siguientes alternativas le permitirá llegar más rápido a la orilla?

- a) Lanzar las pelotas de tenis a 35 m/s, a razón de 1 pelota por segundo.
- b) Lanzar las bolas de boliche a 0.5 m/s, a razón de 1 bola cada 3 s.
- c) Lanzar simultáneamente una pelota de tenis y una bola de boliche cada vez, la pelota de tenis a 15 m/s y la bola de boliche a 0.3 m/s, a razón de 1 pelota de tenis y una bola de boliche cada 4 s.
- d) No hay información suficiente para decidir.

8.7 Las figuras muestran una saltadora de altura usando diferentes técnicas para pasar sobre la barra. ¿Cuál técnica le permitirá salvar la altura máxima de la barra?



8.8 El centro de masa de un objeto rígido irregular *siempre* está ubicado

- a) en el centro geométrico del objeto.
- b) en algún punto dentro del objeto.
- c) las dos anteriores.
- d) ninguna de las anteriores.

8.9 Una catapulta sobre un campo a nivel lanza una piedra de 3 kg a una distancia horizontal de 100 m. Una segunda piedra de 3 kg que se lanza de modo idéntico y se rompe en el aire en dos trozos, uno con una masa de 1 kg y el otro con una masa de 2 kg. Ambos trozos caen en tierra al mismo tiempo. Si el trozo de 1 kg aterriza a una distancia de 180 m de la catapulta, ¿a qué distancia de la catapulta aterriza el trozo de 2 kg? Ignore la resistencia del aire.

- a) 20 m c) 100 m e) 180 m
b) 60 m d) 120 m

8.10 Dos masas puntuales están ubicadas en el mismo plano. La distancia de la masa 1 al centro de masa es de 3.0 m. La distancia de la masa 2 al centro de masa es de 1.0 m. ¿Cuál es la relación m_1/m_2 entre la masa 1 y la masa 2?

- a) 3/4 c) 4/7 e) 1/3
b) 4/3 d) 7/4 f) 3/1

8.11 Una botella cilíndrica de aderezo de ensalada de aceite y vinagre, cuyo volumen es de 1/3 de vinagre ($\rho = 1.01 \text{ g/cm}^3$) y

2/3 de aceite ($\rho = 0.910 \text{ g/cm}^3$) está en reposo sobre una mesa. Inicialmente, el aceite y el vinagre están separados, con el aceite flotando encima del vinagre. Se agita la botella de modo que el aceite y el vinagre se mezclen uniformemente, y se vuelve a poner la botella sobre la mesa. ¿Cómo cambió la altura del centro de masa del aderezo como resultado de la mezcla?

- a) Es mayor. d) No hay suficiente información para responder esta pregunta.
b) Es menor.
c) Es la misma.

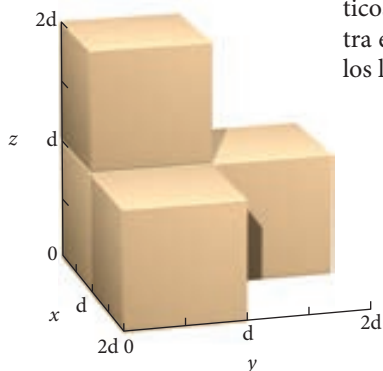
8.12 Una varilla unidimensional tiene una densidad lineal que varía con la posición de acuerdo con la relación $\lambda(x) = cx$ donde c es una constante y $x = 0$ es el extremo izquierdo de la varilla. ¿Dónde espera usted que se ubique el centro de masa?

- a) En medio de la varilla.
b) A la izquierda del punto medio de la varilla.
c) A la derecha del punto medio de la varilla.
d) En el extremo derecho de la varilla.
e) En el extremo izquierdo de la varilla.

PREGUNTAS

8.13 Se lanza un proyectil al aire. En el camino estalla. ¿Cómo afecta la explosión el movimiento del centro de masa del proyectil?

8.14 Encuentre el centro de masa del conjunto de cubos idénticos uniformes que se muestra en la figura. La longitud de los lados de cada cubo es d .



8.15 Se dispara un cohete modelo que tiene un alcance horizontal de 100 m. Una pequeña explosión parte el cohete en dos partes iguales. ¿Qué puede usted decir acerca de los puntos en que los fragmentos tocarán el suelo?

8.16 ¿Se puede ubicar el centro de masa de un objeto en un punto fuera del objeto; es decir, un punto del espacio en donde no se ubica ninguna parte del objeto? Explique.

8.17 ¿Es posible que dos masas sufran una colisión tal que el sistema de las dos masas tenga más energía cinética que la que tenían las dos masas separadas? Explique.

8.18 Pruebe que el centro de masa de una placa metálica delgada en forma de triángulo equilátero está ubicada en la intersección de las alturas del triángulo, por cálculo directo y por razonamiento físico.

8.19 Una lata de gaseosa de masa m y altura L está llena de gaseosa de masa M . Se hace un agujero en la base de la lata para drenar la gaseosa.

a) ¿Cuál es el centro de masa del sistema consistente en la lata y la gaseosa que queda cuando el nivel de la gaseosa en la lata es h , donde $0 < h < L$?

b) ¿Cuál es el valor mínimo del centro de masa al drenarse la gaseosa?

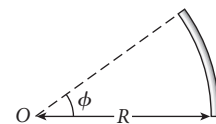
8.20 Un astronauta de masa M flota en el espacio a una distancia constante D de su nave cuando se rompe la cuerda de seguridad. Lleva consigo una caja de herramientas de masa $M/2$ que contiene un gran mazo de hierro de masa $M/4$ que da una masa total de $3M/4$. Puede lanzar estos objetos con una rapidez v relativa a su rapidez final después de lanzar cada objeto. Quiere regresar a la nave tan pronto como sea posible.

a) Para obtener la rapidez final máxima, ¿debe el astronauta lanzar los dos objetos juntos, o debe tirarlos uno cada vez? Explique.

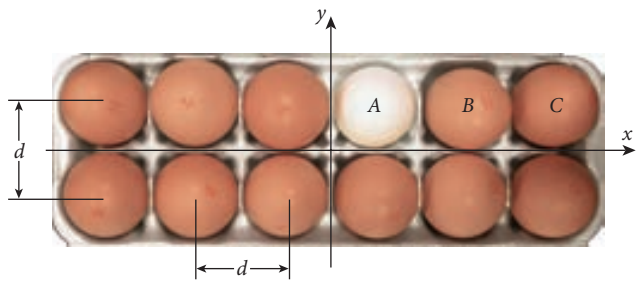
b) Para lograr la máxima rapidez, ¿es mejor lanzar primero el mazo o primero la caja de herramientas, o no importa el orden? Explique.

c) Encuentre la rapidez máxima a que el astronauta puede comenzar a moverse hacia la nave.

8.21 Una varilla de metal con una densidad de longitud (masa por unidad de longitud) λ se dobla en un arco circular de radio R que subtende un ángulo total ϕ , como se muestra en la figura. ¿A qué distancia de O se encuentra el centro de masa de este arco, como función del ángulo ϕ ? Grafique la coordenada de este centro de masa como función de ϕ .



8.22 El envase de cartón que se muestra en la figura está lleno con una docena de huevos, cada uno con masa m . Inicialmente, el centro de masa de los huevos está en el centro del envase, que es el mismo punto que el origen del sistema de coordenadas cartesianas que se muestra. ¿Dónde está el centro de masa



de los huevos restantes, en términos de la distancia d entre huevos sucesivos, en cada una de las siguientes situaciones? Desprecie la masa del envase.

- a) Sólo se quita el huevo A.
- b) Sólo se quita el huevo B.
- c) Sólo se quita el huevo C.
- d) Se quitan los huevos A, B y C.

PROBLEMAS

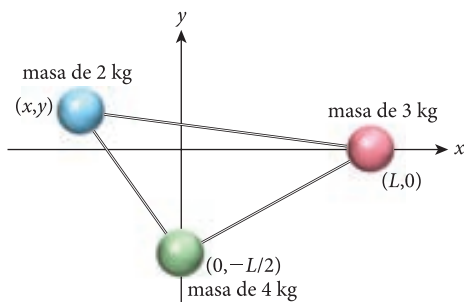
Una • y dos •• indican un nivel creciente de dificultad del problema.

Sección 8.1

8.25 Encuentre la siguiente información de centros de masa acerca de objetos en el Sistema Solar. Usted puede consultar los datos necesarios en Internet o en las tablas del capítulo 12 de este libro. Suponga distribuciones esféricas simétricas de masa para todos los objetos considerados.

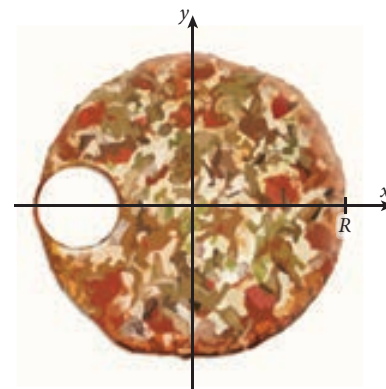
- a) Determine la distancia desde el centro de masa del sistema Tierra-Luna al centro geométrico de la Tierra.
- b) Determine la distancia desde el centro de masa del sistema Sol-Júpiter al centro geométrico del Sol.

•**8.26** Las coordenadas del centro de masa para el objeto extenso que se muestra en la figura son $(L/4, -L/5)$. ¿Cuáles son las coordenadas de la masa de 2 kg?



•**8.27** Unos acróbatas jóvenes están parados en reposo sobre una plataforma circular horizontal suspendida por el centro. Se supone que el origen del sistema bidimensional de coordenadas cartesianas está en el centro de la plataforma. Un acróbata de 30.0 kg está ubicado en $(3.00 \text{ m}, 4.00 \text{ m})$, y un acróbata

8.23 A una pizza circular de radio R se le ha quitado de un lado un trozo circular de radio $R/4$, como se muestra en la figura. ¿Dónde está el centro de masa de la pizza con el hueco?

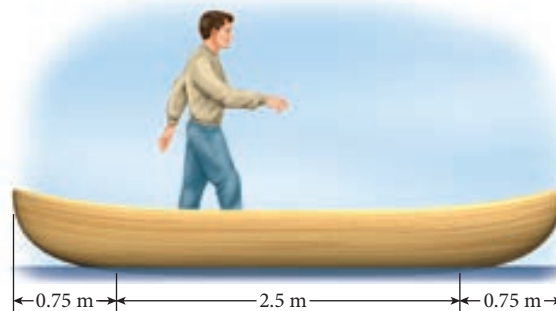


8.24 Suponga que usted coloca un reloj de arena antiguo, con arena en la parte baja, sobre una balanza analítica muy sensible, para determinar su masa. Luego lo voltea (manejándolo con guantes muy limpios) y lo vuelve a colocar sobre la balanza. Usted quiere predecir si la lectura de la balanza será menor, mayor o igual que antes. ¿Qué necesita calcular para responder esta pregunta? Explique cuidadosamente qué debe calcularse y qué significarían los resultados? No necesita intentar el cálculo.

de 40 kg está ubicado en $(-2.00 \text{ m}, -2.00 \text{ m})$. Suponiendo que los acróbatas permanecen quietos en sus posiciones, ¿dónde debe ubicarse un acróbata de 20.0 kg de modo que el centro de masa del sistema consistente en los tres acróbatas esté en el origen y la plataforma esté equilibrada?

Sección 8.2

8.28 Un hombre con una masa de 55 kg está de pie en una canoa de 65 kg con longitud de 4.0 m que flota en el agua. Camina de un punto 0.75 m desde la popa de la canoa hasta un punto a 0.75 m de la proa de la canoa. Suponga fricción despreciable entre la canoa y el agua. ¿Qué distancia se mueve la canoa?



8.29 Un auto de juguete con masa de 2.0 kg está estacionario, y un niño rueda un camión de juguete con masa de 3.5 kg directo hacia el auto, con una rapidez de 4.0 m/s.

- a) ¿Cuál es la velocidad del centro de masa del sistema consistente en los dos juguetes?
- b) ¿Cuáles son las velocidades del camión y el auto con respecto al centro de masa del sistema consistente en los dos juguetes?

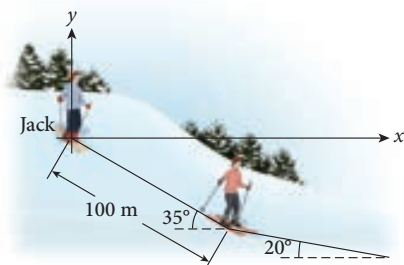
8.30 Un motociclista que dobla a un actor planea partir de un extremo de un vagón-plataforma de ferrocarril, acelerar hacia el otro extremo del vagón y saltar a una plataforma fija. La motocicleta y el motociclista tienen una masa de 350 kg y una longitud de 2.00 m. El vagón-plataforma tiene una masa de 1 500 kg y una longitud de 20.0 m. Suponga que hay fricción despreciable entre las ruedas del vagón-plataforma y los rieles, y que la motocicleta y el motociclista se pueden mover por el aire con resistencia despreciable. El vagón-plataforma inicialmente está tocando la plataforma fija. Los promotores del evento le han preguntado a usted a qué distancia estará el vagón-plataforma de la plataforma fija cuando el motociclista llegue al final del vagón-plataforma. ¿Cuál es su respuesta?



8.31 Partiendo del reposo, dos estudiantes están de pie sobre trineos de 10.0 kg que apuntan en direcciones opuestas, sobre el hielo, y se pasan de un lado a otro un balón medicinal de 5.00 kg. El estudiante de la izquierda tiene una masa de 50.0 kg y puede lanzar el balón con una rapidez relativa de 10.0 m/s. El estudiante de la derecha tiene una masa de 45.0 kg y puede lanzar el balón con una velocidad relativa de 12.0 m/s. (Suponga que no hay fricción entre el hielo y los trineos, ni resistencia de aire.)

- Si el estudiante de la izquierda lanza el balón horizontalmente al estudiante de la derecha, ¿con qué rapidez se mueve hacia la derecha el estudiante de la izquierda después del lanzamiento?
- ¿Qué tan rápido se mueve el estudiante de la derecha a la derecha después de atrapar el balón?
- Si el estudiante de la derecha devuelve el balón, ¿qué tan rápido se moverá el estudiante de la izquierda después de atrapar el pase del estudiante de la derecha?
- ¿Qué tan rápido se mueve el estudiante de la derecha después del pase?

8.32 Dos esquiadores, Annie y Jack, parten del reposo en diferentes puntos de una colina al mismo tiempo. Jack, con masa de 88.0 kg, esquía desde la cima de la colina por una sección más empinada con un ángulo de inclinación de 35.0°. Annie, con masa de 64.0 kg, parte de un punto más bajo y esquía por una sección menos empinada, con un ángulo de inclinación de 20.0°. La longitud de la sección más empinada es de 100. m. Determine los vectores de aceleración, velocidad y posición del centro de masa combinado para Annie y Jack como función del tiempo antes de que Jack llegue a la sección menos empinada.



8.33 Muchas colisiones nucleares que se estudian en laboratorios se analizan en un marco de referencia relativo al laboratorio. Un protón, con una masa de $1.6605 \cdot 10^{-27}$ kg y viajando con una rapidez de 70.0% de la rapidez de la luz, c , choca con un núcleo de estaño-116 (^{116}Sn), con una masa de $1.9096 \cdot 10^{-25}$ kg. ¿Cuál es la rapidez del centro de masa con respecto al marco de referencia del laboratorio? Responda en términos de c , la rapidez de la luz.

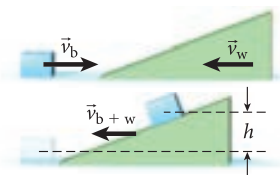
8.34 Un sistema consiste de dos partículas. La partícula 1, con masa de 2.0 kg, está ubicada en (2.0 m, 6.0 m), y tiene una velocidad de (4.0 m/s, 2.0 m/s). La partícula 2, con masa de 3.0 kg, está ubicada en (4.0 m, 1.0 m) y tiene una velocidad de (0, 4.0 m/s).

- Determine la posición y la velocidad del centro de masa del sistema.
- Trace los vectores de posición y velocidad para las partículas individuales y para el centro de masa.

8.35 Una manguera contra incendio con diámetro de 4.00 cm puede rociar agua con una velocidad de 10.0 m/s. Para un flujo horizontal continuo de agua, ¿qué fuerza horizontal debe ejercer un bombero sobre la manguera para mantenerla estacionaria?

8.36 Un bloque de masa $m_b = 1.2$ kg se desliza a la derecha con una rapidez de 2.5 m/s sobre una superficie horizontal sin fricción, como se muestra en la figura. “Choca” con una cuña de masa m_w , con lo cual se mueve a la izquierda con una rapidez de 1.1 m/s. La cuña tiene tal forma que el bloque se desliza continuamente hacia arriba de la superficie de Teflón (¡sin fricción!) cuando los dos se juntan. En relación con la superficie horizontal, el bloque y la cuña se mueven con una velocidad común v_{b+w} en el instante en que el bloque deja de deslizarse hacia arriba sobre la cuña.

- Si el centro de masa del bloque se eleva en una distancia $h = 0.37$ m, ¿cuál es la masa de la cuña?



- ¿Cuál es v_{b+w} ?

Sección 8.3

8.37 Una característica importante de los motores de cohete es el impulso específico, que se define como el impulso total (integral en el tiempo del empuje) por unidad de peso en tierra de combustible/oxidante gastado (el uso del peso, en vez de masa, en esta definición se debe a razones puramente históricas).

- Considere un motor de cohete que opera en el espacio libre con una rapidez de tobera de salida v . Calcule el impulso específico del motor.
- Un motor de cohete modelo tiene una rapidez típica de salida de tobera $v_{\text{jug}} = 800$. m/s. Los mejores motores cohete químicos tienen rapidez de salida de aproximadamente $v_{\text{quím}} = 4.00$ km/s. Evalúe y compare los valores de impulso específico para estos motores.

8.38 Una astronauta está haciendo una caminata espacial fuera de la Estación Espacial Internacional. La masa total de la

astronauta con su traje espacial y todo su equipo es de 115 kg. Se presenta una pequeña fuga en su sistema de propulsión y se expulsan al espacio 7.00 g de gas cada segundo, con una rapidez de 800 m/s. Ella nota la fuga 6.00 s después de que comienza. ¿Cuánto la habrá hecho mover la fuga de gas desde su ubicación original en el espacio hasta ese momento?

•8.39 Un cohete en el espacio exterior lleva una carga de 5 190.0 kg y $1.551 \cdot 10^5$ kg de combustible. El cohete puede expulsar propelente con una rapidez de 5.600 km/s. Suponga que el cohete parte del reposo, acelera a su velocidad final y entonces comienza su viaje. ¿Cuánto tardará el cohete en viajar una distancia de $3.82 \cdot 10^5$ km (aproximadamente la distancia entre la Tierra y la Luna)?

••8.40 Una cadena uniforme con una masa de 1.32 kg por metro de longitud está enroscada sobre una mesa. Se tira de un extremo hacia arriba, con una rapidez constante de 0.47 m/s.

- Calcule la fuerza neta que actúa sobre la cadena.
- En el instante en que se han levantado de la mesa 0.15 m de la cadena, ¿cuánta fuerza se debe aplicar al extremo que se está levantando?

••8.41 Un motor de nave espacial genera 53.2 MN de empuje con una velocidad de propelente de 4.78 km/s.

- Encuentre el caudal (dm/dt) con el que se expulsa el propelente.
- Si la masa inicial es de $2.12 \cdot 10^6$ kg y la masa final es de $7.04 \cdot 10^4$ kg, encuentre la rapidez final de la nave espacial (suponga que la rapidez inicial es cero y cualesquier campos gravitacionales son suficientemente pequeños para ignorarlos).
- Encuentre la aceleración media hasta el tiempo en que todo el propelente se ha gastado; suponga que el caudal masivo es constante hasta ese tiempo.

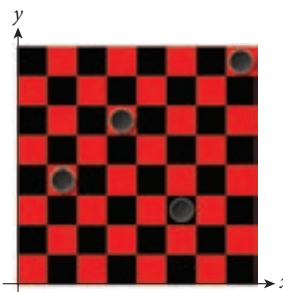
••8.42 Una carreta que corre sobre pistas aéreas sin fricción está propulsada por una corriente de agua expulsada por un lavador a presión movido por gas estacionado sobre la carreta. Hay un tanque de agua de 1.00 m^3 sobre la carreta para suministrar el agua para el lavador a presión. La masa de la carreta, incluido el operador que va en ella, el lavador de presión con su combustible y el tanque de agua vacío, es de 400 kg. El agua se puede dirigir, moviendo una válvula, ya sea hacia adelante o hacia atrás. En ambas direcciones, el lavador de presión expulsa 200. L de agua por minuto con una velocidad de tobera de 25.0 m/s.

- Si la carreta parte del reposo, ¿después de cuánto tiempo debe cambiarse de atrás (empuje hacia adelante) a adelante (empuje hacia atrás) para que termine en reposo?
- ¿Cuál es la masa de la carreta en ese tiempo, y cuál es su velocidad? (*Pista:* ¡Es seguro despreciar la disminución de masa debida al consumo de gas del lavador a presión movido por gas!)
- ¿Cuál es el empuje de este “cohete”?
- ¿Cuál es la aceleración de la carreta inmediatamente antes de cambiar de dirección a la válvula?

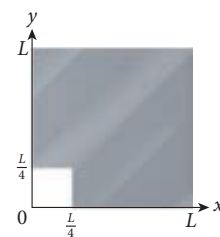
Sección 8.4

8.43 Un tablero de damas de 32.0 cm por 32.0 cm tiene una masa de 100. g. Hay cuatro fichas de 20.0 g colocadas sobre

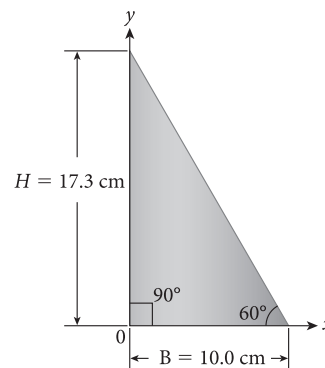
el tablero como se muestra en la figura. En relación con el origen ubicado en la esquina inferior izquierda del tablero, ¿dónde está el centro de masa del sistema tablero-fichas?



•8.44 Una placa cuadrada uniforme de metal con lado $L = 5.70$ cm y masa de 0.205 kg está ubicada con su esquina inferior izquierda en $(x, y) = (0, 0)$, como se muestra en la figura. Se quita de la placa un cuadrado con lado $L/4$ y su vértice inferior izquierdo ubicado en $(x, y) = (0, 0)$. ¿Cuál es la distancia desde el origen del centro de masa de la placa remanente?

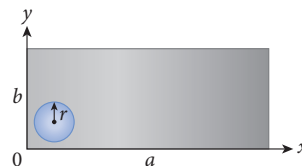


•8.45 Encuentre las coordenadas x y y del centro de masa de la placa triangular plana de altura $H = 17.3$ cm y base $B = 10.0$ cm que se muestra en la figura.

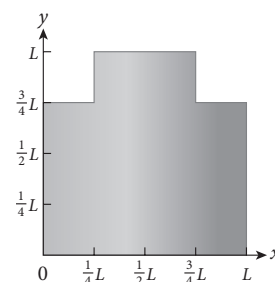


•8.46 La densidad de una varilla de 1.00 m de longitud se puede describir por la función de densidad lineal $\lambda(x) = 100. \text{ g/m} + 10.0x \text{ g/m}^2$. Un extremo de la varilla está ubicado en $x = 0$ y el otro en $x = 1.00$ m. Determine a) la masa total de la varilla y b) la coordenada del centro de masa.

•8.47 Una placa delgada rectangular con densidad de área uniforme $\sigma_1 = 1.05 \text{ kg/m}^2$ tiene una longitud $a = 0.600$ m y una anchura $b = 0.250$ m. El vértice inferior izquierdo está ubicado en el origen $(x, y) = (0, 0)$. Se corta en la placa un hoyo circular de radio $r = 0.048$ m con centro en $(x, y) = (0.068 \text{ m}, 0.068 \text{ m})$. El hueco se tapa con un disco del mismo radio compuesto de otro material con densidad de área uniforme $\sigma_2 = 5.32 \text{ kg/m}^2$. ¿Cuál es la distancia del origen al centro de masa de la placa modificada?

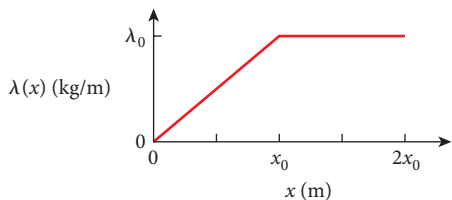


•8.48 Una placa metálica cuadrada y uniforme con lado $L = 5.70$ cm y masa de 0.205 kg está ubicada con su esquina inferior derecha en $(x, y) = (0, 0)$ como se muestra en la figura. Se quitan de la placa dos cuadrados con longitud de lado $L/4$.



- ¿Cuál es la coordenada x del centro de masa?
- ¿Cuál es la coordenada y del centro de masa?

••8.49 En la figura se grafica la densidad de masa lineal, $\lambda(x)$, para un objeto unidimensional. ¿Cuál es la ubicación del centro de masa para ese objeto?



Problemas adicionales

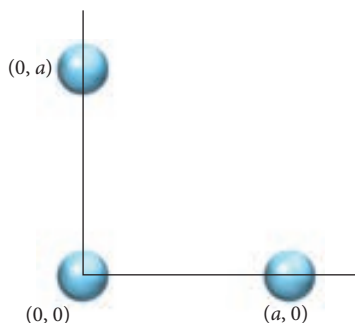
8.50 Un cañón de 750 kg dispara un proyectil de 15 kg con una rapidez de 250 m/s con respecto a la boca del cañón. El cañón está sobre ruedas y puede retroceder con fricción despreciable. Inmediatamente después de que el cañón dispara el proyectil, ¿cuál es la rapidez del proyectil con respecto al suelo?

8.51 La distancia entre un átomo de carbono ($m = 12$ u) y un átomo de oxígeno ($m = 16$ u) en una molécula de monóxido de carbono (CO) es de $1.13 \cdot 10^{-10}$ m. ¿Qué tan lejos del átomo de carbono está el centro de masa de la molécula? (1 u = 1 unidad de masa atómica).

8.52 Un método para detectar planetas extrasolares se basa en buscar evidencia indirecta de un planeta en forma de cabeceo de su estrella alrededor del centro de masa del sistema estrella-planeta. Suponiendo que el sistema solar consistiera principalmente del Sol y Júpiter, ¿cuánto cabecearía el Sol? Es decir, ¿cuánto se movería hacia atrás y hacia delante debido a su rotación alrededor del centro de masa del sistema Sol-Júpiter? ¿Qué tan lejos del centro del Sol está dicho centro de masa?

8.53 El USS *Montana* es un buque de guerra enorme con un peso de 136 634 000 lb. Tiene 12 cañones de 16 pulgadas, capaces de disparar proyectiles de 2 700 lb con una rapidez de 2 300 ft/s. Si el buque dispara tres de estos cañones (en la misma dirección), ¿cuál es la velocidad de retroceso del buque?

8.54 Tres bolas idénticas de masa m se colocan en la configuración que se muestra en la figura. Encuentre la ubicación del centro de masa.



8.55 Sam (61 kg) y Alice (44 kg) están de pie en una pista de hielo, que les ofrece una superficie casi sin fricción donde deslizarse. Sam da un empujón a Alice, haciendo que se aleje deslizándose con una rapidez (con respecto a la pista) de 1.20 m/s.

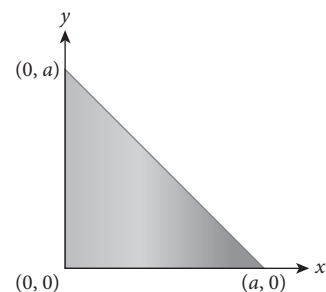
- a) ¿Con qué rapidez retrocede Sam?
- b) Calcule el cambio en la energía cinética del sistema Sam-Alice.

c) La energía no se puede crear ni destruir. ¿Cuál es la fuente de la energía cinética final de este sistema?

8.56 Un beisbolista usa un bate con una masa m_{bate} para golpear una pelota con masa m_{pelota} . Inmediatamente antes de golpear la pelota, la velocidad inicial del bate es de 35.0 m/s, y la velocidad inicial de la pelota es de -30.0 m/s (la dirección positiva es a lo largo del eje x positivo). El bate y la pelota experimentan una colisión elástica unidimensional. Encuentre la rapidez de la pelota después de la colisión. Suponga que m_{bate} es mucho mayor que m_{pelota} , de modo que el centro de masa de los dos objetos está esencialmente en el bate.

8.57 Un estudiante con una masa de 40.0 kg puede lanzar una bola de 5.00 kg con una rapidez relativa de 10.0 m/s. El estudiante está de pie en reposo sobre un carrito con masa de 10.0 kg que se puede mover sin fricción. Si el estudiante lanza la bola horizontalmente, ¿cuál será la velocidad de la bola con respecto al suelo?

•8.58 Encuentre la ubicación del centro de masa de una lámina bidimensional de densidad constante σ que tiene la forma de un triángulo isósceles (vea la figura).



•8.59 Un cohete consiste en una estructura de 4 390.0 kg y $1.761 \cdot 10^5$ kg de combustible. Suponga que el cohete parte del reposo en el espacio exterior, acelera hasta su velocidad final y luego comienza su viaje. ¿Cuál es la rapidez a la que el propelente debe expulsarse para hacer el viaje de la Tierra a la Luna, una distancia de $3.82 \cdot 10^5$ km, en 7.0 h?

•8.60 Un cañón de 350 kg, que se desliza libremente sobre un plano horizontal sin fricción con una rapidez de 7.5 m/s, dispara una bala de 15 kg en un ángulo de 55° sobre la horizontal. La velocidad de la bala relativa al cañón es tal que cuando ocurre el disparo, el cañón se para en seco. ¿Cuál es la velocidad de la bala relativa al cañón?

•8.61 El cohete Saturn V, que se usó para lanzar la nave *Apollo* en su camino a la Luna, tiene una masa inicial $M_0 = 2.80 \cdot 10^6$ kg y una masa final $M_1 = 8.00 \cdot 10^5$ kg y quema combustible a un caudal constante durante 160 s. La rapidez del escape relativa al cohete es alrededor de $v = 2 700$ m/s.

- a) Encuentre la aceleración ascendente del cohete al despegar de la plataforma de lanzamiento (mientras su masa es la masa inicial).
- b) Encuentre la aceleración ascendente del cohete inmediatamente al terminar de quemar su combustible (cuando su masa es la masa final).
- c) Si el mismo cohete se disparara en el espacio profundo, donde la fuerza gravitacional es despreciable, ¿cuál sería el cambio neto en la rapidez del cohete durante el tiempo en que estaba quemando combustible?

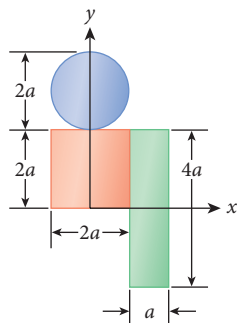
•8.62 Encuentre la ubicación del centro de masa para una varilla unidimensional de longitud L y una densidad lineal $\lambda(x) = cx$, donde c es una constante. (Pista: Usted necesitará calcular la masa en términos de c y L .)

•8.63 Encuentre el centro de masa de una placa rectangular con longitud de 20.0 cm y anchura de 10.0 cm. La densidad de masa varía linealmente a lo largo de la longitud. En un extremo es de 5.00 g/cm²; en el otro extremo es de 20.0 g/cm².

•8.64 Un tronco uniforme con longitud de 2.50 m tiene una masa de 91.0 kg y está flotando en el agua. De pie sobre este tronco hay un hombre de 72.0 kg, ubicado a 22.0 cm de un extremo. En el otro lado está su hija ($m = 20.0$ kg), de pie a 1.00 m del extremo.

- Encuentre el centro de masa de este sistema.
- Si el padre salta del tronco hacia atrás alejándose de su hija ($v = 3.14$ m/s), ¿cuál es la rapidez inicial del tronco y de la niña?

8.65 Un escultor le ha encargado a usted realizar un análisis de ingeniería de una de sus obras, que consiste en placas de metal de formas regulares y espesor y densidad uniformes, soldadas entre sí como se muestra en la figura. Usando la intersección de los dos ejes que se muestran como el origen del sistema de coordenadas, determine las coordenadas cartesianas del centro de masa de esta obra.



•8.66 Un avión jet viaja a 223 m/s en vuelo horizontal. El motor admite aire a razón de 80.0 kg/s y quema combustible a razón de 3.00 kg/s. Los gases de escape se expulsan a 600 m/s relativos a la rapidez del avión. Encuentre el empuje del motor jet.

•8.67 Un cubo está montado en un monopatín, que rueda por un camino horizontal sin fricción. La lluvia cae verticalmente al interior del cubo. El cubo se llena de agua, y la masa total del monopatín, el cubo y el agua es $M = 10.0$ kg. La lluvia entra por la parte superior del cubo y al mismo tiempo se fuga por un hoyo que hay en el fondo del cubo, a caudales iguales $\lambda = 0.100$ kg/s. Inicialmente, el cubo y el monopatín se mueven con una rapidez de v_0 . ¿Cuánto tardará en reducirse a la mitad la rapidez?

•8.68 Un cañón de 1 000 kg dispara un proyectil de 30 kg en un ángulo de 25° sobre la horizontal y con una rapidez de 500 m/s. ¿Cuál es la velocidad de retroceso del cañón?

•8.69 Dos masas, $m_1 = 2.0$ kg y $m_2 = 3.0$ kg, se mueven en el plano xy . La velocidad de su centro de masa y la velocidad

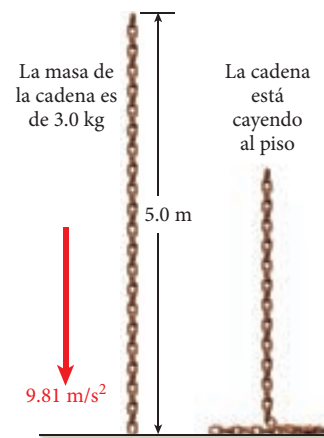
de la masa 1 relativa a la masa 2 están dadas por los vectores $v_{cm} = (-1.0, +2.4)$ m/s y $v_{rel} = (+5.0, +1.0)$ m/s. Determine

- el momento o ímpetu total del sistema.
- el momento o ímpetu de la masa 1.
- el momento o ímpetu de la masa 2.

••8.70 Usted está piloteando una nave espacial cuya masa total es de 1 000 kg, e intenta acoplarse con una estación espacial en el espacio profundo. Suponga que la estación está estacionaria, que su nave se mueve a 1.0 m/s hacia la estación y que ambas están perfectamente alineadas para el acoplamiento. Su nave espacial tiene un pequeño retrocohetes en el frente para hacer más lenta la aproximación, que puede quemar combustible a razón de 1.0 kg/s y con una velocidad de escape de 100 m/s relativa al cohete. Suponga que a su nave le quedan sólo 20 kg de combustible y que tiene suficiente distancia para el acoplamiento.

- ¿Cuál es el empuje inicial que ejerce sobre su nave el retrocohetes? ¿Cuál es la dirección del empuje?
- Por seguridad en el acoplamiento, la NASA permite una rapidez máxima de 0.02 m/s. Suponiendo que usted enciende el retrocohetes desde el tiempo $t = 0$ en una explosión sostenida, ¿cuánto combustible (en kilogramos) tiene que quemarse para desacelerar su nave hasta esta rapidez relativa a la estación espacial?
- ¿Por cuánto tiempo debe usted sostener encendido el retrocohetes?
- Si la masa de la estación espacial es de 500 000 kg (cercana al valor para la ISS), ¿cuál es la velocidad final de la estación después del acoplamiento con su nave, que llega con una rapidez de 0.02 m/s?

••8.71 Una cadena cuya masa es de 3.0 kg y su longitud es de 5.0 m se sostiene por un extremo de modo que el extremo inferior apenas toca el piso (vea la figura). Se suelta el extremo superior de la cadena. ¿Cuál es la fuerza que ejerce la cadena sobre el piso cuando el último eslabón toca el piso?



9

Movimiento circular



FIGURA 9.1 Dos aviones realizan maniobras de acrobacia aérea sobre Oshkosh, Wisconsin.

LO QUE APRENDEREMOS	280
9.1 Coordenadas polares	280
9.2 Coordenadas angulares y desplazamiento angular	281
Ejemplo 9.1 Ubicación de un punto con coordenadas cartesianas y polares	282
Longitud de arco	282
Ejemplo 9.2 Pista de CD	282
9.3 Velocidad angular, frecuencia angular y periodo	283
Velocidad angular y velocidad lineal	284
Ejemplo 9.3 Traslación y rotación de la Tierra	285
9.4 Aceleración angular y centrípeta	286
Ejemplo 9.4 Ultracentrifugadora	288
Ejemplo 9.5 Aceleración centrípeta debida a la rotación de la Tierra	289
Ejemplo 9.6 Reproductor de CD	289
9.5 Fuerza centrípeta	289
Péndulo cónico	290
Problema resuelto 9.1 Análisis de una montaña rusa	291
¿Existe una fuerza centrífuga?	293
9.6 Movimiento circular y lineal	293
Aceleración angular constante	294
Ejemplo 9.7 Lanzamiento de martillo	295
9.7 Más ejemplos de movimiento circular	296
Ejemplo 9.8 Carreras de Fórmula 1	296
Problema resuelto 9.2 Carreras NASCAR	298
LO QUE HEMOS APRENDIDO/ GUÍA DE ESTUDIO PARA EXAMEN	300
Práctica para resolución de problemas	302
Problema resuelto 9.3 Juego mecánico de un parque de diversiones	302
Problema resuelto 9.4 Volante	304
Preguntas de opción múltiple	305
Preguntas	306
Problemas	307

LO QUE APRENDEREMOS

- El movimiento de objetos que se mueven en círculo en vez de en línea recta se puede describir usando coordenadas basadas en radio y ángulo, en vez de coordenadas cartesianas.
- Hay una relación entre movimiento lineal y movimiento circular.
- El movimiento circular se puede describir en términos de la coordenada angular, la frecuencia angular y el periodo.
- Un objeto sujeto a movimiento circular puede tener velocidad angular y aceleración angular.

¿Se ha preguntado usted alguna vez por qué un avión se inclina en forma lateral cuando hace un viraje en el aire? Un avión no tiene un camino por dónde caminar, de modo que la fuerza necesaria para hacerlo girar en círculo no puede provenir de la fricción con la superficie del camino. En vez de esto, la orientación angular de las alas divide en componentes la fuerza normal que soporta al avión. Una componente sigue soportando al avión contra la gravedad, mientras que la otra actúa horizontalmente y hace dar vuelta al avión en círculo, como el avión que se muestra en la figura 9.1. La misma física se aplica al diseñar caminos con peralte para los automóviles u otros vehículos.

En este capítulo estudiamos el movimiento circular y cómo participa la fuerza en el viraje. La explicación se basa en los conceptos de fuerza, velocidad y aceleración que se presentaron en los capítulos 3 y 4. El capítulo 10 combinará estas ideas con algunos de los conceptos de los capítulos 5 a 8, tales como energía y momento. Mucho de lo que usted aprenderá en estos dos capítulos sobre el movimiento circular y la rotación es similar al material anterior sobre movimiento lineal, fuerza y energía. Como la mayoría de los objetos no viajan en líneas perfectamente rectas, los conceptos de movimiento circular se aplicarán muchas veces en capítulos posteriores.

9.1 Coordenadas polares



FIGURA 9.2 Movimiento circular en el plano horizontal y en el vertical.

En el capítulo 3 explicamos el movimiento en dos dimensiones. En este capítulo examinaremos un caso especial de movimiento en un plano bidimensional: el movimiento de un objeto a lo largo de una circunferencia. Para ser exactos, estudiaremos sólo el movimiento circular de objetos que podemos considerar partículas puntuales. En el capítulo 10, sobre rotación, relajaremos esta condición y examinaremos también cuerpos extensos.

El movimiento circular es sorprendentemente común. Andar en un carrusel o en muchos otros juegos mecánicos de un parque de diversiones, tales como los que se muestran en la figura 9.2, se califica como movimiento circular. Las carreras de coches al estilo Indianápolis también incluyen movimiento circular, ya que los autos alternan entre movimiento en secciones rectas y segmentos semicirculares de la pista. Los reproductores de CD, DVD y Blu-ray también operan con movimiento circular, aunque este movimiento normalmente se oculta a la vista.

Durante el **movimiento circular** de un objeto, sus coordenadas x y y cambian continuamente, pero la distancia del objeto al centro de la trayectoria circular permanece constante. Podemos aprovechar este hecho usando **coordenadas polares** para estudiar el movimiento circular. En la figura 9.3 se muestra el vector de posición, \vec{r} , de un objeto en movimiento circular. Este vector cambia como función del tiempo, pero su punta siempre se mueve en una circunferencia. Podemos especificar \vec{r} dando sus componentes x y y . Sin embargo, podemos especificar el mismo vector dando otros dos números: el ángulo de \vec{r} respecto al eje x positivo, θ , y la longitud de \vec{r} , $r = |\vec{r}|$ (figura 9.3).

La trigonometría da la relación existente entre las coordenadas cartesianas, x y y , y las coordenadas polares, θ y r :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (9.1)$$

$$\theta = \tan^{-1}(y/x). \quad (9.2)$$

La transformación inversa de coordenadas polares a cartesianas (vea la figura 9.4) está dada por:

$$x = r \cos \theta \quad (9.3)$$

$$y = r \operatorname{sen} \theta. \quad (9.4)$$

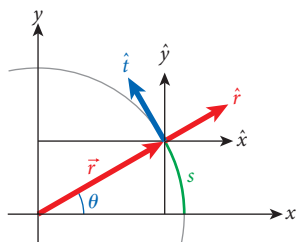


FIGURA 9.3 Sistema de coordenadas polares para el movimiento circular.

La ventaja principal de usar coordenadas polares para analizar el movimiento circular es que r nunca cambia. Queda igual mientras la punta del vector \vec{r} se mueve a lo largo de la trayectoria circular. Así, podemos reducir la descripción del movimiento bidimensional sobre una circunferencia a un problema unidimensional que incluye el ángulo θ .

La figura 9.3 también muestra los vectores unitarios en las direcciones radial y tangencial, \hat{r} y \hat{t} , respectivamente. El ángulo entre \hat{r} y \hat{x} es nuevamente el ángulo θ . Por lo tanto, las componentes radiales del vector radial unitario se pueden escribir como sigue (vea la figura 9.4):

$$\hat{r} = \frac{x}{r}\hat{x} + \frac{y}{r}\hat{y} = (\cos\theta)\hat{x} + (\sin\theta)\hat{y} \equiv (\cos\theta, \sin\theta). \quad (9.5)$$

De igual manera, obtenemos las componentes cartesianas del vector tangencial unitario:

$$\hat{t} = \frac{-y}{r}\hat{x} + \frac{x}{r}\hat{y} = (-\sin\theta)\hat{x} + (\cos\theta)\hat{y} \equiv (-\sin\theta, \cos\theta). \quad (9.6)$$

(Observe que el vector unitario tangencial siempre se denota con un signo de intercalación o acento circunflejo, \hat{t} , y puede así distinguirse fácilmente del tiempo, t). Es sencillo verificar que los vectores unitarios radial y tangencial son perpendiculares entre sí, tomando sus productos escalares:

$$\hat{r} \cdot \hat{t} = (\cos\theta, \sin\theta) \cdot (-\sin\theta, \cos\theta) = -\cos\theta \sin\theta + \sin\theta \cos\theta = 0.$$

También podemos verificar que estos dos vectores unitarios tienen una longitud de 1, como se requiere:

$$\hat{r} \cdot \hat{r} = (\cos\theta, \sin\theta) \cdot (\cos\theta, \sin\theta) = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

$$\hat{t} \cdot \hat{t} = (-\sin\theta, \cos\theta) \cdot (-\sin\theta, \cos\theta) = \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1.$$

Finalmente, es importante recalcar que, para el movimiento circular, hay una diferencia importante entre los vectores unitarios para coordenadas polares y los vectores unitarios para coordenadas cartesianas: los vectores unitarios en coordenadas cartesianas permanecen constantes en el tiempo, mientras que los vectores unitarios radial y tangencial cambian sus direcciones durante el proceso del movimiento circular. Esto se debe a que ambos vectores dependen del ángulo θ , que para movimiento circular depende del tiempo.

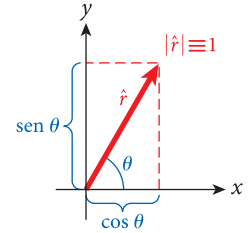


FIGURA 9.4 Relación entre el vector unitario radial y el seno y coseno del ángulo.

9.2 Coordenadas angulares y desplazamiento angular

Las coordenadas polares nos permiten describir y analizar el movimiento circular, donde la distancia al origen, r , del objeto en movimiento permanece constante, y el ángulo θ varía como función del tiempo, $\theta(t)$. Como ya se señaló, el ángulo θ se mide en relación con el eje x positivo. Cualquier punto en el eje x positivo tiene un ángulo $\theta = 0$. Como implica la definición en la ecuación 9.2, un movimiento en sentido antihorario que se aleja del eje x positivo hacia el eje y positivo da como resultado valores positivos del ángulo θ . A la inversa, un movimiento horario que se aleja del eje x positivo hacia el eje y negativo da por resultado valores negativos de θ .

Las dos unidades más usadas para ángulos son grados ($^\circ$) y radianes (rad). Estas unidades se definen de tal manera que el ángulo medido por un círculo completo es de 360° , que corresponde a 2π rad. Así, la conversión de unidades entre las dos medidas angulares es

$$\theta \text{ (grados)} \frac{\pi}{180} = \theta \text{ (radianes)} \Leftrightarrow \theta \text{ (radianes)} \frac{180}{\pi} = \theta \text{ (grados)}$$

$$1 \text{ rad} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57.3^\circ.$$

Al igual que la posición lineal x , el ángulo θ puede tener valores positivos y negativos. Sin embargo, θ es periódico; una vuelta completa alrededor del círculo (2π rad, o 360°) regresa la coordenada para θ al mismo punto en el espacio. Igual que el desplazamiento lineal, Δx , se define como la diferencia entre dos posiciones, x_2 y x_1 , el desplazamiento angular, $\Delta\theta$, es la diferencia entre dos ángulos,

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1.$$

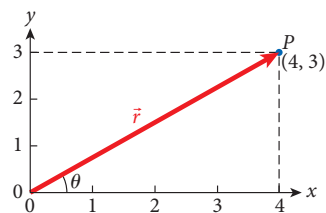


FIGURA 9.5 Un punto ubicado en (4, 3), en un sistema de coordenadas cartesianas.

EJEMPLO 9.1 Ubicación de un punto con coordenadas cartesianas y polares

Un punto tiene una ubicación dada en coordenadas cartesianas como (4, 3), como se muestra en la figura 9.5.

PROBLEMA

¿Cómo representamos la posición de este punto en coordenadas polares?

SOLUCIÓN

Usando la ecuación 9.1, podemos calcular la coordenada radial:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5.$$

Usando la ecuación 9.2, podemos calcular la coordenada angular:

$$\theta = \tan^{-1}(y/x) = \tan^{-1}(3/4) = 0.64 \text{ rad} = 37^\circ.$$

Por lo tanto, podemos expresar la posición del punto P en coordenadas polares como $(r, \theta) = (5, 0.64 \text{ rad}) = (5, 37^\circ)$. Observe que podemos especificar la misma posición agregando (cualquier múltiplo entero de) $2\pi \text{ rad}$, o 360° , a θ :

$$(r, \theta) = (5, 0.64 \text{ rad}) = (5, 37^\circ) = (5, 2\pi \text{ rad} + 0.64 \text{ rad}) = (5, 360^\circ + 37^\circ).$$

9.1 Oportunidad de autoexamen

Use coordenadas polares y cálculo diferencial e integral para demostrar que la circunferencia de un círculo con radio R es $2\pi R$.

9.2 Oportunidad de autoexamen

Use coordenadas polares y cálculo diferencial e integral para demostrar que el área de un círculo con radio R es πR^2 .

Longitud de arco

La figura 9.3 muestra también (en verde) la trayectoria de la circunferencia recorrida por la punta del vector \vec{r} al ir desde un ángulo de 0 hasta θ . Esta trayectoria se llama *longitud de arco*, s . Se relaciona con el radio y el ángulo mediante

$$s = r\theta. \tag{9.7}$$

Para que esta relación funcione numéricamente, el ángulo se tiene que medir en radianes. El hecho de que la circunferencia de un círculo es $2\pi r$ es un caso especial de la ecuación 9.7 con $\theta = 2\pi \text{ rad}$, correspondiente a una vuelta completa alrededor del círculo. La longitud de arco tiene la misma unidad que el radio.

Para ángulos pequeños, de 1° o menos, el seno del ángulo es aproximadamente (con cuatro cifras significativas) igual al ángulo medido en radianes. Debido a este hecho, así como a la necesidad de usar la ecuación 9.7 para resolver problemas, la unidad que se prefiere para coordenadas angulares es el radián. Pero el uso de grados es común, y este libro usa ambas unidades.

EJEMPLO 9.2 Pista de CD

En la figura 9.6 se representa la pista en un disco compacto (CD). La pista es una espiral que se origina con un radio interior de $r_1 = 25 \text{ mm}$ y termina con un radio exterior de $r_2 = 58 \text{ mm}$. El espaciamiento entre vueltas sucesivas de la pista es una constante, $\Delta r = 1.6 \mu\text{m}$.

PROBLEMA

¿Cuál es la longitud total de esta pista?

SOLUCIÓN 1. SIN CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

A un radio dado r entre r_1 y r_2 , la pista es casi perfectamente circular. Como el espaciamiento de la pista es $\Delta r = 1.6 \mu\text{m}$, y la distancia entre las partes internas y las externas es $r_2 - r_1 = (58 \text{ mm}) - (25 \text{ mm}) = 33 \text{ mm}$, encontramos que la pista da la vuelta completa un total de

$$n = \frac{r_2 - r_1}{\Delta r} = \frac{3.3 \cdot 10^{-2} \text{ m}}{1.6 \cdot 10^{-6} \text{ m}} = 20\,625 \text{ veces.}$$

(¡Observe que no redondeamos este resultado intermedio!) Los radios de estos 20 625 círculos crecen linealmente de 25 mm a 58 mm; en consecuencia, las circunferencias ($c = 2\pi r$) también crecen linealmente. El radio medio de las circunferencias es entonces $\bar{r} = \frac{1}{2}(r_2 + r_1) = 41.5 \text{ mm}$, y la circunferencia media es

$$\bar{c} = 2\pi\bar{r} = 2\pi \cdot 41.5 \text{ mm} = 0.2608 \text{ m.}$$

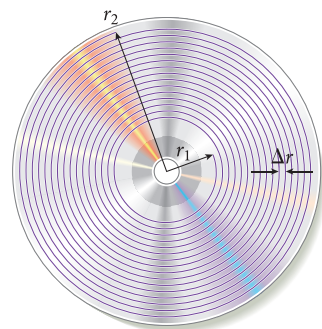


FIGURA 9.6 La pista de un disco compacto.

Ahora tenemos que multiplicar esta circunferencia media por el número de círculos para obtener nuestro resultado:

$$L = n\bar{c} = 20\,625 \cdot 0.2608 \text{ m} = 5.4 \text{ km},$$

redondeado a dos cifras significativas. ¡De modo que la longitud de la pista de un CD es más de 3.3 mi!

SOLUCIÓN 2, CON CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

El espaciamiento entre vueltas sucesivas de la pista es una constante, $\Delta r = 1.6 \mu\text{m}$; por lo tanto, la densidad de la pista (es decir, el número de veces que la pista se cruza en una dirección radial por unidad de longitud moviéndose hacia fuera desde el punto más interno) es $1/\Delta r = 625\,000 \text{ m}^{-1}$. A un radio dado r entre r_1 y r_2 , la pista es casi perfectamente circular. Este segmento de la pista espiral tiene una longitud de $2\pi r$, pero las longitudes de las espiras se hacen uniformemente más largas al moverse hacia el exterior. Obtenemos la longitud total de la pista integrando la longitud de cada espira entre r_1 y r_2 multiplicada por el número de espiras por unidad de longitud:

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{\Delta r} \int_{r_1}^{r_2} 2\pi r \, dr = \frac{1}{\Delta r} \pi r^2 \Big|_{r_1}^{r_2} = \frac{1}{\Delta r} \pi (r_2^2 - r_1^2) \\ &= (625\,000 \text{ m}^{-1}) \pi ((0.058 \text{ m})^2 - (0.025 \text{ m})^2) = 5.4 \text{ km}. \end{aligned}$$

Vemos con satisfacción que esta solución basada en cálculo diferencial e integral concuerda con la solución que obtuvimos sin el uso de dicho cálculo. Usted puede analizar qué condiciones tuvieron que cumplirse en este caso para evitar el uso del cálculo diferencial e integral. (Para un DVD, dicho sea de paso, la densidad de la pista es mayor por un factor de 2.2, lo cual da por resultado una pista con una longitud de casi 12 km.)

La figura 9.7 muestra a detalle las pistas de dos CD, con un aumento de 500 veces. La figura 9.7a) muestra un CD impreso en fábrica, con las protuberancias visibles. La figura 9.7b) corresponde a un CD de lectura y escritura (RW), que se quema cuando un rayo láser induce un cambio de fase en la pista continua (el capítulo 34 sobre óptica de ondas explicará este proceso). La porción inferior derecha de esta figura muestra una porción del CD en el que no se ha escrito nada todavía.

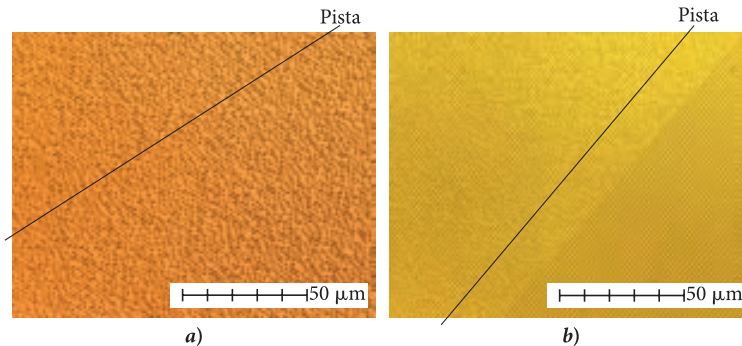


FIGURA 9.7 Imágenes microscópicas (aumento 500×) de a) un CD impreso en fábrica, y b) un CD de lectura y escritura (RW). Las líneas continuas indican la dirección de las pistas.

9.3 Velocidad angular, frecuencia angular y periodo

Hemos visto que el cambio de las coordenadas lineales de un objeto en el tiempo es su velocidad. De manera similar, el cambio de la coordenada angular de un objeto en el tiempo es su velocidad angular. La magnitud media de la **velocidad angular** se define como

$$\bar{\omega} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}.$$

Esta definición usa la notación $\theta_1 \equiv \theta(t_1)$ y $\theta_2 \equiv \theta(t_2)$. La barra horizontal encima del símbolo ω para la velocidad angular indica nuevamente una media en el tiempo. Tomando el límite de esta expre-

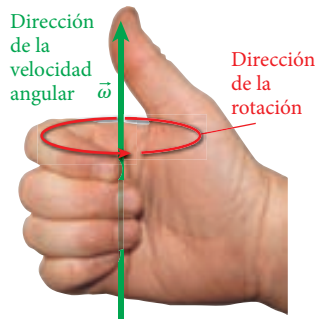


FIGURA 9.8 La regla de la mano derecha para determinar la dirección del vector de velocidad angular.



FIGURA 9.9 El tacómetro de un auto mide la frecuencia (en ciclos por minuto) de las revoluciones del motor.

sión cuando el intervalo de tiempo tiende a cero, encontramos el valor instantáneo de la magnitud de la velocidad angular:

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \bar{\omega} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta t} \equiv \frac{d\theta}{dt}. \quad (9.8)$$

La unidad más común de velocidad angular es radianes por segundo (rad/s); grados por segundo casi no se usa.

La velocidad angular es un vector. Su dirección es la de un eje que pasa por el centro de la trayectoria circular y perpendicular al plano del círculo. (Este eje es un eje de rotación, como explicaremos con más detalle en el capítulo 10.) Esta definición permite dos posibilidades para la dirección en la que el vector $\bar{\omega}$ puede señalar: hacia arriba o hacia abajo, paralela o antiparalela al eje de rotación. La regla de la mano derecha nos ayuda a decidir cuál es la dirección correcta: cuando los cuatro dedos señalan en la dirección de la rotación a lo largo de la circunferencia, el pulgar señala en la dirección de $\bar{\omega}$, como se muestra en la figura 9.8.

La velocidad angular mide la rapidez con la que el ángulo θ cambia en el tiempo. Otra cantidad también especifica la rapidez de cambio de este ángulo en el tiempo: la **frecuencia angular**, o simplemente frecuencia, f . Por ejemplo, el número de rpm en el tacómetro en su auto indica cuántas veces por minuto gira el motor, y así especifica la frecuencia de la revolución del motor. La figura 9.9 muestra un tacómetro, con las unidades especificadas como “1/min \times 1 000”; el motor llega a la línea roja a 6 000 revoluciones por minuto. Así, la frecuencia, f , mide ciclos por unidad de tiempo, en vez de radianes por unidad de tiempo, como lo hace la velocidad angular. La frecuencia se relaciona con la magnitud de la velocidad angular, ω , por

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \Leftrightarrow \omega = 2\pi f. \quad (9.9)$$

Esta relación tiene sentido porque una vuelta completa alrededor de un círculo necesita un cambio de ángulo de 2π rad. (Tenga cuidado: tanto la frecuencia como la velocidad angular tienen la misma unidad de segundos inversos y se pueden confundir fácilmente.)

Como la unidad segundos inversos se usa tan ampliamente, se le ha dado su propio nombre, el **hertz** (Hz), por el físico alemán Heinrich Rudolf Hertz (1857-1894): $1 \text{ Hz} = 1 \text{ s}^{-1}$. El **periodo de rotación**, T , se define como el inverso de la frecuencia:

$$T = \frac{1}{f}. \quad (9.10)$$

El periodo mide el intervalo de tiempo entre dos instantes sucesivos en los que el ángulo tiene el mismo valor. Es decir, el tiempo que tarda en pasar una vez alrededor del círculo. La unidad del periodo es la misma que la de tiempo, el segundo (s). Dadas las relaciones entre periodo y frecuencia, y entre frecuencia y velocidad angular, también obtenemos

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}. \quad (9.11)$$

Velocidad angular y velocidad lineal

Si tomamos la derivada con respecto al tiempo del vector de posición, obtenemos el vector de velocidad lineal. Para encontrar la velocidad angular, es más conveniente escribir el vector de posición radial en coordenadas cartesianas y tomar las derivadas con respecto al tiempo, componente por componente:

$$\begin{aligned} \vec{r} &= x\hat{x} + y\hat{y} = (x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta) = r(\cos \theta, \sin \theta) = r\hat{r} \Rightarrow \\ \vec{v} &= \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r \cos \theta, r \sin \theta) = \left(\frac{d}{dt}(r \cos \theta), \frac{d}{dt}(r \sin \theta) \right). \end{aligned}$$

Ahora podemos usar el hecho de que, para movimiento a lo largo de una circunferencia, la distancia r al origen no cambia en el tiempo, sino es constante. Esto da por resultado

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \left(\frac{d}{dt}(r \cos \theta), \frac{d}{dt}(r \sin \theta) \right) = \left(r \frac{d}{dt}(\cos \theta), r \frac{d}{dt}(\sin \theta) \right) \\ &= \left(-r \sin \theta \frac{d\theta}{dt}, r \cos \theta \frac{d\theta}{dt} \right) \\ &= (-\sin \theta, \cos \theta)r \frac{d\theta}{dt}. \end{aligned}$$

Aquí usamos la regla de la cadena para diferenciación en el penúltimo paso, y luego sacamos el factor común, $r d\theta/dt$. Ya sabemos que la derivada con respecto al tiempo del ángulo es la velocidad angular (vea la ecuación 9.8). Además, reconocemos el vector $(-\text{sen } \theta, \text{cos } \theta)$ como el vector unitario tangencial (vea la ecuación 9.6). Así, tenemos la relación entre las velocidades angular y lineal para movimiento circular:

$$\vec{v} = r\omega\hat{t}. \tag{9.12}$$

(¡Nuevamente, \hat{t} es el símbolo para el vector unitario tangencial y no tiene ninguna conexión con el tiempo, t !)

Como el vector velocidad apunta en dirección tangencial a la trayectoria en cualquier tiempo dado, siempre es tangencial a la circunferencia, apuntando en la dirección del movimiento, como se muestra en la figura 9.10. Así, el vector velocidad siempre es perpendicular al vector posición, que señala en la dirección radial. Si dos vectores son mutuamente perpendiculares, su producto escalar es cero. De modo que, para movimiento circular, siempre tenemos

$$\vec{r} \cdot \vec{v} = (r \cos \theta, r \text{sen } \theta) \cdot (-r\omega \text{sen } \theta, r\omega \cos \theta) = 0.$$

Si tomamos los valores absolutos de ambos lados de la ecuación 9.12, obtenemos una importante relación entre las magnitudes de las velocidades lineal y angular para el movimiento circular:

$$v = r\omega. \tag{9.13}$$

Recuerde que esta relación es válida sólo para las *magnitudes* de las velocidades lineal y angular. Sus vectores señalan en direcciones diferentes y, para movimiento circular uniforme, son mutuamente perpendiculares; $\vec{\omega}$ señala en la dirección del eje de rotación, y \vec{v} en dirección tangente al círculo.

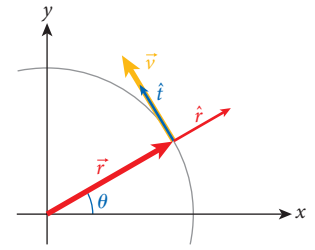


FIGURA 9.10 Velocidad lineal y vectores de coordenadas.

9.1 Ejercicio en clase

Las ruedas de una bicicleta tienen un radio de 33.0 cm. La bicicleta viaja con una rapidez de 6.5 m/s. ¿Cuál es la rapidez angular del neumático delantero?

- a) 0.197 rad/s
- b) 1.24 rad/s
- c) 5.08 rad/s
- d) 19.7 rad/s
- e) 215 rad/s

EJEMPLO 9.3 Traslación y rotación de la Tierra

PROBLEMA

La Tierra se traslada en órbita alrededor del Sol y gira alrededor de un eje que va de polo a polo. ¿Cuáles son las velocidades angulares, las frecuencias y las rapidezces lineales de estos movimientos?

SOLUCIÓN

Cualquier punto sobre la superficie de la Tierra se mueve en movimiento circular alrededor del eje de rotación, con un periodo de rotación de un día. Expresado en segundos, este periodo es

$$T_{\text{Tierra}} = 1 \text{ día} \cdot \frac{24 \text{ h}}{1 \text{ día}} \cdot \frac{3\,600 \text{ s}}{1 \text{ h}} = 8.64 \cdot 10^4 \text{ s}.$$

La Tierra gira alrededor del Sol sobre una trayectoria elíptica; esta trayectoria es casi circular, de modo que tratamos el movimiento de la Tierra en esta órbita como movimiento circular. El periodo orbital para el movimiento de la Tierra alrededor del Sol es de un año. Al expresar este periodo en segundos, obtenemos

$$T_{\text{Sol}} = 1 \text{ año} \cdot \frac{365 \text{ días}}{1 \text{ año}} \cdot \frac{24 \text{ h}}{1 \text{ día}} \cdot \frac{3\,600 \text{ s}}{1 \text{ h}} = 3.15 \cdot 10^7 \text{ s}.$$

Ambos movimientos circulares tienen velocidad angular constante. Así, podemos usar $T = 1/f$ y $\omega = 2\pi f$ para obtener las frecuencias y las velocidades angulares:

$$f_{\text{Tierra}} = \frac{1}{T_{\text{Tierra}}} = 1.16 \cdot 10^{-5} \text{ Hz}; \quad \omega_{\text{Tierra}} = 2\pi f_{\text{Tierra}} = 7.27 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s}$$

$$f_{\text{Sol}} = \frac{1}{T_{\text{Sol}}} = 3.17 \cdot 10^{-8} \text{ Hz}; \quad \omega_{\text{Sol}} = 2\pi f_{\text{Sol}} = 1.99 \cdot 10^{-7} \text{ rad/s}.$$

Observe que el periodo de 24 horas que usamos como la longitud de un día es lo que tarda el Sol en llegar a la misma posición en el cielo. Si quisiéramos especificar las frecuencias y las velocidades angulares con mayor precisión, tendríamos que usar el día sideral: como la Tierra también se mueve alrededor del Sol durante cada día, el tiempo que realmente tarda en hacer una rotación completa y poner a las estrellas en la misma posición en el cielo nocturno

(continúa)

es el día sideral, que mide 23 h, 56 min y un poco más de 4 s, o bien $86\,164.09074\text{ s} = (1 - 1/365.2425) \cdot 86\,400\text{ s}$. (Hemos usado el hecho de que una vuelta completa en órbita alrededor del Sol tarda un poco más de 365 días, lo cual es la razón por la que son necesarios los años bisiestos.)

Ahora encontremos la velocidad lineal con la que la Tierra se traslada alrededor del Sol. Como suponemos movimiento circular, la relación entre la rapidez orbital y la velocidad angular está dada por $v = r\omega$. Para obtener nuestra respuesta, necesitamos saber el radio de la órbita. El radio de esta órbita es la distancia Tierra-Sol, $r_{\text{Tierra-Sol}} = 1.49 \cdot 10^{11}\text{ m}$. Por lo tanto, la rapidez orbital lineal —es decir, la rapidez con la que se mueve la Tierra alrededor del Sol— es

$$v = r\omega = (1.49 \cdot 10^{11}\text{ m})(1.99 \cdot 10^{-7}\text{ s}^{-1}) = 2.97 \cdot 10^4\text{ m/s}.$$

¡Esto es más de 66 000 mph!

Ahora queremos encontrar la rapidez de un punto sobre la superficie de la Tierra en rotación relativa al centro de la Tierra. Sabemos que los puntos en distintas latitudes tienen diferentes distancias al eje de rotación, como se muestra en la figura 9.11. En el Ecuador, el radio de la órbita de rotación es $r = R_{\text{Tierra}} = 6\,380\text{ km}$. Lejos del Ecuador, el radio de rotación como función del ángulo de latitud es $r = R_{\text{Tierra}} \cos \vartheta$; vea la figura 9.11. (El carácter theta, ϑ , se usa aquí para los ángulos de latitud para evitar confusión con θ , que se usa para el movimiento en la circunferencia.) En general, obtenemos la siguiente fórmula para la rapidez de rotación:

$$\begin{aligned} v &= \omega r = \omega R_{\text{Tierra}} \cos \vartheta \\ &= (7.27 \cdot 10^{-5}\text{ s}^{-1})(6.38 \cdot 10^6\text{ m})(\cos \vartheta) \\ &= (464\text{ m/s})(\cos \vartheta). \end{aligned}$$

En los polos, donde $\vartheta = 90^\circ$, la rapidez de rotación es cero; en el Ecuador, donde $\vartheta = 0^\circ$, la rapidez es de 464 m/s. Seattle, con $\vartheta = 47.5^\circ$, se mueve a $v = 313\text{ m/s}$, y Miami, con $\vartheta = 25.7^\circ$, tiene una rapidez de $v = 418\text{ m/s}$.



FIGURA 9.11 El eje de rotación de la Tierra está indicado por la línea vertical. Los puntos con diferentes latitudes sobre la superficie de la Tierra se mueven con diferentes rapidezces.

9.4 Aceleración angular y centrípeta

La rapidez de cambio de la velocidad angular de un objeto es su **aceleración angular**, que se denota por la letra griega α . La definición de la magnitud de la aceleración angular es análoga a la de la aceleración lineal. Su media con respecto al tiempo se define como

$$\bar{\alpha} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}.$$

La magnitud instantánea de la aceleración angular se obtiene en el límite, cuando el intervalo de tiempo tiende a cero:

$$\alpha = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \bar{\alpha} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \equiv \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}. \quad (9.14)$$

Así como relacionamos la velocidad lineal con la velocidad angular, podemos también relacionar la aceleración tangencial con la aceleración angular. Comenzamos con la definición del vector de aceleración lineal como la derivada con respecto al tiempo del vector de velocidad lineal. Entonces sustituimos la expresión para la velocidad lineal en movimiento circular de la ecuación 9.12:

$$\vec{a}(t) = \frac{d}{dt} \vec{v}(t) = \frac{d}{dt} (v\hat{t}) = \left(\frac{dv}{dt}\right)\hat{t} + v\left(\frac{d\hat{t}}{dt}\right). \quad (9.15)$$

En el último paso usamos la regla de productos para la diferenciación. Así, la aceleración en movimiento circular tiene dos componentes. La primera parte proviene del cambio en la magnitud de la velocidad; ésta es la **aceleración tangencial**. La segunda parte se debe al hecho de que el vector velocidad siempre señala en la dirección tangencial y, por lo tanto, tiene que cambiar continuamente su dirección al moverse la punta del vector radial de posición alrededor del círculo; ésta es la **aceleración radial**.

Veamos individualmente las dos componentes. Primero, podemos calcular la derivada con respecto al tiempo de la rapidez lineal, v , usando la relación entre rapidez lineal y rapidez angular en la ecuación 9.13 y, nuevamente usando la regla de los productos:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(r\omega) = \left(\frac{dr}{dt}\right)\omega + r\frac{d\omega}{dt}.$$

Como r es constante para el movimiento circular, $dr/dt = 0$, y el primer término en la suma del lado derecho es cero. Por la ecuación 9.14, $d\omega/dt = \alpha$, y así, el segundo término de la suma es igual a $r\alpha$. De donde se deriva que el cambio en la rapidez se relaciona con la aceleración lineal por

$$\frac{dv}{dt} = r\alpha. \quad (9.16)$$

Sin embargo, el vector de aceleración de la ecuación 9.15 tiene también una segunda componente, que es proporcional a la derivada con respecto al tiempo del vector tangencial unitario. Para esta cantidad, encontramos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\hat{t} &= \frac{d}{dt}(-\sin\theta, \cos\theta) = \left(\frac{d}{dt}(-\sin\theta), \frac{d}{dt}(\cos\theta)\right) \\ &= \left(-\cos\theta\frac{d\theta}{dt}, -\sin\theta\frac{d\theta}{dt}\right) = -\frac{d\theta}{dt}(\cos\theta, \sin\theta) \\ &= -\omega\hat{r}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, encontramos que la derivada con respecto al tiempo del vector tangencial unitario señala en la dirección opuesta a la del vector radial unitario. Con este resultado, podemos finalmente escribir, para el vector de aceleración lineal de la ecuación 9.15

$$\vec{a}(t) = r\alpha\hat{t} - v\omega\hat{r}. \quad (9.17)$$

Nuevamente, para el movimiento circular, el vector de aceleración tiene dos componentes físicas (figura 9.12): la primera es el resultado de un cambio en la rapidez y apunta en la dirección tangencial, y la segunda proviene del cambio continuo de dirección del vector velocidad, y apunta en la dirección radial negativa, hacia el centro del círculo. Esta segunda componente está presente incluso si el movimiento circular tiene lugar con rapidez constante. Si la velocidad angular es constante, la aceleración angular tangencial es cero, pero el vector velocidad todavía cambia continuamente de dirección al moverse el objeto en su trayectoria circular. La aceleración que cambia la dirección del vector velocidad sin cambiar su magnitud se llama a menudo **aceleración centrípeta** (*centrípeta* significa “que busca el centro”), y está dirigida en la dirección radial hacia dentro. Por lo tanto, podemos escribir la ecuación 9.17 para la aceleración de un objeto en movimiento circular como la suma de la aceleración tangencial y la aceleración centrípeta:

$$\vec{a} = a_t\hat{t} - a_c\hat{r}. \quad (9.18)$$

La magnitud de la aceleración centrípeta es

$$a_c = v\omega = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r. \quad (9.19)$$

La primera expresión para la aceleración centrípeta en la ecuación 9.19 se puede interpretar simplemente, por la ecuación 9.17, como el coeficiente del vector unitario que apunta en la dirección radial negativa. La segunda expresión y la tercera para la aceleración centrípeta, entonces, se basan en la relación entre las rapidez lineal y angular y el radio (ecuación 9.13).

Para la magnitud de la aceleración en movimiento circular tenemos, entonces, por las ecuaciones 9.17 y 9.19,

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_c^2} = \sqrt{(r\alpha)^2 + (r\omega^2)^2} = r\sqrt{\alpha^2 + \omega^4}. \quad (9.20)$$

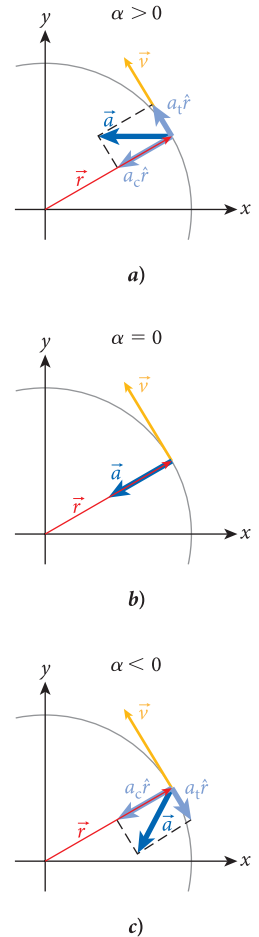


FIGURA 9.12 Relaciones entre aceleración lineal, aceleración centrípeta y aceleración angular para a) rapidez en aumento; b) rapidez constante, y c) rapidez en disminución.

EJEMPLO 9.4 Ultracentrifugadora

Uno de los equipos más importantes en los laboratorios biomédicos es la ultracentrifugadora (figura 9.13). Se usa para separar compuestos (tales como coloides o proteínas) que consisten en *partículas* de diferentes masas mediante el proceso de sedimentación (las partículas más masivas se hunden al fondo). En vez de dejar que la aceleración de la gravedad realice la sedimentación, una ultracentrifugadora utiliza la aceleración centrípeta de la rotación rápida para acelerar el proceso. Algunas ultracentrifugadoras pueden alcanzar valores de aceleración centrípeta mayores a $10^6 g$ ($g = 9.81 \text{ m/s}^2$).

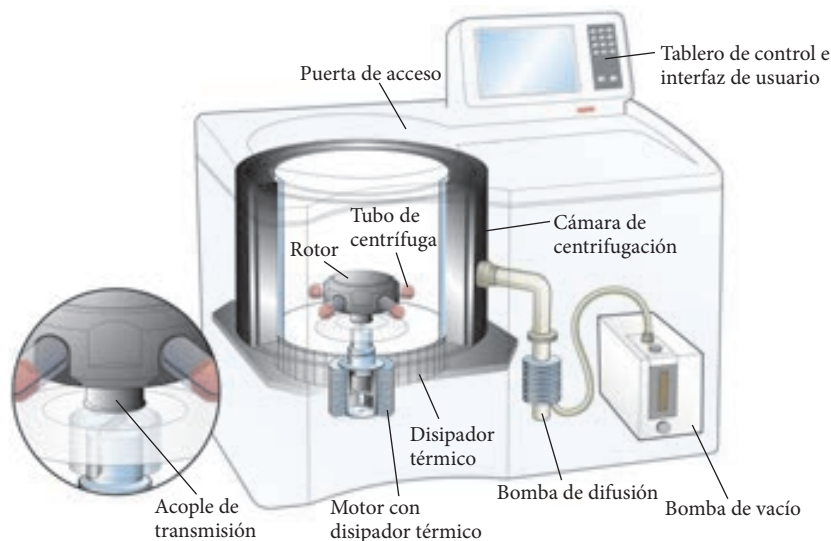


FIGURA 9.13 Diagrama en corte de una ultracentrifugadora.

PROBLEMA

Si usted quiere generar $840\,000 g$ de aceleración centrípeta en una muestra que gira a una distancia de 23.5 cm del eje de rotación de la ultracentrifugadora, ¿cuál es la frecuencia que usted debe ingresar en los controles? ¿Cuál es la rapidez lineal con la que se mueve entonces la muestra?

SOLUCIÓN

La aceleración centrípeta está dada por $a_c = \omega^2 r$, y la velocidad angular se relaciona con la frecuencia por la ecuación 9.11: $\omega = 2\pi f$. Así, la relación entre la frecuencia y la aceleración centrípeta es $a_c = (2\pi f)^2 r$, o

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{a_c}{r}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{(840\,000)(9.81 \text{ m/s}^2)}{0.235 \text{ m}}} = 942 \text{ s}^{-1} = 56\,500 \text{ rpm}.$$

Para la rapidez lineal de la muestra dentro de la centrifugadora, encontramos entonces

$$v = r\omega = 2\pi r f = 2\pi(0.235 \text{ m})(942 \text{ s}^{-1}) = 1.39 \text{ km/s}.$$

Otros tipos de centrifugadoras, llamadas *centrifugadoras de gas*, se usan en el proceso de enriquecimiento de uranio. En este proceso se separan los isótopos ^{235}U y ^{238}U que difieren en masa por tan sólo más de 1%. El uranio natural contiene más de 99% del inofensivo ^{238}U . Pero si se enriquece el uranio para que contenga más de 90% de ^{235}U , se puede usar para armas nucleares. Las centrifugadoras de gas que se usan en el proceso de enriquecimiento tienen que girar aproximadamente a $100\,000 \text{ rpm}$, lo cual produce un increíble esfuerzo mecánico sobre los mecanismos y los materiales de estas centrifugadoras, y las hace muy difíciles de diseñar y fabricar. Para impedir la proliferación de armas nucleares, el diseño de estas centrifugadoras es un secreto estrechamente vigilado.

EJEMPLO 9.5 Aceleración centrípeta debida a la rotación de la Tierra

Como la Tierra gira sobre su propio eje, los puntos sobre su superficie se mueven con una velocidad de rotación, y es interesante calcular la aceleración centrípeta correspondiente. Esta aceleración puede alterar un poco el valor comúnmente especificado de la aceleración debida a la gravedad sobre la superficie de la Tierra.

Podemos insertar los datos para la Tierra en la ecuación 9.19, para encontrar la magnitud de la aceleración centrípeta:

$$\begin{aligned} a_c &= \omega^2 r = \omega^2 R_{\text{Tierra}} \cos \vartheta \\ &= (7.27 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1})^2 (6.38 \cdot 10^6 \text{ m})(\cos \vartheta) \\ &= (0.034 \text{ m/s}^2)(\cos \vartheta). \end{aligned}$$

Aquí hemos usado la misma notación que en el ejemplo 9.3, donde ϑ representa el ángulo de latitud relativo al Ecuador. Nuestro resultado muestra que la aceleración centrípeta debida a la rotación de la Tierra cambia la aceleración gravitacional efectiva que se observa en su superficie, por un factor que va de 0.33% (en el Ecuador) a cero (en los polos). Usando Seattle y Miami como ejemplos, obtenemos una aceleración centrípeta de 0.02 m/s^2 para Seattle y 0.03 m/s^2 para Miami. Estos valores son relativamente pequeños en comparación con el valor citado para la aceleración de la gravedad, 9.81 m/s^2 , pero no siempre son despreciables.

EJEMPLO 9.6 Reproductor de CD

PROBLEMA

En el ejemplo 9.2 establecimos que una pista de CD mide 5.4 km de longitud. Un CD de música puede almacenar 74 minutos de música. ¿Cuál es la velocidad angular y cuál es la aceleración tangencial del disco cuando gira dentro de un reproductor de CD, suponiendo una velocidad lineal constante?

SOLUCIÓN

Como la pista mide 5.4 km de longitud y tiene que pasar por el láser que la lee en un intervalo de tiempo $\Delta t = 74 \text{ min} = 4\,440 \text{ s}$, la rapidez de la pista que pasa por el lector tiene que ser $v = (5.4 \text{ km})/(4\,440 \text{ s}) = 1.216 \text{ m/s}$. Por el ejemplo 9.2 sabemos que la pista es una espiral con 20 625 espiras que comienzan con un radio interior $r_1 = 25 \text{ mm}$ y llegan a un radio exterior $r_2 = 58 \text{ mm}$. A cada valor del radio r podemos considerar la espira como aproximadamente una circunferencia, como lo hicimos en el ejemplo 9.2. Entonces podemos usar la relación entre las rapidezces lineal y angular expresadas en la ecuación 9.13 para despejar la velocidad angular como función del radio:

$$v = r\omega \Rightarrow \omega = \frac{v}{r}.$$

Al sustituir los valores para v y r , obtenemos

$$\begin{aligned} \omega(r_1) &= \frac{1.216 \text{ m/s}}{0.025 \text{ m}} = 48.64 \text{ s}^{-1} \\ \omega(r_2) &= \frac{1.216 \text{ m/s}}{0.058 \text{ m}} = 20.97 \text{ s}^{-1}. \end{aligned}$$

Esto significa que un reproductor de CD tiene que disminuir la rapidez de rotación del disco mientras lo reproduce. La aceleración angular media durante este proceso es

$$\alpha = \frac{\omega(r_2) - \omega(r_1)}{\Delta t} = \frac{20.97 \text{ s}^{-1} - 48.64 \text{ s}^{-1}}{4\,440 \text{ s}} = -6.23 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-2}.$$

9.5 Fuerza centrípeta

La fuerza centrípeta, \vec{F}_c , no es otra fuerza fundamental de la naturaleza, sino sólo la fuerza neta necesaria hacia dentro para causar la aceleración centrípeta que se requiere para el movimiento

9.3 Oportunidad de autoexamen

La aceleración centrípeta debida a la rotación de la Tierra tiene un valor máximo de aproximadamente $g/300$. ¿Puede usted determinar el valor de la aceleración centrípeta debida al movimiento de traslación de la Tierra en su órbita alrededor del Sol?

9.4 Oportunidad de autoexamen

Usted está de pie sobre la superficie de la Tierra en el Ecuador. Si la Tierra dejara de girar sobre su eje, ¿usted se sentiría más ligero, más pesado o igual?

9.2 Ejercicio en clase

El periodo de rotación de la Tierra sobre su eje es de 24 h. A esta velocidad angular, la aceleración centrípeta en la superficie de la Tierra es pequeña en comparación con la aceleración de la gravedad. ¿Cuál tendría que ser el periodo de la rotación de la Tierra para que la magnitud de la aceleración centrípeta en la superficie en el Ecuador fuera igual a la magnitud de la aceleración de la gravedad? (¡Con este periodo de rotación, usted podría levitar por encima de la superficie de la Tierra!)

- | | |
|------------|-----------|
| a) 0.043 h | d) 1.41 h |
| b) 0.340 h | e) 3.89 h |
| c) 0.841 h | f) 12.0 h |

9.5 Oportunidad de autoexamen

¿Cómo se compara la aceleración centrípeta de un CD girando en un reproductor con su aceleración tangencial?

9.3 Ejercicio en clase

Usted se sienta en un carrusel que está en movimiento. ¿Dónde se debe sentar para que actúe la mayor fuerza centrípeta sobre usted?

- a) Cerca de la orilla externa.
- b) Cerca del centro.
- c) En medio.
- d) La fuerza es la misma en todas partes.

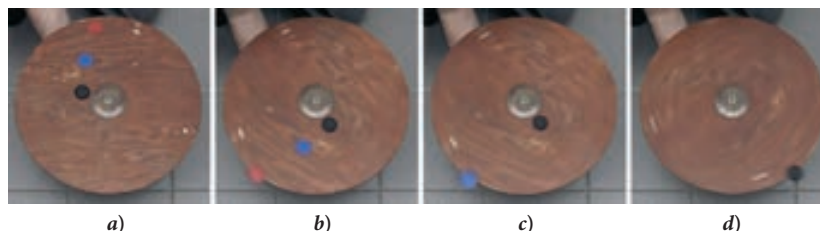
circular. Tiene que señalar hacia dentro, hacia el centro del círculo. Su magnitud es el producto de la masa del objeto por la aceleración centrípeta necesaria para obligarlo a ir en una trayectoria circular:

$$F_c = ma_c = mv\omega = m \frac{v^2}{r} = m\omega^2 r. \quad (9.21)$$

Para llegar a la ecuación 9.21, simplemente hemos escrito la aceleración centrípeta en términos de la velocidad lineal v , la velocidad angular ω y el radio r , como en la ecuación 9.19, y la hemos multiplicado por la masa del objeto al cual la fuerza centrípeta obliga a ir en una trayectoria circular.

La figura 9.14 muestra una vista aérea de una mesa giratoria sobre la cual hay tres fichas de póquer idénticas (salvo por el color). La ficha negra está ubicada cerca del centro, la ficha roja cerca de la orilla exterior y la ficha azul en medio de las otras. Si hacemos girar lentamente la mesa como en el inciso *a*), las tres fichas están en movimiento circular. En este caso, la fuerza de fricción estática entre la mesa y las fichas suministra la fuerza centrípeta necesaria para mantener a las fichas en movimiento circular. En los incisos *b*), *c*) y *d*), la mesa gira con rapidez progresivamente creciente. Una velocidad angular más alta significa una fuerza centrípeta más alta, de acuerdo con la ecuación 9.21. Las fichas se deslizan cuando la fuerza de fricción no es suficientemente grande para suministrar la fuerza centrípeta necesaria. Como usted puede ver, la ficha que está más lejos se desliza primero, y la que está más cercana al centro se desliza al final. Esto indica claramente que, para una velocidad angular dada, la fuerza centrípeta aumenta con la distancia al centro. La ecuación 9.21 en la forma $F_c = m\omega^2 r$ puede explicar esta conducta. Todos los puntos sobre la superficie de la mesa giratoria tienen la misma velocidad angular, ω , porque todos tardan lo mismo en completar una revolución. Así, para las tres fichas de póquer, la fuerza centrípeta requerida es proporcional a la distancia del centro, lo cual explica por qué la ficha roja se desliza primero y la negra al final.

FIGURA 9.14 Fichas de póquer en una mesa giratoria. De izquierda a derecha se muestran las posiciones iniciales de las fichas y los momentos en los que las tres fichas se deslizan hacia fuera.



Péndulo cónico

La figura 9.15 es una fotografía de las sillas voladoras, un juego en un parque de diversiones. Los paseantes se sientan en sillas suspendidas de un disco sólido por cadenas largas. Al principio del paseo, las cadenas cuelgan verticalmente; pero cuando el aparato comienza a girar, las cadenas forman un ángulo ϕ con la vertical, como usted puede ver. Este ángulo es independiente de la masa del paseante, y depende sólo de la velocidad angular del movimiento circular. ¿Cómo podemos encontrar el valor de este ángulo en términos de dicha velocidad?



FIGURA 9.15 Sillas voladoras en un parque de diversiones.

Para entender esto, consideramos una situación similar pero un poco más simple: una masa suspendida del techo por una cuerda de longitud ℓ realizando un movimiento circular tal que el ángulo entre la cuerda y la vertical es ϕ . La cuerda describe la superficie de un cono, por lo cual este arreglo se llama *péndulo cónico*, como se ve en la figura 9.16.

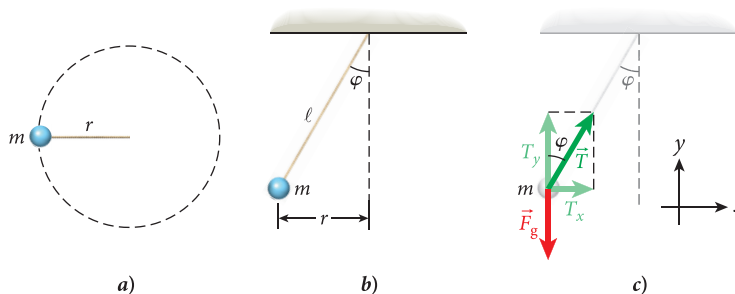


FIGURA 9.16 Péndulo cónico: a) vista de planta; b) vista lateral; c) diagrama de cuerpo libre.

La figura 9.16c) muestra un diagrama de cuerpo libre para la masa. Hay sólo dos fuerzas que actúan sobre ella. Al actuar verticalmente hacia abajo, está la fuerza de gravedad \vec{F}_g , indicada por la flecha roja en el diagrama de cuerpo libre; como es usual, su magnitud es mg . La otra única fuerza que actúa sobre la masa es la tensión de la cuerda, \vec{T} , que actúa a lo largo de la dirección de la cuerda a un ángulo φ con la vertical. Esta tensión de la cuerda se divide en sus componentes ($T_x = T \sin \varphi$, $T_y = T \cos \varphi$). No hay movimiento en la dirección vertical; por lo tanto, necesitamos una fuerza neta cero en dicha dirección, $F_{\text{net},y} = T \cos \varphi - mg = 0$, lo cual nos lleva a

$$T \cos \varphi = mg.$$

En la dirección horizontal, la componente horizontal de la tensión de la cuerda es la única componente de la fuerza; proporciona la fuerza centrípeta. La segunda ley de Newton, $F_{\text{net},x} = F_c = ma_c$, entonces da

$$T \sin \varphi = m r \omega^2.$$

Como usted puede ver en la figura 9.16b), el radio del movimiento circular está dado por $r = \ell \sin \varphi$. Usando esta relación, encontramos la tensión de la cuerda en términos de la velocidad angular:

$$T = m \ell \omega^2. \quad (9.22)$$

Acabamos de ver que $T \cos \varphi = mg$, y podemos sustituir T en esta ecuación por su expresión en la ecuación 9.22, para obtener

$$\begin{aligned} (m \ell \omega^2)(\cos \varphi) &= mg \\ \omega^2 &= \frac{g}{\ell \cos \varphi} \\ \omega &= \sqrt{\frac{g}{\ell \cos \varphi}}. \end{aligned} \quad (9.23)$$

La masa se cancela, lo cual explica la razón de que todas las cadenas en la figura 9.15 tengan el mismo ángulo con la vertical. Claramente hay una relación única e interesante entre el ángulo del péndulo cónico y su velocidad angular. Cuando el ángulo φ tiende a cero, la velocidad angular no tiende a cero, sino más bien a un valor mínimo finito, $\sqrt{g/\ell}$. (Obtendremos una comprensión más profunda de este resultado en el capítulo 14, cuando estudiemos el movimiento pendular.) En el límite cuando el ángulo φ tiende a 90° , ω se vuelve infinita.

PROBLEMA RESUELTO 9.1 Análisis de una montaña rusa

Quizá la emoción más grande que se pueda tener en un parque de diversiones es una montaña rusa con un bucle vertical (figura 9.17), donde los pasajeros se sienten casi sin peso en la parte superior del bucle.

PROBLEMA

Suponga que el bucle vertical tiene un radio de 5.00 m. ¿Cuál tiene que ser la velocidad lineal del carrito en la parte superior del bucle para que los pasajeros se sientan sin peso? (Suponga que se puede despreciar la fricción entre el carrito y los rieles.)

SOLUCIÓN

PIENSE

Una persona se siente sin peso cuando no hay fuerza de soporte, ni de un asiento ni de una barrera que actúe para contrarrestar su peso. Para que una persona se sienta sin peso en la parte superior del bucle, ninguna fuerza normal debe actuar sobre ella en este punto.

ESBOCE

Los diagramas de cuerpo libre de la figura 9.18 pueden ayudar a conceptualizar la situación. La fuerza de gravedad y la fuerza normal que actúan sobre un pasajero en el carrito en la parte superior del bucle se muestran en la figura 9.18a). La suma de estas dos fuerzas es la fuerza neta, que tiene que ser igual a la fuerza centrípeta en el movimiento circular. Si la fuerza neta (fuerza centrífuga aquí) es igual a la fuerza de gravedad, entonces la fuerza normal es cero, y el pasajero se siente sin peso. Esta situación se ilustra en la figura 9.18b).

(continúa)

9.6 Oportunidad de autoexamen

Trace una gráfica de la tensión de cuerda como función del ángulo φ .

9.4 Ejercicio en clase

Cierta velocidad angular, ω_0 , de un péndulo cónico da por resultado un ángulo φ_0 . Si el mismo péndulo cónico se llevara a la Luna, donde la aceleración gravitacional es la sexta parte de la de la Tierra, ¿cómo se tendría que ajustar la velocidad angular para obtener el mismo ángulo φ_0 ?

- $\omega_{\text{Luna}} = 6\omega_0$
- $\omega_{\text{Luna}} = \sqrt{6}\omega_0$
- $\omega_{\text{Luna}} = \omega_0$
- $\omega_{\text{Luna}} = \omega_0/\sqrt{6}$
- $\omega_{\text{Luna}} = \omega_0/6$

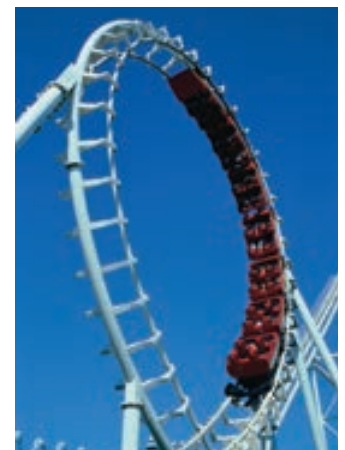


FIGURA 9.17 Montaña rusa moderna con un bucle vertical.

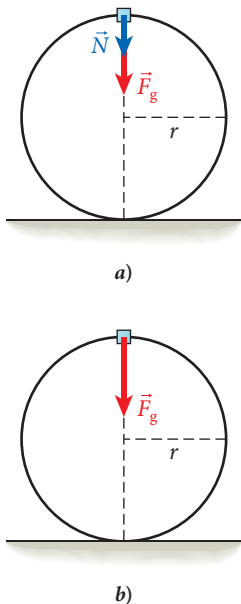


FIGURA 9.18 a) Diagrama de cuerpo libre para un pasajero en el ápice del bucle vertical de una montaña rusa. b) Condición para la sensación de ingravidez.

(continuación)

INVESTIGUE

Acabamos de decir que la fuerza neta es igual a la fuerza centrípeta y que la fuerza neta es la suma de la fuerza normal y la fuerza de gravedad:

$$\vec{F}_c = \vec{F}_{\text{neta}} = \vec{F}_g + \vec{N}.$$

Para la sensación de ingravidez en el ápice del bucle, necesitamos $\vec{N} = 0$, y por lo tanto,

$$\vec{F}_c = \vec{F}_g \Rightarrow F_c = F_g. \tag{i}$$

Como siempre, tenemos $F_g = mg$. Para la magnitud de la fuerza centrípeta, use la ecuación 9.21

$$F_c = ma_c = m \frac{v^2}{r}.$$

SIMPLIFIQUE

Después de sustituir en la ecuación (i) las expresiones para las fuerzas centrípeta y gravitacional, despejamos la rapidez lineal en el ápice del bucle:

$$F_c = F_g \Rightarrow m \frac{v_{\text{ápice}}^2}{r} = mg \Rightarrow v_{\text{ápice}} = \sqrt{rg}.$$

CALCULE

Al usar $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ y el valor de 5.00 m dado para el radio, obtenemos

$$v_{\text{ápice}} = \sqrt{(5.00 \text{ m})(9.81 \text{ m/s}^2)} = 7.00357 \text{ m/s}.$$

REDONDEE

Redondeando nuestro resultado a tres dígitos de precisión, tenemos

$$v_{\text{ápice}} = 7.00 \text{ m/s}.$$

VUELVA A REVISAR

Obviamente, nuestra respuesta pasa la verificación más sencilla en cuanto a que las unidades son las de rapidez, metros por segundo. La fórmula para la rapidez lineal en el ápice, $v_{\text{ápice}} = \sqrt{rg}$, indica que un radio mayor necesita una rapidez mayor, lo cual parece razonable.

¿Es razonable 7.00 m/s para la rapidez en el ápice? Convirtiendo este valor obtenemos 15.7 mph, lo cual parece bastante lento para un paseo que típicamente se experimenta como tremendamente rápido. Pero tenga en cuenta que ésta es la rapidez mínima necesaria en el ápice del bucle, y los operadores de los juegos no quieren estar muy cerca de este valor.

Avancemos un paso y calculemos los vectores de velocidad en las posiciones de 3 horas y de 9 horas en el bucle, suponiendo que el carrito se mueve en sentido antihorario por el bucle. Las direcciones de los vectores de velocidad para movimiento circular son siempre tangenciales al círculo, como se muestra en la figura 9.19.

¿Cómo obtenemos las magnitudes de las velocidades v_3 (en la posición de 3 horas) y v_9 (en la posición de 9 horas)? Primero, recuerde, del capítulo 6, que la energía total es la suma de las energías cinética y potencial, $E = K + U$, que la energía cinética es $K = \frac{1}{2}mv^2$ y que la energía potencial gravitacional es proporcional a la altura sobre el suelo, $U = mgy$. En la figura 9.19, el sistema de coordenadas se coloca de tal manera que el cero del eje y esté en la parte más baja del bucle. Entonces podemos escribir la ecuación para la conservación de la energía mecánica suponiendo que no actúa ninguna fuerza no conservativa:

$$E = K_3 + U_3 = K_{\text{ápice}} + U_{\text{ápice}} = K_9 + U_9 \Rightarrow \frac{1}{2}mv_3^2 + mgy_3 = \frac{1}{2}mv_{\text{ápice}}^2 + mgy_{\text{ápice}} = \frac{1}{2}mv_9^2 + mgy_9. \tag{ii}$$

Podemos ver por la figura que las coordenadas y , y por lo tanto las energías potenciales, son las mismas en las posiciones de 3 horas y 9 horas; por lo tanto, las energías cinéticas en ambos puntos tienen que ser iguales. En consecuencia, los valores absolutos de las rapidezces en ambos puntos son iguales, $v_3 = v_9$. Al despejar v_3 de la ecuación (ii), obtenemos

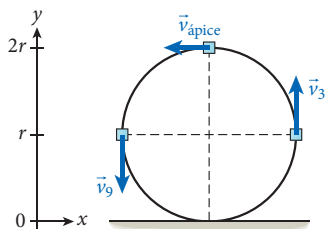


FIGURA 9.19 Dirección de los vectores velocidad en varios puntos a lo largo del bucle vertical de la montaña rusa.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}mv_3^2 + mgy_3 &= \frac{1}{2}mv_{\text{ápice}}^2 + mgy_{\text{ápice}} \Rightarrow \\ \frac{1}{2}v_3^2 + gy_3 &= \frac{1}{2}v_{\text{ápice}}^2 + gy_{\text{ápice}} \Rightarrow \\ v_3 &= \sqrt{v_{\text{ápice}}^2 + 2g(y_{\text{ápice}} - y_3)}.\end{aligned}$$

Nuevamente, la masa se cancela. Además, sólo la diferencia en las coordenadas y entra en esta fórmula para v_3 ; por lo tanto, la elección del origen del sistema de coordenadas es irrelevante. La diferencia en las coordenadas y entre los dos puntos es $y_{\text{ápice}} - y_3 = r$. Al sustituir el valor dado de $r = 5.00$ m y el resultado $v_{\text{ápice}} = 7.00$ m/s que encontramos antes, vemos que la rapidez en las posiciones de 3 horas y 9 horas en el bucle es

$$v_3 = \sqrt{(7.00 \text{ m/s})^2 + 2(9.81 \text{ m/s}^2)(5.00 \text{ m})} = 12.1 \text{ m/s}.$$

Como usted puede ver por esta exposición, prácticamente cualquier fuerza puede actuar como fuerza centrípeta. Para las fichas de póquer en la mesa giratoria fue la fuerza de fricción estática y fue para el péndulo cónico la componente horizontal de la tensión en la cuerda. Pero también puede ser la fuerza gravitacional, la que obliga a los planetas a ir en órbitas (casi) circulares alrededor del Sol (vea el capítulo 12) o la fuerza de Coulomb que actúa sobre los electrones en los átomos (vea el capítulo 21).

¿Existe una fuerza centrífuga?

Éste es un buen momento para aclarar un punto importante acerca de la dirección de la fuerza causante del movimiento circular. A menudo oye usted a las personas hablar de la aceleración centrífuga (o “que huye del centro” en la dirección radial hacia fuera) o fuerza centrífuga (masa por aceleración). Usted puede experimentar la sensación de que aparentemente se tira de usted hacia afuera en muchos juegos mecánicos giratorios de los parques de diversiones. Esta sensación se debe a la inercia de su cuerpo, que resiste a la aceleración centrípeta hacia el centro. De modo que usted siente una fuerza que aparentemente señala hacia fuera, la fuerza centrífuga. Tenga en cuenta que esta percepción se debe a que su cuerpo se mueve en un marco de referencia acelerado; no hay fuerza centrífuga. La fuerza real que actúa sobre su cuerpo y lo obliga a moverse en una trayectoria circular es la fuerza centrípeta, y señala hacia dentro.

Usted también ha experimentado un efecto similar en el movimiento rectilíneo. Cuando usted está sentado en su automóvil en reposo y luego pisa el acelerador, siente como si se le presionara hacia atrás en su asiento. Esta sensación de una fuerza que lo aprieta en la dirección hacia atrás también proviene de la inercia de su cuerpo, que se acelera hacia delante por su auto. Ambas sensaciones de fuerzas que actúan sobre su cuerpo, la fuerza “centrífuga” y la fuerza que lo “empuja” contra el respaldo del asiento, son resultado de que su cuerpo experimenta una aceleración en el sentido opuesto y opone resistencia, inercia, contra dicha aceleración.

9.6 Movimiento circular y lineal

La tabla 9.1 resume las relaciones entre cantidades lineales y angulares para el movimiento circular. Las relaciones que se muestran en la tabla identifican las cantidades angulares (θ , ω y α) con las cantidades lineales (s , v y a). El radio r de la trayectoria circular es constante y da la conexión entre los dos conjuntos de cantidades. (En el capítulo 10 se agregan a esta lista los homólogos rotacionales de masa, energía cinética, momento y fuerza.)

Como acabamos de ver, hay una correspondencia formal entre el movimiento rectilíneo con velocidad constante y el movimiento circular con velocidad angular constante. Sin embargo, hay una gran diferencia. Como vimos en la sección 3.6 sobre movimiento relativo, usted no siempre puede distinguir entre moverse con velocidad constante en una línea recta y estar en reposo. Esto se debe a que el origen del sistema de coordenadas se puede colocar en cualquier punto, incluso en un punto que se mueve con velocidad constante. La física del movimiento de traslación no cambia bajo esta transformación galileana de velocidades. En contraste, en el movimiento circular usted siempre se está moviendo en una trayectoria circular con un centro bien definido. Experimentar la fuerza “centrífuga” es entonces un signo seguro del movimiento circular, y el vigor de dicha fuerza es una medida de la magnitud de la velocidad angular. Usted puede argumentar que está en movimiento circular

9.5 Ejercicio en clase

En el problema resuelto 9.1, ¿a qué rapidez tiene que entrar el carrito de la montaña rusa a la parte inferior del bucle para producir la sensación de ingravidez en la parte superior?

- a) 7.00 m/s d) 15.7 m/s
b) 12.1 m/s e) 21.4 m/s
c) 13.5 m/s

9.7 Oportunidad de autoexamen

¿Qué rapidez debe tener el carrito de montaña rusa en el problema resuelto 9.1 en el ápice del bucle para lograr la misma sensación de ingravidez si se duplica el radio del bucle?

9.6 Ejercicio en clase

La figura 9.18a) muestra el diagrama general de cuerpo libre para las fuerzas que actúan sobre un pasajero de la montaña rusa en el ápice del bucle, donde hay una fuerza normal que tiene una magnitud más pequeña que la magnitud de la fuerza gravitacional. Dado que la rapidez del carrito es de 7.00 m/s, ¿cuál tiene que ser el radio del bucle para que sea correcto ese diagrama de cuerpo libre?

- a) menos de 5 m
b) 5 m
c) más de 5 m

Tabla 9.1 Comparación de variables cinemáticas para movimiento circular

Cantidad	Lineal	Angular	Relación
Desplazamiento	s	θ	$s = r\theta$
Velocidad	v	ω	$v = r\omega$
Aceleración	a	α	$\vec{a} = r\alpha\hat{t} - r\omega^2\hat{r}$ $a_t = r\alpha$ $a_c = \omega^2r$

constante alrededor del centro de la Tierra, alrededor del centro del Sistema Solar y alrededor del centro de la galaxia de la Vía Láctea, pero no siente los efectos de esos movimientos circulares. Es verdad; sin embargo, en este caso las magnitudes de las velocidades angulares correspondientes a estos movimientos son tan pequeñas que hacen que los efectos que se perciben sean despreciables.

Aceleración angular constante

En el capítulo 2 se explicó con detenimiento el caso especial de la aceleración constante. Bajo esta suposición, dedujimos cinco ecuaciones que resultaron útiles para resolver toda clase de problemas. Para facilitar la comparación, aquí están esas cinco ecuaciones del movimiento lineal con aceleración constante:

- (i) $x = x_0 + v_{x0}t + \frac{1}{2}a_x t^2$
- (ii) $x = x_0 + \bar{v}_x t$
- (iii) $v_x = v_{x0} + a_x t$
- (iv) $\bar{v}_x = \frac{1}{2}(v_x + v_{x0})$
- (v) $v_x^2 = v_{x0}^2 + 2a_x(x - x_0)$.

Ahora daremos los mismos pasos que en el capítulo 2 para deducir las ecuaciones equivalentes para aceleración angular constante. Comenzamos con la ecuación 9.14 e integramos, usando la convención de notación usual de $\omega_0 \equiv \omega(t_0)$:

$$\alpha(t) = \frac{d\omega}{dt} \Rightarrow$$

$$\int_{t_0}^t \alpha(t') dt' = \int_{t_0}^t \frac{d\omega(t')}{dt'} dt' = \omega(t) - \omega(t_0) \Rightarrow$$

$$\omega(t) = \omega_0 + \int_{t_0}^t \alpha(t') dt'.$$

Esta relación es la inversa de la ecuación 9.14, y es válida en general. Si suponemos que la aceleración angular, α , es constante en el tiempo, podemos evaluar la integral y obtener

$$\omega(t) = \omega_0 + \alpha \int_0^t dt' = \omega_0 + \alpha t. \tag{9.24}$$

Por comodidad, hemos hecho $t_0 = 0$, igual que lo hicimos en el capítulo 2 en una situación similar. En seguida, usamos la ecuación 9.8, que expresa la velocidad angular como la derivada del ángulo con respecto al tiempo, y con la notación $\theta_0 = \theta(t = 0)$:

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = \omega(t) = \omega_0 + \alpha t \Rightarrow$$

$$\theta(t) = \theta_0 + \int_0^t \omega(t') dt' = \theta_0 + \int_0^t (\omega_0 + \alpha t') dt' \Rightarrow$$

$$= \theta_0 + \omega_0 \int_0^t dt' + \alpha \int_0^t t' dt' \Rightarrow$$

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2. \tag{9.25}$$

Al comparar las ecuaciones 9.24 y 9.25 con las ecuaciones (iii) y (i) para movimiento lineal, se descubre que estas dos ecuaciones son las equivalentes, en movimiento circular, de las dos ecuaciones cinemáticas para movimiento lineal rectilíneo en una dimensión. Con las sencillas sustituciones $x \rightarrow \theta$, $v_x \rightarrow \omega$ y $a_x \rightarrow \alpha$, podemos escribir cinco ecuaciones cinemáticas para movimiento circular bajo aceleración angular constante:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & \theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2 \\ \text{(ii)} \quad & \theta = \theta_0 + \bar{\omega} t \\ \text{(iii)} \quad & \omega = \omega_0 + \alpha t \\ \text{(iv)} \quad & \bar{\omega} = \frac{1}{2} (\omega + \omega_0) \\ \text{(v)} \quad & \omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0). \end{aligned} \quad (9.26)$$

9.8 Oportunidad de autoexamen

Se ha dado la deducción de dos de estas cinco ecuaciones cinemáticas para movimiento circular. ¿Puede usted dar la deducción para las ecuaciones restantes? (*Pista:* La línea de razonamiento sigue las mismas líneas que la Deducción 2.1 en el capítulo 2.)

EJEMPLO 9.7 Lanzamiento de martillo

Uno de los eventos más interesantes en las competencias de pista y campo es el lanzamiento de martillo. La tarea consiste en lanzar el “martillo”, una bola de hierro de 12 cm de diámetro conectada a un mango mediante un cable de cero, a la distancia máxima. La longitud total del martillo es de 121.5 cm, y su masa total es de 7.26 kg. El atleta tiene que realizar el lanzamiento conservándose dentro de un círculo de 2.135 m de diámetro (7 ft), y la mejor manera de lanzar el martillo es que el atleta lo haga girar, dejando que el martillo se mueva en círculo alrededor de él, antes de soltarlo. En la Olimpiada de 1988 en Seúl, el lanzador ruso Sergey Litvinov ganó la medalla de oro con una distancia, que es récord olímpico, de 84.80 m. Dio siete vueltas al martillo antes de soltarlo, y el periodo para completar cada vuelta se obtuvo del examen de la grabación en video, cuadro por cuadro: 1.52 s, 1.08 s, 0.72 s, 0.56 s, 0.44 s, 0.40 s y 0.36 s.

PROBLEMA 1

¿Cuál fue la aceleración angular promedio durante las siete vueltas?

SOLUCIÓN 1

Para encontrar la aceleración angular promedio, sumamos todos los intervalos de tiempo para las siete vueltas, para obtener el tiempo total:

$$t_{\text{todas}} = 1.52 \text{ s} + 1.08 \text{ s} + 0.72 \text{ s} + 0.56 \text{ s} + 0.44 \text{ s} + 0.40 \text{ s} + 0.36 \text{ s} = 5.08 \text{ s}.$$

Durante este tiempo, Litvinov realizó siete vueltas completas, lo cual da un ángulo total de

$$\theta_{\text{todas}} = 7(2\pi \text{ rad}) = 14\pi \text{ rad}.$$

Como podemos suponer aceleración constante, podemos fácilmente despejar la aceleración angular y sustituir los valores dados para obtener nuestra respuesta:

$$\theta = \frac{1}{2} \alpha t^2 \quad \alpha = \frac{2\theta_{\text{todas}}}{t^2} = 2 \frac{14\pi \text{ rad}}{(5.08 \text{ s})^2} = 3.41 \text{ rad/s}^2.$$

EXPLICACIÓN

Como sabemos cuánto tardó cada vuelta, podemos generar una gráfica del ángulo del martillo en el plano horizontal como función del tiempo. En la figura 9.20 se muestra esta gráfica, donde los puntos rojos representan los puntos de los datos. La línea azul que se ajusta a los puntos de los datos en la figura 9.20 supone una aceleración angular constante $\alpha = 3.41 \text{ rad/s}^2$. Como puede ver, la suposición de una aceleración constante se justifica, pero no del todo.

PROBLEMA 2

Suponiendo que el radio del círculo en el que se mueve el martillo es de 1.67 m (la longitud del martillo más los brazos del atleta), ¿cuál es la rapidez lineal con la que se suelta el martillo?

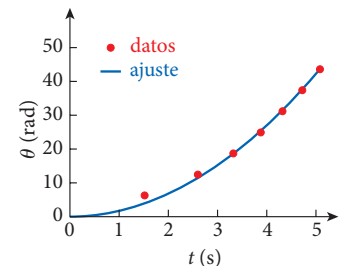


FIGURA 9.20 Ángulo como función del tiempo para el lanzamiento de Sergey Litvinov, ganador de la medalla de oro en lanzamiento de martillo en 1988.

(continúa)

(continuación)

SOLUCIÓN 2

Con aceleración angular constante desde el reposo durante un periodo de 5.08 s, la velocidad angular final es

$$\omega = \alpha t = (3.41 \text{ rad/s}^2)(5.08 \text{ s}) = 17.3 \text{ rad/s}.$$

Al usar la relación entre velocidad lineal y angular, obtenemos la rapidez lineal de liberación:

$$v = r\omega = (1.67 \text{ m})(17.3 \text{ rad/s}) = 28.9 \text{ m/s}.$$

PROBLEMA 3

¿Cuál es la fuerza centrípeta que el lanzador de martillo tiene que ejercer sobre el martillo inmediatamente antes de soltarlo?

SOLUCIÓN 3

La aceleración centrípeta inmediatamente antes de la liberación está dada por

$$a_c = \omega^2 r = (17.3 \text{ rad/s})^2 (1.67 \text{ m}) = 500 \text{ m/s}^2.$$

Con una masa de 7.26 kg para el martillo, la fuerza centrípeta necesaria es

$$F_c = ma_c = (7.26 \text{ kg})(500 \text{ m/s}^2) = 3\,630 \text{ N}.$$

¡Ésta es una fuerza asombrosamente grande, equivalente al peso de un objeto con masa de 370 kg! Esto es por lo que los lanzadores de martillo de clase mundial tienen que ser muy fuertes.

PROBLEMA 4

Después de soltarlo, ¿cuál es la dirección en que se mueve el martillo?

SOLUCIÓN 4

Hay un error común en pensar que el martillo viaja “en espiral”, en una especie de movimiento circular de radio siempre creciente después de soltarlo. Esta idea está equivocada porque no hay ninguna componente horizontal de la fuerza una vez que el atleta suelta el martillo. La segunda ley de Newton nos dice que no habrá ninguna componente horizontal de la aceleración y, por lo tanto, no hay aceleración centrípeta. En vez de esto, el martillo se mueve en una dirección que es tangente al círculo en el punto de liberación. Si usted viera el estadio directamente hacia abajo desde un dirigible, vería que el martillo se mueve en línea recta, como se muestra en la figura 9.21. En vista lateral, la forma de la trayectoria del martillo es una parábola, como se muestra en el capítulo 3.

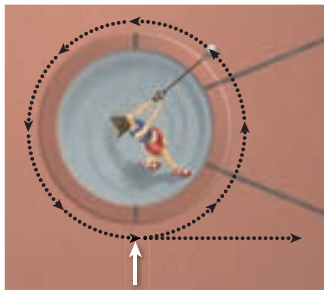


FIGURA 9.21 Vista aérea de la trayectoria del martillo (puntos negros, con flechas que indican la dirección del vector velocidad) durante el tiempo en que el atleta lo mantiene agarrado (trayectoria circular) y después de soltarlo (línea recta). La flecha blanca marca el punto de liberación.

9.7 Más ejemplos de movimiento circular

Veamos otro ejemplo y un problema resuelto para demostrar la utilidad de los conceptos sobre movimiento circular que acabamos de explicar.

EJEMPLO 9.8 Carreras de Fórmula 1

Si usted presencia una carrera de Fórmula 1, puede ver que los autos de carreras toman las curvas desde el exterior, cortan hacia el interior y luego vuelven nuevamente al exterior, como lo muestra la trayectoria roja en la figura 9.22a). La trayectoria azul es la más corta. ¿Por qué los conductores no siguen la ruta más corta?

PROBLEMA

Suponga que los autos se mueven por la vuelta U que se muestra en la figura 9.22a) con rapidez constante, y que el coeficiente de fricción estática entre los neumáticos y el camino es $\mu_s = 1.2$. (Como se mencionó en el capítulo 4, los neumáticos de los autos modernos de carreras pueden tener coeficientes de fricción que exceden 1 cuando se calientan a la temperatura de la carrera y, por lo tanto, son muy pegajosas.) Si el radio de la curva interna que se muestra en la figura es $R_B = 10.3 \text{ m}$ y el radio de la curva externa es $R_A = 32.2 \text{ m}$ y si los autos se mueven a su rapidez máxima, ¿cuánto tiempo más tardará un auto en moverse del punto A al A' y del punto B al B'?

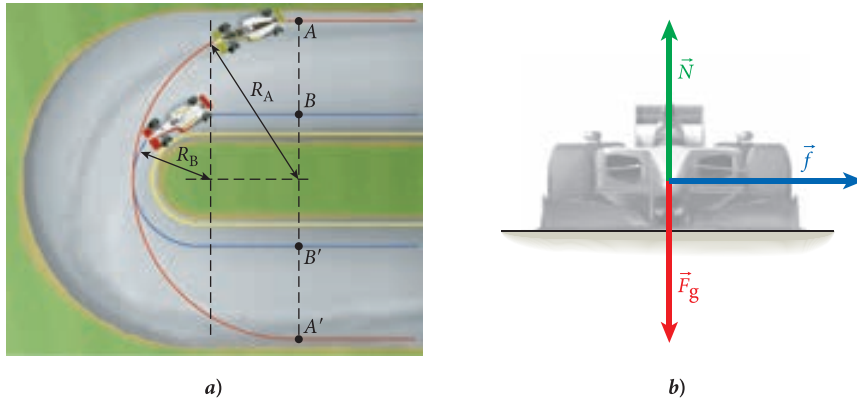


FIGURA 9.22 a) Trayectorias de autos de carreras tomando una vuelta en una pista oval en dos formas. b) Diagrama de cuerpo libre para un auto de carreras en una curva.

SOLUCIÓN

Comenzamos dibujando un diagrama de cuerpo libre, como se muestra en la figura 9.22b). El diagrama muestra todas las fuerzas que actúan sobre el auto, con el origen de las flechas de las fuerzas en el centro de masa del auto. La fuerza de gravedad, que actúa hacia abajo con magnitud $F_g = mg$, se muestra en rojo. Esta fuerza se equilibra exactamente con la fuerza normal que ejerce el camino sobre el auto, que se muestra en verde. Al dar la vuelta un auto, se necesita una fuerza neta para cambiar el vector velocidad del auto y actuar como fuerza centrípeta que empuja al auto a una trayectoria circular. Esta fuerza neta se genera por la fuerza de fricción (que se muestra en azul) entre los neumáticos y el camino. Esta flecha de fuerza señala horizontalmente y hacia dentro, hacia el centro de la curva. Como es usual, la magnitud de la fuerza de fricción es el producto de la fuerza normal y el coeficiente de fricción: $f_{\text{máx}} = \mu_s mg$. (Nota: en este caso, usamos el signo igual porque los conductores de los autos llevan sus autos y sus neumáticos al límite y, por lo tanto, alcanzan la fuerza de fricción estática máxima posible.) La flecha para la fuerza de fricción es más larga que la de la fuerza normal por un factor de 1.2, porque $\mu_s = 1.2$.

Primero, necesitamos calcular la velocidad máxima que puede tener un auto de carreras en cada trayectoria. Para cada radio de curvatura, R , la fuerza centrípeta resultante, $F_c = mv^2/R$, la debe dar la fuerza de fricción, $f_{\text{máx}} = \mu_s mg$:

$$m\mu_s g = m \frac{v^2}{R} \Rightarrow v = \sqrt{\mu_s g R}.$$

Por lo tanto, para las curvas roja y azul, obtenemos

$$v_{\text{rojo}} = \sqrt{\mu_s g R_A} = \sqrt{(1.2)(9.81 \text{ m/s}^2)(32.2 \text{ m})} = 19.5 \text{ m/s}$$

$$v_{\text{azul}} = \sqrt{\mu_s g R_B} = \sqrt{(1.2)(9.81 \text{ m/s}^2)(10.3 \text{ m})} = 11.0 \text{ m/s}.$$

¡Estas rapideces son sólo alrededor de 43.6 mph y 24.6 mph, respectivamente! Sin embargo, la curva que se muestra es muy cerrada, típica de una pista de ciudad como la de Mónaco.

Aun cuando un auto se puede mover mucho más rápido en la curva roja, la curva azul es más corta que la roja. Para la longitud de trayectoria de la curva roja, simplemente tenemos la distancia a lo largo del semicírculo, $\ell_{\text{roja}} = \pi R_A = 101 \text{ m}$. Para la longitud de trayectoria de la curva azul, tenemos que sumar las dos secciones rectas y la curva semicircular con el radio menor:

$$\ell_{\text{azul}} = \pi R_B + 2(R_A - R_B) = 76.2 \text{ m}.$$

Entonces obtenemos para el tiempo de A a A' en la curva roja:

$$t_{\text{roja}} = \frac{\ell_{\text{roja}}}{v_{\text{roja}}} = \frac{101 \text{ m}}{19.5 \text{ m/s}} = 5.18 \text{ s}.$$

Para viajar por la curva azul de B a B' el tiempo es

$$t_{\text{azul}} = \frac{\ell_{\text{azul}}}{v_{\text{azul}}} = \frac{76.2 \text{ m}}{11.0 \text{ m/s}} = 6.92 \text{ s}.$$

(continúa)

(continuación)

Con la suposición de que los autos tienen que usar una rapidez constante, es claramente una gran ventaja cortar la curva, como se muestra por la trayectoria roja.

EXPLICACIÓN

En las carreras de autos es ilógico esperar que el auto en la ruta azul se mueva por el segmento recto con velocidad constante. En vez de esto, el conductor llegará al punto B con la rapidez máxima que le permita decelerar a 11.0 m/s cuando entre al segmento circular. Si calculáramos esto en detalle, encontraríamos que la ruta azul es todavía más lenta, pero no por mucho. Además, el auto que siga la ruta azul puede llegar al punto B con una rapidez ligeramente mayor que la rapidez con la que el auto rojo puede llegar al punto A . En otras palabras, tenemos una negociación que considerar antes de declarar un ganador en esta situación. En las carreras reales, los autos desaceleran al tomar una curva y luego aceleran cuando salen de ella. La ruta más ventajosa para cortar una curva no es el semicírculo rojo, sino una ruta que parece más elíptica, comenzando en el exterior, cortando hasta el extremo interior a mitad de la vuelta, y luego virando para estar nuevamente en el exterior al mismo tiempo que se acelera al salir de la vuelta.

Las carreras de Fórmula 1 por lo general incluyen pistas planas y vueltas angostas. Las carreras estilo Indy y NASCAR se desenvuelven en pistas con radios de vueltas mayores así como con curvas peraltadas. A fin de estudiar las fuerzas involucradas en este tipo de carreras, debemos combinar los conceptos de equilibrio estático sobre un plano inclinado con el concepto de movimiento circular.

PROBLEMA RESUELTO 9.2 Carreras NASCAR

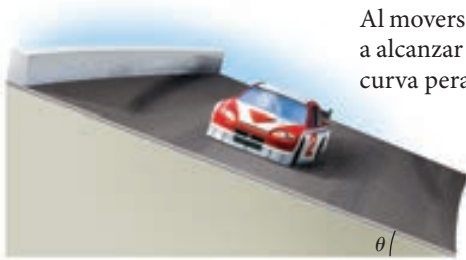


FIGURA 9.23 Auto de carreras en una curva peraltada.

Al moverse un auto de carreras NASCAR por una curva peraltada, el peralte ayuda al conductor a alcanzar rapidezces más altas. Veamos cómo. La figura 9.23 muestra un auto de carreras en una curva peraltada.

PROBLEMA

Si el coeficiente de fricción estática entre la superficie de la pista y los neumáticos del auto es $\mu_s = 0.620$ y el radio de la vuelta es $R = 110 \text{ m}$, ¿cuál es la rapidez máxima con la que el conductor puede tomar una curva con ángulo de peralte $\theta = 21.1^\circ$? (Éste es un ángulo de peralte bastante típico para pistas NASCAR. Indianápolis tiene un peralte de sólo 9° , pero hay algunas pistas con ángulos de peralte que superan los 30° , incluyendo Daytona (31°), Talladega (33°) y Bristol (36°).

SOLUCIÓN

PIENSE

Las tres fuerzas que actúan sobre un auto de carreras son la gravedad, \vec{F}_g , la fuerza normal, \vec{N} , y la fricción \vec{f} . La curva tiene un ángulo de peralte θ , que es también el ángulo entre la normal y la fuerza de gravedad, como se muestra en la figura 9.24a). Para trazar el vector para la fuerza de fricción, hemos supuesto que el auto ha entrado a la curva con gran rapidez, de modo que la dirección de la fuerza de fricción es hacia abajo de la rampa. En contraste con la situación del equilibrio estático, estas tres fuerzas no suman cero, sino una fuerza neta, \vec{F}_{net} , como se muestra en la figura 9.24b). Esta fuerza neta tiene que suministrar la fuerza centrípeta, \vec{F}_c , que obliga al auto a moverse en círculo. De modo que la fuerza neta tiene que actuar en la dirección horizontal porque ésta es la dirección del centro de la circunferencia en la que se mueve el auto.

ESBOCE

En la figura 9.24c) se presenta el diagrama de cuerpo libre para el auto de carreras en la curva peraltada, en el cual se muestran las componentes x y y de las fuerzas. La orientación para el sistema de coordenadas se seleccionó para dar un eje horizontal x y un eje vertical y (dado que la aceleración es horizontal).

INVESTIGUE

Igual que con los problemas de movimiento lineal, podemos resolver problemas de movimiento circular comenzando con la conocida segunda ley de Newton: $\sum \vec{F} = m\vec{a}$. Y, exactamente

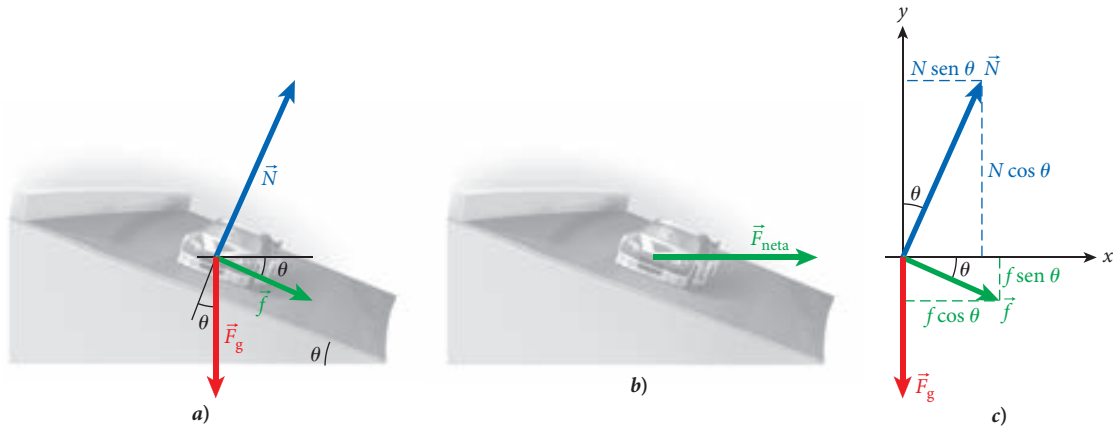


FIGURA 9.24 a) Fuerzas sobre un auto que viaja por una curva peraltada en una pista de carreras. b) La fuerza neta, la suma de las tres fuerzas del inciso a). c) Un diagrama de cuerpo libre que muestra las componentes x y y de las fuerzas que actúan sobre el auto.

igual que en el caso lineal, podemos trabajar los problemas con componentes cartesianas. Por el diagrama de cuerpo libre de la figura 9.24c), podemos ver que las componentes x de las fuerzas que actúan sobre el auto son

$$N \sin \theta + f \cos \theta = F_{neta}. \quad (i)$$

De modo similar, las fuerzas que actúan en la dirección y son

$$N \cos \theta - F_g - f \sin \theta = 0. \quad (ii)$$

Como es usual, la fuerza de fricción máxima está dada por el producto del coeficiente de fricción y la fuerza normal: $f = \mu_s N$. La fuerza gravitacional es el producto de la masa y la aceleración gravitacional: $F_g = mg$.

La clave para resolver este problema es darse cuenta de que la fuerza neta tiene que ser la fuerza que hace que el auto de carreras se mueva por la curva; es decir, la que da la fuerza centrípeta. Por lo tanto, usando la expresión para la fuerza centrípeta de la ecuación 9.21, tenemos

$$F_{neta} = F_c = m \frac{v^2}{R},$$

donde R es el radio de la curva.

SIMPLIFIQUE

Insertamos las expresiones para la fuerza de fricción máxima, la fuerza gravitacional y la fuerza neta en las ecuaciones (i) y (ii) para las componentes x y y de las fuerzas:

$$N \sin \theta + \mu_s N \cos \theta = m \frac{v^2}{R} \Rightarrow N(\sin \theta + \mu_s \cos \theta) = m \frac{v^2}{R}$$

$$N \cos \theta - mg - \mu_s N \sin \theta = 0 \Rightarrow N(\cos \theta - \mu_s \sin \theta) = mg.$$

Éste es un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas: la magnitud de la fuerza normal, N , y la rapidez del auto, v . Es fácil eliminar N dividiendo la primera de las ecuaciones anteriores entre la segunda:

$$\frac{\sin \theta + \mu_s \cos \theta}{\cos \theta - \mu_s \sin \theta} = \frac{v^2}{gR}.$$

Despejamos v :

$$v = \sqrt{\frac{Rg(\sin \theta + \mu_s \cos \theta)}{\cos \theta - \mu_s \sin \theta}}. \quad (iii)$$

Observe que la masa del auto, m , se cancela. Así, lo que importa en esta situación es el coeficiente de fricción entre los neumáticos y la superficie de la pista, el radio de la curva y el ángulo de peralte.

(continúa)

CALCULE

Sustituyendo valores, obtenemos

$$v = \sqrt{\frac{(110 \text{ m})(9.81 \text{ m/s}^2)[\sin 21.1^\circ + 0.620(\cos 21.1^\circ)]}{\cos 21.1^\circ - 0.620(\sin 21.1^\circ)}} = 37.7726 \text{ m/s.}$$

REDONDEE

Al expresar nuestro resultado con tres cifras significativas, obtenemos

$$v = 37.8 \text{ m/s.}$$

VUELVA A REVISAR

Para volver a revisar nuestro resultado, comparemos la rapidez para una curva peraltada con la rapidez máxima que puede alcanzar un auto de carreras en una curva con el mismo radio, pero sin peralte. Sin peralte, la única fuerza que conserva al auto de carreras en la trayectoria circular es la fuerza de fricción. Entonces, nuestro resultado se reduce a la ecuación $v = \sqrt{\mu_s g R}$ que encontramos en el ejemplo 9.8, y podemos sustituir los valores numéricos dados aquí para obtener la rapidez máxima alrededor de una curva plana del mismo radio:

$$v = \sqrt{\mu_s g R} = \sqrt{(0.620)(9.81 \text{ m/s}^2)(110 \text{ m})} = 25.9 \text{ m/s.}$$

Nuestro resultado para la rapidez máxima en una curva peraltada, 37.8 m/s (84.6 mph), es considerablemente mayor que este resultado para una curva plana, 25.9 m/s (57.9 mph), lo cual parece razonable.

Observe que el vector para la fuerza de fricción en la figura 9.24 señala a lo largo de la superficie de la pista y hacia el interior de la curva, igual que el vector fuerza de fricción para la curva sin peralte en la figura 9.22b). Sin embargo, usted puede ver que, al aumentar el ángulo de peralte, alcanza un valor para el cual el denominador de la fórmula de velocidad, ecuación (iii), tiende a cero. Esto sucede cuando $\cot \theta = \mu_s$. Para el valor dado, $\mu_s = 0.620$, este ángulo es de 58.2° . Para ángulos mayores, el vector fuerza de fricción señalará a lo largo de la superficie de la pista y hacia el exterior de la curva. Para estos ángulos, el conductor necesita mantener una rapidez mínima al pasar por la curva, para evitar que el auto se deslice hacia la parte inferior de la rampa.

LO QUE HEMOS APRENDIDO | GUÍA DE ESTUDIO PARA EXAMEN

- La conversión entre coordenadas cartesianas, x y y , y coordenadas polares, r y θ , está dada por

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \tan^{-1}(y/x).$$

- La conversión entre coordenadas polares y coordenadas cartesianas está dada por

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta.$$

- El desplazamiento lineal, s , está relacionado con el desplazamiento angular, θ , por $s = r\theta$, donde r es el radio de la trayectoria circular y θ se mide en radianes.

- La magnitud de la velocidad angular instantánea, ω , está dada por $\omega = \frac{d\theta}{dt}$.

- La magnitud de la velocidad angular se relaciona con la magnitud de la velocidad lineal, v , por $v = r\omega$.
- La magnitud de la aceleración angular instantánea, α , está dada por

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}.$$

- La magnitud de la aceleración angular está relacionada con la magnitud de la aceleración tangencial, a_t , por $a_t = r\alpha$.
- La magnitud de la aceleración centrípeta, a_c , necesaria para mantener un objeto moviéndose en círculo con velocidad angular constante está dada por

$$a_c = \omega^2 r = \frac{v^2}{r}.$$

- La magnitud de la aceleración total de un objeto en movimiento circular es $a = \sqrt{a_t^2 + a_c^2} = r\sqrt{\alpha^2 + \omega^4}$.

TÉRMINOS CLAVE

movimiento circular,
p. 280
coordenadas polares,
p. 280

velocidad angular, p. 283
frecuencia angular,
p. 284
hertz, p. 284

periodo de rotación,
p. 284
aceleración angular, p. 286
aceleración tangencial, p. 286

aceleración radial, p. 286
aceleración centrípeta,
p. 287

NUEVOS SÍMBOLOS Y ECUACIONES

$\bar{\omega} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$, magnitud de la velocidad angular media.

$\omega = \frac{d\theta}{dt}$, magnitud de la velocidad angular instantánea.

$f = \frac{\omega}{2\pi}$, frecuencia angular.

$T = \frac{1}{f}$, periodo.

$\bar{\alpha} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$, magnitud de la aceleración angular media.

$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$, magnitud de la aceleración angular instantánea.

$a_c = \omega^2 r = \frac{v^2}{r}$, magnitud de la aceleración centrípeta.

RESPUESTAS A LAS OPORTUNIDADES DE AUTOEXAMEN

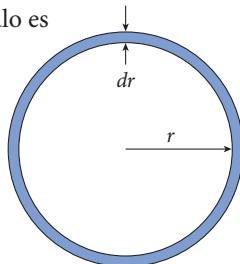
9.1 La longitud de arco diferencial es $Rd\theta$ para un círculo con radio R ; la longitud de arco integrado alrededor del círculo es la circunferencia C

$$C = \int_0^{2\pi} r d\theta = r \int_0^{2\pi} d\theta = r[\theta]_0^{2\pi} = 2\pi r.$$

9.2 En el esquema se muestra el área diferencial. El área diferencial es $dA = 2\pi r dr$. El área del círculo es

$$\int_0^R 2\pi r dr = 2\pi \int_0^R r dr$$

$$= 2\pi \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^R = \pi R^2.$$

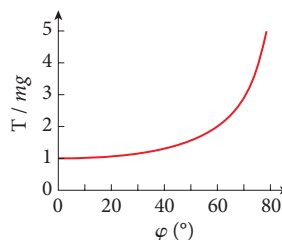


9.3 $\omega^2 r = (2\pi/\text{yr})^2 (1 \text{ au}) = 5.9 \cdot 10^{-4} \text{ m/s}^2 = g/1700$.

9.4 Ligeramente más pesado, pero apenas observable.

9.5 A $r_1 = 25 \text{ mm}$, la magnitud de la aceleración tangencial es $a_t = \alpha r_1 = 1.56 \cdot 10^{-4} \text{ m/s}^2$, y la de la aceleración centrípeta es $a_c = v\omega(r_1) = 59.1 \text{ m/s}^2$, mayor por más de cuatro órdenes de magnitud. En $r_2 = 58 \text{ mm}$, las aceleraciones son $a_t = \alpha r_2 = 3.61 \cdot 10^{-4} \text{ m/s}^2$ y $a_c = v\omega(r_2) = 25.5 \text{ m/s}^2$.

9.6 Sustituya la ecuación 9.23 en la ecuación 9.22 y encuentre $T = mg/\cos\varphi$.



9.7 Si se duplica el radio, la rapidez en el ápice del bucle tiene que aumentar por un factor de $\sqrt{2}$. Por lo tanto, la rapidez necesaria es $(7.00 \text{ m/s})(\sqrt{2}) = 9.90 \text{ m/s}$.

9.8 (iv) $\bar{\omega} = \frac{1}{t} \int_0^t \omega(t') dt' = \frac{1}{t} \int_0^t (\omega_0 + \alpha t') dt'$

$$= \frac{\omega_0}{t} \int_0^t dt' + \frac{\alpha}{t} \int_0^t t' dt' = \omega_0 + \frac{1}{2} \alpha t$$

$$= \frac{1}{2} \omega_0 + \frac{1}{2} (\omega_0 + \alpha t)$$

$$= \frac{1}{2} (\omega_0 + \omega)$$

(ii) $\bar{\omega} = \omega_0 + \frac{1}{2} \alpha t$

$$\Rightarrow \bar{\omega} t = \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$$

$$\theta = \theta_0 + \theta_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2 = \theta_0 + \bar{\omega} t$$

(v) $\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$

$$= \theta_0 + \theta_0 \left(\frac{\omega - \omega_0}{\alpha} \right) + \frac{1}{2} \alpha \left(\frac{\omega - \omega_0}{\alpha} \right)^2$$

$$= \theta_0 + \frac{\omega\omega_0 - \omega_0^2}{\alpha} + \frac{1}{2} \frac{\omega^2 + \omega_0^2 - 2\omega\omega_0}{\alpha}$$

Ahora restamos θ_0 de ambos lados de la ecuación y luego multiplicamos por α :

$$\alpha(\theta - \theta_0) = \omega\omega_0 - \omega_0^2 + \frac{1}{2}(\omega^2 + \omega_0^2 - 2\omega\omega_0)$$

$$\Rightarrow \alpha(\theta - \theta_0) = \frac{1}{2}\omega^2 - \frac{1}{2}\omega_0^2$$

$$\Rightarrow \omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$$

PRÁCTICA PARA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Lineamientos de problemas resueltos: movimiento circular

1. El movimiento circular siempre requiere fuerza centrípeta y aceleración centrípeta. Sin embargo, recuerde que la fuerza centrípeta no es una nueva clase de fuerza, sino simplemente la fuerza neta que es la causa del movimiento; consiste en la suma de las fuerzas que actúan sobre el objeto en movimiento. Esta fuerza neta es igual a la masa por la aceleración centrípeta; no cometa el error común de contar la masa por la aceleración como una fuerza que hay que sumar a la fuerza neta en el lado izquierdo de la ecuación del movimiento.

2. Asegúrese de observar si la situación incluye ángulos en grados o en radianes. El radián no es una unidad que necesariamente deba mantenerse en el cálculo, pero verifique que su resultado sea lógico en términos de las unidades angulares.

3. Las ecuaciones de movimiento con aceleración angular constante tienen la misma forma que las ecuaciones de movimiento con aceleración lineal constante. Sin embargo, ninguno de los dos sistemas de ecuaciones se aplica si la aceleración no es constante.

PROBLEMA RESUELTO 9.3

Juego mecánico de un parque de diversiones



FIGURA 9.25 Un juego mecánico de parque de diversiones que consiste en un cilindro giratorio.

PROBLEMA

Uno de los juegos que se encuentran en los parques de diversiones es un cilindro giratorio como el que se muestra en la figura 9.25. Los pasajeros entran en el cilindro vertical y se colocan con la espalda contra la pared curva. El cilindro gira muy rápidamente y, a cierta velocidad angular, el piso se quita. Los buscadores de emociones están ahora colgados como moscas de la pared. (El cilindro que se ve en la figura 9.25 se eleva y se inclina después de alcanzar su velocidad angular de operación, pero no consideraremos esta complicación adicional.) Si el radio del cilindro es $r = 2.10$ m, el eje de rotación del cilindro sigue siendo vertical y el coeficiente de fricción estática entre las personas y la pared es $\mu_s = 0.390$, ¿cuál es la velocidad angular mínima, ω , a la cual se puede quitar el piso?

SOLUCIÓN

PIENSE

Cuando el piso se quita, la magnitud de la fuerza de fricción estática entre un pasajero y la pared del cilindro en rotación debe ser igual a la magnitud de la fuerza de gravedad que actúa sobre el pasajero. La fricción estática entre el pasajero y la pared depende de la fuerza normal que se ejerce sobre el pasajero y el coeficiente de fricción estática. Al girar el cilindro más rápidamente, aumenta la fuerza normal (que se ejerce sobre el pasajero y actúa como fuerza centrípeta). A cierta velocidad angular, la magnitud máxima de la fuerza de fricción estática será igual a la magnitud de la fuerza de gravedad. Esa velocidad angular es la mínima a la que se puede retirar el piso.

ESBOCE

En la figura 9.26a) se muestra una vista aérea del cilindro giratorio. En la figura 9.26b) se muestra el diagrama de cuerpo libre de uno de los pasajeros, donde el eje de rotación se toma paralelo al eje y . En este diagrama, \vec{f} es la fuerza de fricción estática, \vec{N} es la fuerza normal que la pared del cilindro ejerce sobre el pasajero de masa m , y \vec{F}_g es la fuerza de gravedad que actúa sobre el pasajero.

INVESTIGUE

A la velocidad angular mínima necesaria para evitar que caiga el pasajero, la magnitud de la fuerza de fricción estática entre el pasajero y la pared es igual a la magnitud de la fuerza de gravedad que actúa sobre el pasajero. Para analizar estas fuerzas, comenzamos con el diagrama de cuerpo libre que se muestra en la figura 9.26b). En el diagrama de cuerpo libre, la dirección x es a lo largo del radio del cilindro, y la dirección y es vertical. En la dirección x , la fuerza normal que la pared ejerce sobre el pasajero constituye la fuerza centrípeta que hace que el pasajero se mueva en círculo:

$$F_c = N. \quad (i)$$

En la dirección y , el temerario pasajero se queda pegado a la pared sólo si la fuerza ascendente de la fricción estática entre el pasajero y la pared equilibra a la fuerza descendente de la gravedad. La fuerza de gravedad sobre el pasajero es su peso, de modo que podemos escribir

$$f = F_g = mg. \quad (ii)$$

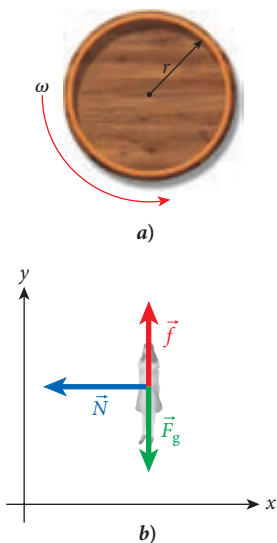


FIGURA 9.26 a) Vista aérea del cilindro giratorio de un juego mecánico del parque de diversiones. b) Diagrama de cuerpo libre para uno de los pasajeros.

Sabemos que la fuerza centrípeta está dada por

$$F_c = mr\omega^2, \quad (\text{iii})$$

y la fuerza de fricción estática está dada por

$$f \leq f_{\text{máx}} = \mu_s N. \quad (\text{iv})$$

SIMPLIFIQUE

Podemos combinar las ecuaciones (ii) y (iv) para obtener

$$mg \leq \mu_s N. \quad (\text{v})$$

Al sustituir F_c en la ecuación (iii) por su valor en la ecuación (i), encontramos

$$N = mr\omega^2. \quad (\text{vi})$$

Al combinar las ecuaciones (v) y (vi), tenemos

$$mg \leq \mu_s mr\omega^2,$$

de donde podemos despejar ω :

$$\omega \geq \sqrt{\frac{g}{\mu_s r}}.$$

Así, el valor mínimo de la velocidad angular está dado por

$$\omega_{\text{mín}} = \sqrt{\frac{g}{\mu_s r}}.$$

Observe que la masa del pasajero se cancela. ¡Esto es crucial, ya que pueden viajar personas con diferentes masas al mismo tiempo!

CALCULE

Al introducir los valores numéricos, encontramos

$$\omega_{\text{mín}} = \sqrt{\frac{g}{\mu_s r}} = \sqrt{\frac{9.81 \text{ m/s}^2}{(0.390)(2.10 \text{ m})}} = 3.46093 \text{ rad/s.}$$

REDONDEE

Al expresar nuestro resultado con tres cifras significativas, tenemos

$$\omega_{\text{mín}} = 3.46 \text{ rad/s.}$$

VUELVA A REVISAR

Para volver a revisar, expresemos nuestro resultado para la velocidad angular en revoluciones por minuto

$$3.46 \frac{\text{rad}}{\text{s}} = \left(3.46 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right) \left(\frac{60 \text{ s}}{1 \text{ min}} \right) \left(\frac{1 \text{ rev}}{2\pi \text{ rad}} \right) = 33 \text{ rpm.}$$

Una velocidad angular de 33 rpm para un cilindro giratorio parece razonable, porque esto significa que da casi una vuelta completa cada 2 s. Si usted ha estado alguna vez en uno de estos aparatos o ha visto uno, sabe que la respuesta está en el orden de magnitud correcto.

Observe que el coeficiente de fricción, μ_s , entre la ropa del pasajero y la pared no es idéntico en todos los casos. Nuestra fórmula, $\omega_{\text{mín}} = \sqrt{g/(\mu_s r)}$, indica que un coeficiente de fricción más pequeño necesita una mayor velocidad angular. Los diseñadores de esta clase de juegos mecánicos necesitan asegurarse de considerar el coeficiente de fricción más pequeño que se puede esperar. Obviamente, procuran tener una superficie de contacto algo pegajosa en la pared, ¡sólo para estar seguros!

Un último punto que se debe verificar: $\omega_{\text{mín}} = \sqrt{g/(\mu_s r)}$ indica que la velocidad angular mínima necesaria disminuirá como función del radio del cilindro. El ejemplo de las fichas de póquer en la mesa giratoria en la sección 9.5 dejó claro que la fuerza centrípeta aumenta con la distancia radial, lo cual es congruente con este resultado.

PROBLEMA RESUELTO 9.4 Volante

PROBLEMA

El volante de una máquina de vapor comienza a girar a partir del reposo con una aceleración angular constante $\alpha = 1.43 \text{ rad/s}^2$. El volante experimenta esta aceleración angular constante durante $t = 25.9 \text{ s}$ y luego continúa girando a velocidad angular constante, ω . Después de haber estado girando durante 59.5 s , ¿cuál es el ángulo total que ha girado desde que comenzó a girar?

SOLUCIÓN

PIENSE

Aquí tratamos de determinar el desplazamiento angular total, θ . Para el intervalo de tiempo en el que el volante experimenta aceleración angular, podemos usar la ecuación 9.26(i) con $\theta_0 = 0$ y $\omega_0 = 0$. Cuando el volante está girando a velocidad angular constante, usamos la ecuación 9.26(i) con $\theta_0 = 0$ y $\alpha = 0$. Para obtener el desplazamiento angular total, sumamos estos dos desplazamientos angulares.

ESBOCE

En la figura 9.27 se muestra una vista aérea del volante girando.

INVESTIGUE

Llamemos t_a al tiempo durante el cual el volante sufre una aceleración angular, y llamemos t_b al tiempo total durante el cual está girando el volante. Así, el volante gira a velocidad angular constante durante un intervalo de tiempo igual a $t_b - t_a$. El desplazamiento angular, θ_a , que ocurre mientras el volante experimenta aceleración angular está dado por

$$\theta_a = \frac{1}{2} \alpha t_a^2. \quad (\text{i})$$

El desplazamiento angular, θ_b , que ocurre mientras el volante gira a velocidad angular constante, ω , está dado por

$$\theta_b = \omega(t_b - t_a). \quad (\text{ii})$$

La velocidad angular, ω , alcanzada por el volante después de experimentar la aceleración angular α por el tiempo t_a está dada por

$$\omega = \alpha t_a. \quad (\text{iii})$$

El desplazamiento angular total está dado por

$$\theta_{\text{total}} = \theta_a + \theta_b. \quad (\text{iv})$$

SIMPLIFIQUE

Podemos combinar las ecuaciones (ii) y (iii) para obtener el desplazamiento angular mientras el volante gira a velocidad angular constante:

$$\theta_b = (\alpha t_a)(t_b - t_a) = \alpha t_a t_b - \alpha t_a^2. \quad (\text{v})$$

Podemos combinar las ecuaciones (v), (vi) y (i) para obtener el desplazamiento angular total del volante:

$$\theta_{\text{total}} = \theta_a + \theta_b = \frac{1}{2} \alpha t_a^2 + (\alpha t_a t_b - \alpha t_a^2) = \alpha t_a t_b - \frac{1}{2} \alpha t_a^2.$$

CALCULE

Al introducir los valores numéricos obtenemos

$$\begin{aligned} \theta_{\text{total}} &= \alpha t_a t_b - \frac{1}{2} \alpha t_a^2 = (1.43 \text{ rad/s}^2)(25.9 \text{ s})(59.5 \text{ s}) - \frac{1}{2}(1.43 \text{ rad/s}^2)(25.9 \text{ s})^2 \\ &= 1\,724.07 \text{ rad.} \end{aligned}$$

REDONDEE

Al expresar nuestro resultado con tres cifras significativas, tenemos

$$\theta_{\text{total}} = 1\,720 \text{ rad.}$$

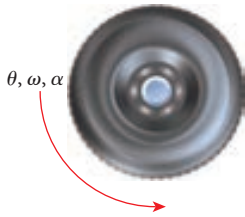


FIGURA 9.27 Vista aérea del volante giratorio.

VUELVA A REVISAR

Es alentador que nuestra respuesta tenga la unidad correcta: radianes. Nuestra fórmula, $\theta_{\text{total}} = \alpha t_a t_b - \frac{1}{2} \alpha t_a^2 = \alpha t_a (t_b - \frac{1}{2} t_a)$, da un valor que aumenta linealmente con el valor de la aceleración angular. También es siempre mayor que cero, como se esperaba, porque $t_b > t_a$.

Para realizar una verificación adicional, calculemos el desplazamiento angular en dos pasos. El primer paso es calcular el desplazamiento angular mientras el volante se está acelerando

$$\theta_a = \frac{1}{2} \alpha t_a^2 = \frac{1}{2} (1.43 \text{ rad/s}^2) (25.9 \text{ s})^2 = 480 \text{ rad.}$$

La velocidad angular del volante después de que termina la aceleración angular es

$$\omega = \alpha t_a = (1.43 \text{ rad/s}^2) (25.9 \text{ s}) = 37.0 \text{ rad/s.}$$

En seguida calculamos el desplazamiento angular mientras gira el volante a velocidad constante:

$$\theta_b = \omega (t_b - t_a) = (37.0 \text{ rad/s}) (59.5 \text{ s} - 25.9 \text{ s}) = 1\,240 \text{ rad.}$$

El desplazamiento total angular es entonces

$$\theta_{\text{total}} = \theta_a + \theta_b = 480 \text{ rad} + 1\,240 \text{ rad} = 1\,720 \text{ rad,}$$

lo cual concuerda con nuestra respuesta.

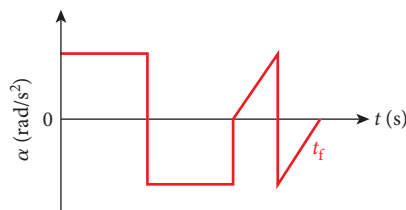
PREGUNTAS DE OPCIÓN MÚLTIPLE

9.1 Un objeto se mueve en una trayectoria circular. Si repentinamente se quita la fuerza centrípeta, ¿cómo se moverá el objeto?

- a) Se moverá radialmente hacia fuera.
- b) Se moverá radialmente hacia dentro.
- c) Se moverá verticalmente hacia abajo.
- d) Se moverá en la dirección en la que señala su vector velocidad en el instante en que desaparece la fuerza centrípeta.

9.2 La aceleración angular para un objeto sujeto a movimiento circular se grafica contra el tiempo en la figura. Si el objeto partió del reposo en $t = 0$ s, el desplazamiento angular neto del objeto en $t = t_f$

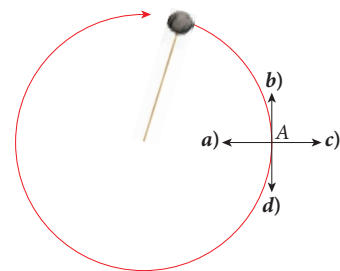
- a) es en dirección horaria.
- b) es en dirección antihoraria.
- c) es cero.
- d) no se puede determinar.



9.3 La latitud de Lubbock, Texas (conocida como la Ciudad Eje de los Llanos del Sur), es de 33° N. ¿Cuál es su rapidez de rotación suponiendo que el radio de la Tierra en el Ecuador es de 6 380 km?

- a) 464 m/s
- b) 389 m/s
- c) 253 m/s
- d) 0.464 m/s
- e) 0.389 m/s

9.4 Una roca atada a una cuerda se mueve en sentido horario con movimiento circular uniforme. ¿En qué dirección a partir del punto A sale disparada la roca cuando se corta la cuerda?

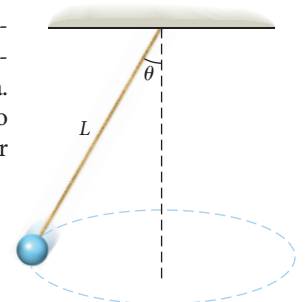


9.5 Una rueda de la fortuna en una feria gira lentamente alrededor de un eje horizontal. Los pasajeros se sientan en asientos que permanecen horizontales al girar ésta. ¿Qué tipo de fuerza es la que ocasiona la aceleración centrípeta sobre los pasajeros cuando están en la parte más alta de la noria?

- a) Centrífuga.
- b) Normal.
- c) Gravedad.
- d) Tensión.

9.6 En un péndulo cónico, una plomada se mueve en un círculo horizontal, como se muestra en la figura. El periodo del péndulo (el tiempo que tarda la plomada en realizar una revolución completa) es

- a) $T = 2\pi \sqrt{L \cos \theta / g}$.
- b) $T = 2\pi \sqrt{g \cos \theta / L}$.



c) $T = 2\pi\sqrt{Lg \operatorname{sen} \theta}$.

d) $T = 2\pi\sqrt{L \operatorname{sen} \theta/g}$.

e) $T = 2\pi\sqrt{L/g}$.

9.7 Una bola fijada al extremo de una cuerda se hace girar en una trayectoria circular de radio r . Si el radio se duplica y la rapidez lineal se mantiene constante, la aceleración centrípeta

- a) permanece igual.
- b) aumenta por un factor de 2.
- c) disminuye por un factor de 2.
- d) aumenta por un factor de 4.
- e) disminuye por un factor de 4.

9.8 La rapidez angular de la manecilla horaria de un reloj (en radianes por segundo) es

- a) $\frac{\pi}{7\ 200}$
- b) $\frac{\pi}{3\ 600}$
- c) $\frac{\pi}{1\ 800}$
- d) $\frac{\pi}{60}$
- e) $\frac{\pi}{30}$
- f) No se muestra el valor correcto.

9.9 Usted pone tres monedas idénticas sobre una mesa giratoria a diferentes distancias desde el centro y luego enciende el motor. Al acelerarse la mesa giratoria, la moneda más externa se desliza primero hacia fuera, seguida de la que está en el medio y, finalmente, cuando la mesa giratoria va con la máxima rapidez, la más interna. ¿A qué se debe esto?

- a) Para las distancias mayores desde el centro, la aceleración centrípeta es mayor y, por lo tanto, dada la fuerza de fricción se hace incapaz de mantener la moneda en su sitio.
- b) El peso de la moneda hace que la mesa giratoria se flexione hacia abajo, de modo que la moneda más cercana a la orilla cae primero.

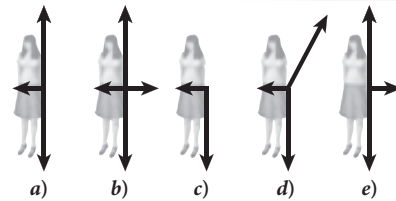
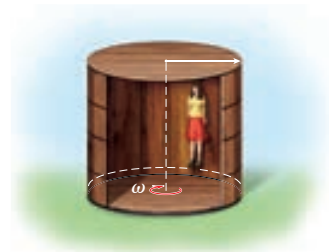
c) Debido al modo de construcción de la mesa giratoria, el coeficiente de fricción estática disminuye al aumentar la distancia desde el centro.

d) Para distancias menores desde el centro, la aceleración centrípeta es mayor.

9.10 Un punto sobre un disco Blu-ray está a una distancia $R/4$ del eje de rotación. ¿Qué tan lejos del eje de rotación está un segundo punto que tiene, en cualquier instante, una velocidad lineal del doble de la del primer punto?

- a) $R/16$
- b) $R/8$
- c) $R/2$
- d) R

9.11 La figura muestra una pasajera pegada a la pared de un barril giratorio de una feria. ¿Cuál diagrama muestra correctamente las fuerzas que actúan sobre la pasajera?



9.12 Una cuerda se amarra a una roca, y la roca se hace girar en círculo con rapidez constante. Si se ignora la gravedad y el periodo del movimiento circular se duplica, la tensión en la cuerda

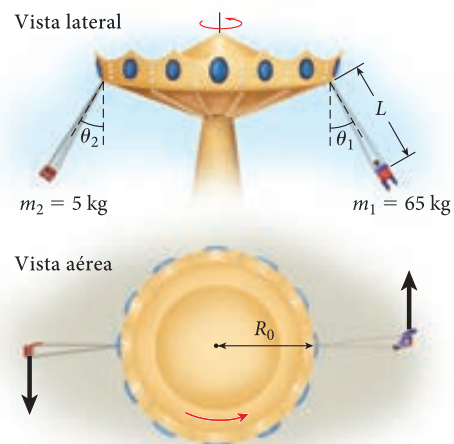
- a) se reduce a $\frac{1}{4}$ de su valor original.
- b) se reduce a $\frac{1}{2}$ de su valor original.
- c) no cambia.
- d) aumenta 2 veces su valor original.
- e) aumenta 4 veces su valor original.

PREGUNTAS

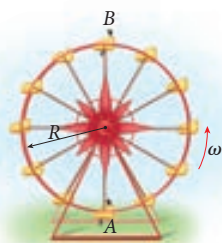
9.13 Un ventilador de techo gira en sentido horario (visto desde abajo), pero su rapidez está disminuyendo. ¿Cuáles son las direcciones de ω y α ?

9.14 Un gancho encima de un escenario tiene una capacidad nominal de carga de 150. lb. Se amarra al gancho una soga de 3 lb, y un actor de 147 lb va a intentar atravesar el escenario colgado de la cuerda. ¿Sostendrá la cuerda al actor durante el recorrido?

9.15 Un popular juego mecánico de feria consiste en sillas suspendidas por cables de un disco central, como se muestra en la figura. Los pasajeros viajan en movimiento circular uniforme. La masa de uno de los pasajeros (incluyendo la silla en la que está sentado) es de 65 kg; la masa de una silla vacía en el lado opuesto del disco central es de 5 kg. Si θ_1 y θ_2 son los ángulos que forman los cables fijados a las dos sillas con respecto a la vertical, ¿cómo se comparan cualitativamente estos dos ángulos? ¿Es θ_2 mayor, menor o igual que θ_1 ?



9.16 Una persona viaja en una rueda de la fortuna de una feria, de radio R , que gira a una velocidad angular constante ω . Compare la fuerza normal con la que el asiento presiona sobre la persona en el punto A con la correspondiente en el punto B en la figura. ¿Cuál fuerza es mayor? ¿O las dos fuerzas son iguales?



9.17 Los neumáticos de bicicleta varían en tamaño desde alrededor de 25 cm de diámetro hasta casi los 70 cm de diámetro. ¿Por qué no es práctico fabricar neumáticos mucho más pequeños de 25 cm de diámetro? (Usted aprenderá por qué los neumáticos no pueden ser demasiado grandes en el capítulo 10.)

9.18 Un CD comienza desde el reposo y se acelera hasta la frecuencia angular de operación del reproductor. Compare la velocidad angular y la aceleración de un punto en la orilla del CD a las de un punto a mitad de camino entre el centro y la orilla. Haga lo mismo para la velocidad lineal y la aceleración lineal.

9.19 Un auto viaja alrededor de una curva sin peralte con una rapidez máxima. ¿Cuál(es) fuerza(s) es(son) la(s) responsable(s) de conservarlo en el camino?

9.20 Dos masas cuelgan de dos cuerdas de igual longitud que están fijadas al techo de un auto. Una masa está sobre el asiento del conductor; la otra está sobre el asiento del copiloto. Cuando el auto da una vuelta cerrada, ambas masas se alejan del centro de la vuelta. En sus posiciones resultantes, ¿estarán más alejadas entre sí, más juntas o a la misma distancia que tenían cuando el auto no estaba dando vuelta?

9.21 Una masa puntual m comienza a deslizarse desde una altura h por la superficie sin fricción que se muestra en la figura. ¿Cuál es el valor mínimo de h para que la masa recorra el bucle de radio R ?

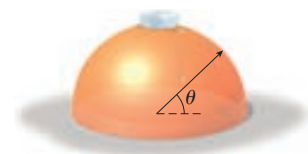


9.22 En un péndulo cónico, la plomada fijada a la cuerda (que se puede considerar sin masa) se mueve en un círculo

horizontal con rapidez constante. La cuerda describe un cono al girar la plomada. ¿Qué fuerzas actúan sobre la plomada?

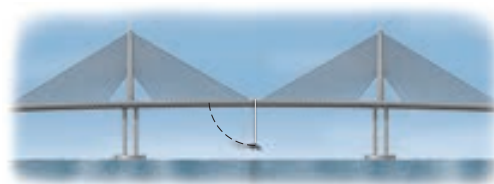
9.23 ¿Es posible hacer girar una masa fijada a una cuerda en un círculo perfectamente horizontal (con la masa y la cuerda paralelas al suelo)?

9.24 Un pequeño bloque de hielo de masa m parte del reposo desde la parte superior de un tazón invertido con la forma de un hemisferio, como se muestra en la figura. El hemisferio está fijado al suelo, y el bloque se desliza sin fricción a lo largo de la superficie del hemisferio. Encuentre la fuerza normal ejercida por el bloque sobre la esfera cuando la línea entre el bloque y el centro de la esfera forman un ángulo θ con la horizontal. Explique el resultado.



9.25 Suponga que usted está en un carrito de una montaña rusa que se mueve en un bucle circular vertical. Demuestre que la diferencia entre sus pesos aparentes en el ápice y en la base del bucle es seis veces su peso, y es independiente del tamaño del bucle. Suponga que la fricción es despreciable.

9.26 El siguiente evento realmente ocurrió en el puente Sunshine Skyway, cerca de Saint Petersburg, Florida, en 1997. Cinco temerarios aventureros ataron un cable de 55 m de longitud al centro del puente y saltaron para columpiarse bajo el puente sujetos del extremo de este cable. Las cinco personas (peso total = W) se amarraron al extremo del cable, al mismo nivel y a una distancia de 55 m del punto donde estaba fijado al puente, y se dejaron caer directamente hacia abajo desde el puente, siguiendo la trayectoria circular punteada que se indica en la figura. Infelizmente, estos aventureros no estaban muy versados en las leyes de la física, y el cable se rompió (en el punto en el que estaba fijado a sus asientos), en la parte más baja de su oscilación. Determine qué tan fuerte tendría que haber sido el cable (y todas sus ataduras con los asientos y el puente) para que soportara a las cinco personas en la parte más baja de la mecida. Expresé su resultado en términos de su peso total, W .



PROBLEMAS

Una • y dos •• indican un nivel creciente de dificultad del problema.

Sección 9.2

9.27 ¿Cuál es el ángulo en radianes que la Tierra describe en su órbita durante el invierno?

9.28 Suponiendo que la Tierra es esférica y recordando que las latitudes van de 0° en el Ecuador a 90° N en el Polo Norte, ¿a qué distancia, medida sobre la superficie de la Tierra, están

Dubuque, Iowa (latitud 42.50° N) y la ciudad de Guatemala (latitud 14.62° N)? Las dos ciudades están aproximadamente sobre la misma longitud. No desprecie la curvatura de la Tierra al determinar esta distancia.

•9.29 Refiérase a la información dada en el problema 9.28. Si se pudiera excavar un túnel en línea recta de Dubuque a la ciudad de Guatemala, ¿qué longitud tendría el túnel? Desde el punto de vista del excavador, ¿a qué ángulo por debajo de la horizontal se dirigiría el túnel?

Sección 9.3

9.30 Una pelota rápida, típica de Ligas Mayores, se lanza aproximadamente a 88 mph, y con una rapidez de rotación de 110 rpm. Si la distancia entre el punto en que el pitcher suelta la pelota y el guante del catcher es exactamente de 60.5 ft, ¿cuántas vueltas completas da la pelota entre el lanzamiento y la atrapada? Desprecie cualquier efecto de la gravedad o de la resistencia del aire sobre el vuelo de la pelota.

9.31 Se reproduce un disco de vinilo girando a 33.3 rpm. Suponga que tarda 5.00 s en llegar a esta rapidez, partiendo del reposo.

- ¿Cuál es la aceleración angular durante los 5.00 s?
- ¿Cuántas revoluciones hace el disco antes de llegar a su rapidez angular final?

9.32 En una feria regional, un niño lleva su osito de peluche en una rueda de la fortuna de feria gigante. Infelizmente, en la parte más alta del recorrido, suelta accidentalmente a su amigo de peluche. La rueda de la fortuna tiene un diámetro de 12.0 m; la parte más baja de la noria está a 2.0 m arriba del suelo, y su borde se mueve con una rapidez de 1.0 m/s. ¿A qué distancia de la base de la noria aterrizará el osito?

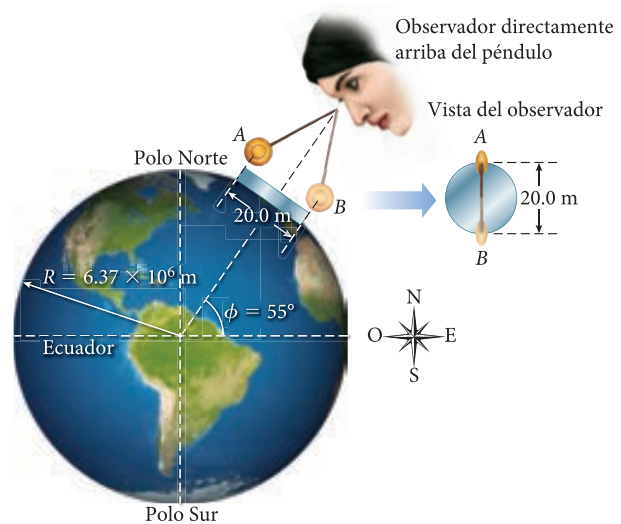
9.33 Al haber encontrado un gusto por la experimentación, el niño del problema 9.32 invita a dos amigos a llevar sus osos de peluche a la misma rueda de la fortuna. Los niños están sentados en posiciones que están a 45° uno de otro. Cuando la rueda de la fortuna lleva al segundo niño a la altura máxima, los tres sueltan sus animales de peluche. ¿Qué tan separados uno de otro aterrizarán los osos?

9.34 Marte gira alrededor del Sol a una distancia media de 228 millones de km, en un periodo de 687 días. La Tierra gira a una distancia media de 149.6 millones de km, en un periodo de 365.26 días.

- Suponga que la Tierra y Marte están en posiciones tales que la Tierra está en una línea recta entre Marte y el Sol. Exactamente 365.26 días después, cuando la Tierra ha completado una órbita, ¿cuál es el ángulo entre la línea Tierra-Sol y la línea Marte-Sol?
- La situación inicial en el inciso a) es un acercamiento máximo de Marte a la Tierra. ¿Cuál es el tiempo, en días, entre dos acercamientos máximos? Suponga rapidez constante y órbitas circulares tanto para Marte como para la Tierra.
- Otra manera de expresar la respuesta al inciso b) es en términos del ángulo entre las líneas trazadas a través del Sol, la Tierra y Marte en las dos situaciones de acercamiento máximo. ¿Cuál es ese ángulo?

9.35 Considere un gran péndulo simple que está ubicado en una latitud 55.0° N y oscila en dirección norte-sur, donde A y B son los puntos más al norte y más al sur de la oscilación, respectivamente. Un observador estacionario (con respecto a las estrellas fijas) mira directamente hacia abajo al péndulo en el momento que se muestra en la figura. La Tierra completa una rotación cada 23 h y 56 min.

- ¿Cuáles son las direcciones (en términos de N, E, O y S) y las magnitudes de las velocidades de la superficie de la Tierra en los puntos A y B como las ve el observador? *Nota:* Usted necesitará calcular las respuestas por lo menos con siete cifras significativas para ver una diferencia.



- ¿Cuál es la rapidez angular con la que parece girar el círculo de 20.0 m de diámetro bajo el péndulo?
- ¿Cuál es el periodo de esta rotación?
- ¿Qué sucedería con un péndulo que oscilara en el Ecuador?

Sección 9.4

9.36 ¿Cuál es la aceleración centrípeta de la Luna? El periodo orbital de la Luna alrededor de la Tierra es de 27.3 días, medido con respecto a las estrellas fijas. El radio de la órbita de la Luna es $R_M = 3.85 \cdot 10^8$ m.

9.37 Usted está sosteniendo el eje de una rueda de bicicleta con radio de 35.0 cm y masa de 1.00 kg. Usted hace girar la rueda a 75.0 rpm y luego la detiene presionando el neumático contra el pavimento. Usted observa que la rueda tarda 1.20 s en detenerse por completo. ¿Cuál es la aceleración angular de la rueda?

9.38 Los científicos de la vida usan ultracentrifugadoras para separar componentes biológicos o para quitar moléculas de una suspensión. Las muestras, en una disposición simétrica de contenedores, se hacen girar rápidamente alrededor de un eje central. La aceleración centrífuga que experimentan en su marco de referencia móvil actúa como una "gravedad artificial" para realizar una separación rápida. Si los contenedores de muestras están a 10.0 cm del eje de rotación, ¿qué frecuencia de rotación se necesita para producir una aceleración de $1.00 \cdot 10^5 g$?

9.39 Una centrifugadora en un laboratorio médico gira con una rapidez angular de 3 600 rpm (revoluciones por minuto). Cuando se apaga, gira 60.0 veces antes de detenerse. Encuentre la aceleración angular constante de esta centrifugadora.

9.40 Un lanzador de disco (con una longitud de brazo de 1.2 m) parte del reposo y comienza a girar en sentido antihorario con una aceleración angular de 2.5 rad/s^2 .

- ¿Cuánto tarda el lanzador de disco en llegar a una rapidez de 4.7 rad/s ?
- ¿Cuántas revoluciones hace el lanzador para alcanzar la rapidez de 4.7 rad/s ?
- ¿Cuál es la rapidez lineal del disco a 4.7 rad/s ?
- ¿Cuál es la aceleración lineal del lanzador de disco en este punto?

e) ¿Cuál es la magnitud de la aceleración centrípeta del disco lanzado?

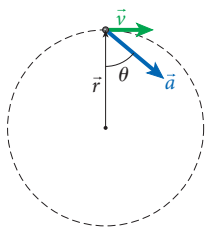
f) ¿Cuál es la magnitud de la aceleración total del disco?

•9.41 En la exhibición de juguetes de una tienda departamental, un disco pequeño (disco 1) con radio de 0.100 m, es movido por un motor y hace girar un disco mayor (disco 2) con radio de 0.500 m. El disco 2, a su vez, mueve al disco 3, cuyo radio es de 1.00 m. Los tres discos están en contacto y no hay deslizamiento. Se observa que el disco 3 da una revolución completa cada 30.0 s.



- a) ¿Cuál es la rapidez angular del disco 3?
- b) ¿Cuál es la relación entre las velocidades tangenciales de los bordes de los tres discos?
- c) ¿Cuál es la rapidez angular de los discos 1 y 2?
- d) Si el motor funciona mal ocasionando al disco 1 una aceleración angular de 0.100 rad/s^2 , ¿cuáles son las aceleraciones angulares de los discos 2 y 3?

•9.42 Una partícula se mueve en sentido horario en una circunferencia con radio de 1.00 m. En cierto momento, la magnitud de su aceleración es $a = |\vec{a}| = 25.0 \text{ m/s}^2$, y el vector de aceleración forma un ángulo $\theta = 50.0^\circ$ con el vector de posición, como se muestra en la figura. En este instante, encuentre la rapidez, $v = |\vec{v}|$, de esta partícula.



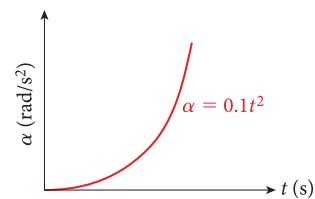
•9.43 En una grabadora de cinta, la cinta magnética se mueve con una rapidez lineal constante de 5.6 cm/s. Para mantener esta rapidez lineal constante, la rapidez angular del carrete de mando (el carrete de recolección) tiene que cambiar correspondientemente.

- a) ¿Cuál es la rapidez angular del carrete de recolección cuando está vacío, con un radio $r_1 = 0.80 \text{ cm}$?
- b) ¿Cuál es la rapidez angular cuando el carrete está lleno, con radio $r_2 = 2.20 \text{ cm}$?
- c) Si la longitud total de la cinta es de 100.80 m, ¿cuál es la aceleración angular media del carrete de recolección cuando se está reproduciendo la cinta?



••9.44 Un anillo se ajusta flojamente (sin fricción) alrededor de una varilla larga y lisa de longitud $L = 0.50 \text{ m}$. La varilla está fijada por un extremo, y el otro extremo se hace girar en un círculo horizontal a una velocidad angular constante de $\omega = 4.0 \text{ rad/s}$. El anillo tiene una velocidad radial cero en su posición inicial, a una distancia de $r_0 = 0.30 \text{ m}$ del extremo fijo. Determine la velocidad radial del anillo cuando llega al extremo móvil de la varilla.

••9.45 Un volante con un diámetro de 1.00 m está inicialmente en reposo. En la figura se grafica su aceleración angular contra el tiempo.



- a) ¿Cuál es la separación angular entre la posición inicial de un punto fijo en el borde del volante y la posición del punto 8 s después de que el volante comienza a girar?
- b) El punto comienza su movimiento en $\theta = 0$. Calcule y trace la posición inicial, el vector velocidad y el vector aceleración 8.00 s después de que el volante comience a girar.

Sección 9.5

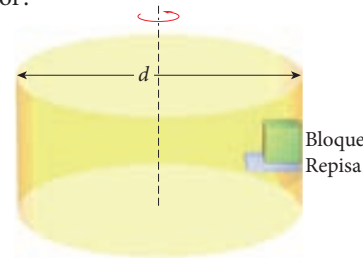
9.46 Calcule la fuerza centrípeta que se ejerce sobre un vehículo de masa $m = 1\,500 \text{ kg}$ que se mueve con una rapidez de 15.0 m/s por una curva de radio $R = 400 \text{ m}$. ¿Qué fuerza realiza el papel de la fuerza centrípeta en este caso?

9.47 ¿Cuál es el peso aparente de un pasajero en la montaña rusa del problema resuelto 9.1, en la base del bucle?

9.48 Dos patinadores, A y B, de igual masa, se mueven en sentido horario, en movimiento circular uniforme, sobre el hielo. Sus movimientos tienen periodos iguales, pero el radio del círculo del patinador A es la mitad del radio del círculo del patinador B.

- a) ¿Cuál es la relación de las rapidezces de los patinadores?
- b) ¿Cuál es la relación de las magnitudes de las fuerzas que actúan sobre cada patinador?

•9.49 Un pequeño bloque de masa m está en contacto con la pared interior de un gran cilindro hueco. Suponga que el coeficiente de fricción estática entre el objeto y la pared del cilindro es μ . Inicialmente, el cilindro está en reposo y el bloque se mantiene en su lugar mediante una repisa que soporta su peso. El cilindro comienza a girar alrededor de su eje central, como se muestra en la figura, con una aceleración angular α . Determine el intervalo mínimo de tiempo después de que el cilindro comienza a girar antes de que se pueda quitar la repisa sin que se deslice el bloque contra la pared.

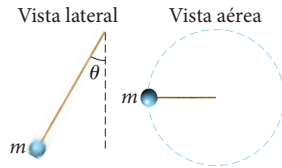


•9.50 Un auto de carreras da una vuelta en U con rapidez constante. El coeficiente de fricción entre los neumáticos y la pista es $\mu_s = 1.20$. Si el radio de la curva es de 10.0 m, ¿cuál es la rapidez máxima con la que el auto puede dar vuelta sin deslizarse? Suponga que el auto está realizando un movimiento circular uniforme.

•9.51 Un auto corre en la cima de una colina. Si el radio de curvatura de la colina en su cima es de 9.0 m, ¿con qué rapidez puede correr el auto manteniendo contacto constante con el suelo?

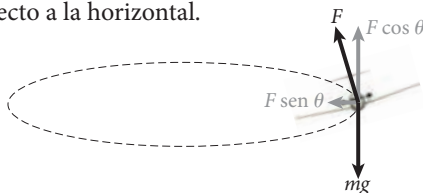
•9.52 Una pelota de masa $m = 0.200 \text{ kg}$ está sujeta a una cuerda (sin masa) de longitud $L = 1.00 \text{ m}$, y está en movimiento circu-

lar en el plano horizontal, como se muestra en la figura.



- Dibuje un diagrama de cuerpo libre para la pelota.
- ¿Cuál fuerza desempeña el papel de la fuerza centrípeta?
- ¿Cuál debe ser la rapidez de la masa para que θ sea de 45.0° ?
- ¿Cuál es la tensión en la cuerda?

•9.53 Usted está volando a Chicago para tener un fin de semana lejos de los libros. En su última clase de física, usted aprendió que el flujo de aire sobre las alas crea una *fuerza elevadora*, que actúa de manera perpendicular a las alas. Cuando el avión vuela nivelado, la fuerza elevadora, ascendente, equilibra exactamente la *fuerza de peso*, descendente. Como el aeropuerto O'Hare es uno de los más activos del mundo, usted no se sorprende cuando el capitán anuncia que el avión está en espera para aterrizar debido al pesado tráfico. El capitán informa a los pasajeros que el avión estará volando en círculos de radio de 7.00 mi con una rapidez de 360. mph, y a una altitud de 2.0×10^4 ft. Por la cartulina de seguridad, usted sabe que la longitud total de la envergadura del avión es de 275 ft. A partir de esta información, estime el ángulo de peralte del avión respecto a la horizontal.



••9.54 Un cilindro metálico de 20.0 g se coloca sobre una mesa giratoria, con su centro a 80.0 cm del centro de la mesa giratoria. El coeficiente de fricción estática entre el cilindro y la superficie de la mesa giratoria es $\mu_s = 0.800$. Una cuerda delgada sin masa de 80.0 cm conecta el centro de la mesa giratoria con el cilindro. *Inicialmente*, la cuerda tiene tensión cero. Partiendo del reposo, la mesa giratoria alcanza en forma muy lenta una velocidad angular cada vez más alta, pero la mesa giratoria y el cilindro se puede considerar que tienen movimiento circular uniforme en cualquier instante. Calcule la tensión en la cuerda cuando la velocidad angular de la mesa giratoria es de 60.0 rpm (revoluciones por minuto).

- 9.55 Una curva en la pista de carreras, con radio de curvatura R , tiene un peralte con un ángulo θ sobre la horizontal.
- ¿Cuál es la rapidez óptima para tomar la curva si la superficie de la pista está cubierta de hielo (es decir, si hay muy poca fricción entre los neumáticos y la pista)?
 - Si la superficie de la pista está libre de hielo y hay un coeficiente de fricción μ_s entre los neumáticos y la pista, ¿cuál es la rapidez máxima y cuál es la rapidez mínima con la que se puede tomar esta curva?
 - Evalúe los resultados de los incisos a) y b) para $R = 400$ m, $\theta = 45.0^\circ$, y $\mu_s = 0.700$.

Problemas adicionales

9.56 Cierta rueda de la fortuna de una feria lleva a los pasajeros en un círculo vertical de 9.0 m de radio, una vez cada 12.0 s.

- Calcule la rapidez de los pasajeros, suponiendo que es constante.
- Trace un diagrama de cuerpo libre para una pasajera en un tiempo en que ella está en la parte inferior del círculo. Calcule la fuerza normal que ejerce el asiento sobre la pasajera en ese punto del trayecto.
- Realice el mismo análisis que en el inciso b) para un punto en la parte superior del trayecto.

9.57 Un niño va en una rueda de la fortuna de una feria, que lo hace moverse en un círculo vertical de 9.0 m de radio una vez cada 12.0 s.

- ¿Cuál es la rapidez angular de la rueda de la fortuna?
- Suponga que la rueda de la fortuna desacelera hasta detenerse con una tasa uniforme durante un cuarto de revolución. ¿Cuál es la aceleración angular de la rueda de la fortuna durante este tiempo?
- Calcule la aceleración tangencial del niño durante el intervalo de tiempo que se describe en el inciso b).

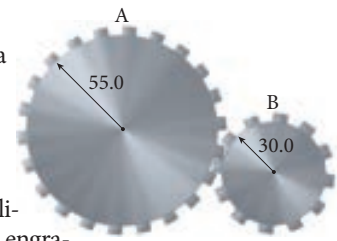
9.58 Considere una cuchilla de podadora de césped de 53 cm de longitud que gira alrededor de su centro a 3 400 rpm.

- Calcule la rapidez lineal de la punta de la cuchilla.
- Si el reglamento de seguridad exige que la cuchilla se pueda detener en 3.0 s, ¿qué aceleración angular mínima cumplirá este requisito? Suponga que la aceleración angular es constante.

9.59 Un auto acelera uniformemente desde el reposo y alcanza una rapidez de 22.0 m/s en 9.00 s. El diámetro de un neumático de este auto es de 58.0 cm.

- Encuentre el número de revoluciones del neumático durante este movimiento del auto, suponiendo que no hay deslizamiento.
- ¿Cuál es la rapidez angular final de un neumático en revoluciones por segundo?

9.60 El engrane A, con una masa de 1.00 kg y un radio de 55.0 cm, está en contacto con el engrane B, con una masa de 0.500 kg y un radio de 30.0 cm. Al girar, los engranes no se deslizan uno con respecto al otro. El engrane A gira a 120. rpm y desacelera a 60.0 rpm en 3.00 s. ¿Cuántas rotaciones realiza el engrane B durante este intervalo de tiempo?



9.61 Un trompo gira durante 10.0 minutos, comenzando con una rapidez angular de 10.0 rev/s. Determine su aceleración angular, suponiendo que es constante, y su desplazamiento angular total.

9.62 Un moneda pequeña descansa al borde de un viejo disco fonográfico que gira a 33 rpm y tiene un diámetro de 12 pulgadas. ¿Cuál es el coeficiente mínimo de fricción estática entre la moneda y la superficie del disco para asegurar que la moneda no se deslice hacia fuera?

9.63 Un disco de vinilo que inicialmente gira a $33\frac{1}{3}$ rpm desacelera uniformemente hasta detenerse en un tiempo de 15 s. ¿Cuántas rotaciones o giros realiza el disco hasta detenerse?

9.64 Determine las rapidezces lineal y angular y las aceleraciones lineal y angular de una mota de polvo ubicada a 2.0 cm del centro de un CD que gira dentro de un reproductor de CD a 250 rpm.

9.65 ¿Cuál es la aceleración de la Tierra en su órbita? (Suponga que la órbita es circular.)

9.66 Un día en Marte dura 24.6 horas terrestres. Un año en Marte dura 687 días terrestres. ¿Cómo se comparan las velocidades angulares de rotación y traslación de Marte con las velocidades angulares de rotación y traslación de la Tierra?

9.67 Un camión enorme tiene neumáticos con un diámetro de 1.10 m, y viaja a 35.8 m/s. Después de aplicar los frenos, el camión desacelera uniformemente y llega al reposo después de que los neumáticos dan 40.2 vueltas.

- a) ¿Cuál es la rapidez angular inicial de los neumáticos?
- b) ¿Cuál es la aceleración angular de los neumáticos?
- c) ¿Qué distancia viaja el camión antes de llegar al reposo?

9.68 El motor de un ventilador hace girar una pequeña rueda de radio $r_m = 2.00$ cm. Esta rueda mueve una banda conectada a una rueda de radio $r_f = 3.00$ cm acoplada al eje de las hojas del ventilador. Las puntas de las hojas del ventilador están a una distancia $r_b = 15.0$ cm medida desde el centro del eje. Cuando el ventilador está en operación, el motor gira con una rapidez angular $\omega = 1\,200$ rpm. ¿Cuál es la rapidez tangencial de las puntas de las hojas del ventilador?

9.69 Un auto con una masa de 1 000 kg pasa por la cima de una colina con una rapidez constante de 60.0 m/s. La cima de la colina se puede aproximar a un arco circular con un radio de curvatura de 370. m. ¿Qué fuerza ejerce el auto sobre la colina al pasar por la cima?

9.70 A diferencia de un barco, un avión no usa su timón para virar. Vira inclinando sus alas: la fuerza de elevación, perpendicular a las alas, tiene una componente horizontal, que suministra la aceleración centrípeta para la vuelta, y una componente vertical, que soporta el peso del avión. (El timón contrarresta el desvío lateral, y así conserva al avión apuntando en la dirección en que se mueve.) El famoso avión espía, el SR-71 Blackbird, al volar a 4 800 km/s, tiene un radio de viraje de 290 km. Encuentre su ángulo de peralte.

9.71 Un piloto de 80.0 kg en un avión que se mueve con rapidez constante de 500. m/s sale de una caída “en picada” en un arco circular de 4 000. m de radio.

- a) Encuentre la aceleración centrípeta y la fuerza centrípeta que actúan sobre el piloto.
- b) ¿Cuál es el peso aparente del piloto en el punto más bajo de “la picada”?

9.72 Una bola con masa de 1.00 kg se fija a una cuerda de 1.00 m de longitud y se hace girar en círculo vertical con rapidez constante de 10.0 m/s.

- a) Determine la tensión en la cuerda cuando la bola está en la parte más alta del círculo.
- b) Determine la tensión en la cuerda cuando la bola está en la parte más baja del círculo.
- c) Considere la bola en un punto que no sea ni el más alto ni el más bajo. ¿Qué puede usted decir sobre la tensión en la cuerda en este punto?

9.73 Un auto parte del reposo y acelera por una curva plana de radio $R = 36$ m. La componente tangencial de la aceleración del auto permanece constante con $a_t = 3.3$ m/s², mientras la aceleración centrípeta aumenta para conservar el auto en la curva tanto tiempo como sea posible. El coeficiente de fricción entre los neumáticos y el camino es $\mu = 0.95$. ¿Qué distancia recorre el auto por la curva antes de comenzar a deslizarse? (Asegúrese de incluir las componentes tanto tangencial como centrípeta de la aceleración.)

9.74 Una niña en la plataforma de un carrusel sostiene un péndulo en la mano. El péndulo está a 6.0 m del eje de rotación de la plataforma. La rapidez de rotación de la plataforma es de 0.020 rev/s. Se encuentra que el péndulo cuelga con un ángulo θ respecto a la vertical. Encuentre θ .

9.75 Un carrusel de una feria tiene un diámetro de 6.00 m. Un asiento parte del reposo y acelera con aceleración angular constante hasta una rapidez angular de 0.600 rev/s en 8.00 s.

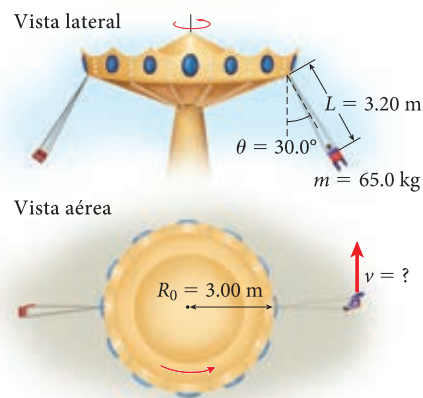
- a) ¿Cuál es el valor de la aceleración angular?
- b) ¿Cuáles son las aceleraciones centrípeta y angular de un asiento en el carrusel que está a 2.75 m del eje de rotación?
- c) ¿Cuál es la aceleración total, magnitud y dirección, 8.00 s después de comenzar la aceleración angular?

9.76 Un auto con peso $W = 10.0$ kN toma una curva en una carretera peraltada con un ángulo $\theta = 20.0^\circ$. Dentro del auto, colgando de una cuerda corta atada al espejo retrovisor, hay un ornamento. Al virar el auto, el ornamento se desplaza en un ángulo $\phi = 30.0^\circ$ con respecto a la vertical dentro del auto. ¿Cuál es la fuerza de fricción estática entre el auto y el camino?



9.77 Un juego mecánico popular de feria consiste en asientos colgados por cables de un disco central. Los pasajeros viajan en movimiento circular uniforme. Como se muestra en la figura, el radio del disco central es $R_0 = 3.00$ m, y la longitud del cable es $L = 3.20$ m. La masa de uno de los pasajeros (incluyendo la silla en la que se sienta) es de 65.0 kg.

- a) Si el ángulo θ que forma el cable con respecto a la vertical es de 30.0° , ¿cuál es la rapidez, v , de este pasajero?
- b) ¿Cuál es la magnitud de la fuerza que ejerce el cable sobre la silla?



10

Rotación

LO QUE APRENDEREMOS 313

10.1 Energía cinética de rotación	313
Partícula puntual en movimiento circular	313
Varias partículas puntuales en movimiento circular	314
10.2 Cálculo del momento de inercia	314
Rotación alrededor de un eje que pasa por el centro de masa	315
Ejemplo 10.1 Energía cinética rotacional de la Tierra	320
Teorema de los ejes paralelos	320
10.3 Rodadura sin deslizamiento	322
Problema resuelto 10.1 Esfera que rueda por un plano inclinado	322
Ejemplo 10.2 Carrera en un plano inclinado	324
Problema resuelto 10.2 Bola que rueda sobre un rizo	324
10.4 Momento de torsión	326
Brazo de palanca	326
Anexo matemático: producto vectorial	327
10.5 Segunda ley de Newton para la rotación	328
Ejemplo 10.3 Papel higiénico	329
Máquina de Atwood	331
10.6 Trabajo de un momento de torsión	332
Ejemplo 10.4 Ajuste de un perno	333
Ejemplo 10.5 Atornillando un tornillo	333
Problema resuelto 10.3 Máquina de Atwood	334
10.7 Momento angular	335
Partícula puntual	335
Sistema de partículas	336
Cuerpos rígidos	337
Ejemplo 10.6 Pelota de golf	337
Conservación del momento angular	338
Ejemplo 10.7 Muerte de una estrella	339
Ejemplo 10.8 <i>Flybrid</i>	340
10.8 Precesión	341
10.9 Momento angular cuantizado	343

LO QUE HEMOS APRENDIDO/ GUÍA DE ESTUDIO PARA EXAMEN 343

Práctica para resolución de problemas	344
Problema resuelto 10.4 Varilla horizontal en caída	345
Preguntas de opción múltiple	346
Preguntas	347
Problemas	348



FIGURA 10.1 Un motor de chorro moderno.

LO QUE APRENDEREMOS

- La energía cinética debida al movimiento rotacional de un objeto se debe tener en cuenta al considerar la conservación de la energía.
- Para rotación alrededor de un eje que pasa por el centro de masa, el momento de inercia es proporcional al producto de la masa del objeto por la mayor distancia perpendicular de cualquier parte del objeto al eje de rotación. La constante de proporcionalidad tiene un valor entre 0 y 1, y depende de la forma del objeto.
- Para rotación alrededor de un eje paralelo al eje que pasa por el centro de masa de un objeto, el momento de inercia es igual al momento de inercia respecto al centro de masa más el producto de la masa del objeto por el cuadrado de la distancia entre los dos ejes.
- Para objetos rodantes, las energías cinéticas de rotación y traslación se relacionan entre sí.
- El momento de torsión es el producto vectorial del vector de posición y el vector fuerza.
- La segunda ley de Newton se aplica también al movimiento rotacional.
- El momento angular se define como el producto vectorial del vector de posición y el vector de momento lineal.
- Entre el momento angular, el momento de torsión, el momento de inercia, la velocidad angular y la aceleración angular existen relaciones análogas a las relaciones entre cantidades lineales.
- La ley de conservación de momento angular es otra ley de conservación fundamental.

Los grandes ventiladores en la parte frontal de los motores de chorro modernos, como el que se muestra en la figura 10.1, succionan aire y lo introducen a una cámara de compresión, donde se mezcla con combustible y se pone en ignición. La explosión impulsa a los gases a la parte posterior del motor, produciendo el empuje que mueve hacia adelante el avión. Estos ventiladores giran a 7 000-9 000 rpm y se deben inspeccionar frecuentemente: no debe romperse una hoja del ventilador a una altitud de 6 mi.

Casi todos los motores tienen partes giratorias que transfieren energía al dispositivo de salida, que a menudo también es giratorio. De hecho, la mayoría de los objetos en el universo giran, desde las moléculas hasta las estrellas y galaxias. Las leyes que gobiernan la rotación son tan importantes como cualquier otra parte de la mecánica.

El capítulo 9 introdujo algunos conceptos básicos de movimiento circular, y este capítulo usa algunas de estas mismas ideas: velocidad angular, aceleración angular y eje de rotación. En este capítulo completamos nuestra comparación de cantidades traslacionales y rotacionales, y encontramos otra ley de conservación de importancia básica: la ley de conservación del momento angular.

10.1 Energía cinética de rotación

En el capítulo 8 vimos que podemos describir el movimiento de un objeto extenso en términos de la trayectoria que sigue su centro de masa y la rotación del objeto alrededor de su centro de masa. Sin embargo, aun cuando hemos cubierto el movimiento circular para partículas puntuales en el capítulo 9, no hemos considerado todavía la rotación de cuerpos extensos, tales como los que se muestran en la figura 10.2. Analizar estos movimientos es el propósito de este capítulo.

Partícula puntual en movimiento circular

El capítulo 9 introdujo las cantidades cinemáticas del movimiento circular. La rapidez angular ω , y la aceleración angular, α , se definieron en términos de las derivadas con respecto al tiempo del desplazamiento angular, θ :

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}.$$

Vimos que las cantidades angulares están relacionadas con las cantidades lineales como sigue:

$$s = r\theta, \quad v = r\omega,$$

$$a_t = r\alpha, \quad a_c = \omega^2 r, \quad a = \sqrt{a_c^2 + a_t^2},$$

donde s es la longitud del arco, v es la rapidez lineal del centro de masa, a_t es la aceleración tangencial, a_c es la aceleración centrípeta y a es la aceleración lineal.



a)



b)

FIGURA 10.2 a) Masa giratoria de aire formando un huracán. b) Rotación en la escala más alta: galaxia Espiral M74.

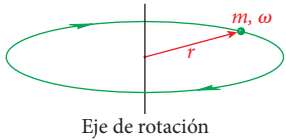


FIGURA 10.3 Una partícula puntual en movimiento circular alrededor del eje de rotación.

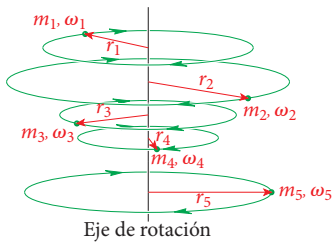
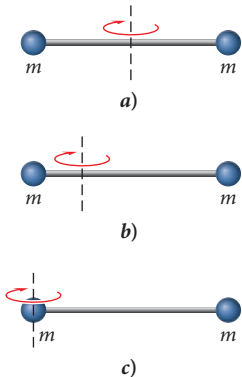


FIGURA 10.4 Cinco partículas puntuales moviéndose en círculos alrededor de un eje de rotación común.

10.1 Ejercicio en clase

Considere dos masas iguales, m , conectadas por una varilla delgada, sin masa. Como se muestra en las figuras, las dos masas giran en un plano horizontal alrededor de un eje vertical representado por la línea punteada. ¿Cuál sistema tiene el momento de inercia más alto?



La manera más sencilla de introducir las cantidades físicas para la descripción de la rotación es por medio de la energía cinética de rotación de un objeto extenso. En el capítulo 5, sobre trabajo y energía, se definió la energía cinética de un objeto en movimiento como

$$K = \frac{1}{2}mv^2. \tag{10.1}$$

Si el movimiento de este objeto es circular, podemos usar la relación entre velocidad lineal y angular para obtener

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(r\omega)^2 = \frac{1}{2}mr^2\omega^2, \tag{10.2}$$

que es la **energía cinética de rotación** para el movimiento de una partícula puntual sobre una circunferencia de radio r alrededor de un eje fijo, como se ilustra en la figura 10.3.

Varias partículas puntuales en movimiento circular

Del mismo modo en que procedimos en el capítulo 8 al determinar la ubicación del centro de masa de un sistema de partículas, comenzamos con una colección de objetos individuales en rotación, y luego nos acercamos al límite continuo. La energía cinética de una colección de objetos en rotación está dada por

$$K = \sum_{i=1}^n K_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 \omega_i^2.$$

Este resultado es simplemente una consecuencia de usar la ecuación 10.2 para varias partículas puntuales y de escribir la energía cinética total como la suma de las energías cinéticas individuales. Aquí, ω_i es la velocidad angular de la partícula i y r_i es su distancia perpendicular a un eje fijo. Este eje fijo es el **eje de rotación** para estas partículas. En la figura 10.4 se muestra un ejemplo de un sistema de cinco partículas puntuales en rotación.

Ahora suponemos que todas las partículas puntuales cuyas energías cinéticas hemos sumado conservan fijas sus distancias mutuas y sus distancias respecto al eje de rotación. Entonces, todas las partículas puntuales en el sistema experimentarán movimiento circular alrededor del eje común de rotación con la misma velocidad angular. Con esta restricción, la suma de las energías cinéticas de las partículas resulta

$$K = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n m_i r_i^2 \right) \omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2. \tag{10.3}$$

La cantidad I introducida en la ecuación 10.3 se llama **momento de inercia**, también conocida como **inercia rotacional**. Depende sólo de las masas de las partículas individuales y sus distancias al eje de rotación:

$$I = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2. \tag{10.4}$$

En el capítulo 9 vimos que todas las cantidades asociadas con el movimiento circular tienen equivalentes en el movimiento lineal. La velocidad angular ω y la velocidad lineal v forman uno de estos pares. Al comparar las expresiones de la energía cinética rotacional (ecuación 10.3) y la energía cinética de movimiento lineal (ecuación 10.1), vemos que el momento de inercia I desempeña el mismo papel para el movimiento circular que el de la masa m para el movimiento lineal.

10.2 Cálculo del momento de inercia

Podemos usar el momento de inercia de varias partículas puntuales, como se da en la ecuación 10.4, como punto de partida para encontrar el momento de inercia de un objeto extenso. Procederemos del mismo modo en que lo hicimos al encontrar la ubicación del centro de masa en el capítulo 8. Nuevamente representamos un objeto extenso mediante una colección de pequeños cubos idénticos de volumen V y densidad de masa ρ (posiblemente diferente). La ecuación 10.4 se convierte en

$$I = \sum_{i=1}^n \rho(\bar{r}_i) r_i^2 V. \tag{10.5}$$

Nuevamente, como en el capítulo 8, seguimos el enfoque convencional del cálculo diferencial e integral, haciendo que el volumen de los cubos tienda a cero, $V \rightarrow 0$. En este límite, la suma en la ecuación 10.5 tiende a la integral, lo cual da una expresión para el momento de inercia de un objeto extenso:

$$I = \int_V r_{\perp}^2 \rho(\vec{r}) dV. \quad (10.6)$$

El símbolo r_{\perp} representa la distancia perpendicular de un elemento de volumen infinitesimal al eje de rotación (figura 10.5).

También sabemos que la masa total de un objeto se puede obtener integrando la densidad de masa sobre el volumen total del objeto:

$$M = \int_V \rho(\vec{r}) dV. \quad (10.7)$$

Las ecuaciones 10.6 y 10.7 son las expresiones más generales del momento de inercia y la masa de un objeto extenso. Sin embargo, igual que con las ecuaciones para el centro de masa, algunos de los casos físicamente más interesantes son aquellos en los que la densidad de masa es constante en todo el volumen. En este caso, las ecuaciones 10.6 y 10.7 se reducen a

$$I = \rho \int_V r_{\perp}^2 dV \quad (\text{para densidad de masa constante, } \rho),$$

y

$$M = \rho \int_V dV = \rho V \quad (\text{para densidad de masa constante, } \rho).$$

Así, el momento de inercia de un objeto con densidad de masa constante está dado por

$$I = \frac{M}{V} \int_V r_{\perp}^2 dV \quad (\text{para densidad de masa constante, } \rho). \quad (10.8)$$

Ahora podemos calcular momentos de inercia para algunos objetos con formas particulares. Primero, supondremos que el eje de rotación pasa por el centro de masa del objeto. Luego deduciremos un teorema que conecte este caso especial, en forma simple, con el caso general, para el cual el eje de rotación no pasa por el centro de masa.

Rotación alrededor de un eje que pasa por el centro de masa

Para un objeto con densidad de masa constante, podemos usar la ecuación 10.8 para calcular el momento de inercia con respecto a la rotación alrededor de un eje fijo que pasa por el centro de masa del objeto. Por comodidad, la ubicación del centro de masa se elige generalmente como el origen del sistema de coordenadas. Como la integral en la ecuación 10.8 es una integral tridimensional de volumen, la elección del sistema de coordenadas suele ser muy importante para evaluar la integral con el menor trabajo de cálculo posible.

En esta sección consideramos dos casos: un disco hueco y una esfera maciza. Estos casos representan las dos clases más comunes de objetos que pueden rodar, e ilustran el uso de dos sistemas diferentes de coordenadas para la integral.

La figura 10.6a) muestra un cilindro hueco que gira alrededor de su eje de simetría. Su momento de inercia es

$$I = \frac{1}{2} M (R_1^2 + R_2^2) \quad (\text{cilindro hueco}). \quad (10.9)$$

Éste es el resultado general para el momento de inercia de un cilindro hueco que gira alrededor de su eje de simetría, donde M es la masa total del cilindro, R_1 es su radio interior, y R_2 es su radio exterior.

Mediante la ecuación 10.9 podemos obtener el momento de inercia para un cilindro macizo que gira sobre su eje de simetría [vea la figura 10.6b)] haciendo $R_1 = R$ y $R_2 = 0$:

$$I = \frac{1}{2} MR^2 \quad (\text{cilindro macizo}).$$

También podemos obtener el caso límite de un cascarón cilíndrico delgado, o aro, para el cual toda la masa se concentra en la circunferencia, haciendo $R_1 = R_2 = R$. En este caso, el momento de inercia es

$$I = MR^2 \quad (\text{aro o cascarón cilíndrico delgado}).$$

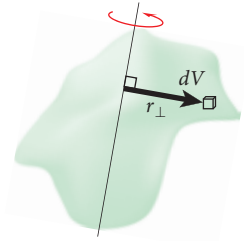


FIGURA 10.5 Definición de r_{\perp} como la distancia perpendicular de un elemento de volumen infinitesimal al eje de rotación.

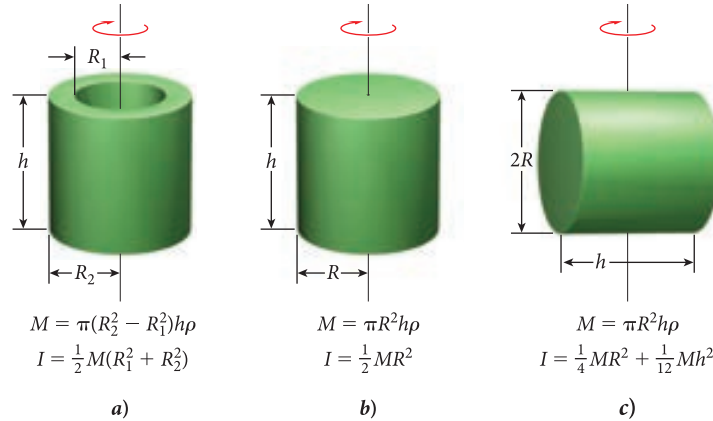


FIGURA 10.6 Momento de inercia para a) un cilindro hueco y b) un cilindro macizo, que giran alrededor del eje de simetría. c) Momento de inercia para un cilindro que gira alrededor de un eje que pasa por su centro de masa, pero perpendicular a su eje de simetría.

Finalmente, el momento de inercia para un cilindro macizo de altura h que gira alrededor de un eje que pasa por su centro de masa, pero perpendicular a su eje de simetría [vea la figura 10.6c)] está dado por

$$I = \frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{12}Mh^2 \quad (\text{cilindro macizo, perpendicular al eje de rotación}).$$

Si el radio R es muy pequeño en comparación con la altura h , como es el caso de una varilla larga y delgada, el momento de inercia en dicho límite está dado mediante la eliminación del primer término de la ecuación anterior:

$$I = \frac{1}{12}Mh^2 \quad (\text{varilla delgada de longitud } h, \text{ perpendicular al eje de rotación}).$$

Deduciremos la fórmula para el momento de inercia del cilindro hueco usando una integral de volumen del tipo que se introdujo en la sección 8.4. Esta integral implica integraciones unidimensionales separadas sobre cada una de las tres coordenadas. Esta deducción y la siguiente muestran cómo se realizan estas integraciones para coordenadas cilíndricas y esféricas. No son esenciales para los conceptos físicos que se desarrollan en este capítulo, pero pueden ser interesantes para usted.

DEDUCCIÓN 10.1

Momento de inercia para una rueda

Para deducir el momento de inercia de un cilindro hueco con densidad constante ρ , altura h , radio interior R_1 y radio exterior R_2 , con su eje de simetría como eje de rotación [vea la figura 10.6a)], usaremos coordenadas cilíndricas. Para la mayoría de los problemas que se refieren a cilindros o discos, el sistema de coordenadas que se elige debe ser generalmente el de coordenadas cilíndricas. En este sistema (vea el anexo matemático sobre integrales de volumen del capítulo 8), el elemento de volumen está dado por (vea la figura 10.7)

$$dV = r_{\perp} dr_{\perp} d\phi dz.$$

Para coordenadas cilíndricas (¡y sólo para coordenadas cilíndricas!), la distancia perpendicular r_{\perp} , es la misma que la coordenada radial, r . Teniendo esto en cuenta, podemos evaluar la integral para el cilindro hueco. Para la masa, obtenemos

$$\begin{aligned} M &= \rho \int_V dV = \rho \int_{R_1}^{R_2} \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_{-h/2}^{h/2} dz \right) d\phi \right) r_{\perp} dr_{\perp} \\ &= \rho h \int_{R_1}^{R_2} \left(\int_0^{2\pi} d\phi \right) r_{\perp} dr_{\perp} \end{aligned}$$

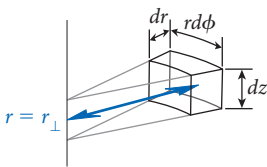


FIGURA 10.7 Elemento de volumen en coordenadas cilíndricas.

$$\begin{aligned}
 &= \rho h 2\pi \int_{R_1}^{R_2} r_{\perp} dr_{\perp} \\
 &= \rho h 2\pi \left(\frac{1}{2} R_2^2 - \frac{1}{2} R_1^2 \right) \\
 &= \pi (R_2^2 - R_1^2) h \rho.
 \end{aligned}$$

Alternativamente, podemos expresar la densidad como función de la masa:

$$M = \pi (R_2^2 - R_1^2) h \rho \Leftrightarrow \rho = \frac{M}{\pi (R_2^2 - R_1^2) h}. \quad (i)$$

La razón para realizar este último paso puede no ser completamente obvia por ahora, pero será clara después de que evaluemos la integral para el momento de inercia:

$$\begin{aligned}
 I &= \rho \int_V r_{\perp}^2 dV = \rho \int_{R_1}^{R_2} \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_{-h/2}^{h/2} dz \right) d\phi \right) r_{\perp}^3 dr_{\perp} \\
 &= \rho h \int_{R_1}^{R_2} \left(\int_0^{2\pi} d\phi \right) r_{\perp}^3 dr_{\perp} \\
 &= \rho h 2\pi \int_{R_1}^{R_2} r_{\perp}^3 dr_{\perp} \\
 &= \rho h 2\pi \left(\frac{1}{4} R_2^4 - \frac{1}{4} R_1^4 \right).
 \end{aligned}$$

Ahora podemos sustituir la densidad por la ecuación (i):

$$I = \frac{1}{2} \rho h \pi (R_2^4 - R_1^4) = \frac{M}{\pi (R_2^2 - R_1^2) h} \frac{1}{2} h \pi (R_2^4 - R_1^4).$$

Finalmente, usamos la identidad $a^4 - b^4 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2)$ para obtener la ecuación 10.9:

$$I = \frac{1}{2} M (R_1^2 + R_2^2).$$

Para objetos que no sean de forma discoidal, el uso de coordenadas cilíndricas puede no ser ventajoso. Los objetos más importantes de esta categoría son las esferas y los bloques rectangulares. El momento de inercia de una esfera que gira alrededor de cualquier eje que pase por su centro de masa [vea la figura 10.8a)] está dado por

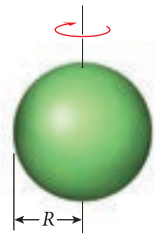
$$I = \frac{2}{5} MR^2 \quad (\text{esfera maciza}). \quad (10.10)$$

El momento de inercia para un cascarón esférico delgado que gira alrededor de cualquier eje que pase por su centro de masa es

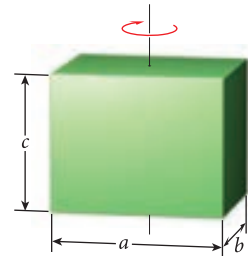
$$I = \frac{2}{3} MR^2 \quad (\text{cascarón esférico delgado}).$$

El momento de inercia de un bloque rectangular con longitudes de lado a , b y c que gira alrededor de un eje que pase por el centro de masa y paralelo al lado c [vea la figura 10.8b)] es

$$I = \frac{1}{12} M (a^2 + b^2) \quad (\text{bloque rectangular}).$$



$$\begin{aligned}
 M &= \frac{4\pi}{3} R^3 \rho \\
 I &= \frac{2}{5} MR^2 \\
 &\mathbf{a)}
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 M &= abc\rho \\
 I &= \frac{1}{12} M (a^2 + b^2) \\
 &\mathbf{b)}
 \end{aligned}$$

FIGURA 10.8 Momentos de inercia de a) una esfera y b) un bloque.

Nuevamente, deduciremos la fórmula para la esfera maciza sólo para ilustrar el trabajo en un sistema de coordenadas diferente.

DEDUCCIÓN 10.2

Momento de inercia de una esfera

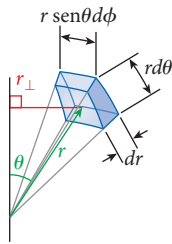


FIGURA 10.9 Elemento de volumen en coordenadas esféricas.

Para calcular el momento de inercia para una esfera maciza [figura 10.8a)] con densidad de masa constante ρ y radio R que gira alrededor de un eje que pasa por su centro, no es adecuado usar coordenadas cilíndricas. La mejor elección la constituyen las coordenadas esféricas. En coordenadas esféricas, el elemento de volumen está dado por (vea la figura 10.9)

$$dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi.$$

Observe que, para coordenadas esféricas, la coordenada radial, r , y la distancia perpendicular, r_{\perp} , no son idénticas. En vez de esto, están relacionadas (vea la figura 10.9) mediante

$$r_{\perp} = r \sin \theta.$$

(Una fuente muy común de errores en esta clase de cálculos es la omisión del seno del ángulo. Usted necesita recordar esto cuando use coordenadas esféricas.)

Nuevamente, primero evaluamos la integral para la masa:

$$\begin{aligned} M &= \rho \int_V dV = \rho \int_0^R \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \right) d\phi \right) r^2 dr \\ &= 2\rho \int_0^R \left(\int_0^{2\pi} d\phi \right) r^2 dr \\ &= 4\pi\rho \int_0^R r^2 dr \\ &= \frac{4\pi}{3} R^3 \rho. \end{aligned}$$

Así,

$$\rho = \frac{3M}{4\pi R^3}. \tag{i}$$

Luego evaluamos la integral para el momento de inercia de modo similar:

$$\begin{aligned} I &= \rho \int_V r_{\perp}^2 dV = \rho \int_V r^2 \sin^2 \theta dV \\ &= \rho \int_0^R \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi} \sin^3 \theta d\theta \right) d\phi \right) r^4 dr \\ &= \rho \frac{4}{3} \int_0^R \left(\int_0^{2\pi} d\phi \right) r^4 dr \\ &= \rho \frac{8\pi}{3} \int_0^R r^4 dr. \end{aligned}$$

Así,

$$I = \rho \frac{8\pi}{15} R^5. \tag{ii}$$

Al sustituir la expresión para la densidad de la ecuación (i) en la ecuación (ii), obtenemos

$$I = \rho \frac{8\pi}{15} R^5 = \frac{3M}{4\pi R^3} \frac{8\pi}{15} R^5 = \frac{2}{5} MR^2.$$

Finalmente, note esta importante observación general: si R es la mayor distancia perpendicular de cualquier parte del objeto que gira al eje de rotación, entonces el momento de inercia siempre se relaciona con la masa de un objeto mediante

$$I = cMR^2, \text{ con } 0 < c \leq 1. \quad (10.11)$$

La constante c se puede calcular a partir de la configuración geométrica del objeto que gira, y siempre tiene un valor entre cero y uno. Cuanto más se concentre la mayor parte de la masa hacia el eje de rotación, menor será el valor de la constante c . Si toda la masa está ubicada en el borde externo del objeto, como en un aro, por ejemplo, entonces c tiende al valor 1. (Matemáticamente, esta ecuación es una consecuencia del teorema del valor medio, que usted puede haber encontrado en una clase de cálculo diferencial e integral.) Para un cilindro que gira alrededor de su eje de simetría, $c_{\text{cil}} = \frac{1}{2}$, y para una esfera, $c_{\text{esf}} = \frac{2}{5}$, tal como hemos visto.

En la figura 10.10 se muestran varios objetos que giran alrededor de un eje que pasa por su centro de masa. La tabla 10.1 da el momento de inercia para cada objeto, así como la constante c de la ecuación 10.11, cuando sea aplicable.

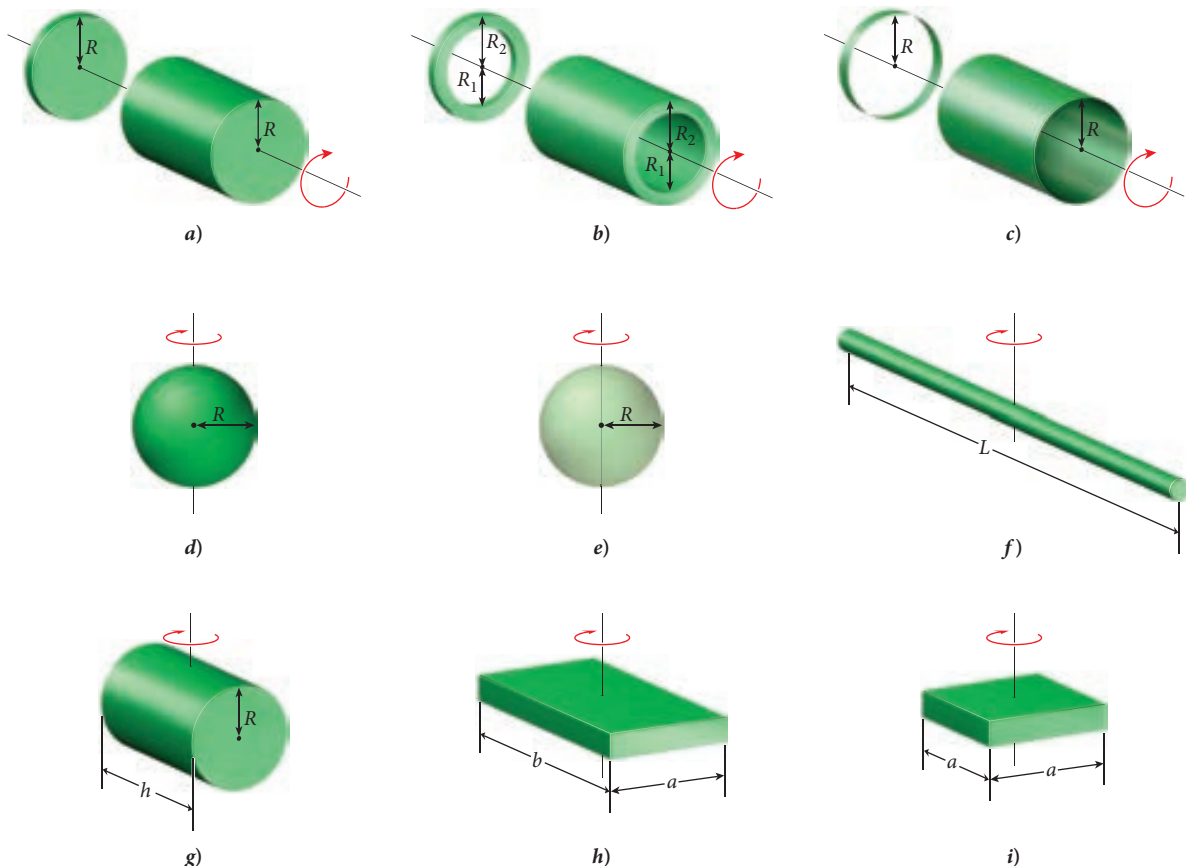


FIGURA 10.10 Orientación del eje de rotación que pasa por el centro de masa y definición de las dimensiones para los objetos que se enumeran en la tabla 10.1.

Tabla 10.1 El momento de inercia y el valor de la constante c para los objetos que se muestran en la figura 10.10. Todos los objetos tienen masa M .

Objeto	I	c
a) Cilindro macizo o disco	$\frac{1}{2}MR^2$	$\frac{1}{2}$
b) Cilindro hueco grueso o rueda	$\frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2)$	
c) Cilindro hueco o aro	MR^2	1
d) Esfera maciza	$\frac{2}{5}MR^2$	$\frac{2}{5}$
e) Esfera hueca	$\frac{2}{3}MR^2$	$\frac{2}{3}$
f) Varilla delgada	$\frac{1}{12}Mh^2$	
g) Cilindro macizo perpendicular al eje de simetría	$\frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{12}Mh^2$	
h) Placa rectangular plana	$\frac{1}{12}M(a^2 + b^2)$	
i) Placa cuadrada plana	$\frac{1}{6}Ma^2$	

EJEMPLO 10.1 Energía cinética rotacional de la Tierra

Suponga que la Tierra es una esfera maciza de densidad constante, con masa de $5.98 \cdot 10^{24}$ kg y radio de 6 370 km.

PROBLEMA

¿Cuál es el momento de inercia de la Tierra con respecto a la rotación alrededor de su propio eje y cuál es la energía cinética de esta rotación?

SOLUCIÓN

Como la Tierra se debe aproximar a una esfera de densidad constante, su momento de inercia es

$$I = \frac{2}{5}MR^2.$$

Al sustituir los valores para la masa y el radio, obtenemos

$$I = \frac{2}{5}MR^2 = \frac{2}{5}(5.98 \cdot 10^{24} \text{ kg})(6.37 \cdot 10^6 \text{ m})^2 = 9.71 \cdot 10^{37} \text{ kg m}^2.$$

La frecuencia angular de la rotación de la Tierra es

$$\omega = \frac{2\pi}{1 \text{ día}} = \frac{2\pi}{86\,164 \text{ s}} = 7.29 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s}.$$

(Observe que hemos usado aquí el día sideral; vea el ejemplo 9.3.)

Con los resultados para el momento de inercia y la frecuencia angular, podemos encontrar la energía cinética de la rotación de la Tierra:

$$K = \frac{1}{2}I\omega^2 = 0.5(9.71 \cdot 10^{37} \text{ kg m}^2)(7.29 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s})^2 = 2.6 \cdot 10^{29} \text{ J}.$$

Comparemos esto con la energía cinética del movimiento de la Tierra alrededor del Sol. En el capítulo 9 calculamos la rapidez de traslación de la Tierra como $v = 2.97 \cdot 10^4$ m/s. Por lo tanto, la energía cinética del movimiento de la Tierra alrededor del Sol es

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = 0.5(5.98 \cdot 10^{24} \text{ kg})(2.97 \cdot 10^4 \text{ m/s})^2 = 2.6 \cdot 10^{33} \text{ J},$$

que es mayor que la energía cinética de rotación por un factor de 10 000.

Teorema de los ejes paralelos

Determinamos el momento de inercia para un eje de rotación que pasa por el centro de masa de un objeto; pero ¿cuál es el momento de inercia para la rotación alrededor de un eje que no pasa por el centro de masa? El **teorema de los ejes paralelos** responde a esta pregunta. Dice que el

momento de inercia I_{\parallel} para la rotación de un objeto de masa M alrededor de un eje ubicado a una distancia d del centro de masa del objeto y paralelo a un eje que pase por el centro de masa, para el cual el momento de inercia es I_{cm} , está dado por

$$I_{\parallel} = I_{\text{cm}} + Md^2. \quad (10.12)$$

DEDUCCIÓN 10.3

Teorema de los ejes paralelos

Para esta deducción, considere el objeto de la figura 10.11. Suponga que ya hemos calculado el momento de inercia de este objeto para la rotación alrededor del eje z , que pasa por el centro de masa de este objeto. El origen del sistema de coordenadas xyz está en el centro de masa, y el eje z es el eje de rotación. Cualquier eje paralelo al eje de rotación se puede entonces describir por un simple corrimiento en el plano xy , indicado en la figura por el vector \vec{d} , con componentes d_x y d_y .

Si corremos el sistema de coordenadas en el plano xy de modo que el nuevo eje vertical, el eje z' , coincida con el nuevo eje de rotación, entonces la transformación de las coordenadas xyz a las nuevas coordenadas $x'y'z'$ está dada por

$$x' = x - d_x, \quad y' = y - d_y, \quad z' = z.$$

Para calcular el momento de inercia del objeto que gira alrededor del nuevo eje en el nuevo sistema de coordenadas, podemos simplemente usar la ecuación 10.6, la ecuación más general, que se aplica al caso en el que la densidad de masa no es constante:

$$I_{\parallel} = \int_V (r_{\perp}')^2 \rho dV. \quad (i)$$

De acuerdo con la transformación de las coordenadas,

$$\begin{aligned} (r_{\perp}')^2 &= (x')^2 + (y')^2 = (x - d_x)^2 + (y - d_y)^2 \\ &= x^2 - 2xd_x + d_x^2 + y^2 - 2yd_y + d_y^2 \\ &= (x^2 + y^2) + (d_x^2 + d_y^2) - 2xd_x - 2yd_y \\ &= r_{\perp}^2 + d^2 - 2xd_x - 2yd_y. \end{aligned}$$

(Recuerde que \vec{r}_{\perp} está en el plano xy debido a la forma en que hemos construido el sistema de coordenadas.) Ahora sustituimos $(r_{\perp}')^2$ en la ecuación (i) por esta expresión y obtenemos

$$\begin{aligned} I_{\parallel} &= \int_V (r_{\perp}')^2 \rho dV \\ &= \int_V r_{\perp}^2 \rho dV + d^2 \int_V \rho dV - 2d_x \int_V x \rho dV - 2d_y \int_V y \rho dV. \end{aligned} \quad (ii)$$

La primera integral en la ecuación (ii) da el momento de inercia para rotación alrededor del centro de masa, que ya conocemos. La segunda integral es simplemente igual a la masa (compare la ecuación 10.7). La tercera y cuarta integrales se introdujeron en el capítulo 8, y dan la ubicación de las coordenadas x y y del centro de masa. Sin embargo, por construcción, son igual a cero, porque pusimos el origen del sistema de coordenadas xyz en el centro de masa. Así, obtenemos el teorema de los ejes paralelos:

$$I_{\parallel} = I_{\text{cm}} + d^2 M.$$

Observe que, de acuerdo con las ecuaciones 10.11 y 10.12, el momento de inercia con respecto a la rotación alrededor de un eje arbitrario paralelo a un eje que pasa por el centro de masa se puede escribir como

$$I = (cR^2 + d^2)M, \quad \text{con } 0 < c \leq 1.$$

Aquí, R es la distancia perpendicular máxima de cualquier parte del objeto a su eje de rotación que pasa por el centro de masa, y d es la distancia del eje de rotación a un eje paralelo que pasa por el centro de masa.

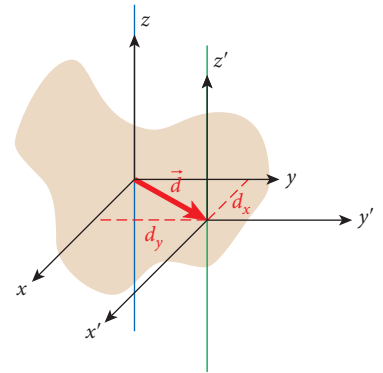


FIGURA 10.11 Coordenadas y distancias para el teorema de los ejes paralelos.

10.1 Oportunidad de autoexamen

Demuestre que el momento de inercia de una varilla delgada de masa m y longitud L que gira alrededor de un extremo es $I = \frac{1}{3}mL^2$.

10.3 Rodadura sin deslizamiento

El **movimiento de rodadura** es un caso especial de movimiento rotacional que realizan objetos redondos de radio R que se mueven por una superficie sin deslizarse. Para el movimiento de rodadura podemos conectar las cantidades lineales y angulares observando que la distancia lineal que recorre el centro de masa es la misma que la longitud del arco correspondiente a la circunferencia del objeto. Así, la relación entre la distancia lineal, r , que recorre el centro de masa, y el ángulo de rotación es

$$r = R\theta.$$

Tomando la derivada con respecto al tiempo, y teniendo presente que el radio, R , permanece constante, obtenemos las relaciones entre las rapidezces y aceleraciones lineales y angulares:

$$v = R\omega$$

y

$$a = R\alpha.$$

La energía cinética total de un objeto en el movimiento de rodadura es la suma de sus energías de traslación y de rotación:

$$K = K_{\text{tras}} + K_{\text{rot}} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2. \quad (10.13)$$

Podemos ahora sustituir ω de $v = R\omega$ e I de la ecuación 10.11:

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \\ &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}(cR^2m)\left(\frac{v}{R}\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mv^2c \Rightarrow \\ K &= (1+c)\frac{1}{2}mv^2, \end{aligned} \quad (10.14)$$

donde $0 < c \leq 1$ es la constante introducida en la ecuación 10.11. La ecuación 10.14 implica que la energía cinética de un objeto en rodadura siempre es mayor que la de un objeto que se desliza, siempre y cuando ambos tengan la misma masa y la misma velocidad lineal.

Con una expresión para la energía cinética que incluye el aporte de la rotación, podemos aplicar el concepto de conservación de la energía mecánica total (la suma de las energías cinética y potencial) que aplicamos en el capítulo 6.

10.2 Ejercicio en clase

Una bicicleta se mueve con una rapidez de 4.02 m/s. Si el radio de la rueda delantera es de 0.450 m, ¿cuánto tarda dicha rueda en dar una revolución completa?

- a) 0.703 s
- b) 1.23 s
- c) 2.34 s
- d) 4.04 s
- e) 6.78 s

PROBLEMA RESUELTO 10.1 Esfera que rueda por un plano inclinado

PROBLEMA

Una esfera maciza con una masa de 5.15 kg y un radio de 0.340 m parte del reposo a una altura de 2.10 m arriba de la base de un plano inclinado, y rueda hacia abajo sin deslizarse bajo la influencia de la gravedad. ¿Cuál es la rapidez lineal del centro de masa de la esfera inmediatamente después de salir del plano inclinado y comenzar a rodar en una superficie horizontal?

SOLUCIÓN

PIENSE

En el extremo superior del plano inclinado, la esfera está en reposo. En ese punto, la esfera tiene energía potencial gravitacional y no tiene energía cinética. Al comenzar a rodar la esfera, pierde energía potencial y gana energía cinética de movimiento lineal y energía cinética de rotación. En la base del plano inclinado, toda la energía potencial original está en la forma de energía cinética. La energía cinética del movimiento lineal está vinculada a la energía cinética de rotación mediante el radio de la esfera.

ESBOCE

En la figura 10.12 se muestra un esquema del problema, con el cero de la coordenada y en la base del plano inclinado.



FIGURA 10.12 Esfera que rueda hacia abajo por un plano inclinado.

INVESTIGUE

En el extremo superior del plano inclinado, la esfera está en reposo y tiene cero energía cinética: en la parte superior, su energía, por lo tanto, es energía potencial, mgh :

$$E_{\text{sup}} = K_{\text{sup}} + U_{\text{sup}} = 0 + mgh = mgh,$$

donde m es la masa de la esfera, h es la altura de la esfera sobre la superficie horizontal y g es la aceleración debida a la gravedad. En la base del plano inclinado, justo cuando la esfera comienza a rodar en la superficie horizontal, la energía potencial es cero. De acuerdo con la ecuación 10.14, la esfera tiene una energía cinética total (suma de la energía cinética de traslación y la de rotación) de $(1 + c)\frac{1}{2}mv^2$. Así, la energía total en la base del plano inclinado es

$$E_{\text{base}} = K_{\text{base}} + U_{\text{base}} = (1 + c)\frac{1}{2}mv^2 + 0 = (1 + c)\frac{1}{2}mv^2.$$

Como el momento de inercia de una esfera es $I = \frac{2}{5}mR^2$ (vea la ecuación 10.10), la constante c tiene el valor $\frac{2}{5}$ en este caso.

SIMPLIFIQUE

Por la conservación de la energía, ésta en la parte superior del plano inclinado es igual a la energía en la base:

$$mgh = (1 + c)\frac{1}{2}mv^2.$$

Al sustituir la velocidad lineal, obtenemos

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{1 + c}}.$$

Para una esfera, $c = \frac{2}{5}$, como se indica arriba y, por lo tanto, la rapidez de un objeto rodante es, en este caso,

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{1 + \frac{2}{5}}} = \sqrt{\frac{10}{7}gh}.$$

CALCULE

Al sustituir los valores numéricos obtenemos

$$v = \sqrt{\frac{10}{7}(9.81 \text{ m/s}^2)(2.10 \text{ m})} = 5.42494 \text{ m/s}.$$

REDONDEE

Al expresar nuestro resultado con tres cifras significativas da

$$v = 5.42 \text{ m/s}.$$

VUELVA A REVISAR

Si la esfera no rodara sino que se deslizara por el plano inclinado sin fricción, la rapidez final sería

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2(9.81 \text{ m/s}^2)(2.10 \text{ m})} = 6.42 \text{ m/s},$$

que es mayor que la rapidez que encontramos para la esfera rodante. Parece razonable que la velocidad lineal final de la esfera rodante sería algo menor que la velocidad lineal final de la esfera deslizante, porque algo de la energía potencial inicial de la esfera rodante se transforma en energía cinética de rotación. Esta energía, entonces, no está disponible para convertirse en energía cinética de movimiento lineal del centro de masa de la esfera. Observe que no hemos necesitado la masa ni el radio de la esfera en este cálculo.

La fórmula deducida en el problema resuelto 10.1 para la rapidez de una esfera rodante en la base del plano inclinado,

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{1 + c}}, \quad (10.15)$$

es más bien un resultado general. Se puede aplicar a varias situaciones en las que la energía potencial gravitacional se convierte en energía cinética de traslación y rotación de un objeto rodante.

Galileo Galilei demostró en forma célebre que la aceleración de un objeto en caída libre es independiente de su masa. Esto también es verdad para un objeto que rueda hacia abajo por un plano inclinado, como acabamos de ver en el problema resuelto 10.1, que nos lleva a la ecuación 10.15. Sin embargo, mientras la masa total del objeto rodante no importa, la distribución de la masa dentro del objeto sí importa. Matemáticamente, esto se refleja en la ecuación 10.15 por el hecho de que la constante c de la ecuación 10.11, que se calcula por la distribución geométrica de la masa, aparece en el denominador. El siguiente ejemplo demuestra con claridad que la distribución de la masa en los objetos rodantes sí importa.

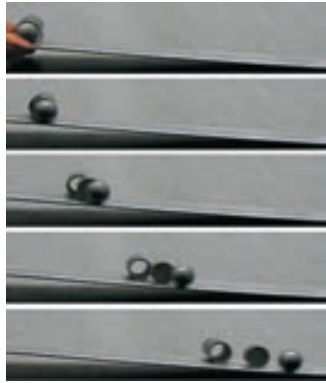


FIGURA 10.13 Carrera de una esfera, un cilindro macizo y un cilindro hueco de la misma masa y radio por un plano inclinado. Los cuadros de video se tomaron a intervalos de 0.5 s.

EJEMPLO 10.2

Carrera en un plano inclinado

PROBLEMA

Una esfera sólida, un cilindro sólido y un cilindro hueco (un tubo), todos con la misma masa m y el mismo radio externo, R , se sueltan desde el reposo en el extremo superior de un plano inclinado y comienzan a rodar sin deslizarse. ¿En qué orden llegan a la base del plano inclinado?

SOLUCIÓN

Podemos responder a esta pregunta usando solamente consideraciones de energía. Como la energía mecánica total se conserva para cada uno de los tres objetos durante su movimiento rodante, podemos escribir para cada objeto

$$E = K + U = K_0 + U_0.$$

Los objetos se soltaron desde el reposo, de modo que $K_0 = 0$. Para la energía potencial, usamos nuevamente $U = mgh$, y para la energía cinética, usamos la ecuación 10.14. Por lo tanto, tenemos

$$K_{\text{base}} = U_{\text{sup}} \Rightarrow (1 + c) \frac{1}{2} mv^2 = mgh \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2gh}{1 + c}},$$

que es la misma fórmula de la ecuación 10.15.

Ya observamos que la masa del objeto se canceló en esta fórmula. Sin embargo, podemos hacer dos observaciones adicionales importantes: 1) el radio del objeto rodante no aparece en esta expresión para la velocidad lineal y 2) la constante c que se determina por la distribución de la masa aparece en el denominador. Ya sabemos el valor de c para los tres objetos rodantes: $c_{\text{esfera}} = \frac{2}{5}$, $c_{\text{cilindro}} = \frac{1}{2}$ y $c_{\text{tubo}} \approx 1$. Como la constante de una esfera es la más pequeña, la velocidad de la esfera para cualquier altura dada h será la mayor, lo cual implica que la esfera ganará la carrera. Físicamente vemos que, como los tres objetos tienen la misma masa y por lo tanto tienen el mismo cambio en la energía potencial, todas las energías cinéticas totales son iguales. Por ello, un objeto con un mayor valor de c tendrá relativamente más de su energía cinética en la rotación y una menor energía cinética de traslación y una menor rapidez lineal. El cilindro sólido llegará en segundo lugar, seguido por el tubo. La figura 10.13 muestra cuadros fijos de un experimento grabado en videocinta que verifica nuestras conclusiones.

10.3 Ejercicio en clase

Suponga que repetimos la carrera del ejemplo 10.2, pero dejamos que participe una lata de gaseosa sin abrir. ¿En qué lugar terminaría la lata?

- a) Primero.
- b) Segundo.
- c) Tercero.
- d) Cuarto.

10.2 Oportunidad de autoexamen

¿Puede usted explicar por qué la lata de gaseosa termina la carrera en la posición que se determinó en el ejercicio en clase 10.3?

PROBLEMA RESUELTO 10.2

Bola que rueda por un rizo

Se suelta una esfera sólida desde el reposo, y rueda hacia abajo por un plano inclinado y luego en un rizo circular de radio R (vea la figura 10.14).

PROBLEMA

¿Cuál es la altura mínima h desde la cual se debe soltar la esfera de modo que no se salga de la pista cuando esté en el rizo?

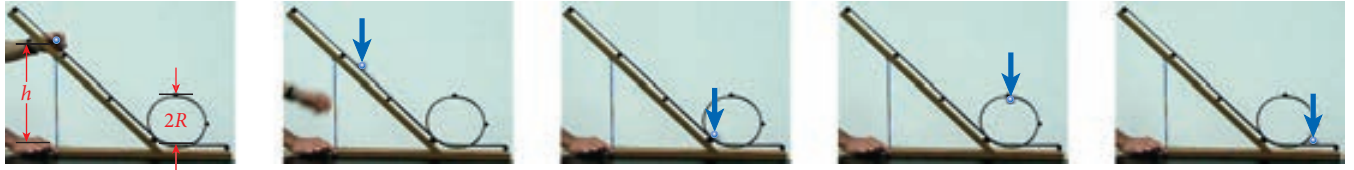


FIGURA 10.14 Esfera que rueda por un plano inclinado y entra a un rizo vertical. Los cuadros de video se tomaron a intervalos de 0.25 s.

SOLUCIÓN

PIENSE

Cuando se suelta desde el reposo a una altura h en el plano inclinado, la esfera tiene una energía potencial gravitacional, pero no tiene energía cinética. Al rodar la esfera hacia abajo por el plano inclinado y por el rizo, la energía potencial gravitacional se convierte en energía cinética. En la parte más alta del rizo, la esfera ha caído una distancia $h - 2R$. La clave para resolver este problema es observar que, en la parte superior del rizo, la aceleración centrípeta tiene que ser igual o mayor que la aceleración debida a la gravedad. (Cuando estas aceleraciones son iguales, ocurre la “ingravidez” del objeto, como se muestra en el problema resuelto 9.1. Cuando la aceleración centrípeta es mayor, debe haber una fuerza de soporte hacia abajo, que la pista puede suministrar. Cuando la aceleración centrípeta es menor, debe haber una fuerza de soporte hacia arriba, que la pista no puede suministrar, de modo que la esfera cae de la pista.) Lo que se ignora aquí es la rapidez v en la parte superior del rizo. Podemos nuevamente emplear consideraciones de conservación de la energía para calcular la velocidad mínima necesaria y luego encontrar la altura mínima inicial necesaria para que la esfera permanezca en la pista.

ESBOCE

En la figura 10.15 se muestra un esquema de la esfera que rueda por el plano inclinado y el rizo.

INVESTIGUE

Cuando se suelta la esfera, tiene energía potencial $U_0 = mgh$ y energía cinética cero. En el ápice del rizo, la energía potencial es $U = mg2R$, y la energía total es, de acuerdo con la ecuación 10.14, $K = (1 + c)\frac{1}{2}mv^2$, donde $c_{\text{esfera}} = \frac{2}{5}$. Así, la conservación de la energía mecánica total nos dice que

$$E = K + U = (1 + c)\frac{1}{2}mv^2 + mg2R = K_0 + U_0 = mgh. \quad (i)$$

En el punto más alto del rizo, la aceleración centrípeta, a_c , tiene que ser igual o mayor que la aceleración debida a la gravedad, g

$$g \leq a_c = \frac{v^2}{R}. \quad (ii)$$

SIMPLIFIQUE

Podemos despejar v^2 de la ecuación (i):

$$v^2 = \frac{2g(h - 2R)}{1 + c}.$$

Si en la ecuación (ii) sustituimos v^2 por esta expresión, encontramos

$$g \leq \frac{2g(h - 2R)}{R(1 + c)}.$$

Multiplicando ambos lados de esta ecuación por el denominador de la fracción del lado derecho, tenemos

$$R(1 + c) \leq 2h - 4R.$$

Por lo tanto, tenemos

$$h \geq \frac{5 + c}{2}R.$$

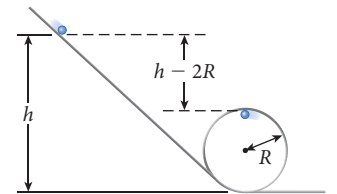


FIGURA 10.15 Esfera que rueda en un plano inclinado y un rizo.

(continúa)

(continuación)

CALCULE

Este resultado es válido para cualquier objeto rodante, y la constante c la determina la geometría del objeto. En este problema tenemos una esfera sólida, de modo que $c = \frac{2}{5}$. Así que el resultado es

$$h \geq \frac{5 + \frac{2}{5}}{2} R = \frac{27}{10} R.$$

REDONDEE

La situación de este problema se describió en términos de variables más que de valores numéricos, de modo que podemos reportar nuestro resultado exactamente como

$$h \geq 2.7R.$$

VUELVA A REVISAR

Si la esfera no estuviera rodando sino deslizándose sin fricción, podríamos igualar la energía cinética de la esfera en el ápice del rizo al cambio en energía potencial gravitacional:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mg(h - 2R).$$

Podríamos entonces expresar la desigualdad entre la aceleración gravitacional y la aceleración centrípeta dada en la ecuación (ii) como sigue:

$$g \leq a_c = \frac{v^2}{R} = \frac{2g(h - 2R)}{R}.$$

Al despejar h de esta ecuación obtenemos

$$h \geq \frac{5}{2}R = 2.5R.$$

Esta altura necesaria para una esfera que se desliza es un poco menor que la altura que encontramos para una esfera rodante. Esperaríamos que se necesitara menos energía, en forma de energía potencial gravitacional, para mantener a la esfera en la pista si no estuviera rodando, porque su energía cinética sería enteramente de traslación. De modo que nuestro resultado para mantener una esfera rodante en el rizo parece razonable.

10.4 Momento de torsión

Hasta ahora, al hablar de fuerzas, hemos visto que una fuerza puede causar el movimiento lineal de un objeto, que se puede describir en términos del movimiento del centro de masa del objeto. Sin embargo, no hemos atendido a una pregunta general: ¿dónde se colocan, en un diagrama de cuerpo libre, los vectores de fuerza que actúan sobre un objeto extenso? Una fuerza puede actuar sobre un objeto extenso en un punto distante de su centro de masa, lo cual hace que el objeto gire además de moverse linealmente.

Brazo de palanca

En la figura 10.16 se muestra una mano que trata de usar una llave de tuercas para aflojar un perno. Es claro que la forma más fácil de hacer girar el perno es la que se indica en la figura

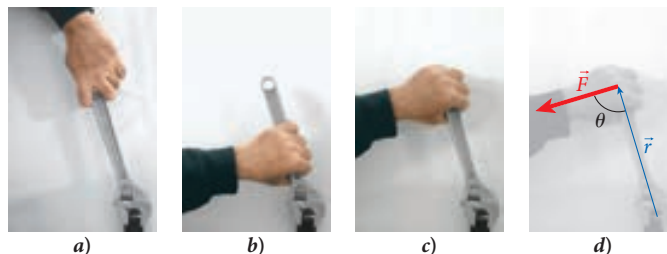


FIGURA 10.16 a-c) Tres maneras de usar una llave de tuercas para aflojar un perno. d) La fuerza \vec{F} y el brazo de palanca r , con el ángulo θ entre ellos.

10.16c); mucho más difícil en la figura 10.16b), y de plano imposible en la figura 10.16a). Este ejemplo muestra que la magnitud de la fuerza no es la única cantidad importante. La distancia perpendicular de la línea de acción de la fuerza al eje de rotación, que se llama **brazo de palanca**, también es importante. Además, el ángulo de aplicación de la fuerza, respecto al brazo de palanca, también es importante. En los incisos b) y c) de la figura 10.16, este ángulo es de 90° . (Un ángulo de 270° sería igualmente eficaz, pero entonces la fuerza actuaría en el sentido opuesto.) Un ángulo de 180° o de 0° [figura 10.16a)] no hará girar el perno.

Estas consideraciones se cuantifican mediante el concepto de momento de torsión, τ . El **momento de torsión** (que también se llama simplemente *momento* o *torca*) es el producto vectorial de la fuerza \vec{F} y el vector de posición \vec{r} :

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}. \quad (10.16)$$

El vector de posición \vec{r} se mide con el origen en el eje de rotación. El símbolo \times denota **producto vectorial**, o *producto de cruz*. En la sección 5.4 vimos que podemos multiplicar dos vectores para dar una cantidad escalar que se llama *producto escalar* y se denota por el símbolo \cdot . Ahora definimos una multiplicación diferente de dos vectores de tal manera que el resultado es otro vector.

La unidad SI del momento de torsión es N m, que no se debe confundir con la unidad de energía, que es el joule ($J = \text{N m}$)

$$[\tau] = [F] \cdot [r] = \text{N m}.$$

En unidades inglesas, el momento de torsión se expresa a menudo en pies-libras (ft-lb).

La magnitud del momento de torsión es el producto de la magnitud de la fuerza y la distancia al eje de rotación (la magnitud del vector de posición, o brazo de palanca) por el seno del ángulo entre el vector de fuerza y el vector de posición (vea la figura 10.17):

$$\tau = rF \sin \theta. \quad (10.17)$$

Las cantidades angulares también pueden ser vectores, llamados *vectores axiales*. (Un vector axial es cualquier vector que señala a lo largo del eje de rotación.) El momento de torsión es un ejemplo de un vector axial, y su magnitud está dada por la ecuación 10.17. La dirección del momento de torsión está dada por la regla de la mano derecha (figura 10.17). El momento de torsión señala en una dirección perpendicular al plano que abarcan los vectores fuerza y posición. Así, si el vector de posición señala en la dirección del pulgar y el vector fuerza en la dirección del dedo índice, entonces la dirección del vector axial de momento de torsión es la del dedo medio, como se muestra en la figura 10.17. Observe que el vector de momento de torsión es perpendicular tanto al vector fuerza como al vector de posición.

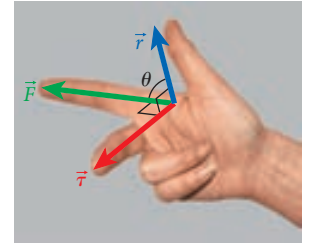


FIGURA 10.17 Regla de la mano derecha para la dirección del momento de torsión para una fuerza dada y un vector de posición dado.

Anexo matemático: producto vectorial

El producto vectorial (o producto de cruz) entre dos vectores $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$ y $\vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$ se define como

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$$

$$C_x = A_y B_z - A_z B_y$$

$$C_y = A_z B_x - A_x B_z$$

$$C_z = A_x B_y - A_y B_x.$$

En particular, para los productos vectoriales de los vectores unitarios cartesianos, esta definición implica que

$$\hat{x} \times \hat{y} = \hat{z}$$

$$\hat{y} \times \hat{z} = \hat{x}$$

$$\hat{z} \times \hat{x} = \hat{y}.$$

La magnitud, o valor absoluto, del vector \vec{C} está dada por

$$|\vec{C}| = |\vec{A}| |\vec{B}| \sin \theta.$$

Aquí θ es el ángulo entre \vec{A} y \vec{B} , como se muestra en la figura 10.18. Este resultado implica que la magnitud del producto vectorial de dos vectores es máxima cuando $\vec{A} \perp \vec{B}$ y es cero cuando $\vec{A} \parallel \vec{B}$. Podemos también interpretar el lado derecho de esta ecuación ya sea como el producto de la magnitud del vector \vec{A} por la componente de \vec{B} perpendicular a \vec{A} o como el producto de la magnitud de \vec{B} por la componente de \vec{A} perpendicular a \vec{B} : $|\vec{C}| = |\vec{A}| B_{\perp A} = |\vec{B}| A_{\perp B}$. Cualquiera de estas dos interpretaciones es válida.

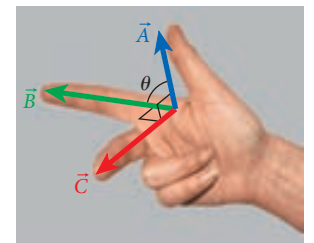


FIGURA 10.18 Producto vectorial.

La dirección del vector \vec{C} se puede encontrar usando la regla de la mano derecha: si el vector \vec{A} señala en la dirección del pulgar y el vector \vec{B} señala en la dirección del índice, entonces el producto vectorial es perpendicular a *ambos* vectores y señala en la dirección del dedo medio, como se muestra en la figura 10.18.

Es importante darse cuenta de que, para el producto vectorial, el orden de los factores sí importa:

$$\vec{B} \times \vec{A} = -\vec{A} \times \vec{B}.$$

De modo que el producto vectorial es diferente tanto de la multiplicación ordinaria de escalares como de la multiplicación de vectores para formar un producto escalar.

Veremos de inmediato, por la definición del producto vectorial, que para cualquier vector \vec{A} , el producto vectorial consigo mismo es siempre cero:

$$\vec{A} \times \vec{A} = 0.$$

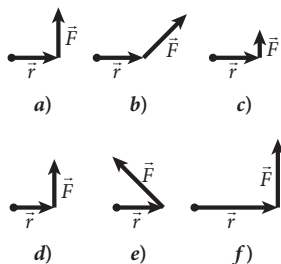
Finalmente, hay una útil regla para un producto vectorial doble en el que participan tres vectores: el producto vectorial del vector \vec{A} por el producto vectorial de los vectores \vec{B} y \vec{C} es la suma de dos vectores, uno que apunta en la dirección del vector \vec{B} multiplicado por el producto escalar $\vec{A} \cdot \vec{C}$ y otro que señala en la dirección del vector \vec{C} y multiplicado por $-\vec{A} \cdot \vec{B}$:

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B}).$$

La *regla BAC-CAB* es fácil de probar usando las componentes cartesianas en las definiciones del producto vectorial y del producto escalar, pero la prueba es tediosa y por lo tanto la omitimos aquí. Sin embargo, la regla ocasionalmente es útil, en especial cuando se trata de momento de torsión y momento angular. Y la ayuda nemónica BAC-CAB la hace fácil de recordar.

10.4 Ejercicio en clase

Elija la combinación de vector de posición, \vec{r} y vector fuerza, \vec{F} , que produzca el momento de torsión de magnitud más alta alrededor del punto indicado por el punto negro.



Con la definición matemática del momento de torsión, su magnitud y su relación con el vector fuerza, el vector de posición y el ángulo entre estos dos vectores, podemos encontrar por qué el enfoque que se muestra en el inciso c) de la figura 10.16 rinde el máximo momento de torsión para una magnitud dada de la fuerza, mientras que el que se muestra en el inciso a) da momento de torsión cero. Vemos que la magnitud del momento de torsión es el factor decisivo para determinar lo fácil o difícil que es aflojar (o apretar) un perno.

Los momentos de torsión alrededor de cualquier eje de rotación fijo pueden ser horarios o antihorarios. Como se indica por el vector fuerza en la figura 10.16d), el momento de torsión generado por la mano que tira de la llave de tuercas sería antihorario. El **momento de torsión neto** se define como la diferencia entre la suma de todos los momentos de torsión en sentido horario y la suma de todos los momentos de torsión en sentido antihorario:

$$\tau_{\text{neto}} = \sum_i \tau_{\text{sentido contrario agujas del reloj}, i} - \sum_j \tau_{\text{sentido agujas del reloj}, j}$$

10.5 Segunda ley de Newton para la rotación

En la sección 10.1 observamos que el momento de inercia I es el equivalente rotacional de la masa. Por el capítulo 4 sabemos que el producto de la masa y la aceleración lineal es la fuerza neta que actúa sobre el objeto, como lo expresa la segunda ley de Newton, $F_{\text{neto}} = ma$. ¿Cuál es el equivalente de la segunda ley de Newton para el movimiento de rotación?

Comencemos con una partícula puntual de masa M que se mueve en círculo alrededor de un eje a una distancia R del eje. Si multiplicamos el momento de inercia para la rotación alrededor de un eje paralelo al centro de masa por la aceleración angular, obtenemos

$$I\alpha = (R^2 M)\alpha = RM(R\alpha) = RMa = RF_{\text{neto}}.$$

Para obtener este resultado, primero usamos la ecuación 10.11 con $c = 1$; luego la relación entre aceleración angular y lineal para movimiento circular, y también la segunda ley de Newton. Así, el producto del momento de inercia y la aceleración angular es proporcional al producto de una cantidad de distancia y de una cantidad de fuerza. En la sección 10.4 vimos que este producto es el momento de torsión, τ . Así, podemos escribir la siguiente forma de la segunda ley de Newton para el movimiento de rotación:

$$\tau = I\alpha. \tag{10.18}$$

Al combinar las ecuaciones 10.16 y 10.18, obtenemos

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}_{\text{neto}} = I\vec{\alpha}. \tag{10.19}$$

Esta ecuación para movimiento rotacional es análoga a la segunda ley de Newton, $\vec{F} = m\vec{a}$, para movimiento lineal. La figura 10.19 muestra la relación entre fuerza, posición, momento de torsión y aceleración angular para una partícula puntual que se mueve alrededor de un eje de rotación. Observe que, estrictamente hablando, la ecuación 10.19 es válida sólo para una partícula puntual en órbita circular. Parece razonable que esta ecuación sea válida para un momento de inercia para un objeto extenso en general, pero no lo hemos probado. Más adelante en este capítulo regresaremos a esta ecuación.

La primera ley de Newton estipula que en ausencia de una fuerza neta, un objeto no experimenta ninguna aceleración ni, por lo tanto, ningún cambio en la velocidad. El equivalente de la primera ley de Newton rotacional es que un objeto que no experimenta ningún momento de torsión no tiene ninguna aceleración angular ni ningún cambio en la velocidad angular. En particular, esto significa que, para objetos que permanecen estacionarios, el momento de torsión neto sobre ellos tiene que ser cero. Volveremos a esta afirmación en el capítulo 11, donde investigamos el equilibrio estático.

Ahora, sin embargo, podemos usar la forma rotacional de la segunda ley de Newton (ecuación 10.19) para resolver problemas interesantes de movimiento de rotación, tales como el siguiente.

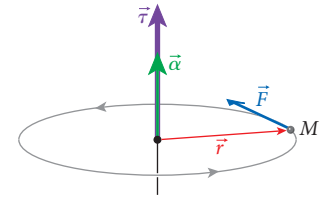


FIGURA 10.19 Una fuerza ejercida sobre una partícula puntual crea un momento de torsión.

EJEMPLO 10.3 Papel higiénico

Esto puede haberle sucedido: usted está tratando de poner un rollo nuevo de papel higiénico en el portarrollos. Sin embargo, usted deja caer el rollo, logrando sostener sólo la primera hoja. En su camino al suelo, el rollo se desenrolla, como lo muestra la figura 10.20a).

PROBLEMA

¿Cuánto tarda el rollo de papel higiénico en llegar al suelo, si se soltó desde una altura de 0.73 m? El rollo tiene un diámetro interior $R_1 = 2.7$ cm, un radio exterior $R_2 = 6.1$ cm y una masa de 274 g.

SOLUCIÓN

Para el rollo que cae, la aceleración es $a_y = -g$, y en el capítulo 2 vimos que, para caída libre desde el reposo, la posición como función del tiempo está dada en general como $y = y_0 + v_0t - \frac{1}{2}gt^2$. En este caso, la velocidad inicial es cero; por lo tanto, $y = y_0 - \frac{1}{2}gt^2$. Si ponemos el origen a nivel del suelo, entonces tenemos que encontrar el tiempo en que $y = 0$. Esto implica que $y_0 = \frac{1}{2}gt^2$ durante el tiempo que tarda el rollo en tocar el piso. Por lo tanto, el tiempo que tardaría el rollo en caída libre en tocar el piso es

$$t_{\text{caída libre}} = \sqrt{\frac{2y_0}{g}} = \sqrt{\frac{2(0.73 \text{ m})}{9.81 \text{ m/s}^2}} = 0.386 \text{ s.} \tag{i}$$

Sin embargo, como usted sostiene la primera hoja y el papel se desenrolla durante su descenso, el rollo de papel higiénico está rodando sin deslizarse (en el sentido en que se describió antes). Por lo tanto, la aceleración será diferente del caso de caída libre. Una vez que sabemos el valor de esta aceleración, podemos usar una fórmula que relaciona la altura inicial y el tiempo de caída, similar a la ecuación (i).

¿Cómo calculamos la aceleración que experimenta el papel higiénico? Nuevamente, comenzamos con un diagrama de cuerpo libre. La figura 10.20b) muestra el rollo en vista lateral e indica las fuerzas debidas a la gravedad, $\vec{F}_g = mg(-\hat{y})$, y a la tensión de la hoja que se sostiene en la mano, $\vec{T} = T\hat{y}$. La segunda ley de Newton nos permite entonces relacionar la fuerza neta que actúa sobre el papel con la aceleración del rollo:

$$T - mg = ma_y. \tag{ii}$$

Tanto la tensión como la aceleración son incógnitas, de modo que necesitamos encontrar una segunda ecuación que relacione estas cantidades. Esta segunda ecuación se puede obtener del movimiento de rotación del rollo, para el cual el momento de torsión neto es el producto del momento de inercia y la aceleración angular $\tau = I\alpha$. El momento de inercia del rollo de papel higiénico es el de un cilindro hueco, $I = \frac{1}{2}m(R_1^2 + R_2^2)$, que es la ecuación 10.9.

Podemos nuevamente relacionar las aceleraciones lineal y angular mediante $a_y = R_2\alpha$, donde R_2 es el radio exterior del rollo de papel higiénico. Necesitamos especificar la dirección

(continúa)

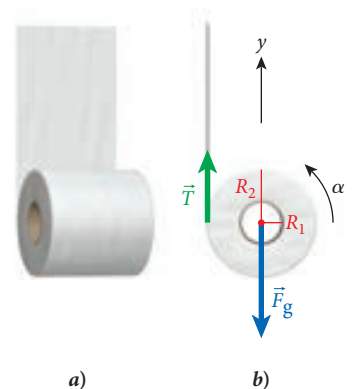


FIGURA 10.20 a) Papel higiénico desenrollándose. b) Diagrama de cuerpo libre del rollo de papel higiénico.

(continuación)

positiva para la aceleración angular; de otra manera, podríamos tomar el signo equivocado y así obtener un resultado falso. Para ser congruentes con la selección hacia arriba como la dirección y positiva, necesitamos seleccionar la rotación antihoraria como la dirección angular positiva, como se indica en la figura 10.20*b*).

Para el momento de torsión alrededor del eje de simetría del rollo de papel higiénico, tenemos $\tau = -R_2T$, con la convención de signo para aceleración angular positiva que acabamos de establecer. La fuerza de gravedad no contribuye al momento de torsión alrededor del eje de simetría, porque su brazo de palanca es nulo. La segunda ley de Newton para el movimiento rotacional nos lleva entonces a

$$\begin{aligned} \tau &= I\alpha \\ -R_2T &= \left[\frac{1}{2}m(R_1^2 + R_2^2) \right] \frac{a_y}{R_2} \\ -T &= \frac{1}{2}m \left(1 + \frac{R_1^2}{R_2^2} \right) a_y. \end{aligned} \tag{iii}$$

Las ecuaciones (ii) y (iii) forman un sistema de dos ecuaciones para las dos incógnitas T y a . Sumándolas obtenemos

$$-mg = \frac{1}{2}m \left(1 + \frac{R_1^2}{R_2^2} \right) a_y + ma_y.$$

La masa del rollo de papel higiénico se cancela, y encontramos para la aceleración

$$a_y = -\frac{g}{\frac{3}{2} + \frac{R_1^2}{2R_2^2}}.$$

Usando los valores dados para el radio interior, $R_1 = 2.7$ cm, y el radio exterior, $R_2 = 6.1$ cm, encontramos el valor de la aceleración:

$$a_y = -\frac{9.81 \text{ m/s}^2}{\frac{3}{2} + \frac{(2.7 \text{ cm})^2}{2(6.1 \text{ cm})^2}} = -6.14 \text{ m/s}^2.$$

Al sustituir el valor para la aceleración en una fórmula para el tiempo de caída que es análoga a la ecuación (i), obtenemos nuestra respuesta

$$t = \sqrt{\frac{2y_0}{-a_y}} = \sqrt{\frac{2(0.73 \text{ m})}{6.14 \text{ m/s}^2}} = 0.488 \text{ s}.$$

Éste es aproximadamente 0.1 s más largo que el tiempo para el rollo de papel higiénico en caída libre soltado desde la misma altura.

EXPLICACIÓN

Observe que supusimos que el radio exterior del rollo de papel higiénico no cambiaba al desenrollarse el papel. Para la corta distancia, de menos de 1 m, esto se justifica. Sin embargo, si quisiéramos calcular cuánto tardó el papel en desenrollarse en una distancia, digamos, de 10 m, necesitaríamos tomar en cuenta el cambio en el diámetro exterior. ¡Por supuesto, entonces tendríamos también que tomar en cuenta el efecto de la resistencia del aire!

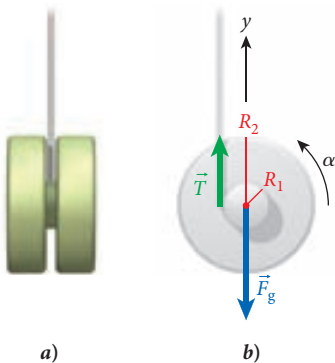


FIGURA 10.21 a) Yoyo. b) Diagrama de cuerpo libre del yoyo.

Como extensión del ejemplo 10.3, podemos considerar un yoyo. Un yoyo está formado por dos discos macizos de radio R_2 , con un disco delgado más pequeño de radio R_1 montado entre ellos, y una cuerda devanada alrededor del disco más pequeño (vea la figura 10.21). Para el propósito de este análisis, podemos considerar el momento de inercia del yoyo como el de un disco macizo con radio R_2 : $I = \frac{1}{2}mR_2^2$. Los diagramas de cuerpo libre de la figura 10.20*b*) y la figura 10.21*b*) son casi idénticos, salvo por un detalle: para el yoyo, la tensión de la cuerda actúa sobre la

superficie en el radio interior R_1 , en oposición del radio exterior R_2 , como era el caso del rollo de papel higiénico. Esto implica que las aceleraciones angular y lineal para el yoyó son proporcionales entre sí, con constante de proporcionalidad R_1 (en vez de R_2 como para el rollo). Así, el momento de torsión para el yoyó rodando sin deslizarse a lo largo de la cuerda es

$$\tau = I\alpha \Rightarrow -TR_1 = \left(\frac{1}{2}mR_2^2\right)\frac{a_y}{R_1}$$

$$-T = \frac{1}{2}m\frac{R_2^2}{R_1^2}a_y.$$

Es instructivo comparar esta ecuación con $-T = \frac{1}{2}m(1 + R_1^2/R_2^2)a_y$, que dedujimos en el ejemplo 10.3 para el rollo de papel higiénico. Parecen muy similares, pero la relación de los radios es diferente. Por otro lado, la ecuación derivada de la segunda ley de Newton (para la traslación) es la misma en ambos casos:

$$T - mg = ma_y.$$

Al sumar esta ecuación y la ecuación para el momento de torsión del yoyó da la aceleración del juguete:

$$-mg = ma_y + \frac{1}{2}m\frac{R_2^2}{R_1^2}a_y \Rightarrow$$

$$a_y = -\frac{g}{1 + \frac{1}{2}\frac{R_2^2}{R_1^2}} = -\frac{2R_1^2}{2R_1^2 + R_2^2}g.$$

Por ejemplo, si $R_2 = 5R_1$, la aceleración del yoyó es

$$a_y = \frac{-g}{1 + \frac{1}{2}(25)} = \frac{-g}{13.5} = -0.727 \text{ m/s}^2.$$

Máquina de Atwood

El capítulo 4 presentó una máquina de Atwood, la cual consiste en dos pesos con masas m_1 y m_2 conectadas por una cuerda o soga, guiada sobre una polea. Las máquinas que analizamos en el capítulo 4 estaban sujetas a la condición de que la cuerda se desliza sin fricción por la polea, de modo que la polea no gira (o, equivalentemente, que la polea no tiene masa). En tales casos, la aceleración común de las dos masas es $a = g(m_1 - m_2)/(m_1 + m_2)$. Con los conceptos de dinámica de rotación podemos dar otra mirada a la máquina de Atwood y considerar el caso en el que hay fricción entre la cuerda y la polea, haciendo que la cuerda haga girar la polea sin deslizarse.

En el capítulo 4 vimos que la magnitud de la tensión, T , es la misma en todas partes de una cuerda. Sin embargo, ahora entran en juego las fuerzas de fricción para mantener la cuerda unida a la polea, y no podemos suponer que la tensión es constante. En vez de esto, la tensión de la cuerda se separa en cada segmento de la cuerda del que cuelga una de las dos masas. Así, hay dos tensiones diferentes de la cuerda, T_1 y T_2 , en los diagramas de cuerpo libre para las dos masas [como se muestra en la figura 10.22b)]. Igual que en el capítulo 4, aplicando individualmente la segunda ley de Newton a cada diagrama de cuerpo libre da por resultado

$$-T_1 + m_1g = m_1a \quad (10.20)$$

$$T_2 - m_2g = m_2a. \quad (10.21)$$

Aquí usamos nuevamente la convención (arbitraria) de signos de que una aceleración positiva ($a > 0$) es aquella para la que m_1 se mueve hacia abajo y m_2 hacia arriba. Esta convención se indica en los diagramas de cuerpo libre por la dirección del eje y positivo.

La figura 10.22b) también muestra un diagrama de cuerpo libre para la polea, pero incluye sólo las fuerzas que pueden causar un momento de torsión: las dos tensiones de la cuerda, T_1 y T_2 . No se muestra ni la fuerza descendente de la gravedad ni la fuerza ascendente de la estructura de soporte sobre la polea. La polea no tiene movimiento de traslación, de modo que todas las fuerzas que actúan sobre la polea suman cero. Sin embargo, un momento de torsión neto actúa sobre la

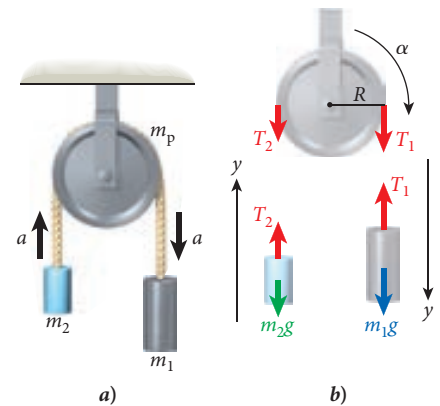


FIGURA 10.22 Máquina de Atwood: a) configuración física; b) diagramas de cuerpo libre.

polea. De acuerdo con la ecuación 10.17, la magnitud del momento de torsión debido a las tensiones de la cuerda está dado por

$$\tau = \tau_1 - \tau_2 = RT_1 \text{ sen } 90^\circ - RT_2 \text{ sen } 90^\circ = R(T_1 - T_2). \quad (10.22)$$

Estos dos momentos de torsión tienen signos opuestos, porque uno actúa en sentido horario y el otro en sentido antihorario. De acuerdo con la ecuación 10.18, el momento de torsión neto está relacionado con el momento de inercia de la polea y su aceleración angular mediante $\tau = I\alpha$. El momento de inercia de la polea (masa de m_p) es el de un disco: $I = \frac{1}{2}m_p R^2$. Como la cuerda se mueve por la polea sin deslizarse, la aceleración de la cuerda (y de las masas m_1 y m_2) se relaciona con la aceleración angular mediante $\alpha = a/R$, igual que la correspondencia que se estableció en el capítulo 9 entre aceleración lineal y angular para una partícula puntual moviéndose en una circunferencia. Al sustituir las expresiones para el momento de inercia y la aceleración angular da por resultado $\tau = I\alpha = (\frac{1}{2}m_p R^2)(a/R)$. Al sustituir el momento de torsión en la ecuación 10.22 por esta expresión, encontramos

$$R(T_1 - T_2) = \tau = \left(\frac{1}{2}m_p R^2\right)\left(\frac{a}{R}\right) \Rightarrow \\ T_1 - T_2 = \frac{1}{2}m_p a. \quad (10.23)$$

Las ecuaciones 10.20, 10.21 y 10.23 forman un sistema de tres ecuaciones para tres incógnitas: los dos valores de la tensión en la cuerda, T_1 y T_2 , y la aceleración, a . La manera más fácil de despejar la aceleración de este sistema es sumar las ecuaciones. Entonces encontramos

$$m_1 g - m_2 g = (m_1 + m_2 + \frac{1}{2}m_p)a \Rightarrow \\ a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}m_p} g. \quad (10.24)$$

Observe que la ecuación 10.24 coincide con la ecuación para el caso de una polea sin masa (o el caso en que la cuerda se desliza sobre la polea sin fricción), salvo por el término adicional de $\frac{1}{2}m_p$ en el denominador, que representa el aporte de la polea a la inercia total del sistema. El factor $\frac{1}{2}$ refleja la forma de la polea, un disco, porque $c = \frac{1}{2}$ para un disco en la relación entre momento de inercia, masa y radio (ecuación 10.11).

Así, hemos respondido la pregunta sobre lo que sucede cuando se ejerce una fuerza sobre un cuerpo extenso a cierta distancia de su centro de masa: la fuerza produce un momento de torsión, así como movimiento lineal. Este momento de torsión causa rotación, lo cual hemos dejado fuera de nuestras consideraciones originales al suponer que todas las fuerzas actuaban sobre el centro de masa del objeto.

10.6 Trabajo de un momento de torsión

En el capítulo 5 vimos que el trabajo W realizado por una fuerza \vec{F} está dado por la integral

$$W = \int_{x_0}^x F_x(x') dx'.$$

Ahora podemos considerar el trabajo realizado por un momento de torsión $\vec{\tau}$.

El momento de torsión es el equivalente angular de la fuerza. El equivalente angular del desplazamiento lineal, $d\vec{r}$, es el desplazamiento angular, $d\vec{\theta}$. Como tanto el momento de torsión como el desplazamiento angular son vectores axiales y señalan en la dirección del eje de rotación, podemos escribir su producto escalar como $\vec{\tau} \cdot d\vec{\theta} = \tau d\theta$. Por lo tanto, el trabajo realizado por un momento de torsión es

$$W = \int_{\theta_0}^{\theta} \tau(\theta') d\theta'. \quad (10.25)$$

Para el caso especial en el que el momento de torsión es constante y, por lo tanto, no depende de θ , la integral de la ecuación 10.25 simplemente se evalúa a

$$W = \tau(\theta - \theta_0). \quad (10.26)$$

El capítulo 5 también presentó la primera versión del teorema del trabajo y la energía cinética: $\Delta K \equiv K - K_0 = W$. El equivalente en rotación de esta relación entre trabajo y energía cinética se puede escribir con la ayuda de la ecuación 10.3, como sigue:

$$\Delta K \equiv K - K_0 = \frac{1}{2}I\omega^2 - \frac{1}{2}I\omega_0^2 = W. \quad (10.27)$$

Para el caso de un momento de torsión constante, podemos usar la ecuación 10.26 y encontrar el teorema del trabajo y la energía cinética para el momento de torsión constante:

$$\frac{1}{2}I\omega^2 - \frac{1}{2}I\omega_0^2 = \tau(\theta - \theta_0). \quad (10.28)$$

EJEMPLO 10.4 Ajuste de un perno

PROBLEMA

¿Cuál es el trabajo total necesario para apretar por completo el perno que se muestra en la figura 10.23? El número total de vueltas es de 30.5; el diámetro del perno es de 0.860 cm, y la fuerza de fricción entre la tuerca y el perno es una constante de 14.5 N.

SOLUCIÓN

Como la fuerza de fricción es constante y el diámetro del perno es constante, podemos calcular directamente el momento de torsión necesario para dar vuelta a la tuerca:

$$\tau = Fr = \frac{1}{2}Fd = \frac{1}{2}(14.5 \text{ N})(0.860 \text{ cm}) = 0.0623 \text{ N m}.$$

A fin de calcular el trabajo total necesario para apretar por completo el perno, necesitamos calcular el ángulo total. Cada vuelta corresponde a un ángulo de 2π rad, de modo que el ángulo total en este caso es $\Delta\theta = 30.5(2\pi) = 191.6$ rad.

El trabajo total necesario se obtiene entonces usando la ecuación 10.26:

$$W = \tau\Delta\theta = (0.0623 \text{ N m})(191.6) = 11.9 \text{ J}.$$



FIGURA 10.23 Ajuste de un perno.

Como usted puede ver, calcular el trabajo realizado no es muy difícil con el momento de torsión constante. Sin embargo, en muchas situaciones físicas, el momento de torsión no se puede considerar como constante. El siguiente ejemplo ilustra un caso así.

EJEMPLO 10.5 Atornillando un tornillo

La fuerza de fricción entre un tornillo para yeso y la madera es proporcional al área de contacto entre el tornillo y la madera. Como el tornillo para yeso tiene un diámetro constante, esto significa que el momento de torsión necesario para dar vuelta al tornillo aumenta linealmente con la profundidad que el tornillo ha penetrado en la madera.

PROBLEMA

Suponga que se necesitan 27.3 vueltas para atornillar por completo un tornillo para yeso en un bloque de madera (figura 10.24). El momento de torsión necesario para hacer girar el tornillo aumenta linealmente desde cero al principio, hasta un máximo de 12.4 N m al final. ¿Cuál es el trabajo total necesario para atornillar el tornillo?

SOLUCIÓN

Es claro que el momento de torsión es función del ángulo en esta situación, ya no es constante. Así, tenemos que usar la integral de la ecuación 10.25 para encontrar nuestra respuesta. Primero, calculemos el ángulo total, θ_{total} , que gira el tornillo: $\theta_{\text{total}} = 27.3(2\pi) = 171.5$ rad. Ahora necesitamos encontrar una expresión para $\tau(\theta)$. Un aumento lineal proporcional a θ desde cero a 12.4 N m significa

$$\tau(\theta) = \theta \frac{\tau_{\text{máx}}}{\theta_{\text{total}}} = \theta \frac{12.4 \text{ N m}}{171.5} = \theta(0.0723 \text{ N m}).$$



FIGURA 10.24 Atornillando un tornillo para yeso en un bloque de madera.

(continúa)

10.5 Ejercicio en clase

Si desea reducir el momento de torsión necesario para atornillar un tornillo, usted puede frotar previamente jabón en la rosca del tornillo. Suponga que el jabón reduce el coeficiente de fricción entre el tornillo y la madera por un factor de 2 y, por lo tanto, reduce el momento necesario por un factor de 2. ¿Cuánto cambia el trabajo total necesario para atornillar el tornillo en la madera?

- El trabajo queda igual.
- Se reduce el trabajo por un factor de 2.
- Se reduce el trabajo por un factor de 4.

10.6 Ejercicio en clase

Si se cansa antes de terminar de atornillar el tornillo y se las arregla para atornillarlo sólo a la mitad, ¿cómo cambia esto el trabajo total que usted ha realizado?

- El trabajo queda igual.
- El trabajo se reduce por un factor de 2.
- El trabajo se reduce por un factor de 4.

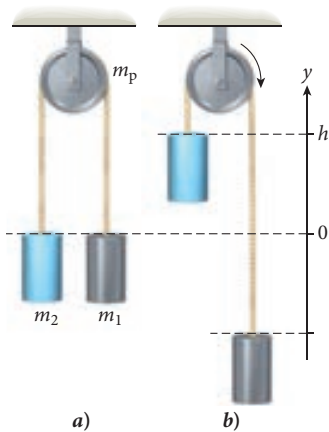


FIGURA 10.25 Otra máquina Atwood. a) posiciones iniciales; b) posiciones después de que las pesas se mueven una distancia h .

(continuación)

Ahora podemos evaluar la integral como sigue:

$$W = \int_0^{\theta_{\text{total}}} \tau(\theta') d\theta' = \int_0^{\theta_{\text{total}}} \theta' \frac{\tau_{\text{máx}}}{\theta_{\text{total}}} d\theta' = \frac{\tau_{\text{máx}}}{\theta_{\text{total}}} \int_0^{\theta_{\text{total}}} \theta' d\theta' = \frac{\tau_{\text{máx}}}{\theta_{\text{total}}} \frac{1}{2} \theta^2 \Big|_0^{\theta_{\text{total}}} = \frac{1}{2} \tau_{\text{máx}} \theta_{\text{total}}$$

Al sustituir los valores, obtenemos

$$W = \frac{1}{2} \tau_{\text{máx}} \theta_{\text{total}} = \frac{1}{2} (12.4 \text{ N m})(171.5 \text{ rad}) = 1.06 \text{ kJ}.$$

PROBLEMA RESUELTO 10.3 Máquina de Atwood

PROBLEMA

Dos pesas con masas $m_1 = 3.00 \text{ kg}$ y $m_2 = 1.40 \text{ kg}$ se conectan mediante una cuerda muy ligera que pasa sin deslizarse sobre una polea (disco macizo) de masa $m_p = 2.30 \text{ kg}$. Las dos masas cuelgan inicialmente a la misma altura y están en reposo. Una vez que se sueltan, la masa más pesada, m_1 , desciende y hace subir a la masa más ligera, m_2 . ¿Qué rapidez tendrá m_2 a la altura $h = 0.16 \text{ m}$?

SOLUCIÓN

PIENSE

Podríamos tratar de calcular la aceleración de las dos masas y luego usar ecuaciones cinemáticas para relacionar esta aceleración con el desplazamiento vertical. Sin embargo, también podemos usar consideraciones de energía, lo cual nos llevará a una solución bastante directa. Inicialmente, las dos masas suspendidas y la polea están en reposo, de modo que la energía cinética total es cero. Podemos elegir un sistema de coordenadas tal que la energía potencial inicial sea cero y, así, la energía total sea cero. Al elevarse una de las masas, gana energía potencial gravitacional, y la otra masa pierde energía potencial. Ambas masas ganan energía cinética de traslación, y la polea gana energía cinética de rotación. Como la energía cinética es proporcional al cuadrado de la rapidez, podemos entonces usar la conservación de la energía para despejar la rapidez.

ESBOCE

La figura 10.25a) muestra el estado inicial de la máquina de Atwood con ambas masas colgantes a la misma altura. Decidimos tomar dicha altura como el origen del eje vertical, asegurando así que la energía potencial inicial y, por lo tanto, la energía total inicial, sea cero. La figura 10.25b) muestra la máquina de Atwood con las masas desplazadas en h .

INVESTIGUE

La ganancia en energía potencial gravitacional para m_2 es $U_2 = m_2gh$. Al mismo tiempo, m_1 desciende la misma distancia, de modo que su energía potencial es $U_1 = -m_1gh$. La energía cinética de m_1 es $K_1 = \frac{1}{2}m_1v^2$, y la energía cinética de m_2 es $K_2 = \frac{1}{2}m_2v^2$. Observe que la misma rapidez, v , se usa en las expresiones de energía para las dos masas. Esta igualdad se asegura porque las conecta una cuerda (suponemos que la cuerda no se estira).

¿Qué sucede con la energía cinética de rotación de la polea? La polea es un disco macizo con un momento de inercia dado por $I = \frac{1}{2}m_pR^2$ y una energía cinética de rotación dada por $K_r = \frac{1}{2}I\omega^2$. Como la cuerda corre sobre la polea sin deslizarse, y también se mueve con la misma rapidez que las dos masas, los puntos en la superficie de la polea también tienen que moverse con esa misma rapidez, v . Igual que para un disco macizo rodante, la rapidez lineal se relaciona con la rapidez angular mediante $\omega R = v$. Así, la energía cinética de rotación de la polea es

$$K_r = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}m_pR^2\right)\omega^2 = \frac{1}{4}m_pR^2\omega^2 = \frac{1}{4}m_pv^2.$$

Ahora podemos escribir la energía total como la suma de las energías potenciales y las energías cinéticas de traslación y rotación. Esta suma total tiene que ser igual a cero, porque ése era el valor inicial de la energía total, y se aplica la conservación de la energía:

$$\begin{aligned} 0 &= U_1 + U_2 + K_1 + K_2 + K_r \\ &= -m_1gh + m_2gh + \frac{1}{2}m_1v^2 + \frac{1}{2}m_2v^2 + \frac{1}{4}m_pv^2. \end{aligned}$$

SIMPLIFIQUE

Podemos recomodar la ecuación anterior para aislar la rapidez, v :

$$(m_1 - m_2)gh = \left(\frac{1}{2}m_1 + \frac{1}{2}m_2 + \frac{1}{4}m_p\right)v^2 \Rightarrow$$

$$v = \sqrt{\frac{2(m_1 - m_2)gh}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}m_p}}. \quad (\text{i})$$

CALCULE

Ahora sustituimos los valores:

$$v = \sqrt{\frac{2(3.00 \text{ kg} - 1.40 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2)(0.16 \text{ m})}{3.00 \text{ kg} + 1.40 \text{ kg} + \frac{1}{2}(2.30 \text{ kg})}} = 0.951312 \text{ m/s}.$$

REDONDEE

El desplazamiento, h , se dio con la menor precisión, con dos dígitos, de modo que redondeamos nuestro resultado a

$$v = 0.95 \text{ m/s}.$$

VUELVA A REVISAR

La aceleración de las masas está dada por la ecuación 10.24, que desarrollamos en la sección 10.5 al explicar la máquina de Atwood:

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}m_p} g. \quad (\text{ii})$$

El capítulo 2 presentó las ecuaciones cinemáticas para movimiento lineal unidimensional. Una de éstas, que relaciona las rapidez inicial y final, el desplazamiento y la aceleración, ahora resulta útil:

$$v^2 = v_0^2 + 2a(y - y_0).$$

Sea $v_0 = 0$ y $y - y_0 = h$. Entonces, al sustituir la expresión para a de la ecuación (ii), nos lleva a nuestro resultado

$$v^2 = 2ah = 2 \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}m_p} gh \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2(m_1 - m_2)gh}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}m_p}}.$$

Esta ecuación para la rapidez es idéntica a la ecuación (i), que obtuvimos usando consideraciones de energía. El esfuerzo que costó desarrollar la ecuación para la aceleración deja claro que el método de la energía es el procedimiento más rápido.

10.7 Momento angular

Aunque hemos explicado los equivalentes en rotación de la masa (momento de inercia), la velocidad (velocidad angular), aceleración (aceleración angular) y fuerza (momento de torsión), no hemos todavía encontrado el análogo en rotación del momento lineal. Como el momento lineal es el producto de la velocidad del objeto y su masa, por analogía, el momento angular debería ser el producto de la velocidad angular y el momento de inercia. En esta sección encontraremos que esta relación es ciertamente verdadera para un objeto extenso con un momento de inercia fijo. Sin embargo, para llegar a esa conclusión, necesitamos partir de una definición de momento angular para una partícula puntual.

Partícula puntual

El **momento angular**, \vec{L} , de una partícula puntual es el producto vectorial de sus vectores de posición y momento:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}. \quad (10.29)$$

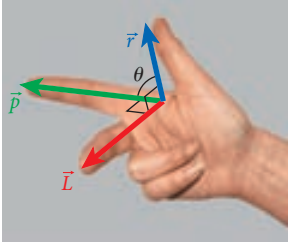


FIGURA 10.26 Regla de la mano derecha para la dirección del vector de momento angular: el pulgar está alineado con el vector de posición, y el índice con el vector de momento; entonces, el vector de momento angular señala a lo largo del dedo medio.

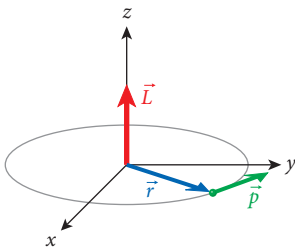


FIGURA 10.27 El momento angular de una partícula puntual.

Como el momento angular se define como $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ y el momento de torsión se define como $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$, se pueden hacer afirmaciones sobre el momento angular similares a las que se hicieron acerca del momento de torsión en la sección 10.4. Por ejemplo, la magnitud del momento angular está dada por

$$L = rp \text{ sen } \theta, \tag{10.30}$$

donde θ es el ángulo entre los vectores de posición y de momento. Asimismo, igual que la dirección del vector de momento de torsión, la dirección del vector de momento angular está dada por una regla de mano derecha. Si el pulgar de la mano derecha señala a lo largo del vector de posición, \vec{r} , de una partícula puntual y el índice señala a lo largo del vector de momento, \vec{p} , entonces el dedo medio indicará la dirección del vector de momento angular \vec{L} (figura 10.26). Como ejemplo, en la figura 10.27 se ilustra el vector de momento angular de una partícula puntual ubicada en el plano xy .

Con la definición del momento angular de la ecuación 10.29, podemos tomar la derivada con respecto al tiempo:

$$\frac{d}{dt} \vec{L} = \frac{d}{dt} (\vec{r} \times \vec{p}) = \left[\left(\frac{d}{dt} \vec{r} \right) \times \vec{p} \right] + \left[\vec{r} \times \left(\frac{d}{dt} \vec{p} \right) \right] = (\vec{v} \times \vec{p}) + (\vec{r} \times \vec{F}).$$

Para tomar la derivada del producto vectorial, aplicamos la regla de los productos del cálculo diferencial e integral. El término $\vec{v} \times \vec{p}$ es siempre cero, porque $\vec{v} \parallel \vec{p}$. Asimismo, por la ecuación 10.16, sabemos que $\vec{r} \times \vec{F} = \vec{\tau}$. Así, obtenemos para la derivada con respecto al tiempo del vector de momento angular:

$$\frac{d}{dt} \vec{L} = \vec{\tau}. \tag{10.31}$$

La derivada con respecto al tiempo del vector de momento angular para una partícula puntual es el vector de momento de torsión actuando en dicha partícula puntual. El resultado es, nuevamente, análogo al caso de movimiento lineal, donde la derivada con respecto al tiempo del vector de momento lineal es igual al vector fuerza.

El producto vectorial nos permite volver a ver la relación entre el vector de velocidad lineal, el vector de coordenada y el vector de velocidad angular, que se introdujo en el capítulo 9. Para el movimiento circular, las magnitudes de dichos vectores se relacionan mediante $\omega = v/r$, y la dirección de $\vec{\omega}$ está dada por una regla de mano derecha. Al usar la definición del producto vectorial, podemos escribir $\vec{\omega}$ como

$$\vec{\omega} = \frac{\vec{r} \times \vec{v}}{r^2}. \tag{10.32}$$

Al comparar las ecuaciones 10.29 y 10.32, se encuentra que los vectores de momento angular y de velocidad angular para una partícula puntual son paralelos, con

$$\vec{L} = \vec{\omega} \cdot (mr^2). \tag{10.33}$$

La cantidad mr^2 es el momento de inercia de una partícula puntual que gira en órbita alrededor del eje de rotación a una distancia r .

Sistema de partículas

Es fácil generalizar el concepto de momento angular a un sistema de n partículas puntuales. El momento angular total del sistema de partículas es simplemente la suma de los momentos angulares de las partículas individuales:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^n \vec{L}_i = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i. \tag{10.34}$$

De nuevo tomamos la derivada con respecto al tiempo de esta suma de momentos angulares con objeto de obtener la relación entre el momento angular total de este sistema y el momento de torsión:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \vec{L} &= \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n \vec{L}_i = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt} (\vec{r}_i \times \vec{p}_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \underbrace{\left(\frac{d}{dt} \vec{r}_i \right)}_{\text{Es igual a } \vec{v}_i} \times \vec{p}_i + \vec{r}_i \times \underbrace{\left(\frac{d}{dt} \vec{p}_i \right)}_{\vec{F}_i} = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum_{i=1}^n \vec{\tau}_i = \vec{\tau}_{\text{neta}}. \end{aligned}$$

Igual a cero, porque $\vec{v}_i \parallel \vec{p}_i$

Como se esperaba, encontramos que la derivada con respecto al tiempo del momento angular total para un sistema de partículas está dada por el momento de torsión total neto externo que actúa sobre el sistema. Es importante recordar que éste es el momento de torsión neto *externo*, debido a las fuerzas *externas*, \vec{F}_i .

Cuerpos rígidos

Un cuerpo rígido girará alrededor de un eje fijo con una velocidad angular $\vec{\omega}$ que es la misma para cada parte del cuerpo. En este caso, el momento angular es proporcional a la velocidad angular, y la constante de proporcionalidad es el momento de inercia:

$$\vec{L} = I\vec{\omega}. \tag{10.35}$$

DEDUCCIÓN 10.4

Momento angular de un cuerpo rígido

Representar el cuerpo rígido como un conjunto de partículas puntuales nos permite usar los resultados de la subsección anterior como punto de partida. Para que las partículas puntuales representen el cuerpo rígido, sus distancias relativas mutuas deben permanecer constantes (cuerpo rígido). Entonces todas estas partículas puntuales giran con una velocidad angular constante, $\vec{\omega}$, alrededor del eje de rotación común.

De la ecuación 10.34, obtenemos

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^n \vec{L}_i = \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i = \sum_{i=1}^n m_i r_{i\perp}^2 \vec{\omega}.$$

En el último paso, usamos la relación entre la velocidad angular y el producto vectorial de los vectores de posición y de velocidad lineal para partículas puntuales, ecuación 10.32, donde $r_{i\perp}$ es el radio orbital de la partícula puntual i . Observe que el vector de velocidad angular es el mismo para todas las partículas puntuales en este cuerpo rígido. Por lo tanto, podemos sacarlo de la suma como factor común:

$$\vec{L} = \vec{\omega} \sum_{i=1}^n m_i r_{i\perp}^2.$$

Podemos identificar esta suma como el momento de inercia de un conjunto de partículas puntuales; vea la ecuación 10.4. Así, tenemos finalmente nuestro resultado:

$$\vec{L} = I\vec{\omega}.$$

Para cuerpos rígidos, igual que para partículas puntuales, la dirección del vector de momento angular es la misma que la dirección del vector de velocidad angular. La figura 10.28 muestra la regla de mano derecha que se usa para determinar la dirección del vector de momento angular (la flecha a lo largo de la dirección del pulgar) como función del sentido de rotación (dirección de los otros dedos).

EJEMPLO 10.6

Pelota de golf

PROBLEMA

¿Cuál es la magnitud del momento angular de una pelota de golf ($m = 4.59 \cdot 10^{-2}$ kg, $R = 2.13 \cdot 10^{-2}$ m) que gira a 4 250 rpm (revoluciones por minuto) después de un buen golpe con un *driver*?

SOLUCIÓN

Primero, necesitamos encontrar la velocidad angular de la pelota, para lo cual necesitamos usar los conceptos que se introdujeron en el capítulo 9.

$$\omega = 2\pi f = 2\pi(4\,250 \text{ min}^{-1}) = 2\pi(4\,250/60 \text{ s}^{-1}) = 445.0 \text{ rad/s}.$$

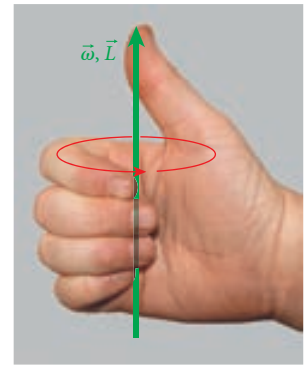
El momento de inercia de la pelota es:

$$I = \frac{2}{5}mR^2 = 0.4(4.59 \cdot 10^{-2} \text{ kg})(2.13 \cdot 10^{-2} \text{ m})^2 = 8.33 \cdot 10^{-6} \text{ kg m}^2.$$

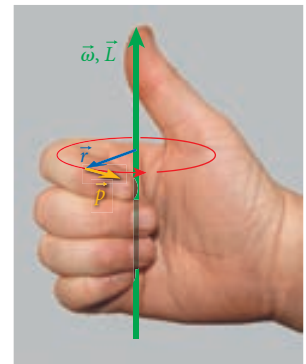
(continúa)

10.3 Oportunidad de autoexamen

¿Puede usted demostrar que los momentos de torsión internos (los que se deben a fuerzas internas entre partículas en un sistema) no contribuyen al momento de torsión total neto? (*Pista:* Use la tercera ley de Newton, $\vec{F}_{i \rightarrow j} = -\vec{F}_{j \rightarrow i}$.)



a)



b)

FIGURA 10.28 a) Regla de la mano derecha para la dirección del momento angular (a lo largo del pulgar) como función de la dirección de rotación (a lo largo de los otros dedos). b) Los vectores de momento y posición de una partícula puntual en movimiento circular.

(continuación)

Entonces, la magnitud del momento angular de la pelota es simplemente el producto de estos dos números:

$$L = (8.33 \cdot 10^{-6} \text{ kg m}^2)(445.0 \text{ s}^{-1}) = 3.71 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}.$$

Al usar la ecuación 10.35 para el momento angular de un cuerpo rígido, podemos demostrar que todavía es válida la relación entre la rapidez de cambio del momento angular y el momento de torsión. Al tomar la derivada con respecto al tiempo de la ecuación 10.35 y suponiendo un cuerpo rígido cuyo momento de inercia es constante en el tiempo, obtenemos

$$\frac{d}{dt} \vec{L} = \frac{d}{dt} (I\vec{\omega}) = I \frac{d}{dt} \vec{\omega} = I\vec{\alpha} = \vec{\tau}_{\text{neto}}. \quad (10.36)$$

Observe la adición del subíndice “neto” al símbolo del momento de torsión, indicando que esta ecuación también es válida si están presentes diferentes momentos de torsión. Antes se dijo que la ecuación 10.19 era válida sólo para una partícula puntual. Sin embargo, la ecuación 10.36 muestra claramente que la ecuación 10.19 es válida para cualquier objeto con un momento de inercia fijo (constante en el tiempo).

La derivada con respecto al tiempo del momento angular es igual al momento de torsión, igual que la derivada con respecto al tiempo del momento lineal es igual a la fuerza. La ecuación 10.31 es otra formulación de la segunda ley de Newton, para rotación, y es más general que la ecuación 10.19, porque también incluye el caso de un momento de inercia que no es constante en el tiempo.

Conservación del momento angular

Si el momento de torsión neto externo sobre un sistema es cero, entonces, de acuerdo con la ecuación 10.36, la derivada con respecto al tiempo del momento angular es también cero. Sin embargo, si la derivada con respecto al tiempo de una cantidad es cero, entonces la cantidad es constante en el tiempo. Por lo tanto, podemos escribir la **ley de conservación del momento angular**:

$$\text{Si } \vec{\tau}_{\text{neto}} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{constante} \Rightarrow \vec{L}(t) = \vec{L}(t_0) \equiv \vec{L}_0. \quad (10.37)$$

Ésta es la tercera ley de conservación importante que hemos encontrado. Las dos primeras se aplicaban a la energía mecánica (capítulo 6) y al momento lineal (capítulo 7). Como las otras leyes de conservación, ésta se puede usar para resolver problemas que de otra manera serían muy difíciles de abordar.

Si hay varios objetos presentes en un sistema con momento de torsión neto externo cero, la ecuación para conservación del momento angular se vuelve

$$\sum_i \vec{L}_{\text{inicial}} = \sum_i \vec{L}_{\text{final}}. \quad (10.38)$$

Para el caso especial de un cuerpo rígido que gira alrededor de un eje fijo de rotación, encontramos (ya que, en este caso, $\vec{L} = I\vec{\omega}$):

$$I\vec{\omega} = I_0\vec{\omega}_0 \quad (\text{para } \vec{\tau}_{\text{neto}} = 0), \quad (10.39)$$

o, en forma equivalente,

$$\frac{\omega}{\omega_0} = \frac{I_0}{I} \quad (\text{para } \vec{\tau}_{\text{neto}} = 0).$$

Esta ley de conservación es la base para el funcionamiento de los giróscopos (figura 10.29). Los giróscopos son objetos (usualmente discos) que giran alrededor de un eje de simetría a altas velocidades angulares. El eje de rotación puede girar sobre baleros de bolas, casi sin fricción, y el sistema de suspensión puede girar libremente en todas las direcciones. Esta libertad de movimiento asegura que ningún momento de torsión neto externo pueda actuar sobre el giróscopo. Sin momento de torsión, el momento angular del giróscopo permanece constante y, por lo tanto, apunta en la misma dirección, sin importar lo que haga el objeto que soporta al giróscopo. Tanto los aviones como los satélites se apoyan en giróscopos para la navegación. El Telescopio Espacial Hubble, por ejemplo, está equipado con seis giróscopos, tres de los cuales, por lo menos, deben trabajar para permitir que el telescopio se oriente a sí mismo en el espacio.

La ecuación 10.39 también es de importancia en muchos deportes, más notablemente en la gimnasia, clavados de plataforma (figura 10.30) y patinaje artístico. En estos tres deportes, los



FIGURA 10.29 Giróscopos de juguete.

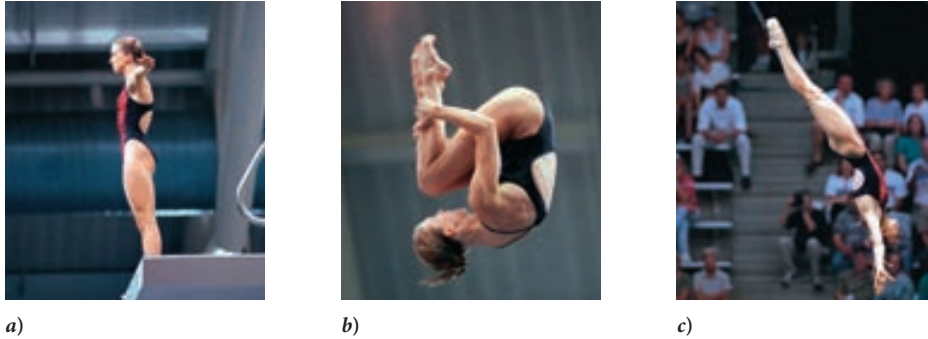


FIGURA 10.30 Laura Wilkinson en la Olimpiada de 2000 en Sidney, Australia. a) Sale de la plataforma de clavados. b) Mantiene la posición replegada. c) Se estira antes de entrar al agua.

atletas reacomodan sus cuerpos y así ajustan sus momentos de inercia para manipular sus frecuencias de rotación. En la figura 10.30 se ilustra el momento cambiante de inercia de una clavadista de plataforma. La clavadista comienza el ejercicio estirada, como se muestra en la figura 10.30a). Luego encoge sus piernas y brazos en una posición replegada, disminuyendo su momento de inercia, como se muestra en la figura 10.30b). Luego da varias vueltas mientras cae. Antes de entrar al agua, estira sus brazos y piernas, aumentando su momento de inercia y disminuyendo su rotación, como se muestra en la figura 10.30c). La retracción de sus brazos y piernas en la posición replegada reduce el momento de inercia de su cuerpo por un factor $I' = I/k$, donde $k > 1$. La conservación del momento angular aumenta entonces la velocidad angular por el mismo factor k : $\omega' = k\omega$. Así, la clavadista puede controlar la rapidez de rotación. El repliegue de los brazos y las piernas puede aumentar la rapidez de rotación, en relación con la rotación en posición estirada, por un factor mayor a 2.

EJEMPLO 10.7 Muerte de una estrella

Al final de la vida de una estrella masiva, con una masa mayor a cinco veces la masa del Sol, el núcleo de la estrella consiste casi por completo en metal hierro. Una vez que se llega a esta etapa, el núcleo se vuelve inestable y se encoge (como se ilustra en la figura 10.31) en un proceso que dura sólo alrededor de un segundo y es la fase inicial de una explosión de supernova. Se cree que las explosiones de supernova, que se cuentan entre los eventos liberadores de energía más potentes del universo, y son el origen de la mayoría de los elementos más pesados que el hierro. La explosión arroja al espacio residuos, que incluyen los elementos más pesados, y puede dejar atrás una estrella de neutrones, que consiste en un material estelar comprimido a una densidad millones de veces mayor que las densidades más altas que se encuentran en la Tierra.

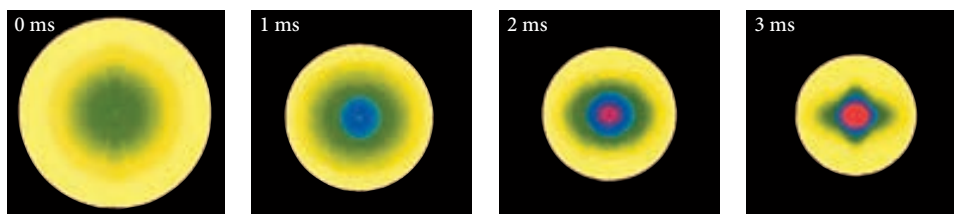


FIGURA 10.31 Simulación en computadora de las etapas iniciales del colapso del núcleo de una estrella masiva. Los diferentes colores representan la densidad cambiante del núcleo de la estrella. Aumentando desde amarillo a verde, a azul y a rojo.

PROBLEMA

Si el núcleo de hierro inicialmente gira a 9.00 revoluciones por día, y si su radio disminuye durante el colapso por un factor de 700, ¿cuál es la velocidad angular del núcleo al final del colapso? (La suposición de que el núcleo de hierro tiene una densidad constante no se justifica en realidad. Las simulaciones en computadora muestran que cae exponencialmente en la dirección radial. Sin embargo, las mismas simulaciones muestran que el momento de inercia del núcleo de hierro es aproximadamente proporcional al cuadrado de su radio aún durante el proceso de colapso.)

(continúa)

(continuación)

SOLUCIÓN

Como el colapso del núcleo de hierro sucede bajo la influencia de su propia atracción gravitacional, ningún momento de torsión neto externo actúa sobre el núcleo. Así, de acuerdo con la ecuación 10.31, el momento angular se conserva. Por la ecuación 10.39 obtenemos

$$\frac{\omega}{\omega_0} = \frac{I_0}{I} = \frac{R_0^2}{R^2} = 700^2 = 4.90 \cdot 10^5.$$

Con $\omega_0 = 2\pi f_0 = 2\pi[(9 \text{ rev})/(24 \cdot 3600 \text{ s})] = 6.55 \cdot 10^{-4} \text{ rad/s}$, obtenemos la magnitud de la velocidad angular final:

$$\omega = 4.90 \cdot 10^5 \omega_0 = 4.90 \cdot 10^5 (6.55 \cdot 10^{-4} \text{ rad/s}) = 321 \text{ rad/s}.$$

Así, la estrella de neutrones que resulta de este encogimiento gira con una frecuencia de rotación de 51.1 rev/s.

EXPLICACIÓN

Los astrónomos pueden observar la rotación de las estrellas de neutrones, que se llaman *pulsares*. Se estima que la rapidez máxima de rotación que puede tener un pulsar cuando se forma a partir de una explosión de supernova de una sola estrella es alrededor de 60 rev/s. Una de las frecuencias de rotación más rápidas que se conocen para un pulsar es

$$f = 716 \text{ rev/s},$$

que corresponde a una rapidez angular de

$$\omega = 2\pi f = 2\pi(716 \text{ s}^{-1}) = 4500 \text{ rad/s}.$$

Las frecuencias de rotación de estos pulsares aumentan después de su formación a partir de un colapso estelar tomando materia de una estrella acompañante con órbita cercana.

El siguiente ejemplo termina la sección con una aplicación actual de ingeniería avanzada, que combina los conceptos de momento de inercia, energía cinética de rotación, momento de torsión y momento angular.

EJEMPLO 10.8 *Flybrid*

El proceso de frenar para disminuir la rapidez de un auto, disminuye la energía cinética del auto y la disipa por la acción de la fuerza de fricción entre las zapatas de los discos y los tambores. Los vehículos híbridos de gasolina-electricidad convierten algo o la mayoría de esta energía cinética en energía eléctrica reutilizable que se almacena en una batería grande. Sin embargo, hay una forma de lograr este almacenamiento de energía sin el uso de una batería grande, esto es almacenando la energía temporalmente en un volante (figura 10.32). Es interesante notar que todos los autos de carreras Fórmula 1 estén equipados con este sistema de almacenamiento de energía, el *flybrid* para el año 2013.

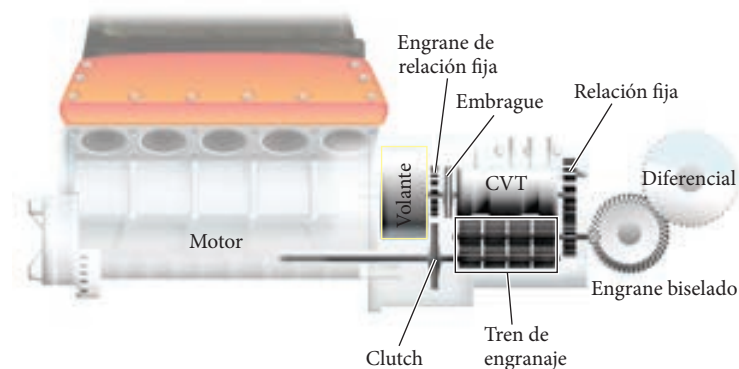


FIGURA 10.32 Diagrama de la integración de un volante en el tren de transmisión de un automóvil.

PROBLEMA

Un volante de carbono metalizado tiene una masa de 5.00 kg, un radio interior de 8.00 cm y un radio exterior de 14.2 cm. Si se supone que almacena 400.0 kJ de energía de rotación, ¿qué tan rápido tiene que girar (en rpm)? Si la energía de rotación se puede almacenar o extraer en 6.67 s, ¿cuánta potencia media y momento de torsión media puede producir este volante durante este intervalo de tiempo?

SOLUCIÓN

El momento de inercia del volante está dado por la ecuación 10.9: $I = \frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2)$. La energía cinética de rotación (ecuación 10.3) es $K = \frac{1}{2}I\omega^2$. Despejamos de esta ecuación la rapidez angular:

$$\omega = \sqrt{\frac{2K}{I}} = \sqrt{\frac{4K}{M(R_1^2 + R_2^2)}}$$

De modo que, para la frecuencia de rotación, encontramos

$$\begin{aligned} f &= \frac{\omega}{2\pi} = \sqrt{\frac{K}{\pi^2 M(R_1^2 + R_2^2)}} \\ &= \sqrt{\frac{400.0 \text{ kJ}}{\pi^2 (5.00 \text{ kg})[(0.0800 \text{ m})^2 + (0.142 \text{ m})^2]}} \\ &= 552 \text{ s}^{-1} = 33 \text{ 100 rpm.} \end{aligned}$$

Como la potencia media está dada por el cambio en energía cinética dividida entre el tiempo (vea el capítulo 5), tenemos:

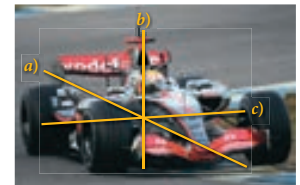
$$P = \frac{\Delta K}{\Delta t} = \frac{400.0 \text{ kJ}}{6.67 \text{ s}} = 60.0 \text{ kW.}$$

Encontramos el momento de torsión medio por la ecuación 10.36, y el hecho de que la aceleración angular media es el cambio en rapidez angular, $\Delta\omega$, dividida entre el intervalo de tiempo, Δt :

$$\begin{aligned} \tau &= I\alpha = I \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2) \frac{1}{\Delta t} \sqrt{\frac{4K}{M(R_1^2 + R_2^2)}} = \frac{1}{\Delta t} \sqrt{M(R_1^2 + R_2^2)K} \\ &= \frac{1}{6.67 \text{ s}} \sqrt{(400.0 \text{ kJ})(5.00 \text{ kg})[(0.0800 \text{ m})^2 + (0.142 \text{ m})^2]} \\ &= 34.6 \text{ N m.} \end{aligned}$$

10.7 Ejercicio en clase

El *flybrid* gira con mayor rapidez cuando el auto Fórmula 1 se mueve con la menor rapidez, mientras toma una vuelta cerrada. Sabiendo que se necesita un momento de torsión para cambiar un vector de momento angular, ¿cómo orientaría usted el eje de rotación del volante para tener el menor impacto sobre la conducción del auto por la curva?



- a) El volante se debe alinear con el eje principal del auto de carreras.
- b) El volante debe ser vertical.
- c) El volante debe alinearse con los ejes de las ruedas.
- d) Da lo mismo; las tres orientaciones son igualmente problemáticas.
- e) Las orientaciones a) y c) son igualmente buenas, y mejores que b).

10.8 Precesión

Los trompos (peones) eran juguetes muy populares cuando los padres o abuelos de usted eran niños. Cuando se ponen en movimiento de rotación rápida, se mantienen verticales sin caer. Lo que es más, si se les inclina en un ángulo respecto a la vertical, todavía no caen. En vez de esto, el eje de rotación se mueve en la superficie de un cono como función del tiempo (figura 10.33). Este movimiento se llama **precesión**. ¿Qué lo causa?

Primero, observamos que un trompo que está girando tiene un vector de momento angular, \vec{L} , que está alineado con su eje de simetría, que señala hacia arriba o hacia abajo, dependiendo de si gira en sentido horario o antihorario (figura 10.34). Como el trompo se inclina, su centro de masa (marcado con un punto negro en la figura 10.34) no está ubicado arriba del punto de contacto con la superficie de apoyo. La fuerza gravitacional que actúa sobre el centro de masa da como resultado, entonces, un momento de torsión, $\vec{\tau}$, respecto del punto de contacto, como se indica en la figura; en este caso, el vector de momento de torsión señala directamente hacia fuera de la página. El vector de posición, \vec{r} , del centro de masa, que ayuda a determinar el momento de torsión, está alineado exactamente con el vector de momento angular. El ángulo del eje de simetría del trompo con respecto a la vertical se llama ϕ en la figura. El ángulo entre el vector de fuerza gravitacional y el vector de posición es entonces $\pi - \phi$ (vea la figura 10.34). Como $\text{sen}(\pi - \phi) = \text{sen } \phi$, podemos escribir la magnitud del momento de torsión como función del ángulo ϕ :

$$\tau = rF \text{ sen } \phi = rmg \text{ sen } \phi.$$

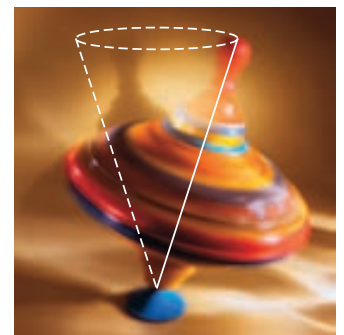


FIGURA 10.33 Un trompo en rotación se puede inclinar con respecto a la vertical, sin caer.

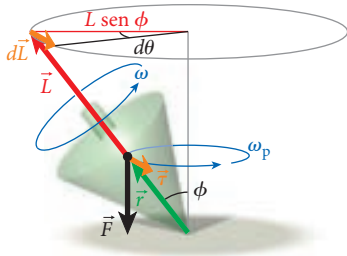


FIGURA 10.34 Precesión de un trompo que gira.

Como $d\vec{L}/dt = \vec{\tau}$, el cambio en el vector de momento angular, $d\vec{L}$, señala en la misma dirección que el momento de torsión, por lo tanto, es perpendicular al vector de momento angular. Este efecto obliga al vector de momento angular a deslizarse por la superficie de un cono de ángulo ϕ como función del tiempo, con la punta del vector de momento angular siguiendo una circunferencia en el plano horizontal, que se muestra en gris en la figura 10.34.

Podemos incluso calcular la magnitud de la velocidad angular, ω_p , para este movimiento de precesión. La figura 10.34 indica que el radio de la circunferencia que describe el vector de momento angular como función del tiempo está dada por $L \text{ sen } \phi$. La magnitud del cambio diferencial en momento angular, dL , es la longitud del arco de esta circunferencia, y se puede calcular como el producto del radio de la circunferencia y el ángulo diferencial que describe el radio, $d\theta$:

$$dL = (L \text{ sen } \phi)d\theta.$$

En consecuencia, para la derivada con respecto al tiempo del momento angular, dL/dt , encontramos:

$$\frac{dL}{dt} = (L \text{ sen } \phi) \frac{d\theta}{dt}.$$

La derivada con respecto al tiempo del ángulo de deflexión, θ , es la velocidad angular de la precesión, ω_p . Como $dL/dt = \tau$, usamos la ecuación anterior y la expresión para el momento de torsión, $\tau = rmg \text{ sen } \phi$, para obtener

$$rmg \text{ sen } \phi = \tau = \frac{dL}{dt} = (L \text{ sen } \phi) \frac{d\theta}{dt} = (L \text{ sen } \phi) \omega_p$$

$$\omega_p = \frac{rmg \text{ sen } \phi}{L \text{ sen } \phi}.$$

Vemos que $\text{sen } \phi$ se cancela en la última expresión, dando $\omega_p = rmg/L$. La frecuencia angular de la precesión es la misma para todos los valores de ϕ , ¡el ángulo de inclinación del eje de rotación! Este resultado puede parecer un poco sorprendente, pero los experimentos verifican que éste es ciertamente el caso. Para el paso final, usamos el hecho de que el momento angular para un objeto rígido, L , es el producto del momento de inercia, I , y la velocidad angular, ω . Así, al sustituir L por $I\omega$ en la expresión para la rapidez angular de precesión, ω_p , obtenemos nuestro resultado final:

$$\omega_p = \frac{rmg}{I\omega}. \tag{10.40}$$

Esta fórmula refleja la interesante propiedad de que la rapidez angular de precesión es inversamente proporcional a la rapidez angular de rotación del trompo. Al disminuir la rapidez del trompo debido a la fricción, su rapidez angular se reduce en forma gradual y, por lo tanto, la rapidez angular de precesión aumenta gradualmente. La precesión más y más rápida hace que el trompo cabecee y finalmente caiga.

10.8 Ejercicio en clase

Estime la rapidez angular de precesión del volante en la figura 10.35.

- a) 0.01 rad/s c) 5 rad/s
- b) 0.6 rad/s d) 10 rad/s

10.4 Oportunidad de autoexamen

El volante que se muestra en la figura 10.35 tiene una masa de 2.5 kg, casi toda concentrada en su borde. Tiene un radio de 22 cm, y la distancia entre el punto de suspensión y el centro de masa es de 5 cm. Estime la rapidez angular con la que gira.

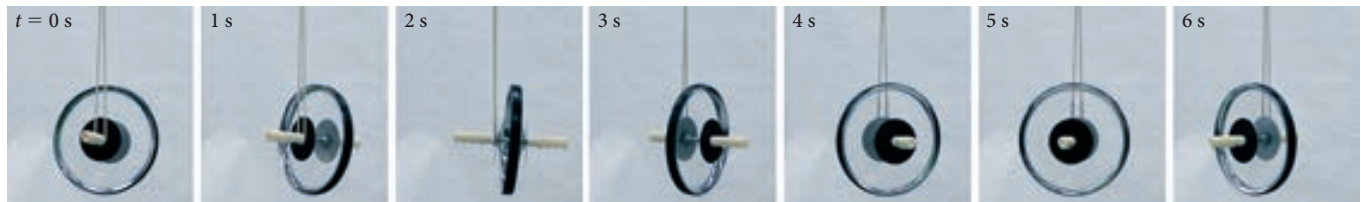


FIGURA 10.35 Precesión de un volante que gira rápidamente suspendido de una cuerda.

La precesión se demuestra en forma impresionante en la secuencia fotográfica de la figura 10.35. Aquí, una rueda que gira rápidamente está suspendida excéntricamente de una cuerda fijada al techo. Como usted puede ver, la rueda no cae, como se esperaría de una rueda en la misma situación que no estuviera girando; pero lentamente entra en precesión alrededor del punto de suspensión.

10.9 Momento angular cuantizado

Para terminar nuestra explicación del momento angular y la rotación, consideremos la cantidad más pequeña de momento angular que puede tener un objeto. Por la definición de momento angular de una partícula puntual (ecuación 10.29), $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ o $L = rp \sin \theta$, podría parecer que no existe tal cantidad más pequeña de momento angular, porque ya sea la distancia al eje de rotación, r , o el momento, p , se pueden reducir por un factor entre 0 y 1, y el correspondiente momento angular se reducirá por el mismo factor.

Sin embargo, para átomos y partículas subatómicas, la noción de un momento angular continuamente variable no se aplica. En vez de esto, se observa un cuanto (o cuántum) de momento angular. Este cuanto de momento angular se llama **constante de Planck**, $h = 6.626 \cdot 10^{-34}$ J s. Muy frecuentemente, la constante de Planck aparece en ecuaciones divididas entre el factor 2π , y los físicos le han dado a este cociente el símbolo \hbar : $\hbar \equiv h/2\pi = 1.055 \cdot 10^{-34}$ J s. Aquí simplemente observamos un hecho asombroso: todas las partículas elementales tienen un momento angular intrínseco, que con frecuencia se llama *spin*, que es ya sea un múltiplo entero ($0, 1\hbar, 2\hbar, \dots$) o un medio múltiplo entero ($\frac{1}{2}\hbar, \frac{3}{2}\hbar, \dots$) del cuanto de Planck del momento angular. De manera asombrosa, los valores de spin enteros o medio enteros de las partículas cambian radicalmente las maneras en que interactúan entre sí. Las partículas con spines de valor entero incluyen los fotones, que son partículas elementales de luz. Las partículas con valores medio enteros de spin incluyen los electrones, los protones y los neutrones, las partículas que constituyen los bloques que conforman la materia.

LO QUE HEMOS APRENDIDO | GUÍA DE ESTUDIO PARA EXAMEN

- La energía cinética de rotación de un objeto está dada por $K = \frac{1}{2}I\omega^2$. Esta relación es válida para partículas puntuales y para objetos macizos o sólidos.
- El momento de inercia para la rotación de un objeto alrededor de un eje que pasa por el centro de masa se define como $I = \int_V r_{\perp}^2 \rho(\vec{r}) dV$, donde r_{\perp} es la distancia perpendicular del elemento de volumen dV al eje de rotación, y $\rho(\vec{r})$ es la densidad de masa.
- Si la densidad de masa es constante, el momento de inercia es $I = \frac{M}{V} \int_V r_{\perp}^2 dV$, donde M es la masa total del objeto en rotación y V es su volumen.
- El momento de inercia de todos los objetos redondos es $I = cMR^2$, con $c \in [0,1]$.
- El teorema de los ejes paralelos establece que el momento de inercia I_{\parallel} , para la rotación alrededor de un eje paralelo al eje que pasa por el centro de masa está dado por $I_{\parallel} = I_{\text{cm}} + Md^2$, donde d es la distancia entre los dos ejes, e I_{cm} es el momento de inercia para la rotación alrededor del eje que pasa por el centro de masa.
- Para un objeto que rueda sin deslizarse, la coordenada del centro de masa, r , y el ángulo de rotación, θ , se relacionan mediante $r = R\theta$, donde R es el radio del objeto.
- La energía cinética de un objeto rodante es la suma de sus energías cinéticas de traslación y de rotación: $K = K_{\text{tras}} + K_{\text{rot}} = \frac{1}{2}mv_{\text{cm}}^2 + \frac{1}{2}I_{\text{cm}}\omega^2 = \frac{1}{2}(1+c)mv_{\text{cm}}^2$, con $c \in [0,1]$ y con c dependiendo de la forma del objeto.
- El momento de torsión se define como el producto vectorial del vector posición y el vector fuerza: $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$.
- El momento angular de una partícula puntual se define como $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$.
- La rapidez de cambio del momento angular es igual al momento de torsión: $\frac{d}{dt}\vec{L} = \vec{\tau}$. Éste es el equivalente rotacional de la segunda ley de Newton.
- Para cuerpos rígidos, el momento angular es $\vec{L} = I\vec{\omega}$, y el momento de torsión es $\vec{\tau} = I\vec{\alpha}$.
- En el caso de que el momento de torsión neto externo sea cero, el momento angular se conserva: $I\vec{\omega} = I_0\vec{\omega}_0$ (para $\vec{\tau}_{\text{neto}} = 0$).
- Las cantidades equivalentes para movimiento lineal y de rotación se resumen en la tabla.

Cantidad	Lineal	Circular	Relación
Desplazamiento	\vec{s}	$\vec{\theta}$	$\vec{s} = r\vec{\theta}$
Velocidad	\vec{v}	$\vec{\omega}$	$\vec{\omega} = \vec{r} \times \vec{v} / r^2$
Aceleración	\vec{a}	$\vec{\alpha}$	$\vec{a} = r\alpha \hat{t} - r\omega^2 \hat{r}$ $a_t = r\alpha$ $a_c = \omega^2 r$
Momento	\vec{p}	\vec{L}	$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$
Masa/momento de inercia	m	I	
Energía cinética	$\frac{1}{2}mv^2$	$\frac{1}{2}I\omega^2$	
Fuerza/momento de torsión	\vec{F}	$\vec{\tau}$	$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$

TÉRMINOS CLAVE

energía cinética de rotación, p. 314	teorema de los ejes paralelos, p. 320	momento de torsión, p. 327	ley de conservación del momento angular, p. 338
eje de rotación, p. 314	movimiento de rodadura, p. 322	producto vectorial, p. 327	precesión, p. 341
momento de inercia, p. 314	brazo de palanca, p. 327	momento de torsión neto, p. 328	constante de Planck, p. 343
		momento angular, p. 335	

NUEVOS SÍMBOLOS Y ECUACIONES

$$I = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2, \text{ momento de inercia de un sistema de partículas}$$

$$I = \int_V r_{\perp}^2 \rho(\vec{r}) dV, \text{ momento de inercia de un objeto extenso}$$

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}, \text{ momento de torsión}$$

$$\tau = rF \sin \theta, \text{ magnitud del momento de torsión}$$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}, \text{ momento angular de una partícula}$$

$$\vec{L} = I\vec{\omega}, \text{ momento angular de un objeto extenso}$$

RESPUESTAS A LAS OPORTUNIDADES DE AUTOEXAMEN

$$10.1 \quad I_{\parallel} = \frac{1}{12} mL^2 + m \left(\frac{L}{2} \right)^2 = mL^2 \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{3} mL^2.$$

10.2 La lata completa de gaseosa no es un objeto sólido y, por lo tanto, no gira como un cilindro sólido. En vez de esto, la mayor parte del líquido que está en su interior no participa en la rotación, incluso cuando la lata llega a la base del plano inclinado. La masa de la lata en sí misma es despreciable en comparación con la masa del líquido que contiene. Por lo tanto, una lata de gaseosa que rueda hacia abajo por un plano inclinado se aproxima a una masa que se desliza hacia abajo por un plano inclinado sin fricción. La constante c que se usa en la ecuación 10.15 es entonces cercana a cero, y así, la lata gana la carrera.

10.3 La tercera ley de Newton dice que las fuerzas internas se dan en pares iguales y opuestos que actúan a lo largo de la línea de separación de cada par de partículas. Por lo tanto, el par de torsión debido a cada par de fuerzas es cero. Sumar los momentos de torsión de todas las fuerzas internas lleva a un momento de torsión interno neto cero.

10.4 Como la masa se concentra en el borde de la rueda, el momento de inercia de la rueda es $I = mR^2$. Con la ayuda de la ecuación 10.40 obtenemos

$$\omega_p = \frac{rmg}{mR^2\omega} = \frac{rg}{R^2\omega} = \frac{(0.05 \text{ m})(9.81 \text{ m/s}^2)}{(0.22 \text{ m})^2(0.6 \text{ rad/s})} = 17 \text{ rad/s}.$$

PRÁCTICA PARA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Lineamientos de problemas resueltos: movimiento de rotación

1. La segunda ley de Newton y el teorema del trabajo y la energía cinética son herramientas poderosas y complementarias para resolver una amplia variedad de problemas en mecánica de rotación. Como lineamiento general, usted debe tratar un enfoque basado en la segunda ley de Newton y diagramas de cuerpo libre cuando el problema incluya el cálculo de una aceleración angular. Un enfoque basado en el teorema del trabajo y la energía cinética es más útil cuando usted necesite calcular una rapidez angular.

2. Muchos conceptos de movimiento de traslación son igualmente válidos para el movimiento de rotación. Por ejemplo, la conservación del momento lineal se aplica cuando no hay presentes fuerzas externas; la conservación del momento angular se aplica cuando no hay momentos de torsión externos. Recuerde las correspondencias entre las cantidades de traslación y de rotación.

3. Es crucial recordar que, en situaciones que incluyen movimiento de rotación, la forma de un objeto es importante. Asegúrese de usar la fórmula correcta para el momento de inercia, que depende de la ubicación del eje de rotación, así como de la geometría del objeto. El momento de torsión también depende de la ubicación del eje de simetría; asegúrese

de ser congruente al calcular momentos de torsión en sentido horario y antihorario.

4. Muchas relaciones para el movimiento de rotación dependen de la geometría de la situación; por ejemplo, la relación de la velocidad lineal de un peso suspendido con la velocidad angular de la cuerda que se mueve sobre una polea. Algunas veces, la geometría de una situación cambia en un problema; por ejemplo, si hay una inercia de rotación diferente entre los puntos inicial y final de una rotación. Asegúrese de entender qué cantidades cambian en el curso de cualquier movimiento de rotación.

5. Muchas situaciones físicas incluyen objetos giratorios que ruedan, con o sin deslizamiento. Si se trata de rodadura sin deslizamiento, usted puede relacionar los desplazamientos, velocidades y aceleraciones lineales y angulares entre sí en puntos del perímetro del objeto rodante.

6. La ley de conservación del momento angular es tan importante para problemas que incluyen movimiento circular o de rotación como la ley de conservación de momento lineal para problemas que incluyen movimiento en línea recta. Pensar en una situación problemática en términos de conservación de momento angular con frecuencia ofrece un camino sencillo hacia una solución, que de otra manera sería difícil de obtener. Pero recuerde que el momento angular sólo se conserva si el momento de torsión externo es cero.

PROBLEMA RESUELTO 10.4 Varilla horizontal en caída

Una varilla delgada de longitud $L = 2.50$ m y masa $m = 3.50$ kg está suspendida horizontalmente por un par de cuerdas verticales fijadas a los extremos (figura 10.36). La cuerda que soporta el extremo B se corta.

PROBLEMA

¿Cuál es la aceleración lineal del extremo B de la varilla inmediatamente después de cortar la cuerda?

SOLUCIÓN

PIENSE

Antes de cortar la cuerda, la varilla está en reposo. Cuando se corta la cuerda que soporta el extremo B , actúa un momento de torsión neto sobre la varilla, con un punto de pivote en el extremo A . Este momento de torsión se debe a la fuerza de la gravedad que actúa sobre la varilla. Podemos considerar la masa de la varilla como concentrada en su centro de masa, que se ubica en $L/2$. El momento de torsión inicial es, por lo tanto, igual al peso de la varilla por el brazo de palanca, que es $L/2$. La aceleración angular inicial que resulta se puede relacionar con la aceleración lineal del extremo B de la varilla.

ESBOCE

La figura 10.37 es un esquema de la varilla después de cortar la cuerda.

INVESTIGUE

Cuando se corta la varilla que soporta el extremo B , el momento de torsión, τ , sobre la varilla, se debe a la fuerza de gravedad, F_g , que actúa sobre la varilla, por el brazo de palanca, $r_{\perp} = L/2$:

$$\tau = r_{\perp} F_g = \left(\frac{L}{2}\right)(mg) = \frac{mgL}{2}. \quad (i)$$

La aceleración angular, α , está dada por

$$\tau = I\alpha, \quad (ii)$$

donde el momento de inercia, I , de la varilla delgada que gira alrededor de A está dado por

$$I = \frac{1}{3}mL^2. \quad (iii)$$

La aceleración lineal, a , del extremo B se puede relacionar con la aceleración angular mediante

$$a = L\alpha, \quad (iv)$$

porque el extremo B de la varilla experimenta movimiento circular cuando la varilla gira en torno del pivote en el extremo A .

SIMPLIFIQUE

Podemos combinar las ecuaciones (i) y (ii) para obtener

$$\tau = I\alpha = \frac{mgL}{2}. \quad (v)$$

Al sustituir I y a en la ecuación (v) por sus expresiones en las ecuaciones (iii) y (iv), obtenemos

$$I\alpha = \left(\frac{1}{3}mL^2\right)\left(\frac{a}{L}\right) = \frac{mgL}{2}.$$

Al dividir para cancelar los factores comunes, obtenemos

$$\frac{a}{3} = \frac{g}{2}$$

o

$$a = 1.5g.$$

CALCULE

Al sustituir el valor numérico para la aceleración de la gravedad obtenemos

$$a = 1.5(9.81 \text{ m/s}^2) = 14.715 \text{ m/s}^2.$$

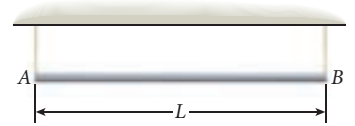


FIGURA 10.36 Una varilla delgada soportada en posición horizontal por una cuerda vertical en cada extremo.

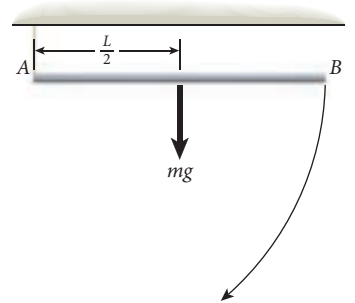


FIGURA 10.37 La varilla delgada inmediatamente después de que se ha cortado la cuerda que soporta el extremo B .

(continúa)

(continuación)

REDONDEE

Al expresar nuestro resultado con tres cifras significativas tenemos

$$a = 14.7 \text{ m/s}^2.$$

VUELVA A REVISAR

Quizás esta respuesta es algo sorprendente, porque usted puede haber supuesto que la aceleración no puede exceder la aceleración de caída libre, g . Si ambas cuerdas se hubiesen cortado al mismo tiempo, la aceleración de toda la varilla habría sido $a = g$. Nuestro resultado de una aceleración inicial del extremo B de $a = 1.5g$ parece razonable porque toda la fuerza de gravedad está actuando sobre la varilla y el extremo A de ésta permanece fijo. Por lo tanto, la aceleración del extremo móvil no se debe sólo a la caída libre; hay una aceleración adicional por la rotación de la varilla.

PREGUNTAS DE OPCIÓN MÚLTIPLE

10.1 Un objeto circular parte del reposo y rueda sin deslizarse hacia abajo por un plano inclinado, por una distancia vertical de 4.0 m. Cuando el objeto llega a la base, su velocidad de traslación es de 7.0 m/s. ¿Cuál es la constante c que relaciona el momento de inercia con la masa y el radio de este objeto (vea la ecuación 10.11)?

- a) 0.80
- b) 0.60
- c) 0.40
- d) 0.20

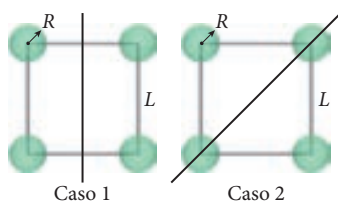
10.2 Dos bolas sólidas de acero, una pequeña y una grande, están sobre un plano inclinado. La bola grande tiene un diámetro del doble del de la pequeña. Partiendo del reposo, las dos bolas ruedan sin deslizarse hacia abajo por un plano inclinado, hasta que sus centros de masa están 1 m por debajo de las posiciones de partida. ¿Cuál es la rapidez de la bola grande (large) (v_L) relativa a la de la bola pequeña (small) (v_S) después de rodar 1 m?

- a) $v_L = 4v_S$
- b) $v_L = 2v_S$
- c) $v_L = v_S$
- d) $v_L = 0.5v_S$
- e) $v_L = 0.25v_S$

10.3 El volante de un generador, que es un cilindro homogéneo de radio R y masa M , gira alrededor de su eje longitudinal. La velocidad lineal de un punto sobre el borde del volante es v . ¿Cuál es la energía cinética del volante?

- a) $K = \frac{1}{2}Mv^2$
- b) $K = \frac{1}{4}Mv^2$
- c) $K = \frac{1}{2}Mv^2/R$
- d) $K = \frac{1}{2}Mv^2R$
- e) No se tiene suficiente información para contestar.

10.4 Cuatro esferas huecas, cada una con una masa de 1 kg y un radio $R = 10$ cm, están conectadas por varillas sin masa para formar un cuadrado con lados de longitud $L = 50$ cm. En el caso 1, las masas giran alrededor de un eje bisector de dos lados del cuadrado. En el caso 2, las masas giran alrededor de un eje que pasa por la diagonal del cuadrado, como se muestra en la figura. Calcule la relación de los momentos de inercia, I_1/I_2 , para los dos casos.



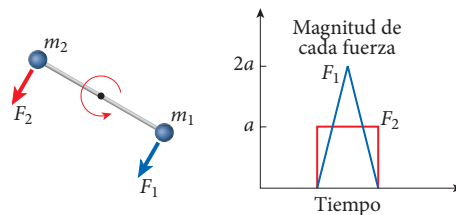
- a) $I_1/I_2 = 8$
- b) $I_1/I_2 = 4$
- c) $I_1/I_2 = 2$
- d) $I_1/I_2 = 1$
- e) $I_1/I_2 = 0.5$

10.5 Si las esferas huecas de la pregunta 10.4 se reemplazaran por esferas macizas de la misma masa y radio, la relación de los momentos de inercia para los dos casos

- a) Aumentaría.
- b) Disminuiría.
- c) Quedaría igual.
- d) Sería cero.

10.6 Un objeto extenso consiste en dos masas puntuales, m_1 y m_2 , conectadas por una varilla rígida de longitud L , como se muestra en la figura. El objeto gira a velocidad angular constante alrededor de un eje perpendicular a la página que pasa por el punto medio de la varilla. Dos fuerzas tangenciales que varían con el tiempo, F_1 y F_2 , se aplican a las masas m_1 y m_2 , respectivamente. Después de que las fuerzas se han aplicado, ¿qué sucederá con la velocidad angular del objeto?

- a) Aumentará.
- b) Disminuirá.
- c) Permanecerá sin cambio.
- d) No hay suficiente información para hacer una determinación.



10.7 Considere un cilindro sólido y un cilindro hueco que giran alrededor de un eje que pasa por sus centros de masa. Si ambos objetos tienen la misma masa y el mismo radio, ¿cuál objeto tendrá el mayor momento de inercia?

- a) El momento de inercia será el mismo para ambos objetos.
- b) El cilindro sólido tendrá el mayor momento de inercia porque su masa está uniformemente distribuida.
- c) El cilindro hueco tendrá el mayor momento de inercia porque su masa está ubicada lejos del eje de rotación.

10.8 Un balón de basquetbol con masa de 610 g y circunferencia de 76 cm rueda sin deslizarse por el piso de un gimnasio. Si suponemos que el balón es una esfera hueca, ¿qué fracción de su energía cinética total está asociada con su movimiento de rotación?

- a) 0.14 c) 0.29 e) 0.67
b) 0.19 d) 0.40

10.9 Una esfera maciza rueda sin deslizarse hacia abajo por un plano inclinado, partiendo del reposo. Al mismo tiempo, una caja parte del reposo a la misma altura y se desliza hacia abajo por el mismo plano inclinado, con fricción despreciable. ¿Cuál objeto llega primero a la base?

- a) La esfera maciza llega primero.
b) La caja llega primero.
c) Ambos objetos llegan al mismo tiempo.
d) Es imposible determinarlo.

10.10 Un cilindro rueda hacia abajo sin deslizarse por un plano inclinado en un ángulo θ respecto a la horizontal. ¿Cuál es el trabajo realizado por la fuerza de fricción mientras el cilindro viaja una distancia s por el plano? (μ_s es el coeficiente de fricción estática entre el plano y el cilindro.)

- a) $+\mu_s mgs \text{ sen}\theta$ d) $-mgs \text{ sen}\theta$
b) $-\mu_s mgs \text{ sen}\theta$ e) No se realiza ningún trabajo.
c) $+mgs \text{ sen}\theta$

10.11 Una pelota fija en el extremo de una cuerda se hace girar en círculo vertical. El momento angular de la pelota en la parte más alta de la trayectoria circular es

- a) mayor que el momento angular en la parte más baja de la trayectoria circular.
b) menor que el momento angular en la parte más baja de la trayectoria circular.
c) el mismo que el momento angular en la parte más baja de la trayectoria circular.

10.12 Usted está desenrollando un carrete grande de cable. Cuando tira del cable con una tensión constante, ¿qué sucede con la aceleración angular y la velocidad angular del carrete, suponiendo que el radio en el que usted está extrayendo el cable permanece constante y no hay fuerza de fricción?

- a) Ambas aumentan al desenrollarse el carrete.
b) Ambas disminuyen al desenrollarse el carrete.

- c) La aceleración angular aumenta y la velocidad angular disminuye.
d) La aceleración angular disminuye y la velocidad angular aumenta.
e) Es imposible decirlo.

10.13 Un disco de arcilla está girando con velocidad angular ω . Se pega un bodoque de arcilla al borde exterior del disco, y tiene una masa de $\frac{1}{10}$ de la del disco. Si el bodoque se despegue y sale volando por la tangente del borde, ¿cuál es la velocidad angular del disco después de que se separa el bodoque?

- a) $\frac{5}{6}\omega$ c) ω e) $\frac{6}{5}\omega$
b) $\frac{10}{11}\omega$ d) $\frac{11}{10}\omega$

10.14 Una patinadora en hielo gira con sus brazos extendidos y luego repliega los brazos y gira más rápido. ¿Cuál afirmación es correcta?

- a) Su energía cinética de rotación no cambia porque, por conservación del momento angular, la fracción por la que aumenta su velocidad angular es la misma que la fracción por la que disminuye su inercia rotacional.
b) Su energía cinética de rotación aumenta debido al trabajo que realiza para replugar los brazos.
c) Su energía cinética de rotación disminuye debido a la disminución en su inercia rotacional; pierde energía porque gradualmente se cansa.

10.15 Una patinadora en hielo gira sin fricción y repliega las manos hacia su cuerpo, de modo que lo hace mucho más rápido. ¿Cuál de las leyes de conservación se aplica, si es que alguna se aplica?

- a) Conservación de la energía mecánica y conservación del momento angular.
b) Conservación de la energía mecánica solamente.
c) Conservación del momento angular solamente.
d) Ni la conservación de la energía mecánica ni la conservación del momento angular.

10.16 Si el núcleo de hierro de una estrella que se colapsa gira inicialmente con una frecuencia de rotación de $f_0 = 3.2 \text{ s}^{-1}$, y el radio del núcleo disminuye durante el colapso por un factor de 22.7, ¿cuál es la frecuencia de rotación del núcleo de hierro al final del colapso?

- a) 10.4 kHz c) 65.3 kHz e) 5.2 kHz
b) 1.66 kHz d) 0.46 kHz

PREGUNTAS

10.17 Una esfera maciza uniforme de radio R , masa M y momento de inercia $I = \frac{2}{5}MR^2$ rueda sin deslizarse sobre una superficie horizontal. Su energía cinética total es la suma de la energía asociada con la traslación del centro de masa y la energía asociada con rotación alrededor del centro de masa. Encuentre la fracción de la energía cinética total de la esfera que se puede atribuir a la rotación.

10.18 Un anillo delgado, una esfera sólida, un cascarón esférico hueco y un disco de espesor uniforme se colocan lado a lado sobre una amplia rampa de longitud ℓ inclinada un ángulo θ respecto a la horizontal. En el tiempo $t = 0$, los cuatro

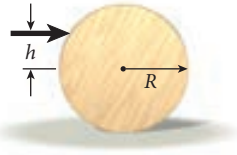
objetos se sueltan y ruedan sin deslizarse en trayectorias paralelas hacia abajo de la rampa hasta la base. La fricción y la resistencia del aire son despreciables. Determine el orden en que cada objeto termina la carrera.

10.19 En otra carrera, una esfera maciza y un anillo delgado ruedan sin deslizarse, partiendo del reposo, hacia abajo por una rampa que forma un ángulo θ con la horizontal. Encuentre la relación de sus aceleraciones, $a_{\text{anillo}}/a_{\text{esfera}}$.

10.20 Una esfera maciza uniforme de masa m y radio r se coloca en una rampa inclinada en un ángulo θ con la horizontal. El coeficiente de fricción estática entre la esfera y la rampa es

μ_s . Encuentre el valor máximo para θ al cual la esfera rodará sin deslizarse partiendo del reposo, en términos de las otras cantidades.

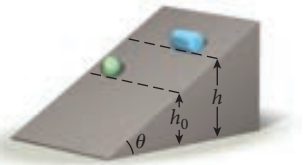
10.21 Un cuerpo redondo de masa M , radio R y momento de inercia I alrededor de su centro de masa, recibe un golpe horizontal seco a lo largo de una línea a la altura h por arriba de su centro (con $0 \leq h \leq R$, por supuesto). El cuerpo rueda de manera continua sin deslizarse inmediatamente después de recibir el golpe. Calcule la relación $I/(MR^2)$ para este cuerpo.



10.22 Un proyectil de masa m se lanza desde el origen con rapidez v_0 a un ángulo θ_0 sobre la horizontal. La resistencia del aire es despreciable.

- Calcule el momento angular del proyectil alrededor del origen.
- Calcule la rapidez de cambio de este momento angular.
- Calcule el momento de torsión respecto del origen que actúa sobre el proyectil durante su vuelo.

10.23 Una esfera maciza de radio R y masa M se coloca a una altura h_0 sobre un plano inclinado de pendiente θ . Cuando se suelta, rueda sin deslizarse hacia la base del plano inclinado. En seguida se suelta un cilindro de la misma masa y el mismo radio en el mismo plano inclinado. ¿Desde qué altura h se debe soltar para que tenga en la base la misma rapidez que la esfera?



10.24 Es más difícil mover una puerta si usted se recarga sobre ella (a lo largo del plano de la puerta) hacia las bisagras que si usted se recarga contra la puerta perpendicularmente a su plano. ¿Por qué?

10.25 Una patinadora artística repliega sus brazos durante un giro final. Como se conserva el momento angular, su velocidad angular aumentará. ¿Se conserva su energía cinética de rotación durante este proceso? Si no, ¿de dónde viene la energía extra o hacia dónde va?

10.26 ¿Una partícula que viaja en línea recta tiene un momento angular? Explique.

10.27 Un cilindro con masa M y radio R rueda sin deslizarse una distancia s sobre un plano inclinado que forma un ángulo

θ con la horizontal. Calcule el trabajo realizado por a) la gravedad, b) la fuerza normal y c) la fuerza de fricción.

10.28 Usando la conservación de la energía mecánica, calcule la rapidez final y la aceleración de un objeto cilíndrico de masa M y radio R después de rodar una distancia s sin deslizarse sobre un plano inclinado un ángulo θ respecto a la horizontal.

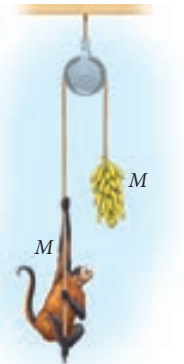
10.29 Un par es un conjunto de dos fuerzas de igual magnitud y sentidos opuestos, cuyas líneas de acción son paralelas pero no idénticas. Pruebe que el momento de torsión neto de un par de fuerzas es independiente del punto de pivote respecto del cual se calcula el momento de torsión y de los puntos a lo largo de sus líneas de acción donde se aplican las dos fuerzas.

10.30 ¿Por qué una patinadora artística repliega sus brazos mientras aumenta su velocidad angular en un giro cerrado?

10.31 Para virar una motocicleta a la derecha, usted *no* gira el manubrio a la derecha, sino en vez de esto, lo hace ligeramente a la izquierda. Explique, con tanta precisión como pueda, cómo esta contradirección hace virar a la motocicleta en la dirección deseada. (Pista: Las ruedas de una motocicleta en movimiento tienen un enorme momento angular.)

10.32 El efecto de la Luna de producir mareas en la Tierra está disminuyendo gradualmente la rotación de la Tierra, debido a la fricción de las mareas. Estudios de los corales del periodo devónico indican que el año duraba 400 días en ese periodo. ¿Qué indica esto, si es que indica algo, acerca del momento angular de la Luna en el periodo devónico en relación con su valor actual?

10.33 Una cuerda ligera pasa sobre una polea sin fricción. En uno de los extremos de la cuerda se ha fijado un racimo de plátanos de masa M , y un mono de la misma masa trepa por el otro extremo. El mono sube por la cuerda en un intento por alcanzar los plátanos. El radio de la polea es R .



a) Considerando el mono, los plátanos, la cuerda y la polea como un sistema, evalúe el momento de torsión neto alrededor del eje de la polea.

b) Usando el resultado del inciso a), determine el momento angular total alrededor del eje de la polea como función del tiempo.

PROBLEMAS

Una • y dos •• indican un nivel creciente de dificultad del problema.

Secciones 10.1 y 10.2

10.34 Un cilindro sólido uniforme de masa $M = 5.00$ kg rueda sin deslizarse por una superficie horizontal. La velocidad de su centro de masa es de 30.0 m/s. Calcule su energía.

10.35 Determine el momento de inercia para tres niños que pesan 60.0 , 45.0 y 80.0 lb, sentados en puntos diferentes sobre el borde de un carrusel en rotación, que tiene un radio de 12.0 ft.

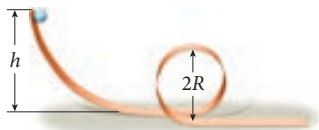
•**10.36** Un bolígrafo de 24 cm de longitud se lanza verticalmente hacia arriba, alcanzando una altura máxima de 1.2 m sobre el punto de liberación. En su camino ascendente, la pluma da 1.8 revoluciones. Tratando la pluma como una varilla delgada uniforme, calcule la relación entre la energía cinética de rotación y la energía cinética de traslación en el instante en que se suelta el bolígrafo. Suponga que la rapidez de rotación no cambia durante el lanzamiento.

•**10.37** Una bola sólida y una hueca, cada una con una masa de 1.00 kg y radio de 0.100 m, parte del reposo y rueda hacia

abajo por una rampa de longitud 3.00 m, con inclinación de 35.0°. Un cubo de hielo de la misma masa se desliza sin fricción por la misma rampa.

- a) ¿Cuál bola llegará primero a la base? ¡Explique!
- b) ¿El cubo de hielo viaja más rápido o más lento que la bola sólida en la base de la rampa? Explique su razonamiento.
- c) ¿Cuál es la rapidez de la bola sólida en la base de la rampa?

•10.38 Una bola sólida de masa m y radio r rueda sin deslizarse por un rizo de radio R , como se muestra en la figura. ¿Desde qué altura h debe lanzarse la bola para que pase por el rizo sin caer de la pista?



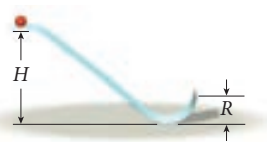
•10.39 El pulsar del Cangrejo ($m \approx 2 \cdot 10^{30}$ kg) es una estrella de neutrones ubicada en la nebulosa del Cangrejo. La rapidez de rotación del pulsar del Cangrejo es en la actualidad de alrededor de 30 rotaciones por segundo, o 60π rad/s. La rapidez de rotación del pulsar cada año disminuye 10^{-5} s. Justifique la siguiente aseveración: la pérdida de energía rotacional del pulsar es equivalente a 100 000 veces la de potencia de salida del Sol (la potencia total irradiada por el Sol es de alrededor de $4 \cdot 10^{26}$ W).

•10.40 Un bloque de masa $m = 4.00$ kg está fijado a un resorte ($k = 32.0$ N/m) mediante una cuerda que lo mantiene suspendido pasando por una polea de masa $M = 8.00$ kg y radio $R = 5.00$ cm, como se muestra en la figura. Considerando la polea como un disco macizo homogéneo, despreciando la fricción en el eje de la polea, y suponiendo que el sistema parte del reposo con el resorte en su longitud natural, encuentre a) la rapidez del bloque después de que cae 1.00 m y b) la extensión máxima del resorte.



Sección 10.3

•10.41 Un objeto circular pequeño con masa m y radio r tiene un momento de inercia dado por $I = cmr^2$. El objeto rueda sin deslizarse a lo largo de la pista que se muestra en la figura. La pista termina en una rampa de altura $R = 2.5$ m que lanza verticalmente el objeto. El objeto comienza desde una altura $H = 6.0$ m. ¿A qué altura máxima se elevará después de salir de la rampa si $c = 0.40$?



•10.42 Una esfera maciza uniforme de masa M y radio R rueda sin deslizarse por un plano nivelado con una rapidez $v = 3.00$ m/s, cuando encuentra una rampa con un ángulo $\theta = 23.0^\circ$ sobre la horizontal. Encuentre la distancia máxima que la esfera viaja subiendo la rampa en cada uno de los siguientes casos:

a) La rampa carece de fricción, de modo que la esfera sigue girando con su rapidez angular inicial hasta que llega a su altura máxima.

b) La rampa provee suficiente fricción para evitar que la esfera se deslice, de modo que tanto el movimiento lineal como el de rotación se detienen (instantáneamente).

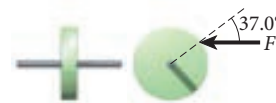
Sección 10.4

•10.43 Un disco con una masa de 30.0 kg y un radio de 40.0 cm está montado en un eje horizontal sin fricción. Se arrolla una cuerda muchas veces alrededor del disco y luego el extremo de la cuerda se fija a un bloque de 70.0 kg, como se muestra en la figura. Encuentre la aceleración del bloque, suponiendo que la cuerda no se deslice.



•10.44 Se aplica una fuerza, $\vec{F} = (2\hat{x} + 3\hat{y})$ N, a un objeto, en un punto cuyo vector de posición con respecto al punto pivote es $\vec{r} = (4\hat{x} + 4\hat{y} + 4\hat{z})$ m. Calcule el momento de torsión generado por la fuerza alrededor de dicho punto pivote.

•10.45 Un disco con una masa de 14.0 kg, un diámetro de 30.0 cm y un espesor de 8.00 cm, está montado en un eje horizontal áspero, como se muestra en la parte izquierda de la figura. (Hay una fuerza de fricción ente el eje y el disco.) El disco está inicialmente en reposo. Se aplica una fuerza constante, $F = 70.0$ N, al borde del disco, a un ángulo de 37.0° , como se muestra en la parte derecha de la figura. Después de 2.00 s, la fuerza se reduce a $F = 24.0$ N, y el disco gira con una velocidad angular constante.

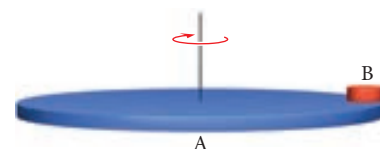


- a) ¿Cuál es la magnitud del momento de torsión debido a la fricción entre el disco y el eje?
- b) ¿Cuál es la velocidad angular del disco después de 2.00 s?
- c) ¿Cuál es la energía cinética del disco después de 2.00 s?

Sección 10.5

10.46 Una varilla delgada uniforme (longitud = 1.00 m, masa = 2.00 kg) tiene como pivote un pasador horizontal sin fricción que atraviesa uno de sus extremos. El momento de inercia de la varilla a través de este eje es de $\frac{1}{3}mL^2$. La varilla se suelta cuando está a 60.0° debajo de la horizontal. ¿Cuál es la aceleración angular de la varilla en el instante en que se suelta?

10.47 Un objeto hecho de dos secciones en forma de disco, A y B, como se muestra en la figura, gira alrededor de un eje en el centro del disco A.

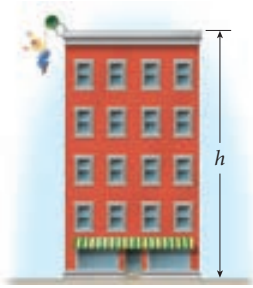


Las masas y los radios de los discos A y B, respectivamente, son 2.00 kg y 0.200 kg, y 25.0 cm y 2.50 cm.

- a) Calcule el momento de inercia del objeto.
- b) Si el momento de torsión axial debido a la fricción es de 0.2 N m, ¿cuánto tardará el objeto en detenerse si está girando con una velocidad angular inicial de -2π rad/s?

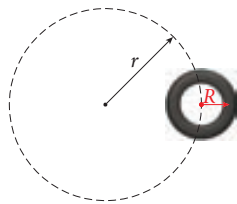
•10.48 Usted es el consultor técnico para una película de acción y aventuras en la que en una escena, el héroe debe dejarse caer de un edificio de 20.0 m de altura y aterrizar sano y salvo en el suelo

con una rapidez vertical final de 4.00 m/s. En el borde de la azotea del edificio, hay un tambor de 100. kg que tiene enrollada una cuerda lo suficientemente larga (de masa despreciable), tiene un radio de 0.500 m y puede girar libremente alrededor de su eje central con momento de inercia I_0 . El guión pide que el doble, de 50.0 kg, se ate la cuerda alrededor de la cintura y salte de la azotea.



- Determine una expresión para la aceleración lineal del doble, en términos de su masa m , el radio del tambor r y el momento de inercia I_0 .
- Determine el valor necesario de la aceleración del doble para que aterrice sano y salvo con una rapidez de 4 m/s, y use este valor para calcular el momento de inercia del tambor alrededor de su eje.
- ¿Cuál es la aceleración angular del tambor?
- ¿Cuántas revoluciones da el tambor durante la caída?

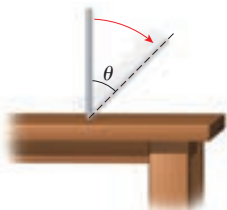
•10.49 En una competencia de lanzamiento de neumáticos, un hombre que sostiene un neumático de auto de 23.5 kg hace girar rápidamente el neumático, dándole tres vueltas completas, y lo suelta, en forma muy parecida a un lanzador de disco. El neumático parte del reposo y se acelera luego en una trayectoria circular. El radio orbital r para el centro de masa del neumático es de 1.10 m, y la trayectoria es horizontal al suelo. La figura muestra una vista aérea de la trayectoria circular del neumático, y el punto en el centro marca el eje de rotación. El hombre aplica un momento de torsión constante de 20.0 N m para acelerar un neumático con una aceleración angular constante. Suponga que toda la masa del neumático está a un radio $R = 0.35$ m de su centro.



- ¿Cuál es el tiempo, $t_{\text{lanzamiento}}$, que se necesita para que el neumático complete tres revoluciones?
- ¿Cuál es la rapidez lineal final del centro de masa del neumático (después de tres revoluciones completas).
- Si, en vez de suponer que toda la masa del neumático está a una distancia de 0.35 m de su centro, usted considera el neumático como un disco hueco con radio interior de 0.30 m y radio exterior de 0.40 m, ¿cómo cambia esto sus respuestas a los incisos a) y b)?

•10.50 Una varilla uniforme con masa $M = 250.0$ g y longitud $L = 50.0$ cm descansa verticalmente sobre una mesa horizontal. Se deja caer desde el reposo.

- ¿Cuáles fuerzas actúan sobre la varilla?



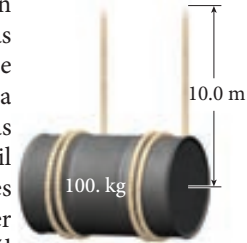
b) Calcule la rapidez angular de la varilla, la aceleración vertical del extremo móvil de la varilla y la fuerza normal que ejerce la mesa sobre la varilla cuando forma un ángulo $\theta = 45.0^\circ$ respecto a la vertical.

- Si la varilla cae a la mesa sin deslizarse, encuentre la aceleración lineal

del extremo de la varilla cuando toca la mesa, y compárelo con g .

•10.51 Una rueda con $c = \frac{4}{9}$, una masa de 40.0 kg y un radio al borde de 30.0 cm, está montada verticalmente en un eje horizontal. Una masa de 2.00 kg está suspendida de la rueda mediante una cuerda enrollada alrededor del borde. Encuentre la aceleración angular de la rueda cuando se deja caer la masa.

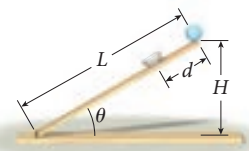
••10.52 Un barril de 100. kg con un radio de 50.0 cm tiene enrolladas dos cuerdas a su alrededor, como se muestra en la figura. El barril se deja caer desde el reposo, haciendo que las cuerdas se desenrollen, y que el barril caiga girando hacia el suelo. ¿Cuál es la rapidez del barril después de haber caído una distancia de 10.0 m? ¿Cuál es la tensión en cada cuerda? Suponga que la masa del barril está uniformemente distribuida, y que el barril gira como un cilindro sólido.



••10.53 Un arreglo para demostración consiste en una tabla uniforme de longitud L , con un gozne en el borde inferior, y elevada en un ángulo θ mediante una estaca de apoyo. Una pelota está en reposo en el lado elevado, y una taza ligera está fija en la tabla a una distancia d del extremo elevado, para recibir la pelota, cuando la estaca de apoyo se quita en forma repentina. Usted quiere usar una tabla delgada con gozne de 1.00 m de longitud y 10.0 cm de anchura, y planea que la estaca de apoyo vertical esté ubicada exactamente en su extremo elevado.

- ¿Qué longitud debe tener la estaca de apoyo para que la pelota tenga una probabilidad de ser atrapada?

b) Suponga que usted elige usar la estaca de apoyo más larga posible en el extremo elevado de la tabla. ¿A qué distancia d de dicho extremo se debe colocar la taza para asegurar que la bola será atrapada en la taza?



Sección 10.6

•10.54 El volante de una vieja máquina de vapor es un disco metálico sólido homogéneo de masa $M = 120.$ kg y radio $R = 80.0$ cm. La máquina hace girar el volante a 500. rpm. En una emergencia, para detener la máquina, se desembarga el volante de la máquina y se aplica una zapata de freno en el borde para dar una fuerza radial hacia dentro, $F = 100.$ N. Si el coeficiente de fricción cinética entre la zapata y el volante es $\mu_k = 0.200$, ¿cuántas revoluciones da el volante antes de entrar en reposo? ¿Cuánto tarda el volante en entrar en reposo? Calcule el trabajo realizado por el momento de torsión durante este tiempo.

•10.55 La turbina y las partes giratorias asociadas de un motor a chorro tienen un momento total de inercia de 25 kg m². La turbina se acelera uniformemente desde el reposo hasta una rapidez angular de 150 rad/s, en un tiempo de 25 s. Encuentre

- la aceleración angular,
- el momento de torsión neto necesario,
- el ángulo descrito en 25 s,

- d) el trabajo que realiza el momento de torsión neto y
- e) la energía cinética de la turbina al final de los 25 s.

Sección 10.7

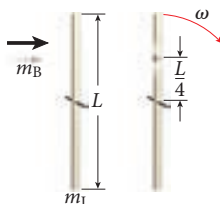
10.56 Dos pequeñas masas de 6.00 kg están unidas por una cuerda, que se puede suponer sin masa. La cuerda tiene una maraña como se muestra en la figura. Con la cuerda enmarañada, las masas están separadas por 1.00 m. Luego se hacen girar las masas alrededor de su centro de masa sobre una mesa sin fricción, a razón de 5.00 rad/s. Al girar las masas, la cuerda se desenmaraña y su longitud aumenta a 1.40 m. ¿Cuál es la velocidad angular de las masas después de que la cuerda se desenmaraña?



10.57 A veces se dice que si toda la población de China se parara sobre sillas y saltara simultáneamente, alteraría la rotación de la Tierra. Por fortuna, la física nos da las herramientas para investigar tales especulaciones.

- a) Calcule el momento de inercia de la Tierra alrededor de su eje. Por simplicidad, considere la Tierra como una esfera uniforme de masa $m_E = 5.977 \cdot 10^{24}$ kg y radio de 6 371 km.
- b) Calcule un límite superior para la contribución de la población de China al momento de inercia de la Tierra, suponiendo que todo el grupo de personas está en el Ecuador. Considere la población de China como 1 300 millones de personas, con una masa promedio de 70 kg.
- c) Calcule el cambio en la contribución en el inciso b) ocasionado por un cambio simultáneo de 1.0 m en la posición radial de todo el grupo.
- d) Determine el cambio fraccional en la longitud del día que produciría el cambio calculado en el inciso c).

10.58 Una bala con masa $m_B = 1.00 \cdot 10^2$ kg se mueve con una rapidez de 100. m/s cuando choca con una varilla de masa $m_R = 5.00$ kg y longitud $L = 1.00$ m (mostrada en la figura). La varilla está inicialmente en reposo, en posición vertical, y pivotada alrededor de un eje que pasa por su centro de gravedad. La bala se incrusta en la varilla a una distancia $L/4$ del pivote. Como resultado, el sistema bala-varilla comienza a girar.



- a) Encuentre la velocidad angular, ω , del sistema bala-varilla después de la colisión. Usted puede despreciar la anchura de la varilla y puede tratar a la bala como una masa puntual.
- b) ¿Cuánta energía cinética se pierde en la colisión?

10.59 Una esfera de radio R y masa M reposa sobre una mesa horizontal. Un impulso dirigido horizontalmente con una magnitud J se aplica a un punto de la bola a una distancia vertical h arriba de la superficie de la mesa.

- a) Determine la velocidad angular y de traslación de la esfera inmediatamente después de aplicarse el impulso.
- b) Determine la distancia h_0 a la cual el impulso aplicado hace que la bola ruede inmediatamente sin deslizarse.

10.60 Una plataforma circular de radio $R_p = 4.00$ m y masa $M_p = 400.$ kg gira sobre rodamientos de aire sin fricción alrededor de su eje vertical, a 6.00 rpm. Un hombre de 80.0 kg, de pie en el centro preciso de la plataforma, comienza a caminar (en $t = 0$) de manera radial hacia fuera, con una rapidez de 0.500 m/s respecto a la plataforma. Considerando al hombre aproximadamente como un cilindro vertical de radio $R_m = 0.200$ m, determine una ecuación (expresión específica) para la velocidad angular de la plataforma como función del tiempo. ¿Cuál es la velocidad angular cuando el hombre llega al borde de la plataforma?

10.61 Un niño de 25.0 kg está de pie a 2.00 m del centro de un carrusel sin fricción, de un parque de juegos, que tiene un momento de inercia de 200 kg m^2 . El niño comienza a correr en una trayectoria circular con una rapidez de 0.600 m/s en relación con el suelo.

- a) Calcule la velocidad angular del carrusel.
- b) Calcule la rapidez del niño en relación con la superficie del carrusel.

10.62 La Tierra tiene una rapidez angular de $7.272 \cdot 10^{-5}$ rad/s en su rotación diurna. Encuentre la nueva rapidez angular si un asteroide ($m = 1.00 \cdot 10^{22}$ kg) choca con la Tierra viajando con una rapidez de $1.40 \cdot 10^3$ m/s (suponga que el asteroide es una masa puntual en comparación con el radio de la Tierra) en cada uno de los siguientes casos:

- a) El asteroide choca con la Tierra viajando hacia su centro.
- b) El asteroide choca con la Tierra casi tangencialmente en la dirección de la rotación de la Tierra.
- c) El asteroide choca con la Tierra casi tangencialmente en la dirección opuesta a la rotación de la Tierra.

Sección 10.8

10.63 Un giróscopo de demostración consiste en un disco uniforme con radio de 40.0 cm, montado en el punto medio de un eje ligero de 60.0 cm. El eje está apoyado por un extremo mientras está en posición horizontal. ¿Cuál es la rapidez de precesión del giróscopo, en unidades de rad/s, si el disco está girando alrededor del eje a 30.0 rev/s?



Problemas adicionales

10.64 La mayoría de las estrellas mantienen un tamaño de equilibrio al balancear dos fuerzas: la fuerza gravitacional hacia dentro y una fuerza hacia fuera que es el resultado de las reacciones nucleares de la estrella. Cuando el combustible se agota, no hay un contrapeso a la fuerza gravitacional. Todo el material que queda se repliega en sí mismo. Las estrellas que son aproximadamente del mismo tamaño que el Sol se vuelven enanas blancas, que brillan por el sobrecalentamiento restante. Las estrellas que tienen alrededor de tres veces el tamaño del Sol se compactan en estrellas de neutrones. Y una estrella con

una masa tres veces mayor que la del Sol se colapsa en un objeto que se llama *hoyo negro*. En la mayoría de los casos, los protones y los electrones se fusionan para formar neutrones: ésta es la razón del nombre *estrella de neutrones*. Las estrellas de neutrones giran muy rápido debido a la conservación del momento angular. Imagine una estrella de masa $5.00 \cdot 10^{30}$ kg y radio $9.50 \cdot 10^8$ m que gira una vez cada 30.0 días. Suponga que esta estrella sufre un colapso gravitacional para formar una estrella de neutrones con radio de 10.0 km. Determine su periodo de rotación.

10.65 En experimentos llevados a cabo en el Laboratorio de Física de Plasmas de Princeton, un plasma de átomos de hidrógeno se calienta a más de 500 millones de grados Celsius (alrededor de 25 veces más caliente que el centro del Sol) y se confina durante decenas de milisegundos mediante potentes campos magnéticos (100 000 veces mayores que el campo magnético de la Tierra). Para cada sesión experimental se necesita una enorme cantidad de energía en una fracción de segundo, lo cual se traduce en una necesidad de potencia que causaría un apagón si se usara la electricidad de la red normal para energizar este experimento. En vez de esto, se almacena energía eléctrica en un colosal volante que es un cilindro macizo giratorio con un radio de 3.00 m y una masa de $1.18 \cdot 10^6$ kg. La energía eléctrica de la red pone a girar el volante, que tarda 10.0 minutos en alcanzar una rapidez angular de 1.95 rad/s. Una vez que el volante alcanza esta velocidad angular, toda su energía se puede tomar muy rápidamente para energizar una sesión experimental. ¿Cuál es la energía mecánica almacenada en el volante cuando gira a 1.95 rad/s? ¿Cuál es el momento de torsión medio que se necesita para acelerar el volante desde el reposo hasta 1.95 rad/s en 10.0 minutos?

10.66 Un aro delgado de 2.00 kg con un radio de 50.0 cm rueda hacia abajo por una pendiente de 30.0° , sin deslizarse. Si el aro parte del reposo en la parte más alta de la pendiente, ¿cuál es su velocidad de traslación después de rodar 10.0 m sobre la pendiente?

10.67 Una molécula de oxígeno (O_2) gira en el plano xy alrededor del eje z . El eje de rotación pasa por el centro de la molécula, perpendicularmente a su longitud. La masa de cada átomo de oxígeno es de $2.66 \cdot 10^{-26}$ kg, y la separación media entre los dos átomos es $d = 1.21 \cdot 10^{-10}$ m.

a) Calcule el momento de inercia de la molécula alrededor del eje z .

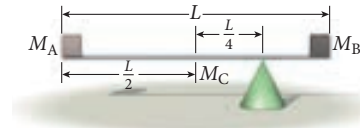
b) Si la rapidez angular de la molécula alrededor del eje z es de $4.60 \cdot 10^{12}$ rad/s, ¿cuál es su energía cinética de rotación?

10.68 Una cuenta de 0.050 kg se desliza en un alambre doblado en círculo con radio de 0.40 m. Usted tira bruscamente de la cuenta, con una fuerza tangente al círculo. ¿Qué fuerza se requiere para dar a la cuenta una aceleración angular de 6.0 rad/s^2 ?

10.69 Un profesor que lleva a cabo una demostración en clase está de pie en el centro de una mesa giratoria sin fricción, sosteniendo una masa de 5.00 kg en cada mano con los brazos extendidos, de modo que cada masa está a 1.20 m de su eje de simetría. Un estudiante (¡cuidadosamente seleccionado!) hace girar al profesor hasta una rapidez de rotación de 1.00 rpm. Si entonces el profesor repliega sus brazos a los costados de modo que cada masa quede a 0.300 m de su eje de simetría, ¿cuál es su

nueva rapidez de rotación? Suponga que su inercia de rotación sin las masas es de 2.80 kg m^2 y desprece el efecto en la inercia de rotación de la posición de sus brazos, ya que la masa de los brazos es pequeña en comparación con la masa del cuerpo.

•**10.70** El sistema que se muestra en la figura se mantiene inicialmente en reposo. Calcule la aceleración angular del sistema tan pronto como se libera. Usted puede tratar M_A (1.00 kg)



y M_B (10.0 kg) como masas puntuales ubicadas en cada extremo de la varilla de masa M_C (20.0 kg) y longitud L (5.00 m).

•**10.71** Un niño construye un carrito sencillo que consiste en una tabla de madera contrachapada de 60.0 cm por 1.20 m, con masa de 8.00 kg y cuatro ruedas, cada una con un diámetro de 20.0 cm y con una masa de 2.00 kg. Se suelta desde la parte más alta de un plano inclinado de 15.0° que tiene 30.0 m de longitud. Encuentre la rapidez en la base. Suponga que las ruedas van a lo largo de la rampa sin deslizarse y que la fricción entre ellas y sus ejes se puede despreciar.

•**10.72** Un CD tiene una masa de 15.0 g, un diámetro interno de 1.5 cm y un diámetro externo de 11.9 cm. Suponga que usted lo lanza haciéndolo girar a razón de 4.3 revoluciones por segundo.

a) Determine el momento de inercia del CD, tomando en cuenta su densidad uniforme.

b) Si sus dedos estuvieron en contacto con el CD durante 0.25 revoluciones mientras el CD adquiría su velocidad angular y le aplicaron un momento de torsión constante, ¿cuál fue la magnitud de dicho momento de torsión?

•**10.73** Una tabla de madera contrachapada de 1.3 cm de espesor se usa para hacer una puerta de gabinete de 55 cm de anchura por 79 cm de altura, con bisagras montadas en el borde vertical. Se monta una pequeña manija de 150 g, a 45 cm de la bisagra inferior, a la misma altura de dicha bisagra. Si la densidad de la madera contrachapada es de 550 kg/m^3 , ¿cuál es el momento de inercia de la puerta alrededor de las bisagras? Desprecie la contribución de los componentes de las bisagras al momento de la inercia.

•**10.74** Una pieza de una máquina está hecha de un disco macizo uniforme de radio R y masa M . Se perfora un hoyo de radio $R/2$ en el disco, con el centro del hoyo a una distancia $R/2$ del centro del disco (el diámetro del hoyo se extiende del centro del disco a su borde exterior). ¿Cuál es el momento de inercia de esta pieza de la máquina alrededor del centro del disco en términos de R y M ?

•**10.75** Una estación espacial debe generar gravedad artificial para apoyar la permanencia a largo plazo de astronautas y cosmonautas. Está diseñada como una gran rueda, con todos los compartimientos en el borde, que debe girar con una rapidez que produzca una aceleración similar a la de la gravedad terrestre para los astronautas (sus pies estarán sobre el interior de la pared externa de la estación espacial, y sus cabezas esta-

rán en dirección hacia el centro). Después de que la estación espacial esté ensamblada en órbita, se iniciará su rotación mediante la ignición de un motor de cohete fijado en el borde exterior, que actúa tangencialmente al borde. El radio de la estación espacial es $R = 50.0 \text{ m}$, y la masa es $M = 2.40 \cdot 10^5 \text{ kg}$. Si el empuje del motor de cohete es $F = 1.40 \cdot 10^2 \text{ N}$, ¿por cuánto tiempo debe actuar el motor?

•10.76 Muchos pulsares irradian radiofrecuencias u otras radiaciones de manera periódica, y están vinculados a una estrella acompañante en lo que se conoce como un *sistema binario de pulsares*. En 2004, los astrónomos del Jodrell Bank Observatory, en el Reino Unido, descubrieron un sistema de pulsares doble, PSR J0737-3039A y J0737-3039B. En este sistema, *ambas* estrellas son pulsares. El pulsar con el periodo de rotación más rápido gira una vez cada 0.023 s , mientras que el otro pulsar tiene un periodo de rotación de 2.8 s . El pulsar más rápido tiene una masa de 1.337 veces la del Sol, mientras que el pulsar más lento tiene una masa de 1.250 veces la del Sol.

a) Si cada pulsar tiene un radio de 20.0 km , encuentre el cociente de sus energías cinéticas de rotación. Considere que cada estrella es una esfera uniforme con un periodo de rotación fijo.

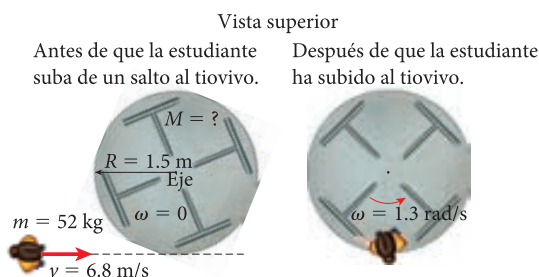
b) Las órbitas de los dos pulsares alrededor de su centro común de masa son más bien excéntricas (elipses altamente achatadas), pero se puede obtener un estimado de su energía cinética de traslación media tratando cada órbita como circular, con un radio igual a la distancia media al centro de masa del sistema. Este radio es igual a $4.23 \cdot 10^8 \text{ m}$ para la estrella más grande, y $4.54 \cdot 10^8 \text{ m}$ para la estrella más pequeña. Si el periodo orbital es de 2.4 h , calcule el cociente de las energías cinéticas de rotación a las de traslación, para cada estrella.

•10.77 Una estudiante con masa de 52 kg quiere medir la masa de un "tio vivo" del parque de juegos, que consiste en un disco metálico macizo con radio $R = 1.5 \text{ m}$, que está montado en posición horizontal sobre un eje de baja fricción. Ella prueba un experimento: corre con una rapidez $v = 6.8 \text{ m/s}$ hacia el borde exterior del tio vivo, y se sube de un salto al borde exterior, como se muestra en la figura. El tio vivo está al principio en reposo antes de que la estudiante se suba, y gira a 1.3 rad/s inmediatamente después de que ella se sube. Usted puede suponer que la masa de la estudiante se concentra en un punto.

a) ¿Cuál es la masa del tio vivo?

b) Si el tio vivo tarda 35 s en detenerse después de que la estudiante se ha subido de un salto, ¿cuál es el momento de torsión medio debido a la fricción en el eje?

c) ¿Cuántas veces gira el tio vivo antes de detenerse, suponiendo que el momento de torsión debido a la fricción es constante?



•10.78 Un péndulo balístico consiste en un brazo con masa M y longitud $L = 0.48 \text{ m}$. Un extremo del brazo está pivotado de tal manera que gira libremente en el plano vertical. Al inicio, el brazo está inmóvil y cuelga de modo vertical del punto pivote. Un proyectil de la misma masa M choca con el extremo inferior del brazo con una velocidad horizontal $V = 3.6 \text{ m/s}$. El proyectil queda adherido al extremo libre del brazo durante su movimiento subsecuente. Encuentre el ángulo máximo al que oscilarán el brazo y la masa agregada en cada caso:

a) El brazo se trata como un péndulo ideal, con toda su masa concentrada como una masa puntual en el extremo libre.

b) El brazo se trata como una varilla delgada rígida, con su masa uniformemente distribuida a lo largo de su longitud.

•10.79 Una rueda de vagón está construida completamente de madera. Sus componentes consisten en un borde, 12 rayos y un eje. El borde tiene una masa de 5.2 kg , diámetro externo de 0.90 m y diámetro interno de 0.86 m . El eje es un cilindro sólido con masa de 3.4 kg y un radio de 0.12 m . Los rayos son varillas delgadas con masa de 1.1 kg que se extienden desde el eje hasta el lado interno del borde. Determine la constante $c = I/MR^2$ para esta rueda de vagón.

•10.80 La figura muestra una bola sólida homogénea con radio R . Antes de caer al suelo, su centro de masa está en reposo, pero está girando con velocidad angular ω_0 alrededor de un eje horizontal que pasa por su centro. El punto más bajo de la bola está a una altura h sobre el suelo. Cuando se suelta, la bola cae bajo la influencia de la gravedad, y rebota a una nueva altura tal que su punto más bajo está αh arriba del suelo. La deformación de la bola y del suelo debida al impacto se puede considerar despreciable; el tiempo de impacto, sin embargo, es finito. La masa de la bola es m , y el coeficiente de fricción cinética entre la bola y el suelo es μ_k . Ignore la resistencia del aire.

Para la situación en la que la bola se desliza durante el impacto, encuentre lo siguiente:

a) $\tan \theta$, donde θ es el ángulo de rebote indicado en el diagrama.

b) la distancia horizontal que recorre entre el primero y el segundo impactos.

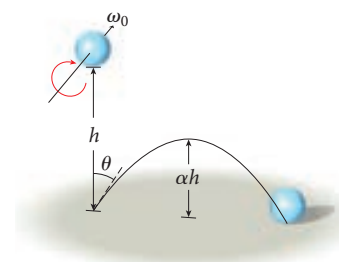
c) el valor mínimo de ω_0 para esta situación.

Para la situación en la que la bola deja de deslizarse antes de terminar el impacto, encuentre lo siguiente:

d) $\tan \theta$.

e) la distancia horizontal que recorre entre el primero y el segundo impactos.

Tomando en cuenta ambas situaciones, grafique la variación de $\tan \theta$ con ω_0 .



11

Equilibrio estático

LO QUE APRENDEREMOS 355

11.1 Condiciones del equilibrio 355

- Ubicación experimental del centro de masa 356
- Ecuaciones de equilibrio 357

11.2 Ejemplos sobre equilibrio estático 357

Ejemplo 11.1 Balancín 357

Ejemplo 11.2 Fuerza en bíceps 359

Ejemplo 11.3 Pila de bloques 360

Problema resuelto 11.1 Escultura abstracta 362

Ejemplo 11.4 Persona de pie en una escalera 364

11.3 Estabilidad de estructuras 366

Condición cuantitativa para la estabilidad 366

Superficies multidimensionales y puntos de silla 367

Ejemplo 11.5 Empuje a una caja 368

Ajustes dinámicos para la estabilidad 369

LO QUE HEMOS APRENDIDO/ GUÍA DE ESTUDIO PARA EXAMEN 370

Práctica para resolución de problemas 371

Problema resuelto 11.2 Letrero colgante 371

Preguntas de opción múltiple 373

Preguntas 374

Problemas 375

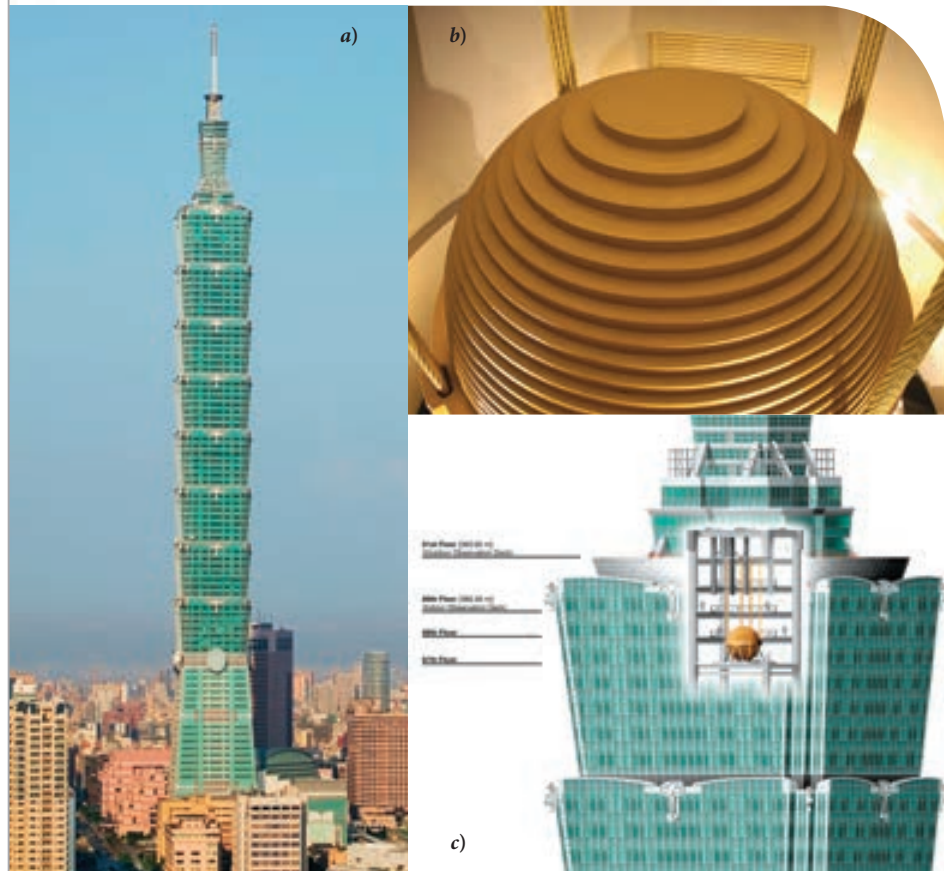


FIGURA 11.1 El edificio más alto del mundo hasta 2008, Taipei 101, en Taiwán:
a) Vista de la torre; b) vista del amortiguador de oscilación dentro de la torre;
c) dibujo en corte de la parte superior de la torre, que muestra la ubicación del amortiguador.

LO QUE APRENDEREMOS

- El equilibrio estático se define como equilibrio mecánico para el caso especial de un objeto en reposo.
- Un objeto (o conjunto de objetos) puede estar en equilibrio estático sólo si la fuerza externa neta es cero, y si el momento total de torsión externo es cero.
- Una condición necesaria para el equilibrio estático es que la primera derivada de la función de energía potencial sea cero en el punto de equilibrio.
- El equilibrio estable se logra en puntos en los que la energía potencial tiene un mínimo.
- El equilibrio inestable ocurre en puntos en los que la función de la energía potencial tiene un máximo.
- El equilibrio neutro (también llamado indiferente o marginalmente estable) existe en puntos en los que tanto la primera derivada como la segunda derivada de la función de energía potencial son cero.
- Se usan consideraciones de equilibrio para encontrar fuerzas, que de otro modo serían desconocidas, que actúan sobre un objeto inmóvil, o para encontrar las fuerzas necesarias para evitar que el objeto se mueva.

El edificio más alto del mundo en 2008 era la torre Taipei 101 (figura 11.1), en Taiwán, con una altura de 509 m (1 670 ft). Como cualquier rascacielos, este edificio oscila cuando soplan vientos a alta velocidad cerca de la parte superior. Para reducir al mínimo este movimiento, la torre Taipei 101 contiene un amortiguador de masa entre los pisos 87 y 92. Este amortiguador consiste en una bola de acero construida con discos de 5 pulgadas de espesor. Tiene una masa de 660 toneladas métricas, suficiente para reducir el movimiento de la torre aproximadamente en 40%. Alrededor del amortiguador hay restaurantes y plataformas de observación que lo hacen una de las principales atracciones turísticas.

La estabilidad y la seguridad son de importancia primordial en el diseño y la construcción de cualquier edificio. En este capítulo examinamos las condiciones para el equilibrio estático, que se tiene cuando un objeto está en reposo y sujeto a fuerzas netas cero y momentos totales de torsión cero. Sin embargo, como veremos, una estructura debe ser capaz de resistir fuerzas externas que tiendan a ponerla en movimiento. La estabilidad a largo plazo de una estructura grande —un edificio, un puente o un monumento— depende de la capacidad de los constructores para juzgar qué tan fuertes pueden ser las fuerzas externas, y para diseñar la estructura de modo que resista dichas fuerzas.

11.1 Condiciones del equilibrio

En el capítulo 4 vimos que la condición necesaria para el equilibrio estático es la ausencia de una fuerza neta externa. En ese caso, la primera ley de Newton estipula que un objeto permanece en reposo o se mueve con velocidad constante. Sin embargo, a menudo queremos hallar las condiciones necesarias para que un objeto rígido permanezca en reposo, en equilibrio *estático*. Un objeto (o conjunto de objetos) está en **equilibrio estático** si está en reposo y no experimenta movimiento de traslación ni de rotación. La figura 11.2 muestra un famoso ejemplo de un conjunto de objetos en equilibrio estático. Algo que hace que esta instalación sea tan asombrosa es que los ojos se rehúsan a aceptar que la configuración es estable.

El requisito de ausencia de movimiento de traslación y de rotación significa que las velocidades lineal y angular de un objeto en equilibrio estático son siempre cero. El hecho de que las velocidades lineal y angular no cambien con el tiempo implica que las aceleraciones lineal y angular sean también cero todo el tiempo. En el capítulo 4 vimos que la segunda ley de Newton,

$$\vec{F}_{\text{neta}} = m\vec{a}, \quad (11.1)$$

implica que si la aceleración lineal, \vec{a} , es cero, la fuerza neta externa, \vec{F}_{neta} , debe ser cero. Además vimos en el capítulo 10 que la segunda ley de Newton para rotación,

$$\vec{\tau}_{\text{neta}} = I\vec{\alpha}, \quad (11.2)$$

implica que si la aceleración angular, $\vec{\alpha}$, es cero, el momento de torsión externo neto, $\vec{\tau}_{\text{neta}}$, debe ser cero. Estos hechos llevan a dos condiciones para el equilibrio estático.

Condición 1 para el equilibrio estático

Un objeto puede permanecer en equilibrio estático sólo si la fuerza neta que actúa sobre él es cero:

$$\vec{F}_{\text{neta}} = 0. \quad (11.3)$$

(continúa)



FIGURA 11.2 Esta instalación de 440 kg, obra de Alexander Calder, cuelga del techo de la National Gallery of Art (Washington, DC), en perfecto equilibrio estático.

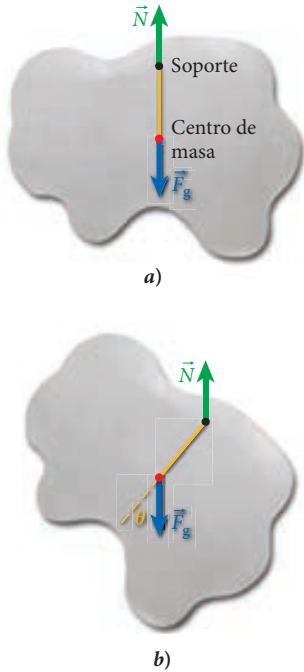


FIGURA 11.3 a) Este objeto experimenta momento de torsión neto cero, porque está soportado por un alfiler ubicado exactamente arriba de su centro de masa. b) Cuando el centro de masa no está exactamente debajo del punto de soporte, resulta un momento de torsión neto diferente de cero.

(continuación)

Condición 2 para el equilibrio estático

Un objeto puede permanecer en equilibrio estático sólo si el momento de torsión neto que actúa sobre él es cero:

$$\vec{\tau}_{\text{neto}} = 0. \quad (11.4)$$

Aun cuando se satisfaga la primera ley de Newton (que no actúe ninguna fuerza neta sobre el objeto), y aun cuando un objeto no tenga movimiento de traslación, girará si experimenta un momento de torsión neto distinto de cero.

Es importante recordar que el momento de torsión siempre se define con respecto al punto pivote (el punto en que el eje de rotación interseca el plano definido por \vec{F} y \vec{r}). Cuando calculamos el momento de torsión neto, el punto de pivote debe ser el mismo para todas las fuerzas que participen en el cálculo. Si tratamos de resolver un problema de equilibrio estático, con momento de torsión neto nulo, el momento de torsión neto tiene que ser cero para cualquier punto pivote que se elija. Así, tenemos la libertad de elegir el punto pivote que sea más adecuado para nuestro propósito. Una selección inteligente del punto pivote es con frecuencia la clave para una solución rápida. Por ejemplo, si hay una fuerza incógnita en el problema, podemos seleccionar el punto en que actúa la fuerza como punto pivote. Entonces esa fuerza no entra en la ecuación de momento de torsión porque tiene un brazo de palanca de longitud cero.

Si un objeto está soportado por un alfiler ubicado directamente arriba de su centro de masa, como en la figura 11.3a) (donde el punto rojo marca el centro de masa), entonces el objeto permanece en equilibrio; es decir, no comienza a girar. ¿Por qué? Porque en este caso sólo dos fuerzas actúan sobre el objeto —la fuerza de gravedad, \vec{F}_g (flecha azul), y la fuerza normal \vec{N} (flecha verde) del alfiler— y están sobre la misma línea [línea amarilla en la figura 11.3a)]. Las dos fuerzas se cancelan mutuamente y no producen un momento de torsión neto, lo cual da por resultado equilibrio estático; el objeto está en equilibrio.

Por otro lado, si un objeto está soportado del mismo modo por un alfiler, pero su centro de masa no está debajo del punto de soporte, entonces la situación es la que se muestra en la figura 11.3b). Los vectores de fuerza normal y gravitacional todavía señalan en direcciones opuestas; sin embargo, ahora actúa un momento de torsión diferente a cero, porque el ángulo θ entre el vector de fuerza gravitacional, \vec{F}_g , y el brazo de momento (que se dirige a lo largo de la línea amarilla) ya no es cero. Este momento de torsión viola la condición de que el momento de torsión neto debe ser cero para el equilibrio estático. Sin embargo, suspender un objeto de puntos diferentes es un método práctico para encontrar el centro de masa del objeto, incluso objetos con formas extrañas como el que se ilustra en la figura 11.3.

Ubicación experimental del centro de masa

Para ubicar de manera experimental el centro de masa de un objeto, podemos soportar el objeto con un alfiler de tal manera que pueda girar en forma libre alrededor del alfiler, y luego dejar que entre en reposo. Una vez que el objeto ha entrado en reposo, su centro de masa está ubicado en la línea directamente debajo del alfiler. Colgamos un peso (una plomada en la figura 11.4) del mismo alfiler que usamos para soportar el objeto, y este peso identifica la línea. Marcamos esta línea sobre el objeto. Si hacemos esto para dos puntos de soporte diferente, la intersección de las dos líneas marcará la ubicación precisa del centro de masa.

Usted puede usar otra técnica para determinar la ubicación del centro de masa para muchos objetos (vea la figura 11.5). Usted simplemente soporta el objeto con dos dedos colocados de tal manera que el centro de masa quede ubicado en algún punto dentro de ellos. (Si éste no es el caso, usted lo sabrá de inmediato, porque el objeto caerá.) Luego desliza con lentitud los dedos acercando uno al otro. En el punto en que se encuentran están directamente debajo del centro de masa y el objeto está equilibrado encima de los dedos.

¿Por qué funciona esta técnica? El dedo que está más cerca del centro de masa ejerce una fuerza normal más grande sobre el objeto. Así, al moverse, este dedo ejerce una fuerza de fricción mayor sobre el objeto que el dedo que está más lejano. En consecuencia, si los dedos se deslizan uno hacia el otro, el dedo que está más cerca del centro de masa llevará consigo al objeto suspendido. Esto continúa hasta que el otro dedo se acerca al centro de masa y el efecto se invierte. De esta manera, los dos dedos siempre conservan el centro de masa entre ellos. Cuando los dos dedos están uno junto al otro, el centro de masa está localizado.

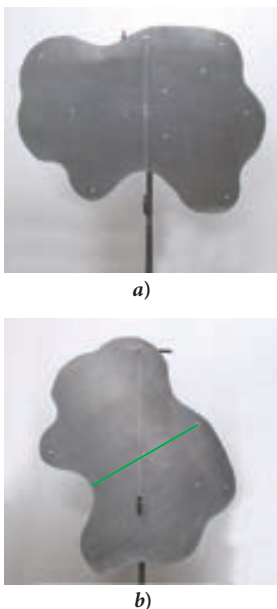


FIGURA 11.4 Determinación del centro de masa para un objeto de forma arbitraria.

En la figura 4.6, que muestra una mano sosteniendo una computadora laptop, el vector fuerza \vec{N} que ejerce la mano sobre la laptop actúa sobre el centro de la laptop, igual que el vector fuerza de gravedad, pero en sentido opuesto. Esta ubicación es necesaria. Para que una mano sostenga una computadora laptop, la mano debe estar colocada de manera directa debajo del centro de masa de la computadora. De otra manera, si el centro de masa no estuviera soportado directamente desde abajo, la computadora caería.

Ecuaciones de equilibrio

Con una comprensión cualitativa de los conceptos y de las condiciones para el equilibrio estático, podemos formular las condiciones del equilibrio para un análisis más cuantitativo. En el capítulo 4 encontramos que la condición de fuerza neta cero se traduce en tres ecuaciones independientes en un espacio tridimensional, una para la componente cartesiana de la fuerza neta cero (vea la ecuación 11.3). Además, la condición de momento de torsión neto cero en tres dimensiones también implica tres ecuaciones para las componentes del momento de torsión neto (vea la ecuación 11.4), representando rotaciones independientes alrededor de los tres ejes de rotación posibles, que son todos perpendiculares entre sí. En este capítulo no manejaremos las situaciones tridimensionales (que implican seis ecuaciones), sino más bien nos concentraremos en problemas de equilibrio estático en espacios bidimensionales; es decir, en un plano. En un plano hay dos grados de libertad de traslación para un cuerpo rígido (en las direcciones x y y) y una rotación posible, ya sea horaria o antihoraria, alrededor de un eje de rotación que es perpendicular al plano. Así, las dos ecuaciones para las componentes de la fuerza neta son

$$F_{\text{neta},x} = \sum_{i=1}^n F_{i,x} = F_{1,x} + F_{2,x} + \cdots + F_{n,x} = 0 \quad (11.5)$$

$$F_{\text{neta},y} = \sum_{i=1}^n F_{i,y} = F_{1,y} + F_{2,y} + \cdots + F_{n,y} = 0. \quad (11.6)$$

En el capítulo 10, el momento de torsión alrededor de un eje de rotación fijo se definió como la diferencia entre la suma de los momentos de torsión antihorarios y la suma de los momentos de torsión horarios. La condición de equilibrio estático de momento de torsión neto cero alrededor de cada eje de rotación se puede escribir entonces como

$$\tau_{\text{neta}} = \sum_i \tau_{\text{antihorario},i} - \sum_j \tau_{\text{horario},j} = 0. \quad (11.7)$$

Estas tres ecuaciones (11.5 a 11.7) forman la base para el análisis cuantitativo del equilibrio estático en los problemas de este capítulo.

11.2 Ejemplos sobre equilibrio estático

Las dos condiciones para el equilibrio estático (fuerza neta cero y momento de torsión neto cero) son todo lo que necesitamos para resolver un grupo muy grande de problemas que giran alrededor del equilibrio estático. No necesitamos cálculo diferencial e integral para resolver estos problemas; todos los cálculos usan sólo álgebra y trigonometría. Comencemos con un ejemplo para el cual la respuesta parece obvia. Esto permitirá adquirir práctica con el método y demostrará que conduce a la respuesta correcta.

EJEMPLO 11.1 Balancín

Un balancín de un parque de juegos consiste en un pivote y una barra, de masa M , que se coloca sobre el pivote de tal manera que los extremos puedan subir y bajar libremente [figura 11.6a)]. Si un objeto de masa m_1 se coloca en un extremo de la barra, a una distancia r_1 del punto pivote, como se muestra en la figura 11.6b), ese extremo baja, simplemente debido a la fuerza y al momento de torsión que ejerce el objeto sobre dicho extremo.

PROBLEMA 1

¿Dónde tenemos que colocar un objeto de masa m_2 (se supone que es igual a la masa de m_1) para hacer que el balancín se equilibre, de modo que la barra quede en posición horizontal y ninguno de los extremos toque el suelo?

(continúa)

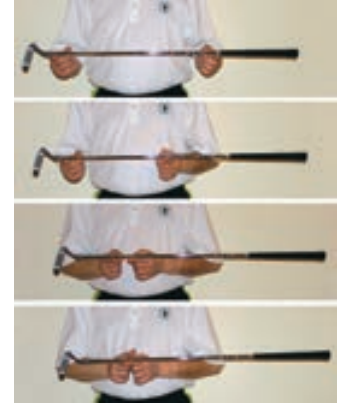
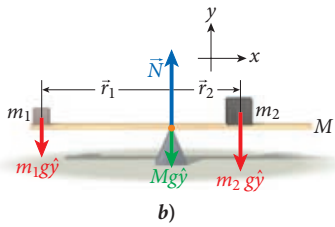


FIGURA 11.5 Determinación experimental del centro de masa de un palo de golf.



a)



b)

FIGURA 11.6 a) Un balancín de parque de juegos; b) diagrama de cuerpo libre que muestra las fuerzas y brazos de palanca.

(continuación)

SOLUCIÓN 1

La figura 11.6b) es un diagrama de cuerpo libre de la barra que muestra las fuerzas que actúan sobre ésta y los puntos donde actúan. La fuerza que ejerce m_1 en la barra es simplemente m_1g actuando hacia abajo como se muestra en la figura 11.6b). Lo mismo es cierto para la fuerza que ejerce m_2 en la barra. Además, como la barra tiene una masa propia M , experimenta una fuerza gravitacional, Mg . La fuerza final que actúa sobre la barra es la fuerza normal, N , que ejerce el apoyo de la barra. Actúa exactamente en el eje del balancín (marcado con un punto anaranjado).

La ecuación de equilibrio para las componentes y de las fuerzas lleva a una expresión del valor de la fuerza normal,

$$F_{\text{net},y} = \sum_i F_{i,y} = -m_1g - m_2g - Mg + N = 0$$

$$\Rightarrow N = g(m_1 + m_2 + M).$$

Los signos en frente de las componentes individuales de las fuerzas indican si actúan hacia arriba (positivo) o hacia abajo (negativo).

Como todas las fuerzas actúan en la dirección y , no es necesario escribir ecuaciones para las componentes de la fuerza neta en las direcciones x o z .

Ahora podemos considerar el momento de torsión neto. La selección del punto pivote adecuado puede simplificar nuestros cálculos. Para un balancín, la selección natural es en el eje, el punto marcado con un punto anaranjado en el centro de la barra en la figura 11.6b). Como la fuerza normal, N , y el peso de la barra, Mg , actúan exactamente a través de este punto, sus brazos de palanca tienen una longitud cero. Así, estas dos fuerzas no contribuyen a la ecuación del momento de torsión si este punto se elige como pivote. Las fuerzas $F_1 = m_1g$ y $F_2 = m_2g$ son las únicas que aportan momentos de torsión: F_1 genera un momento antihorario, y F_2 un momento horario. La ecuación del momento de torsión es entonces:

$$\tau_{\text{neta}} = \sum_i \tau_{\text{antihorario},i} - \sum_j \tau_{\text{horario},j}$$

$$= m_1gr_1 \text{ sen } 90^\circ - m_2gr_2 \text{ sen } 90^\circ = 0$$

$$\Rightarrow m_2r_2 = m_1r_1$$

$$\Rightarrow r_2 = r_1 \frac{m_1}{m_2}. \tag{i}$$

Aunque son iguales a 1 y por lo tanto no tienen efecto, los factores $\text{sen } 90^\circ$ se incluyen arriba como recordatorio de que el ángulo entre fuerza y brazo de palanca usualmente afecta el cálculo del momento de torsión.

La pregunta era dónde poner m_2 para el caso en que las dos masas fueran iguales; la respuesta es $r_2 = r_1$ en este caso. Este resultado esperado muestra que nuestra forma sistemática de acercarnos a la solución funciona en este caso de manera fácilmente verificable.

PROBLEMA 2

¿Qué tan grande necesita ser m_2 para equilibrar m_1 si $r_1 = 3r_2$, es decir, si m_2 está tres veces más cerca del punto pivote que m_1 ?

SOLUCIÓN 2

Usamos el mismo diagrama de cuerpo libre [figura 11.6b)] y llegamos a la misma ecuación general para las masas y distancias. Despejando m_2 de la ecuación (i) da

$$m_2r_2 = m_1r_1$$

$$\Rightarrow m_2 = m_1 \frac{r_1}{r_2}.$$

Al usar $r_1 = 3r_2$, obtenemos

$$m_2 = m_1 \frac{r_1}{r_2} = m_1 \frac{3r_2}{r_2} = 3m_1.$$

Para este caso, encontramos que la masa de m_2 tiene hasta tres veces de m_1 para establecer el equilibrio estático.

Como lo muestra el ejemplo 11.1, una selección inteligente del punto pivote muchas veces puede simplificar notablemente una solución. Es importante, sin embargo, darse cuenta de que se puede usar *cualquier* punto pivote. Si los momentos de torsión se equilibran alrededor de cualquier punto pivote, se equilibran alrededor de *todos* los puntos pivote. Así, si cambiamos el punto pivote, en ciertas situaciones puede complicar más los cálculos, pero el resultado final del cálculo no cambiará.

11.1 Oportunidad de autoexamen

Suponga que el punto pivote para el balancín en la parte 1 del ejemplo 11.1 se coloca debajo del centro de masa de m_2 . Demuestre que esto lleva al mismo resultado.

EJEMPLO 11.2 Fuerza en bíceps

Suponga que usted sostiene una mancuerna de pesas en su mano, como se muestra en la figura 11.7a). Su bíceps soporta su antebrazo. El bíceps está conectado al hueso del antebrazo a una distancia $r_b = 2.0$ cm del codo, como se muestra en la figura 11.7b). La masa de su antebrazo es de 0.85 kg. La longitud de su antebrazo es de 31 cm. Su antebrazo forma un ángulo $\theta = 75^\circ$ con la vertical, como se muestra en la figura 11.7b). La mancuerna tiene una masa de 15 kg.

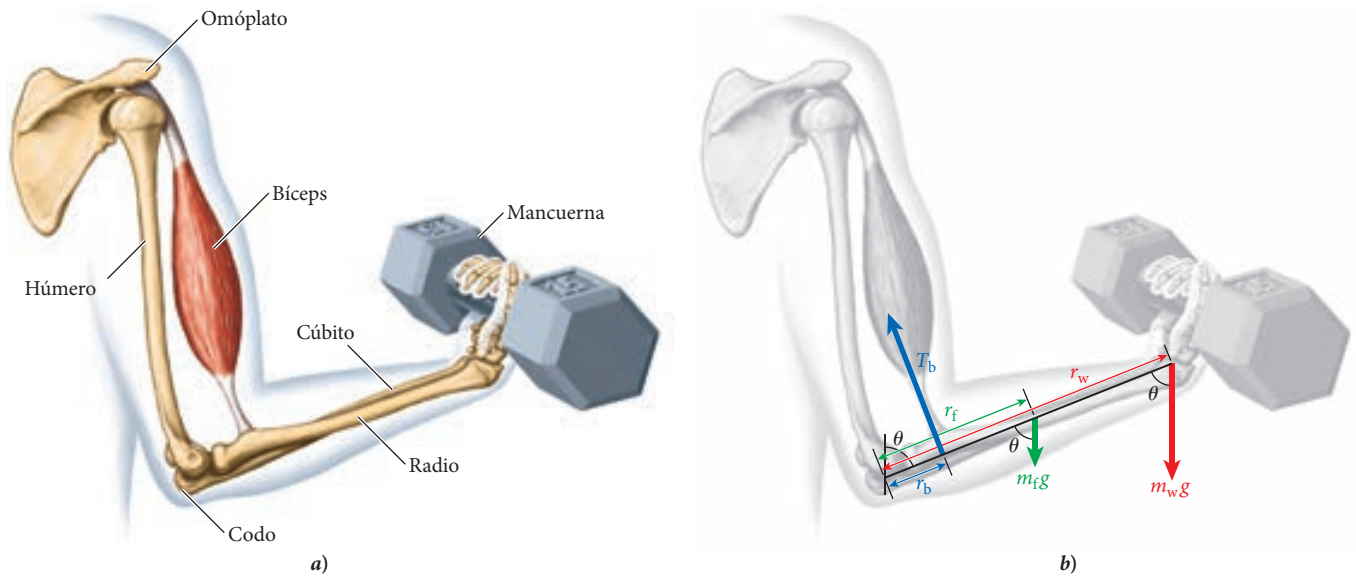


FIGURA 11.7 a) Un brazo humano sostiene una mancuerna. b) Fuerzas y brazos de palanca para un brazo humano que sostiene una mancuerna.

PROBLEMA

¿Cuál es la fuerza que debe ejercer el bíceps para sostener su antebrazo y la mancuerna? Suponga que el bíceps ejerce una fuerza perpendicular al antebrazo en el punto de conexión.

SOLUCIÓN

El punto de pivote es el codo. El momento de torsión neto en su antebrazo debe ser cero, de modo que el momento de torsión antihorario debe ser igual al momento de torsión horario:

$$\sum_i \tau_{\text{antihorario},i} = \sum_j \tau_{\text{horario},j}$$

El momento de torsión antihorario lo suministra el bíceps:

$$\sum_i \tau_{\text{antihorario},i} = T_b r_b \sin 90^\circ = T_b r_b,$$

donde T_b es la fuerza que ejerce el bíceps y r_b es el brazo de momento para la fuerza que ejerce el bíceps. El momento de torsión horario es la suma del momento de torsión ejercido por el peso del antebrazo y el momento de torsión ejercido por la mancuerna:

$$\sum_j \tau_{\text{horario},j} = m_f g r_f \sin \theta + m_w g r_w \sin \theta,$$

(continúa)

(continuación)

donde m_f es la masa del antebrazo, r_f es el brazo de palanca para la fuerza que ejerce el peso del antebrazo, m_w es la masa de la mancuerna y r_w es el brazo de momento de la fuerza que ejerce el peso de la mancuerna. Tomamos r_w como igual a la longitud del antebrazo y r_f como la mitad de dicha longitud, o $r_w/2$. Al igualar el momento de torsión antihorario y el momento de torsión horario nos da

$$T_b r_b = m_f g r_f \text{ sen } \theta + m_w g r_w \text{ sen } \theta.$$

Al despejar la fuerza que ejerce el bíceps, obtenemos

$$T_b = \frac{m_f g r_f \text{ sen } \theta + m_w g r_w \text{ sen } \theta}{r_b} = g \text{ sen } \theta \left(\frac{m_f r_f + m_w r_w}{r_b} \right).$$

Al introducir los números dados, obtenemos la fuerza que ejerce el bíceps

$$\begin{aligned} T_b &= g \text{ sen } \theta \left(\frac{m_f r_f + m_w r_w}{r_b} \right) \\ &= (9.81 \text{ m/s}^2) (\text{sen } 75^\circ) \left(\frac{(0.85 \text{ kg}) \left(\frac{0.31 \text{ m}}{2} \right) + (15 \text{ kg})(0.31 \text{ m})}{0.020 \text{ m}} \right) \\ &= 2\,300 \text{ N.} \end{aligned}$$

11.2 Oportunidad de autoexamen

En el ejemplo 11.2, suponga que usted sostiene la mancuerna de tal manera que su antebrazo haga un ángulo de 180° con la vertical. ¿Por qué puede usted todavía levantar la mancuerna?

Usted puede preguntarse por qué la evolución le dio al bíceps tan enorme desventaja mecánica. En apariencia, era más ventajoso poder balancear los brazos una larga distancia mientras se ejercía una fuerza comparativamente enorme que poder moverlos una distancia corta y ejercer una pequeña fuerza. Esto contrasta, de modo incidental, con los músculos de la mandíbula, que tienen desarrollada la capacidad de triturar alimentos duros con enorme fuerza.

El siguiente ejemplo de equilibrio estático también muestra una aplicación de las fórmulas para calcular el centro de masa que introdujimos en el capítulo 8, y al mismo tiempo tiene un resultado muy sorprendente.

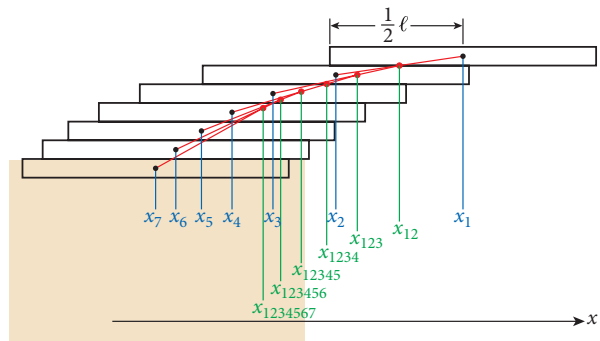
EJEMPLO 11.3 Pila de bloques

PROBLEMA

Considere un conjunto de bloques idénticos apilados en la orilla de una mesa (figura 11.8). ¿Qué tanto podemos empujar hacia fuera el extremo más avanzado del bloque superior sin que caiga la pila?



a)



b)

FIGURA 11.8 a) Pila de siete bloques idénticos apilados sobre una mesa. Observe que la orilla izquierda del bloque superior está a la derecha de la orilla derecha de la mesa. b) Posiciones de los centros de masa de los bloques individuales (x_1 a x_7) y ubicaciones de los centros de masa combinados de los bloques más altos (x_{12} a $x_{1234567}$).

SOLUCIÓN

Comencemos con un bloque. Si el bloque tiene una longitud ℓ y densidad de masa uniforme, entonces su centro de masa está ubicado en $\frac{1}{2}\ell$. Claramente, puede permanecer en reposo mientras por lo menos la mitad del bloque esté sobre la mesa, con su centro de masa soportado por la mesa desde abajo. El bloque puede sobresalir de su apoyo una cantidad infinitésima menos que $\frac{1}{2}\ell$ y todavía permanecer en reposo.

En seguida, consideramos dos bloques idénticos. Si llamamos x_1 la coordenada x del centro de masa del bloque superior, y x_2 la del bloque inferior, obtenemos para la coordenada x del centro de masa del sistema combinado, de acuerdo con la sección 8.1,

$$x_{12} = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2}{m_1 + m_2}.$$

Para bloques idénticos, $m_1 = m_2$, lo cual simplifica la expresión para x_{12} a

$$x_{12} = \frac{1}{2}(x_1 + x_2).$$

Como $x_1 = x_2 + \frac{1}{2}\ell$ en el caso límite de que el centro de masa del primer bloque está todavía soportado desde abajo por el segundo bloque, obtenemos

$$x_{12} = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{2}\ell + x_2\right) + x_2\right) = x_2 + \frac{1}{4}\ell. \quad (i)$$

Ahora podemos seguir con tres bloques. Los dos bloques superiores no caerán si el centro combinado de masa, x_{12} está soportado desde abajo. Al correr x_{12} exactamente a la orilla del tercer bloque, obtenemos $x_{12} = x_3 + \frac{1}{2}\ell$. Al combinar con la ecuación (i), tenemos

$$x_{12} = x_2 + \frac{1}{4}\ell = x_3 + \frac{1}{2}\ell \Rightarrow x_2 = x_3 + \frac{1}{4}\ell.$$

Observe que la ecuación (i) todavía es válida después del corrimiento, porque hemos expresado x_{12} en términos de x_2 y porque x_{12} y x_2 cambian en la misma cantidad cuando los dos bloques se mueven juntos. Podemos ahora calcular el centro de masa para los tres bloques en la misma forma que antes, aplicando el mismo principio para encontrar el nuevo centro de masa combinado:

$$x_{123} = \frac{x_{12}(2m) + x_3 m}{2m + m} = \frac{2}{3}x_{12} + \frac{1}{3}x_3 = \frac{2}{3}\left(x_3 + \frac{1}{2}\ell\right) + \frac{1}{3}x_3 = x_3 + \frac{1}{3}\ell. \quad (ii)$$

Al estipular que los tres bloques superiores estén soportados desde abajo por el cuarto bloque, obtenemos $x_{123} = x_4 + \frac{1}{2}\ell$. En combinación con la ecuación (ii), esto establece

$$x_{123} = x_3 + \frac{1}{3}\ell = x_4 + \frac{1}{2}\ell \Rightarrow x_3 = x_4 + \frac{1}{6}\ell.$$

Usted puede ver cómo continúa esta serie. Si tenemos $n - 1$ bloques soportados de esta manera por el n -ésimo bloque, entonces las coordenadas del $(n - 1)$ -ésimo bloque y del n -ésimo bloque se relacionan como sigue:

$$x_{n-1} = x_n + \frac{\ell}{2n-2}.$$

Ahora podemos sumar todos los términos y encontrar qué tan fuera de la orilla de la mesa puede estar x_1 :

$$x_1 = x_2 + \frac{1}{2}\ell = x_3 + \frac{1}{4}\ell + \frac{1}{2}\ell = x_4 + \frac{1}{6}\ell + \frac{1}{4}\ell + \frac{1}{2}\ell = \dots = x_{n+1} + \frac{1}{2}\ell \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \right).$$

Usted puede recordar del cálculo diferencial e integral que la suma $\sum_{i=1}^n i^{-1}$ no converge; es decir, no tiene un límite superior para $n \rightarrow \infty$. Esto da el asombroso resultado de que x_1 se puede mover *infinitamente* lejos de la orilla de la mesa, siempre y cuando haya suficientes bloques debajo de él, y que la orilla de la mesa pueda soportar su peso sin deformación significativa! (Pero vea la oportunidad de autoexamen 11.3 para poner este *infinito* en perspectiva.) La figura 11.8a) muestra sólo 7 bloques apilados sobre una mesa, y la orilla izquierda del bloque superior ya está a la derecha de la orilla derecha de la mesa.

11.3 Oportunidad de autoexamen

Spongona que usted tuviera 10 000 bloques idénticos de 4.0 cm de altura y longitud de 15.0 cm. Si usted los acomodara de la manera que se muestra en el ejemplo 11.3, ¿qué tan lejos podría sobresalir la orilla derecha del bloque superior?

El siguiente problema, que se refiere a un objeto extenso compuesto, sirve para repasar el cálculo del centro de masa de tales objetos, que se introdujo en el capítulo 8.

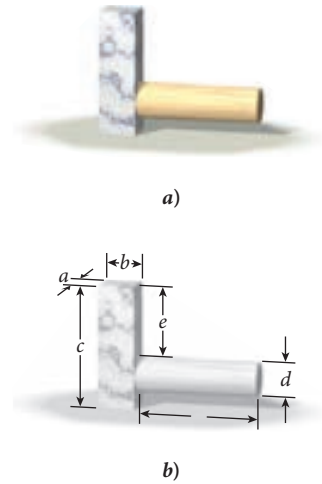


FIGURA 11.9 a) Una escultura de madera y mármol; b) diagrama de la escultura con dimensiones indicadas.

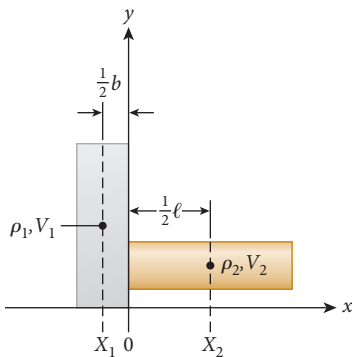


FIGURA 11.10 Esquema para calcular el centro de masa de la escultura.

PROBLEMA RESUELTO 11.1 Escultura abstracta

Un ex alumno de su universidad ha donado una escultura para que se exhiba en el atrio del nuevo edificio de física. La escultura consiste en un bloque rectangular de mármol de dimensiones $a = 0.71 \text{ m}$, $b = 0.71 \text{ m}$ y $c = 2.74 \text{ m}$, y un cilindro de madera con longitud $\ell = 2.84 \text{ m}$ y diámetro $d = 0.71 \text{ m}$, sujeto al mármol de tal manera que su borde superior está a una distancia $e = 1.47 \text{ m}$ del remate del bloque de mármol (figura 11.9).

PROBLEMA

Si la densidad de masa del mármol es de $2.85 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ y la de la madera es de $4.40 \cdot 10^2 \text{ kg/m}^3$, ¿puede la escultura mantenerse erguida en el piso del atrio, o necesita apoyarse con algún tipo de apuntalamiento?

SOLUCIÓN

PIENSE

El capítulo 8 demostró que una condición para la estabilidad de un objeto es que el centro de masa del objeto necesita un apoyo directo desde abajo. Para decidir si la escultura puede mantenerse erguida sin apoyo adicional, necesitamos, por lo tanto, determinar la ubicación del centro de masa de la escultura y averiguar si está ubicado en un punto dentro del bloque de mármol. Como el piso soporta el bloque desde abajo, la escultura podrá mantenerse erguida si éste es el caso. Si el centro de masa de la escultura se ubica fuera del bloque de mármol, la escultura necesitará apuntalamiento.

ESBOCE

Dibujamos una vista lateral de la escultura (figura 11.10), que representa con rectángulos el bloque de mármol y el cilindro de madera. El croquis indica también un sistema de coordenadas con un eje x horizontal y un eje y vertical, con el origen al lado derecho del bloque de mármol. (¿Y qué hay de la coordenada z ? Podemos usar argumentos de simetría del mismo modo que lo hicimos en el capítulo 8 y encontrar que la componente z del centro de masa está ubicada en el plano que divide en mitades el bloque y el cilindro.)

INVESTIGUE

Con el sistema de coordenadas elegido, no tenemos que preocuparnos por calcular la coordenada y del centro de masa de la escultura. La condición para la estabilidad depende sólo de si la coordenada x del centro de masa se ubica dentro del bloque de mármol; no depende de qué tan alto esté el centro de masa. Por lo tanto, la única tarea que queda por hacer es calcular la componente x del centro de masa. De acuerdo con los principios generales para calcular las coordenadas del centro de masa, presentados en el capítulo 8, podemos escribir

$$X = \frac{1}{M} \int_V x \rho(\vec{r}) dV, \tag{i}$$

donde M es la masa de toda la escultura y V es su volumen. Observe que en este caso la densidad de masa no es homogénea, ya que el mármol y la madera tienen densidades diferentes.

Para realizar la integración, dividimos el volumen V en partes convenientes: $V = V_1 + V_2$, donde V_1 es el volumen del bloque de mármol y V_2 es el volumen del cilindro de madera. Entonces la ecuación (i) queda

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{M} \int_{V_1} x \rho(\vec{r}) dV + \frac{1}{M} \int_{V_2} x \rho(\vec{r}) dV \\ &= \frac{1}{M} \int_{V_1} x \rho_1 dV + \frac{1}{M} \int_{V_2} x \rho_2 dV. \end{aligned}$$

SIMPLIFIQUE

Para calcular la ubicación de la componente x del centro de masa del bloque de mármol solo, podemos usar la ecuación para densidad constante del capítulo 8:

$$X_1 = \frac{1}{M_1} \int_{V_1} x \rho_1 dV = \frac{\rho_1}{M_1} \int_{V_1} x dV.$$

(Como la densidad es constante para todo este volumen, podemos sacarla de la integral.) Del mismo modo, podemos encontrar la componente x del centro de masa del cilindro de madera:

$$X_2 = \frac{\rho_2}{M_2} \int_{V_2} x dV.$$

Por lo tanto, la expresión para el centro de masa del objeto compuesto —es decir, de la escultura completa— es

$$\begin{aligned} X &= \frac{\rho_1}{M} \int_{V_1} x dV + \frac{\rho_2}{M} \int_{V_2} x dV \\ &= \frac{M_1}{M} \frac{\rho_1}{M_1} \int_{V_1} x dV + \frac{M_2}{M} \frac{\rho_2}{M_2} \int_{V_2} x dV \quad (\text{ii}) \\ &= \frac{M_1}{M} X_1 + \frac{M_2}{M} X_2. \end{aligned}$$

Éste es un resultado general muy importante: incluso para objetos extensos, el centro combinado de masa se puede calcular del mismo modo que para partículas puntuales. Como la masa total de la escultura es la masa combinada de sus dos partes, $M = M_1 + M_2$, la ecuación (ii) se convierte en

$$X = \frac{M_1}{M_1 + M_2} X_1 + \frac{M_2}{M_1 + M_2} X_2. \quad (\text{iii})$$

Es importante observar que esta relación entre la coordenada del centro combinado de masa de un objeto compuesto y las coordenadas de los centros de masa individuales es verdadera incluso en el caso en el que las partes sean objetos separados. Además, es válida en el caso en que la densidad dentro de un objeto dado no sea constante. Formalmente, este resultado se basa en el hecho de que una integral de volumen siempre se puede partir en un conjunto de integrales sobre subvolúmenes desconectados cuya suma es el volumen total. Es decir, la integración es lineal y es una simple suma.

La deducción de la ecuación (iii) ha simplificado enormemente un problema complicado, porque las coordenadas de los centros de masa de los dos objetos individuales se pueden calcular con facilidad. Como la densidad de cada uno de ellos es constante, las ubicaciones de los centros de masa son idénticas a sus centros geométricos. Una mirada a la figura 11.10 es suficiente para convencernos de que $X_2 = \frac{1}{2}\ell$ y $X_1 = -\frac{1}{2}b$. (Recuerde, hemos elegido el origen del sistema de coordenadas como la orilla derecha del bloque de mármol.)

Todo lo que queda por hacer es calcular las masas de los dos objetos. Como conocemos sus densidades, sólo tenemos que calcular el volumen de cada objeto; luego, la masa está dada por $M = \rho V$.

Como el bloque de mármol es rectangular, su volumen es $V = abc$. Por lo tanto, tenemos

$$M_1 = \rho_1 abc.$$

La parte horizontal de madera es un cilindro, de modo que su masa es

$$M_2 = \frac{\rho_2 \ell \pi d^2}{4}.$$

CALCULE

Al sustituir los números dados en el planteamiento del problema, obtenemos las masas individuales

$$M_1 = (2\,850 \text{ kg/m}^3)(0.71 \text{ m})(0.71 \text{ m})(2.74 \text{ m}) = 3\,936.52 \text{ kg}$$

$$M_2 = \frac{(440 \text{ kg/m}^3)(2.84 \text{ m})\pi(0.71 \text{ m})^2}{4} = 494.741 \text{ kg}.$$

Entonces la masa combinada es

$$M = M_1 + M_2 = 3\,936.52 \text{ kg} + 494.741 \text{ kg} = 4\,431.261 \text{ kg}.$$

La ubicación de la componente x del centro de masa de la escultura es entonces

$$X = \frac{3\,936.52 \text{ kg}}{4\,431.261 \text{ kg}} [(-0.5)(0.71 \text{ m})] + \frac{494.741 \text{ kg}}{4\,431.261 \text{ kg}} [(0.5)(2.84 \text{ m})] = -0.156825 \text{ m}.$$

(continúa)

(continuación)

REDONDEE

Las densidades se dieron con tres cifras significativas, pero las dimensiones de longitud se dieron sólo con dos cifras significativas. El redondeo resulta entonces

$$X = -0.16 \text{ m.}$$

Como este número es negativo, el centro de masa de la escultura está ubicado a la izquierda del borde derecho del bloque de mármol. Por lo tanto, se ubica sobre la base del bloque y se apoya directamente desde abajo. La escultura es estable y puede permanecer erguida sin apuntalamiento.

VUELVA A REVISAR

En la figura 11.9a), apenas parece posible que esta escultura no se vuelque. Sin embargo, la vista puede engañarnos, y la densidad de la escultura no es constante. La relación de las densidades de los dos materiales que se usan en la escultura es $\rho_1/\rho_2 = (2\,850 \text{ kg/m}^3)/(440 \text{ kg/m}^3) = 6.48$. Por lo tanto, obtendríamos la misma ubicación para el centro de masa si el cilindro de 2.84 m de longitud hecho de madera se reemplazara por un cilindro de la misma longitud hecho de mármol con su eje central ubicado en el mismo sitio que el del cilindro de madera, pero más delgado por un factor de $\sqrt{6.48} = 2.55$. La escultura que se muestra en la figura 11.11 tiene la misma ubicación del centro de masa que la escultura de la figura 11.9a). La figura 11.11 debe convencerlo de que la escultura puede permanecer erguida en equilibrio estable sin apuntalamiento.



FIGURA 11.11 Escultura hecha completamente de mármol que tiene la misma ubicación del centro de masa que la escultura de mármol y madera de la figura 11.9a).

11.1 Ejercicio en clase

Si una masa puntual se colocara en el extremo derecho del cilindro de madera de la escultura de la figura 11.9a), ¿qué tan grande podría ser esta masa antes de que la escultura se vuelque?

- a) 2.4 kg d) 245 kg
- b) 29.1 kg e) 1 210 kg
- c) 37.5 kg

El siguiente ejemplo considera una situación en la que la fuerza de fricción estática juega un papel esencial. Las fuerzas de fricción estática ayudan a mantener muchas situaciones de objetos en equilibrio.

EJEMPLO 11.4

Persona de pie en una escalera

Por lo común, una escalera se apoya en una superficie horizontal (el piso) y se reclina contra una superficie vertical (la pared). Suponga que una escalera de longitud $\ell = 3.04 \text{ m}$, con masa $m_1 = 13.3 \text{ kg}$, descansa contra una pared lisa en un ángulo $\theta = 24.8^\circ$. Un estudiante, con una masa $m_m = 62.0 \text{ kg}$, está de pie sobre la escalera [figura 11.12a)]. El estudiante se apoya en un escalón que está a una distancia $r = 1.43 \text{ m}$ sobre la escalera, medida desde el punto en que la escalera toca el piso.

PROBLEMA 1

¿Qué fuerza de fricción debe actuar sobre las patas de la escalera para evitar que se deslice? Desprecie la (pequeña) fuerza de fricción entre la pared lisa y la escalera.

SOLUCIÓN 1

Comencemos con el diagrama de cuerpo libre que se muestra en la figura 11.12c). Aquí $\vec{R} = -R\hat{x}$ es la fuerza normal que la pared ejerce sobre la escalera. $\vec{N} = N\hat{y}$ es la fuerza normal que ejerce el piso sobre la escalera, y $\vec{W}_m = -m_m g\hat{y}$ y $\vec{W}_1 = -m_1 g\hat{y}$ son los pesos del estudiante y de la escalera: $m_m g = (62.0 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2) = 608 \text{ N}$ y $m_1 g = (13.3 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2) = 130 \text{ N}$.

Dejaremos que $\vec{f}_s = f_s \hat{x}$ sea la fuerza de fricción estática entre el piso y las patas de la escalera, que es la respuesta al problema. Observe que este vector fuerza se dirige en la dirección x positiva (si la escalera resbala, sus patas se deslizarán en la dirección x negativa, y la fuerza de fricción necesariamente debe oponerse a dicho movimiento). Siguiendo la instrucción, despreciamos la fuerza de fricción entre la pared y la escalera.

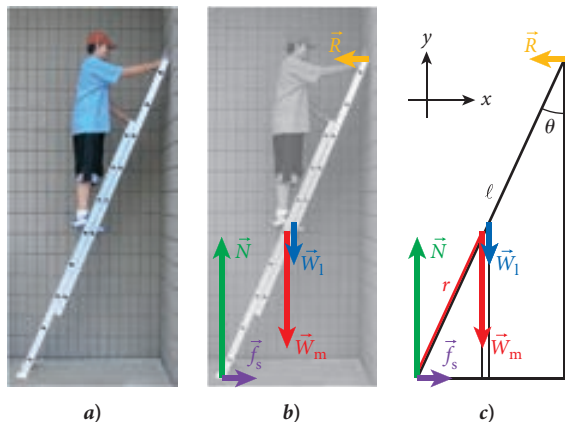


FIGURA 11.12 a) Estudiante de pie en una escalera. b) Vectores fuerza superpuestos. c) Diagrama de cuerpo libre de la escalera.

La escalera y el estudiante están en equilibrio de traslación y de rotación, de modo que tenemos las tres condiciones de equilibrio que se introdujeron en las ecuaciones 11.5 a 11.7:

$$\sum_i F_{x,i} = 0, \quad \sum_i F_{y,i} = 0, \quad \sum_i \tau_i = 0.$$

Comencemos con la ecuación para las componentes de la fuerza en la dirección horizontal:

$$\sum_i F_{x,i} = f_s - R = 0 \Rightarrow R = f_s.$$

Por esta ecuación, aprendemos que la fuerza que ejerce la pared sobre la escalera y la fuerza de fricción entre la escalera y el piso tienen la misma magnitud. En seguida, escribimos la ecuación para las componentes de la fuerza en la dirección vertical:

$$\sum_i F_{y,i} = N - m_m g - m_1 g = 0 \Rightarrow N = g(m_m + m_1).$$

La fuerza normal que ejerce el piso sobre la escalera es exactamente igual en magnitud a la suma de los pesos de la escalera y el hombre: $N = 608 \text{ N} + 130 \text{ N} = 738 \text{ N}$. (De nuevo, despreciamos la fuerza de fricción entre pared y escalera, que de otra manera habría entrado aquí.)

Ahora sumamos los momentos de torsión, suponiendo que el punto pivote se ubica donde la escalera toca el piso. Esta suposición tiene la ventaja de permitirnos ignorar las fuerzas que actúan en ese punto, porque sus brazos de palanca son cero.

$$\sum_i \tau_i = (m_1 g) \left(\frac{\ell}{2} \right) \sin \theta + (m_m g) r \sin \theta - R \ell \cos \theta = 0. \quad (i)$$

Observe que el momento de torsión de la fuerza normal de la pared actúa en sentido antihorario, mientras que los dos momentos de los pesos del estudiante y de la escalera actúan en sentido horario. También, el ángulo entre la fuerza normal, \vec{R} , y su brazo de momento, $\vec{\ell}$, es de $90^\circ - \theta$, y $\sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta$. Ahora despejamos R de la ecuación (i):

$$R = \frac{\frac{1}{2}(m_1 g)\ell \sin \theta + (m_m g)r \sin \theta}{\ell \cos \theta} = \left(\frac{1}{2}m_1 g + m_m g \frac{r}{\ell} \right) \tan \theta.$$

Numéricamente, obtenemos

$$R = \left(\frac{1}{2}(130 \text{ N}) + (608 \text{ N}) \frac{1.43 \text{ m}}{3.04 \text{ m}} \right) (\tan 24.8^\circ) = 162 \text{ N}.$$

Sin embargo, ya encontramos que $R = f_s$, de modo que nuestra respuesta es $f_s = 162 \text{ N}$.

PROBLEMA 2

Suponga que el coeficiente de fricción estática entre la escalera y el piso es de 0.31. ¿Resbalará la escalera?

SOLUCIÓN 2

Encontramos la fuerza normal en la primera parte de este ejemplo: $N = g(m_m + m_1) = 738 \text{ N}$. Está relacionada con la fuerza de fricción estática máxima mediante $f_{s,\text{máx}} = \mu_s N$. De modo que la fuerza de fricción estática máxima es de 229 N, bastante arriba de 162 N que acabamos de encontrar como necesaria para el equilibrio estático. En otras palabras, la escalera no resbalará.

En general, la escalera no resbalará mientras la fuerza de la pared sea más pequeña que la fuerza máxima de fricción estática, lo cual nos lleva a la condición

$$R = \left(\frac{1}{2}m_1 + m_m \frac{r}{\ell} \right) g \tan \theta \leq \mu_s (m_1 + m_m) g. \quad (ii)$$

(continúa)

11.2 Ejercicio en clase

¿Qué puede hacer el estudiante del ejemplo 11.4 si realmente tiene que subir sólo un poco más alto que la altura máxima que permite la ecuación (ii) para la situación dada?

- Puede aumentar el ángulo θ entre la pared y la escalera.
- Puede disminuir el ángulo θ entre la pared y la escalera.
- Ni aumentar ni disminuir el ángulo cambiará la situación.

(continuación)

PROBLEMA 3

¿Qué sucede cuando el estudiante sube más alto en la escalera?

SOLUCIÓN 3

Por la ecuación (ii), vemos que R aumenta al incrementar r . Finalmente, esta fuerza vencerá la fuerza máxima de fricción estática, y la escalera resbalará. Ahora puede usted entender por qué no es buena idea subir demasiado alto en una escalera en una situación como ésta.

11.3 Estabilidad de estructuras



FIGURA 11.13 El puente por el que pasa la carretera Interestatal 35W para atravesar el río Mississippi en Minneapolis se colapsó el 1 de agosto de 2007 durante la hora punta.

Los diseñadores y los constructores necesitan preocuparse por la capacidad de la estructura de los rascacielos o de los puentes para mantenerse de pie bajo la influencia de fuerzas externas. Por ejemplo, después de permanecer erguido durante 40 años, el puente por el que pasaba la carretera Interestatal 35W a través del río Mississippi, en Minneapolis, que se muestra en la figura 11.13, se colapsó el 1 de agosto de 2007, probablemente por causas relacionadas con el diseño. Este colapso del puente y otros desastres arquitectónicos son dolorosos recordatorios de que la estabilidad de las estructuras es una preocupación de suma importancia.

Tratemos de cuantificar el concepto de estabilidad observando la figura 11.14a), que muestra una caja en equilibrio estático apoyada sobre una superficie horizontal. Nuestra experiencia nos dice que si usamos un dedo para empujarla con una pequeña fuerza en la forma que se muestra en la figura, la caja sigue en la misma posición. La pequeña fuerza que ejercemos sobre la caja se equilibra exactamente con la fuerza de fricción entre la caja y la superficie de apoyo. La fuerza neta es cero, y no hay movimiento. Si aumentamos de manera continua la magnitud de la fuerza que aplicamos, hay dos resultados posibles: si la fuerza de fricción no es suficiente para contrarrestar la fuerza que ejerce el dedo, la caja comienza a deslizarse a la derecha. O, si el momento de torsión de la fuerza de fricción alrededor del centro de masa de la caja es menor que el momento de torsión debido a la fuerza aplicada, la caja comienza a inclinarse como se muestra en la figura 11.14b). Así, el equilibrio estático de la caja es estable con respecto a fuerzas externas pequeñas, pero una fuerza externa suficientemente grande destruye el equilibrio.

Este sencillo ejemplo ilustra la característica de la **estabilidad**. Los ingenieros deben poder calcular las fuerzas externas máximas y los momentos de torsión externos máximos que pueden estar presentes sin socavar la estabilidad de una estructura.

Condición cuantitativa para la estabilidad

Para poder cuantificar la estabilidad de una situación de equilibrio, comenzamos con la relación entre energía potencial y fuerza, del capítulo 6:

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}U(\vec{r}).$$

En una dimensión, esto es

$$F_x(x) = -\frac{dU(x)}{dx}.$$

Una fuerza neta nula es una de las condiciones de equilibrio, la cual podemos escribir como

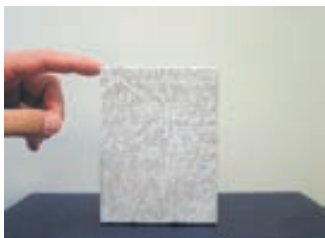
$$\vec{\nabla}U(\vec{r}) \equiv \left(\frac{\partial U(\vec{r})}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial U(\vec{r})}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial U(\vec{r})}{\partial z} \hat{z} \right) = 0, \text{ o como } \frac{dU(x)}{dx} = 0 \text{ en una dimensión, en un punto}$$

dado del espacio. Hasta ahora, la condición de primera derivada nula no nos revela nada nuevo. Sin embargo, podemos usar la segunda derivada de la función de energía potencial para distinguir tres casos diferentes, dependiendo del signo de la segunda derivada.

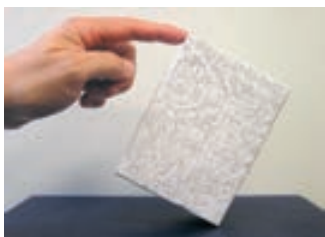
Caso 1 Equilibrio estable

$$\text{Equilibrio estable: } \left. \frac{d^2U(x)}{dx^2} \right|_{x=x_0} > 0. \tag{11.8}$$

Si la segunda derivada de la función de energía potencial respecto a la coordenada es positiva en un punto, entonces la energía potencial tiene un mínimo local en ese punto. El sistema está en **equilibrio estable**. En este caso, una pequeña desviación de la posición de equilibrio crea



a)



b)

FIGURA 11.14 a) Haciendo presión, con una pequeña fuerza, contra el borde superior de una caja. b) Ejercer una fuerza mayor sobre la caja da por resultado inclinarla.

una fuerza restauradora que mueve al sistema de regreso al punto de equilibrio. Esta situación se ilustra en la figura 11.15a): si el punto rojo se aleja de su posición de equilibrio en x_0 ya sea en la dirección positiva o en la negativa y se suelta, regresará a la posición de equilibrio.

Caso 2 Equilibrio inestable

$$\text{Equilibrio inestable: } \left. \frac{d^2U(x)}{dx^2} \right|_{x=x_0} < 0. \tag{11.9}$$

Si la segunda derivada de la función de energía potencial con respecto a la coordenada es negativa en un punto, entonces la energía potencial tiene un máximo local en ese punto. El sistema está en **equilibrio inestable**. En este caso, una pequeña desviación de la posición de equilibrio crea una fuerza que aleja el sistema del punto de equilibrio. Esta situación se ilustra en la figura 11.15b): si el punto rojo se mueve, aunque sea ligeramente, alejándose de su posición de equilibrio en x_0 , ya sea en dirección positiva o negativa, y se suelta, se moverá alejándose de su posición de equilibrio.

Caso 3 Equilibrio neutro

$$\text{Equilibrio neutro: } \left. \frac{d^2U(x)}{dx^2} \right|_{x=x_0} = 0. \tag{11.10}$$

El caso en el que el signo de la segunda derivada de la función de la energía potencial con respecto a la coordenada no es ni positivo ni negativo en un punto se llama **equilibrio neutro**, también llamado *indiferente* o *marginalmente estable*. Esta situación se ilustra en la figura 11.15c): si el punto rojo se desplaza en una pequeña cantidad, ni regresará a su posición original de equilibrio ni se alejará de éste. En vez de esto, simplemente permanecerá en la nueva posición, que también es una posición de equilibrio.

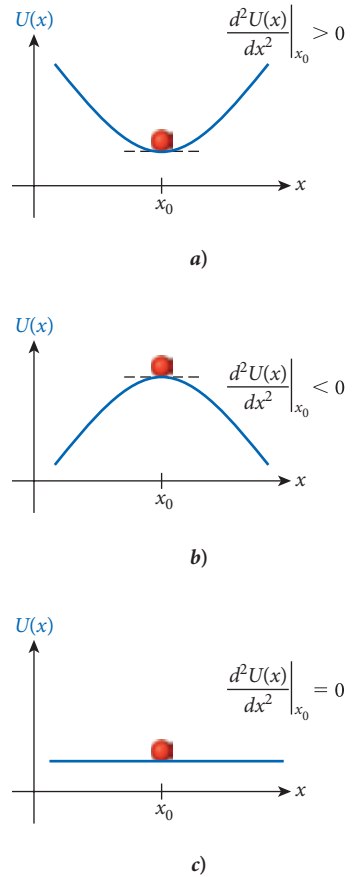


FIGURA 11.15 Forma local de la función de energía potencial en un punto de equilibrio: a) equilibrio estable; b) equilibrio inestable; c) equilibrio neutro.

Superficies multidimensionales y puntos de silla

Los tres casos que acabamos de explicar cubren todos los tipos posibles de estabilidad para sistemas unidimensionales. Se pueden generalizar para funciones de energía potencial bidimensionales y tridimensionales que dependen de más de una coordenada. En vez de ver sólo la derivada con respecto a una coordenada, como en las ecuaciones 11.8 a 11.10, tenemos que examinar todas las derivadas parciales. Para la función de energía potencial bidimensional $U(x, y)$, la condición de equilibrio es que la primera derivada con respecto a cada una de las dos coordenadas sea cero. Además, el equilibrio estable necesita que en el punto de equilibrio, la segunda derivada de la función de energía potencial sea positiva para ambas coordenadas, mientras que el equilibrio inestable implica que es negativa para ambas, y equilibrio neutral significa que es cero para ambas. Los incisos a) a c) de la figura 11.16 muestran estos tres casos, respectivamente.

Sin embargo, en más de una dimensión espacial, también existe la posibilidad de que en un punto de equilibrio la segunda derivada con respecto a una coordenada sea positiva, mientras es negativa para la otra coordenada. Estos puntos se llaman *puntos de silla*, porque la función de energía potencial tiene una forma local como de silla de montar. La figura 11.16d) muestra uno de estos puntos de silla, donde una de las segundas derivadas parciales es negativa y una es positiva. El equilibrio en este punto de silla es estable con respecto a pequeños desplazamientos en la dirección y , pero inestable con respecto a pequeños desplazamientos en la dirección x .

En un sentido estrictamente matemático, las condiciones arriba indicadas para la segunda derivada son suficientes para la existencia de máximos y mínimos, pero no necesarias. A veces, la primera derivada de la función de energía potencial no es continua, pero pueden existir extremos, como muestra el siguiente ejemplo.

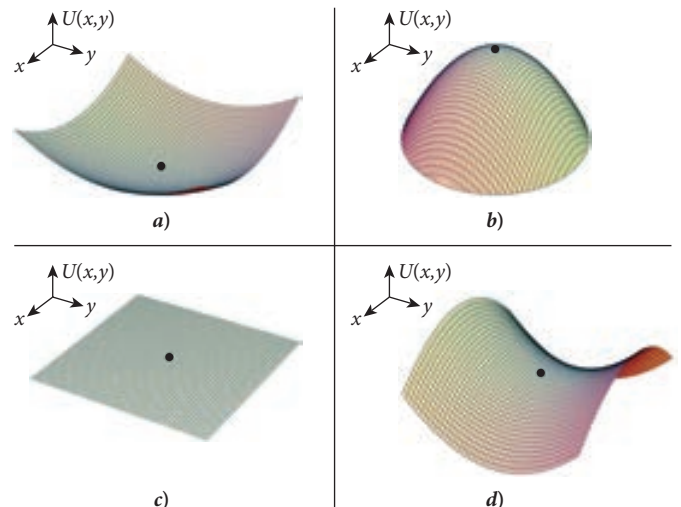


FIGURA 11.16 Diferentes tipos de equilibrio para una función de energía potencial tridimensional.

11.3 Ejercicio en clase

En la figura 11.16, ¿cuál superficie contiene puntos de equilibrio distintos al marcado con el punto negro?

- a) c)
- b) d)

EJEMPLO 11.5 Empuje a una caja

PROBLEMA 1

¿Cuál es la fuerza necesaria para mantener en equilibrio la caja de la figura 11.14 con un ángulo de inclinación dado?

SOLUCIÓN 1

Antes de que el dedo empuje la caja, ésta descansa en una superficie a nivel. Las dos únicas fuerzas que actúan sobre la caja son la fuerza de la gravedad y una fuerza normal que la contrarresta. No hay una fuerza neta ni un momento de torsión neto. La caja está en equilibrio [figura 11.17a)].

Una vez que el dedo empieza a empujar en la dirección horizontal sobre la orilla superior de la caja y la caja empieza a inclinarse, el vector de la fuerza normal actúa en el punto de contacto [figura 11.17b)]. La fuerza de fricción estática actúa en el mismo punto, pero en la dirección horizontal. Como la caja no se desliza, el vector de la fuerza de fricción tiene exactamente la misma magnitud que el vector de la fuerza externa debido al empuje con el dedo, pero actúa en sentido opuesto.

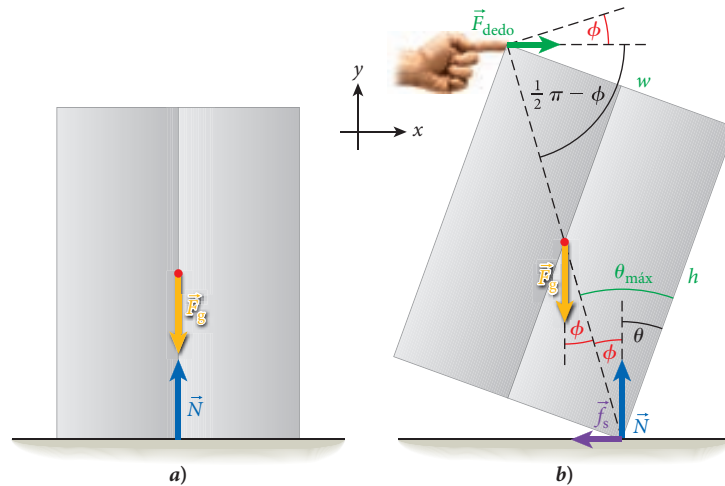


FIGURA 11.17 Diagramas de cuerpo libre para la caja a) apoyada en la superficie a nivel y b) inclinándose por el empuje del dedo en la dirección horizontal.

Ahora podemos calcular los momentos de torsión debidos a estas fuerzas y encontrar la condición para el equilibrio; es decir, cuánta fuerza necesita ejercer el dedo para mantener la caja en un ángulo θ con respecto a la vertical. La figura 11.17b) también indica el ángulo $\theta_{\text{máx}}$, que es una propiedad geométrica de la caja que se puede calcular a partir de la relación de la amplitud w y la altura h : $\theta_{\text{máx}} = \tan^{-1}(w/h)$. De importancia crucial es el ángulo ϕ , que es la diferencia entre estos dos ángulos [vea la figura 11.17b)]: $\phi = \theta_{\text{máx}} - \theta$. El ángulo ϕ disminuye al aumentar θ hasta que $\theta = \theta_{\text{máx}} \Rightarrow \phi = 0$, en cuyo tiempo la caja cae a la posición horizontal.

Usando la ecuación 11.7, podemos calcular el par de torsión neto. El punto pivote natural en esta situación es el punto de contacto entre la caja y la superficie de apoyo. La fuerza de fricción y la fuerza normal tienen entonces brazos de palanca de longitud cero y, por lo tanto, no contribuyen al momento de torsión neto. El único momento de torsión en sentido horario se debe a la fuerza del dedo, y el único momento de torsión en sentido antihorario es resultado de la fuerza de gravedad.

La longitud del brazo de palanca para la fuerza del dedo es [vea la figura 11.17b)] $\ell = \sqrt{h^2 + w^2}$, y la longitud del brazo de palanca para la fuerza de gravedad es la mitad de este valor, o $\ell/2$. Esto significa que la ecuación 11.7 se convierte en

$$(F_g)(\frac{1}{2}\ell) \text{sen } \phi - (F_{\text{dedo}})(\ell) \text{sen } (\frac{1}{2}\pi - \phi) = 0.$$

Podemos usar $\text{sen}(\frac{1}{2}\pi - \phi) = \text{cos } \phi$ y $F_g = mg$ y luego despejar la fuerza que debe suministrar el dedo para mantener la caja en equilibrio en un ángulo dado:

$$F_{\text{dedo}}(\theta) = \frac{1}{2}mg \tan \left[\tan^{-1} \left(\frac{w}{h} \right) - \theta \right]. \tag{i}$$

La figura 11.18 muestra una gráfica de la fuerza del dedo que se necesita para mantener la caja en equilibrio en un ángulo dado, por la ecuación (i) para diferentes relaciones de anchura a altura de la caja. Las curvas reflejan valores del ángulo θ entre cero y $\theta_{\text{máx}}$, que es el punto en el que la fuerza necesaria del dedo es cero, y donde la caja se vuelca.

PROBLEMA 2

Trace la función de energía potencial para esta caja.

SOLUCIÓN 2

Encontrar la solución para esta parte del ejemplo es mucho más sencillo que para la primera parte. La energía potencial es la energía potencial gravitacional, $U = mgy$, donde y es la coordenada vertical del centro de masa de la caja. La figura 11.19 muestra (curva roja) la ubicación del centro de masa de la caja para diferentes ángulos de inclinación. La curva describe un segmento de círculo con centro en la esquina inferior derecha de la caja. La línea roja punteada muestra la misma curva, pero para ángulos $\theta > \theta_{\text{máx}}$, para los cuales la caja se vuelca a la posición horizontal sin que el dedo ejerza una fuerza sobre ella. Usted puede ver claramente que esta función de la energía potencial tiene un máximo en el punto donde la caja está erguida sobre su arista y su centro de masa está exactamente arriba del punto de contacto con la superficie. La curva para la ubicación del centro de masa cuando la caja se inclina a la izquierda se muestra en azul en la figura 11.19. Usted puede ver que la función de energía potencial tiene un mínimo cuando la caja descansa tendida sobre la mesa. *Nota:* En este punto de equilibrio, la primera derivada no existe en sentido matemático, pero es evidente en la figura que la función tiene un mínimo, que es suficiente para equilibrio estable.

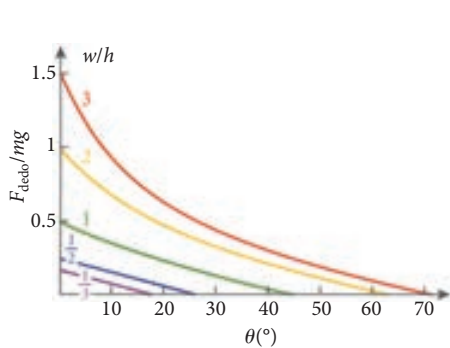


FIGURA 11.18 Relación de la fuerza del dedo al peso de la caja necesaria para mantener la caja en equilibrio como función del ángulo, graficada para diferentes valores representativos de la relación de anchura a altura de la caja.

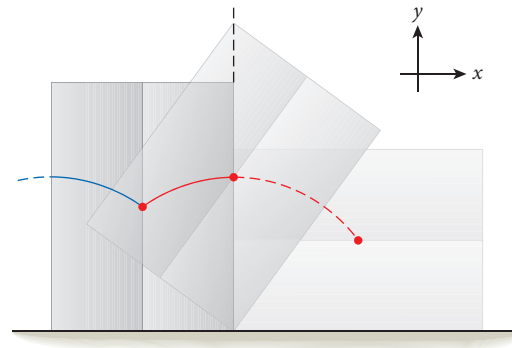


FIGURA 11.19 Ubicación del centro de masa de la caja como función del ángulo de inclinación.

Ajustes dinámicos para la estabilidad

¿Cómo proporciona estabilidad a la estructura el amortiguador de masa en la torre Taipei 101? Para responder a esta pregunta, veamos primero cómo se mantienen erguidos de pie los seres humanos. Cuando usted se pone de pie erguido, su centro de masa está ubicado directamente arriba de sus pies. La fuerza gravitacional no ejerce entonces ningún momento de torsión sobre usted, y así puede permanecer de pie, erguido. Si otras fuerzas actúan sobre usted (un fuerte viento, por ejemplo, o una carga que tiene que levantar) y suministran momentos de torsión adicionales, su cerebro detecta esto mediante los nervios conectados con el líquido que hay en su oído interno, y suministra acción correctiva mediante ligeros cambios en la distribución de la masa corporal. Usted puede obtener una demostración de la impresionante capacidad de su cerebro para hacer estos ajustes dinámicos de estabilidad sosteniendo con el brazo extendido al frente su mochila (cargada de libros, computadora laptop, etc.). Esta acción no le hará caer. Sin embargo, si usted está de pie erguido contra una pared, con sus talones tocando la base de la pared, el mismo intento de levantar su mochila le hará caer hacia delante. ¿Por qué? Porque la pared detrás de usted evita que su cerebro cambie la distribución de masa de su cuerpo con objeto de compensar el momento de torsión debido al peso de la mochila.

11.4 Oportunidad de autoexamen

¿Cuál es el valor mínimo que puede tener el coeficiente de fricción estática si la caja en el ejemplo 11.5 ha de volcarse, y la relación de la anchura a la altura de la caja es 0.4?



FIGURA 11.20 El Segway proporciona ajustes dinámicos de estabilidad.

Los mismos principios de ajuste dinámico de estabilidad se incorporan en el transporte humano Segway (figura 11.20); un sistema innovador en dos ruedas que se energiza eléctricamente y puede alcanzar velocidades hasta de 12 mph. Igual que el cerebro de usted, el Segway detecta su orientación en relación con la vertical. Pero usa giróscopos en vez del fluido del oído interno. Y, del mismo modo que el cerebro, contrarresta un momento de torsión neto proporcionando un momento de torsión de compensación en la dirección opuesta. El Segway logra esto haciendo girar sus ruedas ligeramente en dirección horaria o antihoraria.

Finalmente, el amortiguador de masa en la parte superior de la torre Taipei 101 se usa de manera similar, para proporcionar un sutil corrimiento en la distribución de masa del edificio, contribuyendo así a la estabilidad en presencia de momentos de torsión externos debidos a las fuerzas de vientos fuertes. Pero también amortigua la oscilación del edificio debida a estas fuerzas, un tema al que volveremos en el capítulo 14.

LO QUE HEMOS APRENDIDO | GUÍA DE ESTUDIO PARA EXAMEN

- El equilibrio estático es equilibrio mecánico para el caso especial en el que el objeto en equilibrio está en reposo.
- Un objeto (o un conjunto de objetos) puede estar en equilibrio estático sólo si la fuerza externa neta es cero y el momento de torsión externo neto es cero:

$$\vec{F}_{\text{neto}} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = 0$$

$$\vec{\tau}_{\text{neto}} = \sum_i \vec{\tau}_i = 0$$

- La condición para el equilibrio estático se puede también expresar como $\vec{\nabla}U(\vec{r})|_{\vec{r}_0} = 0$; es decir, la primera derivada de gradiente de la función de energía potencial respecto al vector de posición es cero en el punto de equilibrio.

- La condición para equilibrio estable es que la función de energía potencial tenga un mínimo en ese punto. Una condición suficiente para la estabilidad es que la segunda derivada de la función de potencial con respecto a la coordenada en el punto de equilibrio sea positiva.
- La condición para el equilibrio inestable es que la función de energía potencial tenga un máximo en ese punto. Una condición suficiente para la inestabilidad es que la segunda derivada de la función de potencial con respecto a la coordenada en el punto de equilibrio sea negativa.
- Si la segunda derivada de la función de energía potencial con respecto a la coordenada es cero en el punto de equilibrio, este tipo de equilibrio se llama neutral (o indiferente, o marginalmente estable).

TÉRMINOS CLAVE

equilibrio estático, p. 355
estabilidad, p. 366

equilibrio estable, p. 366
equilibrio inestable, p. 367

equilibrio neutro, p. 367

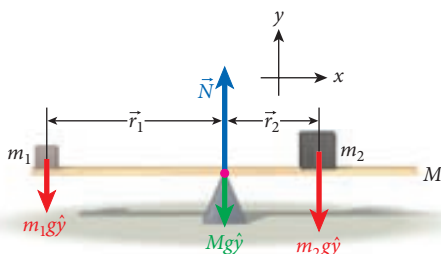
NUEVOS SÍMBOLOS Y ECUACIONES

$\vec{F}_{\text{neto}} = 0$, primera condición para el equilibrio estático

$\vec{\tau}_{\text{neto}} = 0$, segunda condición para el equilibrio estático

RESPUESTAS A LAS OPORTUNIDADES DE AUTOEXAMEN

11.1 Elija que el punto pivote esté en la ubicación de m_2 .



$$F_{\text{neto},y} = \sum_i F_{i,y} = -m_1g - m_2g - Mg + N = 0$$

$$\Rightarrow N = g(m_1 + m_2 + M) = m_1g + m_2g + Mg$$

$$\tau_{\text{neto}} = \sum_i \tau_{\text{horario},i} - \sum_j \tau_{\text{antihorario},j}$$

$$\tau_{\text{neto}} = Nr_2 \text{ sen } 90^\circ - m_1g(r_1 + r_2) \text{ sen } 90^\circ - Mgr_2 \text{ sen } 90^\circ = 0$$

$$Nr_2 = m_1gr_1 + m_1gr_2 + Mgr_2$$

$$(m_1g + m_2g + Mg)r_2 = m_1gr_2 + m_2gr_2 + Mgr_2 = m_1gr_1 + m_1gr_2 + Mgr_2$$

$$\cancel{m_1gr_2} + m_2gr_2 + \cancel{Mgr_2} = m_1gr_1 + \cancel{m_1gr_2} + \cancel{Mgr_2}$$

$$m_2 \cancel{r_2} = m_1 \cancel{r_1}$$

$$m_2 r_2 = m_1 r_1.$$

11.2 El bíceps sigue teniendo un brazo de momento diferente de cero incluso cuando el brazo está totalmente extendido, porque el tendón tiene que arrollarse alrededor de la articulación del codo y, por lo tanto, nunca es paralelo al radio.

11.3 La pila tendría $(10\,000)(4\text{ cm}) = 400\text{ m}$ de altura, comparable a los rascacielos más altos. Y la orilla derecha del bloque más alto sobresaldría

$$\frac{1}{2}(15\text{ cm}) \sum_{i=1}^{10\,000} \frac{1}{i} = \frac{1}{2}(15\text{ cm})(9.78761) = 73.4\text{ cm}.$$

11.4 Por la figura 11.18 podemos ver que la fuerza necesaria es máxima al principio, para $\theta = 0$. Si hacemos $\theta = 0$ en la ecuación (i) del ejemplo 11.5, encontramos la fuerza inicial que el dedo necesita aplicar para desplazar la caja del equilibrio:

$$F_{\text{dedo}}(0) = \frac{1}{2}mg \tan \left[\tan^{-1} \left(\frac{w}{h} \right) - 0 \right] = \frac{1}{2}mg \left(\frac{w}{h} \right).$$

Se necesita un coeficiente de fricción de por lo menos $\mu_s = \frac{1}{2}(w/h)$ para dar una fuerza de fricción correspondiente que evite que la caja se deslice por la superficie de apoyo: $\mu_s = \frac{1}{2}(0.4) = 0.2$.

PRÁCTICA PARA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Lineamientos de problemas resueltos: equilibrio estático

1. Casi todos los problemas de equilibrio estático incluyen suma de fuerzas en las direcciones de las coordenadas, sumar momentos de torsión e igualar a cero las sumas. Sin embargo, la elección correcta de ejes de coordenadas y de punto pivote para los momentos de torsión puede ser decisiva para tener una solución difícil y una fácil. Generalmente, escoger un punto pivote que elimine el brazo de palanca de una fuerza desconocida (¡y a veces más de una fuerza!) simplificará las

ecuaciones de manera que usted pueda despejar algunas componentes de fuerzas.

2. El paso clave para escribir ecuaciones correctas para situaciones de equilibrio estático es dibujar un diagrama de cuerpo libre correcto. Tenga cuidado acerca de las ubicaciones de los puntos de aplicación de las fuerzas; como participan los momentos de torsión, usted debe representar los objetos como cuerpos extensos, no partículas puntuales, y el punto de aplicación de una fuerza cambia la situación. Verifique cada fuerza para asegurarse de que se ejerza *sobre* el objeto y no *por* el objeto.

PROBLEMA RESUELTO 11.2 Letrero colgante

No es poco común que los establecimientos comerciales cuelguen un letrero arriba de la acera, suspendido de una pared frontal de un edificio. A veces fijan un poste a la pared mediante un gozne y lo mantienen horizontal mediante un cable que también está fijado a la pared: luego el letrero se cuelga del poste. Suponga que la masa del letrero de la figura 11.21a) es $M = 33.1\text{ kg}$, y la masa del poste es $m = 19.7\text{ kg}$. La longitud del poste es $l = 2.40\text{ m}$, y el letrero se fija al poste como se muestra, a una distancia $r = 1.95\text{ m}$ de la pared. El cable está fijado a la pared a una distancia $d = 1.14\text{ m}$ arriba del poste.

PROBLEMA

¿Cuál es la tensión en el cable que sostiene el poste? ¿Cuál es la magnitud y la dirección de la fuerza, \vec{F} , que ejerce la pared sobre el poste?

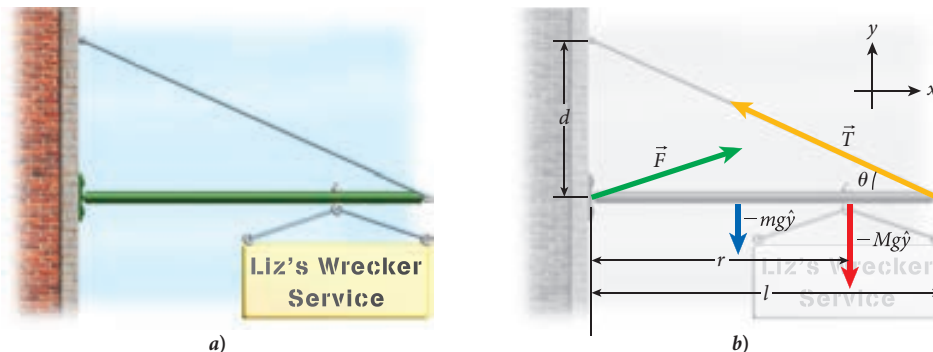


FIGURA 11.21 a) Letrero suspendido frente al negocio; b) diagrama de cuerpo libre para el poste.

(continúa)

(continuación)

SOLUCIÓN**PIENSE**

Este problema incluye equilibrio estático, brazos de palanca y momentos de torsión. Equilibrio estático significa hacer desaparecer la fuerza externa neta y el momento de torsión. Para determinar los momentos de torsión, tenemos que escoger un punto pivote. Parece natural elegir el punto en que el gozne fija el poste a la pared. Como se usa gozne, el poste puede girar alrededor de ese punto. Elegir este punto tiene también la ventaja de que no necesitamos poner atención a la fuerza que ejerce la pared sobre el poste, porque dicha fuerza actuará en el punto de contacto (el gozne) y por lo tanto tiene un brazo de palanca cero y, consecuentemente, su aportación al momento de torsión es nula.

ESBOCE

Para calcular el momento de torsión neto, comenzamos con un diagrama de cuerpo libre que muestra todas las fuerzas que actúan sobre el poste [figura 11.21*b*]. Sabemos que el peso del letrero (flecha roja) actúa en el punto donde el letrero está suspendido del poste. La fuerza gravitacional que actúa sobre el poste está representada por la flecha azul, que señala hacia abajo desde el centro de masa del poste. Finalmente, sabemos que la tensión de cuerda, \vec{T} (flecha amarilla) actúa a lo largo de la dirección del cable.

INVESTIGUE

El ángulo θ entre el cable y el poste [vea la figura 11.21*b*] se puede encontrar por los datos dados:

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{d}{l} \right).$$

La ecuación para los momentos de torsión alrededor del punto donde el poste toca la pared es entonces

$$mg \frac{l}{2} \sin 90^\circ + Mgr \sin 90^\circ - Tl \sin \theta = 0. \quad (i)$$

La figura 11.21*b* también muestra una flecha verde para la fuerza, \vec{F} , que la pared ejerce sobre el poste; pero la dirección y la magnitud de esta fuerza todavía están por determinarse. La ecuación (i) no se puede usar para encontrar esta fuerza, porque el punto donde actúa esta fuerza es el punto pivote y, por lo tanto, el brazo de palanca correspondiente tiene una longitud cero.

Por otro lado, una vez que hayamos encontrado la tensión en el cable, habremos determinado todas las otras fuerzas que participan en la situación del problema, y sabemos, por la condición de equilibrio estático, que la fuerza neta tiene que ser cero. Podemos así escribir ecuaciones separadas para las componentes horizontal y vertical de las fuerzas. En la dirección horizontal, tenemos sólo dos componentes de fuerzas, de la tensión en la cuerda y de la fuerza de la pared:

$$F_x - T \cos \theta = 0 \Rightarrow F_x = T \cos \theta.$$

En la dirección vertical tenemos los pesos del poste y del letrero, además de las componentes verticales de la tensión en la cuerda y de la fuerza de la pared:

$$F_y + T \sin \theta - mg - Mg = 0 \Rightarrow F_y = (m + M)g - T \sin \theta.$$

SIMPLIFIQUE

Despejamos la tensión de la ecuación (i):

$$T = \frac{(ml + 2Mr)g}{2l \sin \theta}. \quad (ii)$$

Para la magnitud de esta fuerza que ejerce la pared sobre el poste, encontramos

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}.$$

La dirección de esta fuerza está dada por

$$\theta_F = \tan^{-1} \left(\frac{F_y}{F_x} \right).$$

CALCULE

Al sustituir los números dados en el planteamiento del problema, encontramos el ángulo θ :

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{1.14 \text{ m}}{2.40 \text{ m}} \right) = 25.4^\circ.$$

Obtenemos la tensión en el cable de la ecuación (ii):

$$T = \frac{[(19.7 \text{ kg})(2.40 \text{ m}) + 2(33.1 \text{ kg})(1.95 \text{ m})](9.81 \text{ m/s}^2)}{2(2.40 \text{ m})(\text{sen} 25.4^\circ)} = 840.351 \text{ N}.$$

Las magnitudes de las componentes de la fuerza que ejerce la pared sobre el poste son

$$F_x = (840.351 \text{ N})(\cos 25.4^\circ) = 759.119 \text{ N}$$

$$F_y = (19.7 \text{ kg} + 33.1 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2) - (840.351 \text{ N})(\text{sen} 25.4^\circ) = 157.512 \text{ N}.$$

Por lo tanto, la magnitud y la dirección de dicha fuerza están dadas por

$$F = \sqrt{(157.512 \text{ N})^2 + (759.119 \text{ N})^2} = 775.288 \text{ N}$$

$$\theta_F = \tan^{-1} \left(\frac{759.119}{157.512} \right) = 11.7^\circ.$$

REDONDEE

Todas las cantidades dadas se especificaron a tres cifras significativas, de modo que redondeamos nuestras respuestas finales a tres dígitos: $T = 840 \text{ N}$ y $F = 775 \text{ N}$.

VUELVA A REVISAR

Las dos fuerzas que hemos calculado tienen magnitudes bastante grandes, considerando que el peso combinado del poste y el letrero fijado son sólo

$$F_g = (m + M)g = (19.7 \text{ kg} + 33.1 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2) = 518 \text{ N}.$$

De hecho, la suma de las magnitudes de la fuerza del cable sobre el poste, T , y la fuerza de la pared sobre el poste, F , es mayor que el peso combinado del poste y el letrero por un factor de más de 3. ¿Esto tiene sentido? Sí, porque los dos vectores de fuerzas, \vec{T} y \vec{F} , tienen componentes horizontales bastante grandes que se deben cancelar mutuamente. Cuando calculamos las magnitudes de estas fuerzas, también se incluyen sus componentes horizontales. Al tender a cero el ángulo θ entre el cable y el poste, las componentes horizontales de \vec{T} y \vec{F} se vuelven más y más grandes. Entonces usted puede ver que seleccionar una distancia d en la figura 11.21b) que sea demasiado pequeña en relación con la longitud del poste dará por resultado una enorme tensión en el cable y un sistema de suspensión sometido a un esfuerzo bastante grande.

11.4 Ejercicio en clase

Si todos los demás parámetros en el problema resuelto 11.2 permanecen sin cambio, pero el letrero se mueve más lejos de la pared hacia el extremo del poste, ¿qué pasa con la tensión, T ?

- a) Disminuye.
- b) Sigue igual.
- c) Aumenta.

11.5 Ejercicio en clase

Si todos los demás parámetros en el problema resuelto 11.2 permanecen sin cambio pero se aumenta el ángulo θ entre el cable y el poste, ¿qué pasa con la tensión, T ?

- a) Disminuye.
- b) Sigue igual.
- c) Aumenta.

PREGUNTAS DE OPCIÓN MÚLTIPLE

11.1 Una escoba de 3.0 kg está reclinada contra una mesa de café. Una mujer levanta el mango de la escoba con su brazo totalmente extendido, de modo que su mano está a una distancia de 0.45 m de su hombro. ¿Qué momento de torsión se produce en su hombro si su brazo está en un ángulo de 50° debajo de la horizontal?

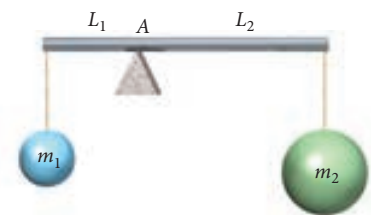
- a) 7.0 N m
- b) 5.8 N m
- c) 8.5 N m
- d) 10.1 N m

11.2 Una viga uniforme de masa M y longitud L se mantiene en equilibrio estático, de modo que la magnitud del momento de torsión neto alrededor de su centro de masa es cero. La magnitud del momento de torsión neto sobre esta viga en uno de sus extremos, a una distancia de $L/2$ de su centro de masa, es

- a) MgL .
- b) $MgL/2$.
- c) cero.
- d) $2MgL$.

11.3 Una varilla muy ligera y rígida pivota en el punto A y cuelgan de ella las pesas m_1 y m_2 , como se muestra en la figura. La relación del peso de m_1 al de m_2 es de 1:2. ¿Cuál es la relación de L_1 a L_2 , las distancias del punto pivote a m_1 y m_2 , respectivamente?

- a) 1:2
- b) 2:1
- c) 1:1
- d) No hay suficiente información para determinarla.

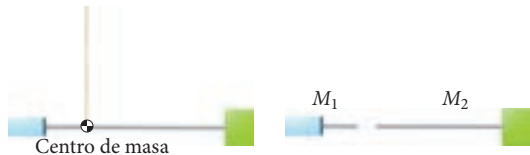


11.4 ¿Cuáles de los siguientes objetos están en equilibrio estático?

- a) Un péndulo en la altura máxima de su oscilación.
- b) Un carrusel girando a velocidad angular constante.

- c) Un proyectil en el ápice de su trayectoria (con velocidad cero).
- d) Todos los anteriores.
- e) Ninguno de los anteriores.

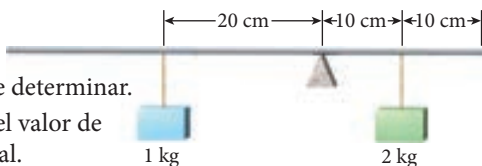
11.5 El objeto en la figura de abajo está suspendido por su centro de masa; por lo tanto, está equilibrado. Si el objeto se corta en dos trozos en su centro de masa, ¿cuál es la relación entre las dos masas resultantes?



- a) Las masas son iguales.
- b) La masa M_1 es menor que M_2 .
- c) La masa M_2 es menor que M_1 .
- d) Es imposible decirlo.

11.6 Como se muestra en la figura, dos pesos están suspendidos de una barra uniforme de madera de 60 cm de longitud, que tiene una masa de 100 g. ¿Este sistema está en equilibrio?

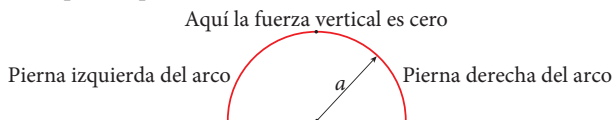
- a) Sí.
- b) No.
- c) No se puede determinar.
- d) Depende del valor de la fuerza normal.



PREGUNTAS

11.9 Hay tres conjuntos de tren de aterrizaje en un avión. Un conjunto principal está ubicado bajo el eje de simetría de cada ala, y el tercero debajo de la nariz del avión. Cada tren de aterrizaje principal tiene cuatro neumáticos, y el tren de aterrizaje de la nariz tiene dos neumáticos. Si la carga sobre todos los neumáticos es igual cuando el avión está en reposo, encuentre el centro de masa del avión. Expresé su resultado como fracción de la distancia perpendicular entre el eje de simetría de las alas del avión al tren de aterrizaje de la nariz del avión. (Suponga que los puntales de los trenes de aterrizaje son verticales cuando el avión está en reposo y que las dimensiones del tren de aterrizaje son despreciables en comparación con las dimensiones del avión.)

11.10 Un arco semicircular de radio a se yergue sobre el suelo a nivel como se muestra en la figura. El arco es uniforme en sección transversal y en densidad, con un peso total W . Por simetría, en el ápice del arco, cada una de las dos piernas ejerce sólo fuerzas horizontales sobre la otra; idealmente, el esfuerzo en ese punto es compresión uniforme sobre la sección transversal del arco. ¿Cuáles son las componentes vertical y horizontal de la fuerza que se debe aplicar en la base de cada pierna para soportar el arco?

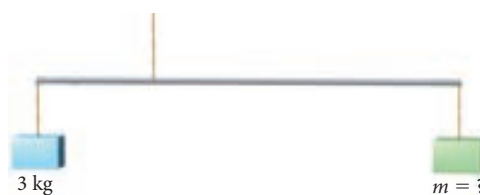


11.7 Un niño de 15 kg está sentado en un balancín de parque de juegos, a 2.0 m del pivote. Otro niño ubicado a 1.0 m en el otro lado del pivote tendría que tener una masa de _____ para levantar del piso al primer niño.

- a) Mayor de 30 kg.
- b) Menor de 30 kg.
- c) Igual a 30 kg.

11.8 Se construye un balancín (escultura cinética) con una barra metálica y dos bloques de madera, como se muestra en la figura. La barra tiene una masa de 1 kg, y una longitud de 10 cm. Tiene un bloque de madera de 3 kg suspendido del extremo izquierdo y una cuerda atada a una distancia de 3 cm del extremo izquierdo. ¿Qué masa debe tener el bloque de madera que cuelga del extremo derecho de la barra para mantener nivelada la barra?

- a) 0.7 kg
- b) 0.8 kg
- c) 0.9 kg
- d) 1.0 kg
- e) 1.3 kg
- f) 3.0 kg
- g) 7.0 kg



11.11 En ausencia de cualquier simetría o de otras restricciones sobre las fuerzas que participan, ¿cuántas componentes de fuerzas incógnitas se pueden determinar en una situación de equilibrio estático en cada uno de los siguientes casos?

- a) Todas las fuerzas y objetos están en un plano.
- b) Las fuerzas y los objetos están en tres dimensiones.
- c) Las fuerzas actúan en n dimensiones espaciales.

11.12 Usted tiene una vara métrica que está en equilibrio en la marca de 55 cm. ¿Su vara métrica es homogénea?

11.13 Usted tiene una vara métrica que está en equilibrio en la marca de 50 cm. ¿Es posible que su vara métrica sea no homogénea?

11.14 ¿Por qué un helicóptero con un solo rotor principal generalmente tiene un segundo rotor pequeño en la cola?

11.15 El sistema que se muestra en la figura consiste en una tabla rectangular uniforme (homogénea) que se apoya en dos cilindros giratorios idénticos. Los dos cilindros giran en sentidos opuestos con velocidades angulares iguales. Al inicio, la tabla está colocada en forma perfectamente simétrica respecto al punto central entre los dos cilindros. ¿Es ésta una posición de equilibrio de la tabla? Si la respuesta es sí, ¿está en equilibrio estable o inestable? ¿Qué sucede si se le



da a la tabla un desplazamiento muy ligero fuera de la posición inicial?

11.16 Si el viento sopla con fuerza del este, se logra equilibrio estable para un paraguas abierto si su eje apunta al oeste. ¿Por qué es relativamente fácil sostener el paraguas en forma directa hacia el viento (en este caso, del este), pero muy difícil sostenerlo de manera perpendicular al viento?

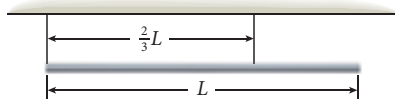
11.17 Un escultor y su asistente cargan una losa de mármol en forma de cuña por una escalera, como se muestra en la figura. La densidad del mármol es uniforme. Ambos están tirando en forma vertical hacia arriba mientras mantienen la losa completamente estacionaria por un momento. ¿El escultor tiene que ejercer más fuerza que el asistente para mantener la losa estacionaria? Explique.



11.18 Como se muestra en la figura, una varilla delgada de masa M y longitud L está suspendida por dos alambres: uno en el extremo izquierdo y el otro a dos tercios de la distancia entre el extremo izquierdo y el derecho.

a) ¿Cuál es la tensión en cada alambre?

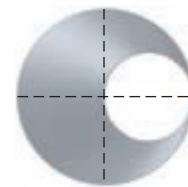
b) Determine la masa que tendría que tener un objeto suspendido por una cuerda del extremo derecho de la varilla para que la tensión del alambre del lado izquierdo fuera cero.



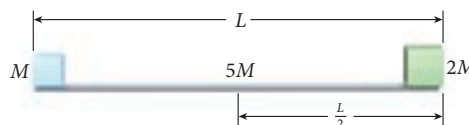
11.19 Un disco uniforme de masa M_1 y radio R_1 tiene un hoyo circular de radio R_2 , cortado como se muestra en la figura.

a) Encuentre el centro de masa del objeto resultante.

b) ¿Cuántas posiciones de equilibrio tiene este objeto cuando se apoya sobre su borde? ¿Cuáles son estables, cuáles neutrales y cuáles inestables?



11.20 Considere el sistema que se muestra en la figura. Si se coloca un punto pivote a una distancia $L/2$ de los extremos de la varilla de longitud L y masa $5M$, el sistema girará en sentido horario. Así, para que el sistema no gire, el punto pivote se debe colocar lejos del centro de la varilla. ¿En qué dirección desde el centro de la varilla se debe colocar el punto pivote? ¿A qué distancia del centro de la varilla se debe colocar el punto pivote para que el sistema no gire? (Trate las masas M y $2M$ como masas punto.)



11.21 Un niño tiene un juego de bloques todos hechos del mismo tipo de madera. Los bloques vienen en tres formas: un cubo de lado L , una pieza del tamaño de dos cubos y una pieza equivalente en tamaño a tres de los cubos colocados lado a lado. El niño apila tres bloques como se muestra en la figura: un cubo abajo, uno de los bloques más largos de manera horizontal encima del cubo y el bloque de tamaño medio colocado en forma vertical encima. Los centros de cada bloque están inicialmente en línea vertical. ¿Qué tan lejos se puede deslizar el bloque superior a lo largo del bloque de en medio antes de que éste se incline?



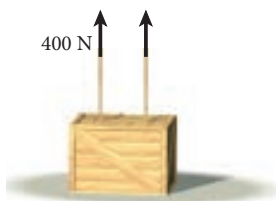
11.22 ¿Por qué los antiguos egipcios no construyeron sus pirámides cabeza abajo? En otras palabras, use los principios de fuerza y centro de masa para explicar por qué es más ventajoso construir edificios con bases amplias y cúspides angostas que a la inversa.

PROBLEMAS

Una • y dos •• indican un nivel creciente de dificultad del problema.

Sección 11.1

11.23 Un cajón de 1 000 N reposa sobre un piso horizontal. Se está tirando de él hacia arriba mediante dos sogas verticales. La soga izquierda tiene una tensión de 400 N. Suponiendo que el cajón no se separa del suelo, ¿qué puede usted decir acerca de la tensión en la soga derecha?



11.24 En preparación para una demostración sobre conservación de la energía, un profesor fija una bola de boliche de 5.00 kg a una cuerda de 4.00 m de longitud. Tira de la bola a 20.0° de la vertical y mantiene la bola mientras explica los principios de física pertinentes. Suponiendo que la fuerza que ejerce sobre la bola es completamente en la dirección horizon-

tal, encuentre la tensión en la cuerda y la fuerza que el profesor ejerce sobre la bola.

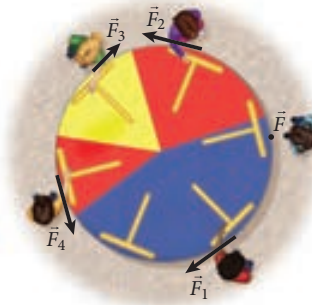
11.25 Un escultor y su asistente se detienen para una pausa mientras cargan una losa de mármol de longitud $L = 2.00$ m y masa de 75.0 kg por una escalera, como se muestra en la figura. La masa de la losa está uniformemente distribuida a lo largo de su longitud. Mientras descansan, tanto el escultor como su asistente tiran *directamente hacia arriba* de cada extremo de la losa, que está a un ángulo de 30.0° respecto a la horizontal. ¿Cuáles son las magnitudes de las fuerzas que



el escultor y su asistente deben ejercer sobre la losa de mármol para mantenerla estacionaria durante su pausa?

11.26 Durante un picnic, usted y dos de sus amigos deciden realizar un juego de las cuerdas de tres vías, con tres cuerdas en medio atadas en un nudo. Roberta tira hacia el oeste con 420 N de fuerza; Michael tira hacia el sur con 610 N. ¿En qué dirección y con qué magnitud de fuerza debe usted tirar para evitar que se mueva el nudo?

11.27 La figura muestra una foto con un típico tiiovivo como el que se encuentra en muchos parques de juegos, y un diagrama con una vista aérea. Cuatro niños están de pie sobre el suelo y tirando del tiiovivo como se indica por las flechas de fuerzas. Las cuatro fuerzas tienen las magnitudes $F_1 = 104.9$ N, $F_2 = 89.1$ N, $F_3 = 62.8$ N y $F_4 = 120.7$ N. Todas las fuerzas actúan en dirección tangencial. ¿Con qué fuerza, \vec{F} , también en dirección tangencial y actuando en el punto negro, tiene que tirar un quinto niño para impedir que se mueva el tiiovivo? Especifique la magnitud de la fuerza y diga si la fuerza actúa en sentido horario o antihorario.

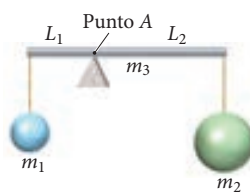


11.28 Un escotillón de un escenario tiene una masa de 19.2 kg y una anchura de 1.50 m (del lado de bisagras al lado de la manija). La puerta se puede considerar con espesor y densidad uniformes. Una pequeña manija en la puerta está a 1.41 m del lado de las bisagras. Una cuerda está atada a la manija y se usa para levantar la puerta. En un instante, la cuerda está horizontal, y el escotillón se ha abierto parcialmente, de modo que la manija está 1.13 m arriba del piso. ¿Cuál es la tensión, T , en la cuerda en ese momento?



11.29 Una varilla rígida de masa m_3 está pivotada en el punto A, y las masas m_1 y m_2 están suspendidas de la varilla como se muestra en la figura.

- ¿Cuál es la fuerza normal que actúa sobre el punto pivote?
- ¿Cuál es la relación de L_1 a L_2 donde éstas son las distancias del punto pivote a m_1 y m_2 , respectivamente? La relación de los pesos de m_1 , m_2 y m_3 es 1:2:3.



11.30 Cuando sólo las ruedas delanteras de un automóvil están sobre una báscula de plataforma, la báscula se equilibra en 8.0 kN; cuando sólo están las ruedas traseras sobre la báscula, se equilibra a 6.0 kN. ¿Cuál es el peso del automóvil, y a

qué distancia detrás del eje frontal está su centro de masa? La distancia entre los ejes es de 2.8 m.

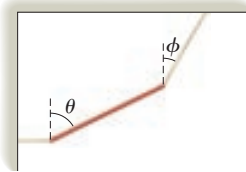
11.31 Considerando los momentos de torsión alrededor de su hombro, estime la fuerza que deben ejercer sus músculos deltoides (los que están en la parte superior del hombro) sobre el hueso de su brazo superior, para mantener su brazo extendido a nivel del hombro. Luego, estime la fuerza que deben ejercer los músculos para sostener un peso de 10.0 lb a la longitud del brazo. Usted necesitará estimar la distancia del punto pivote de su hombro al punto donde sus músculos deltoides se conectan con su brazo superior, con objeto de determinar las fuerzas necesarias. Suponga que los deltoides son los únicos músculos que contribuyen.

11.32 Un triángulo equilátero uniforme con longitud de lado de 2.00 m y peso de $4.00 \cdot 10^3$ N se coloca a través de una brecha. Un vértice está en el lado norte de la brecha, y el lado opuesto en el lado sur. Encuentre la fuerza en cada lado.

Sección 11.2

11.33 Un albañil de 600.0 N está a 1.5 m de un extremo de un andamio uniforme que tiene 7.0 m de longitud y pesa 800.0 N. Una pila de ladrillos que pesa 500.0 N está a 3.0 m del mismo extremo del andamio. Si el andamio está apoyado por ambos extremos, calcule la fuerza en cada extremo.

11.34 La varilla uniforme de la figura está suspendida de dos cuerdas. La cuerda fijada en la pared es horizontal, y la cuerda fijada al techo forma un ángulo ϕ con respecto a la vertical. La varilla está inclinada de la vertical en un ángulo θ . Si $\phi = 30.0^\circ$, ¿cuál es el valor de θ ?

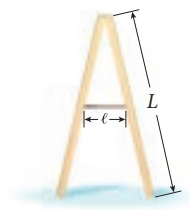


11.35 Un supervisor de construcción de masa $M = 92.1$ kg está de pie sobre una tabla de masa $m = 27.5$ kg. La tabla está apoyada en dos borriquetes que están a una distancia $\ell = 3.70$ m uno de otro. Si el hombre está a una distancia $x_1 = 1.07$ m del borriquete izquierdo, como se muestra en la figura, ¿cuál es la fuerza que ejerce la tabla sobre el borriquete?



11.36 En una carnicería, una barra horizontal de acero con masa de 4.00 kg y longitud de 1.20 m está soportada por dos alambres verticales fijados a sus extremos. El carnicero cuelga una salchicha con masa de 2.40 kg de un gancho que está a una distancia de 0.20 m del extremo izquierdo de la barra. ¿Cuáles son las tensiones en los dos alambres?

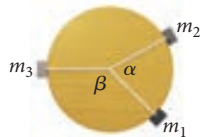
11.37 Dos tablones uniformes, cada uno con masa m y longitud L , se conectan por una bisagra en su parte superior y por una cadena de masa despreciable en sus centros, como se muestra en la figura. El conjunto se colocará erguido, en forma de A, sobre una superficie sin



fricción sin plegarse. Como función de la longitud de la cadena, encuentre lo siguiente:

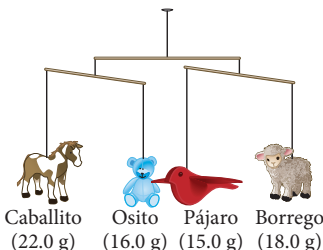
- a) La tensión en la cadena;
- b) la fuerza sobre la bisagra de cada tablón, y
- c) la fuerza del suelo sobre cada tablón.

•11.38 Tres cuerdas se atan juntas. Están encima de una mesa circular, y el nudo está exactamente en el centro de la mesa, como se muestra en la figura (vista aérea). Cada cuerda cuelga por el borde de la mesa, con una pesa suspendida de ella. Las masas $m_1 = 4.30$ kg y $m_2 = 5.40$ kg se conocen. El ángulo $\alpha = 74^\circ$ entre las cuerdas 1 y 2 también se conoce. ¿Cuál es el ángulo β entre las cuerdas 1 y 3?



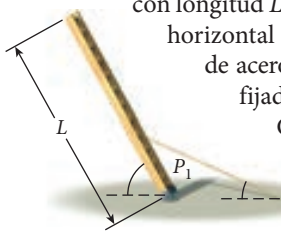
•11.39 Una escalera uniforme de 10.0 m de longitud está apoyada contra una pared sin fricción en un ángulo de 60.0° sobre la horizontal. El peso de la escalera es de 20.0 lb. Un niño de 61.0 lb sube 4.00 m por la escalera. ¿Cuál es la magnitud de la fuerza friccional que ejerce el piso sobre la escalera?

•11.40 Robin está construyendo un móvil para colgarlo sobre la cuna de su hermanita bebé. Compró cuatro animales de peluche: un osito (16.0 g), un borrego (18.0 g), un caballito (22.0 g) y un pájaro (15.0 g). También compró tres pequeñas varillas de madera, cada una de 15.0 cm de longitud y 5.00 g de masa, e hilo de masa despreciable. Ella quiere colgar el oso y el caballito de los extremos de una varilla, y el borrego y el pájaro de los extremos de la segunda varilla. Luego, quiere suspender las dos varillas de los extremos de la tercera varilla y colgar todo el conjunto del techo. Explique dónde se debe fijar el hilo en cada varilla de manera que todo el conjunto cuelgue a nivel.



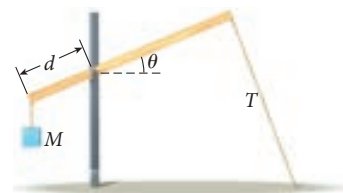
•11.41 Una puerta, esencialmente un rectángulo uniforme con altura de 2.00 m, anchura de 0.80 m y peso de 100.0 N, está soportada por una orilla por dos bisagras, una a 30.0 cm arriba de la base de la puerta y la otra a 170.0 cm arriba de la base de la puerta. Calcule las componentes horizontales de las fuerzas sobre las dos bisagras.

•11.42 La figura muestra una escalera uniforme de 20.0 kg con longitud L unida por bisagras a una plataforma horizontal en el punto P_1 y sujeta por un cable de acero de la misma longitud de la escalera fijado en el punto medio de la escalera. Calcule la tensión en el cable y las fuerzas en la bisagra cuando una persona de 80.0 kg está de pie a $\frac{3}{4}$ de la longitud de la escalera.

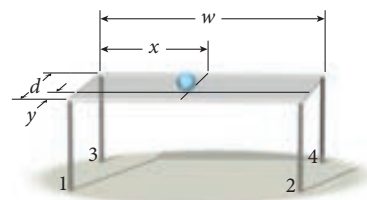


•11.43 Una viga con longitud de 8.00 m y masa de 100. kg está fijada mediante un perno grande a un soporte a una distancia de 3.00 m de un extremo. La viga forma un ángulo $\theta = 30.0^\circ$ con la horizontal, como se muestra en la figura. Una masa $M = 500.$ kg está fijada con una cuerda a un extremo de

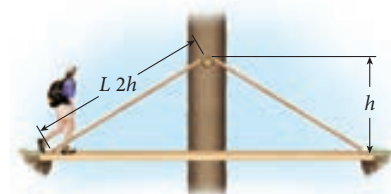
la viga, y la segunda cuerda está fijada en ángulo recto al otro extremo de la viga. Encuentre la tensión T en la segunda cuerda, y la fuerza que ejerce el perno sobre la viga.



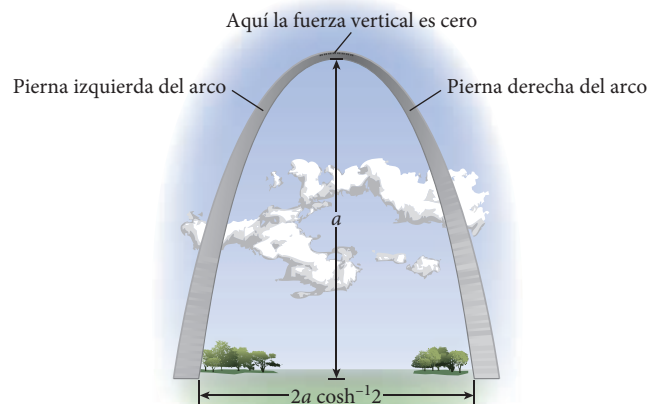
•11.44 Una bola con masa de 15.49 kg reposa sobre una mesa de 0.72 m de altura. La parte superior de la mesa es una placa rectangular de vidrio de 12.13 kg de masa apoyada en los vértices por patas delgadas, como se muestra en la figura. La anchura de la mesa es $w = 138.0$ cm, y su fondo es $d = 63.8$ cm. Si la bola toca la mesa en un punto $(x, y) = (69.0$ cm, 16.6 cm) relativo al vértice 1, ¿cuál es la fuerza que ejerce la mesa sobre cada pata?



•11.45 Un puente de madera que cruza un cañón consiste en un tablón con densidad longitudinal $\lambda = 2.00$ kg/m suspendida a $h = 10.0$ m debajo de una rama de árbol por dos sogas de longitud $L = 2h$ y con una tensión nominal máxima de 2 000. N, que están fijadas a los extremos del tablón, como se muestra en la figura. Un caminante entra al puente desde el lado izquierdo, haciendo que el puente se incline en un ángulo de 25.0° respecto a la horizontal. ¿Cuál es la masa del caminante?



•11.46 El famoso arco Gateway en St. Louis, Missouri, es aproximadamente una *catenaria invertida*. Un simple ejemplo de tal curva está dado por $y(x) = 2a - a \cosh(x/a)$, donde y es la altura vertical y x es la distancia horizontal, medidas desde un punto directamente bajo el ápice de la curva; así, x varía de $-a \cosh^{-1} 2$ a $+a \cosh^{-1} 2$, con a como la altura del ápice



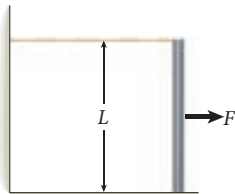
de la curva (vea la figura). Suponga que un arco de sección transversal uniforme y densidad uniforme, con peso total W tiene esta forma. Las dos piernas del arco ejercen sólo fuerzas horizontales una sobre otra en el ápice; idealmente, el esfuerzo en ese punto debe ser de compresión uniforme a través de la sección transversal.

- Calcule las componentes vertical y horizontal de las fuerzas que actúan en la base de cada pierna de este arco.
- ¿Con qué ángulo debe orientarse la cara inferior de las piernas?

Sección 11.3

11.47 Un librero uniforme rectangular de altura H y anchura $W = H/2$ se va a empujar a velocidad constante por un piso a nivel. El librero se empuja horizontalmente por su orilla superior, a una distancia H sobre el piso. ¿Cuál es el valor máximo que puede tener el coeficiente de fricción cinética entre el librero y el piso para que el librero no se vuelque al ser empujado?

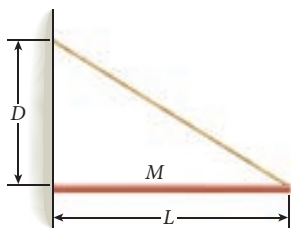
11.48 El sistema que se encuentra en la figura está en equilibrio estático. La varilla de longitud L y masa M se sostiene en posición vertical. La parte superior de la varilla está atada a una superficie vertical fija mediante una cuerda, y se aplica una fuerza F en el punto medio de la varilla. El coeficiente de fricción estática entre la varilla y la superficie horizontal es μ_s . ¿Cuál es la fuerza máxima, F , que se puede aplicar y hacer que la varilla permanezca en equilibrio estático?



11.49 Una escalera con masa de 37.7 kg y longitud de 3.07 m está apoyada contra una pared en un ángulo θ . El coeficiente de fricción estática entre la escalera y el piso es de 0.313; suponga que la fuerza de fricción entre la escalera y el techo es cero. ¿Cuál es el valor máximo que θ puede tener antes de que la escalera comience a deslizarse?



11.50 Un poste rígido uniforme de longitud L y masa M se va a soportar de una pared vertical en posición horizontal, como se muestra en la figura. El poste no está fijado directamente a la pared, de modo que el coeficiente de fricción estática, μ_s , entre la pared y el poste, da la única fuerza vertical en un extremo del poste. El otro extremo del poste está soportado por una cuerda ligera que está fijada a la pared en un punto que está a una



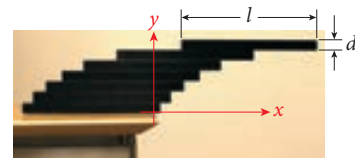
distancia D directamente arriba del punto donde el poste toca la pared. Determine el valor mínimo de μ_s , como función de L y D , que mantendrá el poste horizontal y no permitirá que su extremo se deslice hacia abajo por la pared.

11.51 Un niño que pesa 60.0 lb juega sobre un tablón. El tablón pesa 30.0 lb, es uniforme, tiene una longitud de 8.00 ft y descansa sobre dos apoyos, uno a 2.00 ft del extremo izquierdo y el otro a 2.00 ft del extremo derecho.

- Si el niño está a 3.00 ft del extremo izquierdo, ¿qué fuerza ejerce cada soporte?
- El niño se mueve hacia el extremo derecho. ¿Qué tan lejos puede ir antes de que se incline el tablón?

11.52 Una pista tiene una altura que es función de la posición horizontal x , dada por $h(x) = x^3 + 3x^2 - 24x + 16$. Encuentre todas las posiciones sobre la pista en las que una canica permanecerá donde se le coloca. ¿Qué clase de equilibrio existe en cada una de estas posiciones?

11.53 La figura muestra una pila de siete bloques de aluminio idénticos, cada uno con una longitud l = 15.9 cm y espesor d = 2.2 cm, apilados sobre una mesa.



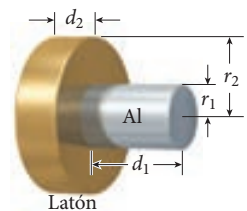
- ¿Qué tan lejos a la derecha de la orilla de la mesa es posible que se extienda el borde izquierdo del bloque más alto (séptimo)?
- ¿Cuál es la altura mínima de una pila de estos bloques para la cual la orilla izquierda del bloque superior está a la derecha de la orilla derecha de la mesa?

11.54 Usted está usando una escalera de 5.00 m de largo para pintar el exterior de su casa. El punto de contacto entre la escalera y la pared de su casa está a 4.00 m arriba del piso. La escalera tiene una masa de 20.0 kg. Si el peso de usted es de 60.0 kg y está de pie a tres cuartos de la longitud de la escalera, determine

- las fuerzas que ejercen la pared y el piso sobre la escalera, y
- el coeficiente de fricción estática entre el piso y la base de la escalera que es necesario para mantener estable la escalera.

11.55 Una escalera de masa M y longitud $L = 4.00$ m está sobre un piso a nivel, apoyada contra una pared vertical. El coeficiente de fricción estática entre la escalera y el piso es $\mu_s = 0.600$, mientras que la fricción entre la escalera y la pared es despreciable. La escalera está a un ángulo $\theta = 50.0^\circ$ sobre la horizontal. Un hombre de masa $3M$ comienza a subir por la escalera. ¿A qué distancia en la escalera puede subir el hombre antes de que la escalera comience a resbalarse sobre el piso?

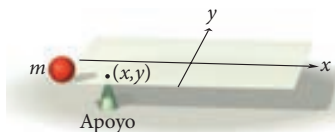
11.56 Un tornero hace un objeto como el que se muestra en la figura. El cilindro de mayor diámetro es de latón (densidad de 8.60 g/cm³); el cilindro de menor diámetro es de aluminio (densidad de 2.70 g/cm³). Las dimensiones son $r_1 = 2.00$ cm, $r_2 = 4.00$ cm, $d_1 = 20.0$ cm y $d_2 = 4.00$ cm.



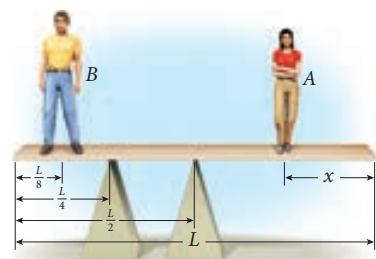
- Encuentre la ubicación del centro de masa.
- Si el objeto está sobre su lado, como se muestra en la figura, ¿está en equilibrio? Si la respuesta es afirmativa, ¿es equilibrio estable?

11.57 Un objeto está restringido a moverse en una dimensión. Su posición se especifica a lo largo del eje x . La energía potencial del objeto como función de su posición está dada por $U(x) = a(x^4 - 2b^2x^2)$, donde a y b representan números positivos. Determine la(s) ubicación(es) de cualquier punto de equilibrio y clasifique el equilibrio en cada punto como estable, inestable o neutro.

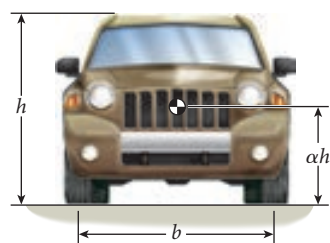
•11.58 Un objeto bidimensional con densidad de masa uniforme tiene la forma de un cuadrado delgado y una masa de 2.00 kg. Los lados del cuadrado miden cada uno 20.0 cm. El sistema de coordenadas tiene su origen en el centro del cuadrado. Una masa puntual, m , de $2.00 \cdot 10^2$ g está colocada en una esquina del objeto cuadrado, y el conjunto se mantiene en equilibrio ajustando la posición del apoyo en la posición (x,y) como se muestra en la figura. Encuentre la ubicación del apoyo.



•11.59 Las personas A y B están de pie sobre una tabla de densidad lineal uniforme equilibrada sobre los dos apoyos, como se muestra en la figura. ¿Cuál es la distancia máxima x desde el lado derecho de la tabla a la cual puede colocarse la persona A sin inclinar la tabla? Considere las personas A y B como masas puntuales. La masa de la persona B es el doble de la de la persona A, y la masa de la tabla es la mitad de la de la persona A. Dé sus respuestas en términos de L , la longitud de la tabla.



•11.60 Una SUV tiene una altura h y una base de ruedas de longitud b . Su centro de masa está a mitad de camino entre las ruedas y a una distancia αh arriba del piso, donde $0 < \alpha < 1$. La SUV entra a una vuelta con una rapidez peligrosamente alta, v . El radio de la curva es R ($R \gg b$), y el camino es plano. El coeficiente de fricción estática entre el camino y los neumáticos correctamente inflados es μ_s . Después de entrar a la curva, la SUV se deslizará fuera de la curva o empezará a volcarse.



a) La SUV se deslizará fuera de la curva si la fuerza de fricción alcanza su valor máximo, $F \rightarrow \mu_s N$. Determine la rapidez, v_{desliz} por la cual sucederá esto. Suponga que no hay volcadura.

b) El momento de torsión que evita que se vuelque la SUV actúa sobre la rueda

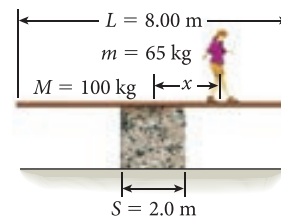
exterior. El valor más alto que puede tener esta fuerza es igual a la fuerza normal completa. Determine la rapidez, v_{volc} a la cual ocurrirá esto. Suponga que no hay deslizamiento.

c) Es más seguro si la SUV se desliza fuera de la curva antes de volcarse. Esto ocurrirá mientras $v_{\text{desliz}} < v_{\text{volc}}$. Aplique esta condición y determine el valor máximo para α en términos de b , h y μ_s .

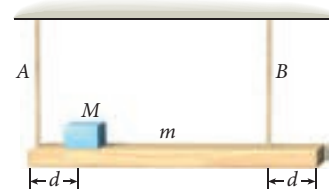
Problemas adicionales

11.61 Un tablón de madera con longitud $L = 8.00$ m y masa $M = 100$. kg está centrado en un cubo de granito con lado

$S = 2.00$ m. Una persona de masa $m = 65.0$ kg comienza a caminar desde el centro del tablón hacia afuera, como se muestra en la figura. ¿Qué tan lejos del centro del tablón llega la persona antes que el tablón comience a inclinarse?



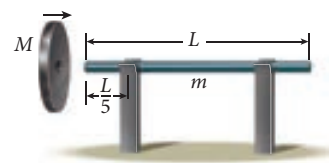
11.62 Una tabla con peso $mg = 120.0$ N y longitud de 5.00 m, está suspendida de dos cuerdas verticales, como se muestra en la figura. La cuerda A está conectada a un extremo de la tabla, y la cuerda B está conectada a una distancia $d = 1.00$ m desde el final de la tabla.



Una caja con peso $Mg = 20.0$ N se coloca sobre la tabla con su centro de masa a $d = 1.00$ m de la cuerda A. ¿Cuáles son las tensiones en las dos cuerdas?

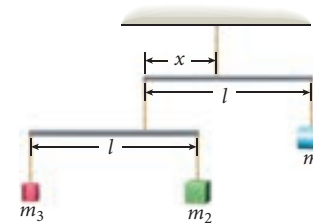
11.63 En un auto, que acelera a 5.00 m/s², cuelga un aromatizante de aire del espejo retrovisor, con una cuerda que mantiene un ángulo constante respecto a la vertical. ¿Cuál es este ángulo?

11.64 Los conjuntos típicos de pesas que se usan para ejercicio consisten en pesas en forma de discos con hoyos en el centro que se pueden deslizar en barras de 2.2 m. Una barra está soportada por bastidores ubicados a una quinta parte de su longitud desde cada lado, como se muestra en la figura. ¿Cuál es la masa mínima m de la barra para que un usuario inserte una pesa con $M = 22$ kg en un extremo sin que la altera se incline fuera del bastidor? Suponga que la barra es uniforme.



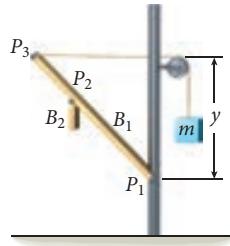
11.65 Una tabla de 5.00 m de longitud con masa de 50.0 kg se usa como balancín. Al lado izquierdo del balancín se sienta una chica de 45.0 kg, y del lado derecho un muchacho de 60.0 kg. Determine la posición del punto pivote para equilibrio estático.

11.66 Un móvil consiste en dos varillas muy ligeras de longitud $l = 0.400$ m conectadas entre sí y al techo mediante cuerdas verticales. (Desprecie las masas de las varillas y de las cuerdas.) Tres objetos están suspendidos por cuerdas de las varillas. Las masas de los objetos 1 y 3 son $m_1 = 6.40$ kg y $m_3 = 3.20$ kg. La distancia x que se muestra en la figura es de 0.160 m. ¿Cuál es la masa de m_2 ?



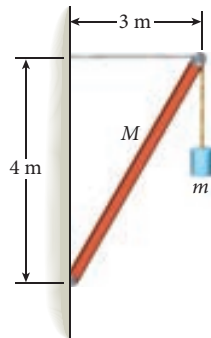
•11.67 En el arreglo experimental que se muestra en la figura, una viga, B_1 , de masa desconocida M_1 y longitud $L_1 = 1.00$ m, pivota alrededor de su punto más bajo en P_1 . Una segunda viga, B_2 , de masa $M_2 = 0.200$ kg y longitud $L_2 = 0.200$ m, está suspendida (pivotada) de B_1 en un punto P_2 que está a una dis-

tancia horizontal $d = 0.550$ m de P_1 . Para mantener el sistema en equilibrio, se tiene que suspender una masa $m = 0.500$ kg de una cuerda sin masa que corre horizontalmente de P_3 a la parte superior de la viga B_1 y pasa por una polea sin fricción. La cuerda corre a una distancia vertical $y = 0.707$ m arriba del punto pivote P_1 . Calcule la masa de la viga B_1 .



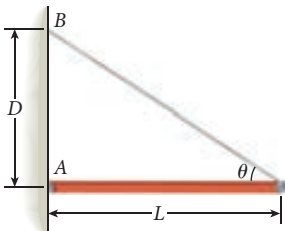
•11.68 Una característica importante de la condición de equilibrio estático es el hecho de que el momento de torsión neto tiene que ser cero sin que importe la elección de punto pivote. Para el arreglo del problema 11.67, pruebe que el momento de torsión sea ciertamente cero con respecto al punto pivote en P_1 , P_2 o P_3 .

•11.69 Un extremo de una viga pesada de masa $M = 50.0$ kg está unida con un gozne a una pared vertical, y el otro extremo lleva atado un cable de longitud 3.0 m, como se muestra en la figura. El otro extremo del cable también está fijado a la pared a una distancia de 4.0 m arriba de la bisagra. Se cuelga una masa $m = 20.0$ kg de un extremo de la viga, mediante una cuerda.

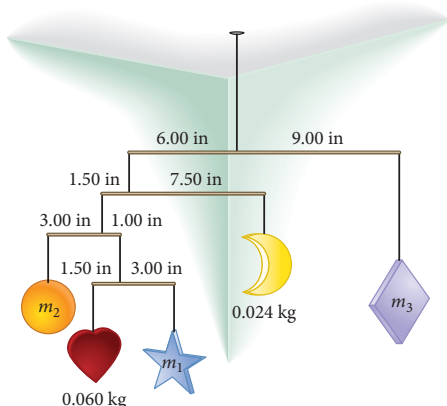


- Determine las tensiones en el cable y en la cuerda.
- Encuentre la fuerza que ejerce la bisagra sobre la viga.

•11.70 Una barra uniforme de 100. kg, con longitud $L = 5.00$ m, está fijada en una pared mediante un gozne en el punto A y soportada en posición horizontal por un cable ligero fijado en su otro extremo. El cable está fijado a la pared en el punto B, a una distancia $D = 2.00$ m arriba del punto A. Encuentre: a) la tensión, T , en el cable, y b) las componentes horizontal y vertical de la fuerza que actúa sobre la barra en el punto A.

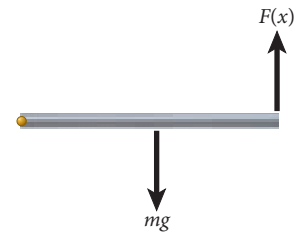


•11.71 Un móvil sobre la cuna de un bebé exhibe pequeñas formas de colores. ¿Qué valores se necesitan para m_1 , m_2 y m_3



para mantener el móvil en equilibrio (con todas las varillas horizontales)?

•11.72 Considere la varilla de longitud L que se muestra en la figura. La masa de la varilla es $m = 2.00$ kg, y el punto pivote está ubicado en el extremo izquierdo (en $x = 0$). Con objeto de evitar que la varilla gire, se le aplica una fuerza variable dada por $F(x) = (15.0 \text{ N})(x/L)^4$. ¿En qué punto x de la varilla se debe aplicar la fuerza para evitar que gire?



•11.73 Un tubo con longitud de 2.20 m y masa de 8.13 kg está suspendido horizontalmente sobre un escenario mediante dos cadenas, cada una ubicada a 0.20 m de un extremo. Se sujetan al tubo dos luces de teatro de 7.89 kg, una a 0.65 m del extremo izquierdo y la otra a 1.14 m del mismo extremo izquierdo. Calcule la tensión en cada cadena.

•11.74 Un trampolín para clavados de 2.00 m de longitud y masa de 12.0 kg está a 3.00 m arriba del agua. Tiene dos sujetadores que lo mantienen en su sitio. Uno está ubicado en el extremo posterior del trampolín, y el otro está a 25.0 cm de dicho extremo.

- Suponiendo que el trampolín tiene densidad uniforme, encuentre las fuerzas que actúan en cada sujetador (tome la dirección hacia abajo como positiva).
- Si un nadador con masa de 65.0 kg está de pie en el extremo frontal, ¿cuáles son las fuerzas que actúan sobre los dos sujetadores?

•11.75 Una caja de 20.0 kg con una altura de 80.0 cm y una anchura de 30.0 cm tiene un asa en el lado, que está a 50.0 cm arriba del suelo. La caja está en reposo, y el coeficiente de fricción estática entre la caja y el piso es de 0.28.

- ¿Cuál es la fuerza mínima, F , que se puede aplicar al asa para que la caja se incline sin deslizarse?
- ¿En qué dirección se debe aplicar esta fuerza?

••11.76 El desplazamiento angular de un resorte torsional es proporcional al momento de torsión aplicado; es decir $\tau = \kappa\theta$, donde κ es una constante. Suponga que dicho resorte está montado en un brazo que se mueve en un plano vertical. La masa del brazo es de 45.0 g, y su longitud es de 12.0 cm. El sistema brazo-resorte está en equilibrio con el brazo en un desplazamiento angular de 17.0° respecto a la horizontal. Si se cuelga del brazo una masa de 0.420 kg a 9.00 cm del eje, ¿cuál será el desplazamiento angular en la nueva posición de equilibrio (relativo a la posición con el resorte sin carga)?

Gravitación

12



FIGURA 12.1 La puesta de Tierra fotografiada el 7 de noviembre de 2007, por el satélite japonés Kaguya, orbitando a la Luna. La Tierra y la Luna orbitan una alrededor de la otra y se mantienen juntas por su interacción gravitacional.

LO QUE APRENDEREMOS	382
12.1 La ley de gravitación de Newton	382
Superposición de fuerzas gravitacionales	383
El Sistema Solar	385
Ejemplo 12.1 Influencia de los objetos celestes	386
12.2 Gravitación cerca de la superficie terrestre	387
Ejemplo 12.2 Tirón gravitatorio de un agujero negro	389
12.3 Gravitación dentro de la Tierra	389
12.4 Energía potencial gravitacional	391
Velocidad de escape	392
Ejemplo 12.3 Impacto de un asteroide	394
Potencial gravitacional	395
12.5 Las leyes de Kepler y el movimiento planetario	395
Añadido matemático: elipses	396
Problema resuelto 12.1 Periodo orbital de Sedna	398
Ejemplo 12.4 El agujero negro en el centro de la Vía Láctea	399
La segunda ley de Kepler y la conservación del momento angular	400
12.6 Órbitas satelitales	400
Problema resuelto 12.2 Satélite en órbita	401
Energía de un satélite	402
Órbita de los satélites geoestacionarios	402
Problema resuelto 12.3 Antena de TV satelital	403
12.7 Materia oscura	405
LO QUE HEMOS APRENDIDO/ GUÍA DE ESTUDIO PARA EXAMEN	407
Práctica para resolución de problemas	408
Problema resuelto 12.4 Astronauta en una luna pequeña	408
Preguntas de opción múltiple	410
Preguntas	411
Problemas	412

LO QUE APRENDEREMOS

- La interacción gravitacional entre dos masas puntuales es proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa.
- La fuerza gravitacional sobre un objeto dentro de una esfera sólida homogénea aumenta de manera lineal con la distancia a la que el objeto se encuentra del centro de la esfera sólida.
- En la superficie terrestre es una muy buena aproximación usar un valor constante para la aceleración debida a la gravedad (g). El valor de g usado para las situaciones de caída libre puede verificarse a partir de la ley de la fuerza gravitacional más general.
- Una expresión más general para la energía potencial gravitacional indica que es inversamente proporcional a la distancia entre dos objetos.
- La rapidez de escape es la rapidez mínima con la que debe lanzarse un proyectil para escapar hacia el infinito.
- Las tres leyes de movimiento planetario de Kepler afirman que los planetas se mueven en órbitas elípticas con el Sol en un punto focal; que el radio vector que conecta al Sol con el planeta recorre áreas iguales en tiempos iguales; y que el cuadrado del periodo orbital para cualquier planeta es proporcional al cubo de su semieje mayor orbital.
- Las energías cinética, potencial y total de los satélites en órbita tienen una relación fija unas con otras.
- Hay evidencia de una gran cantidad de materia oscura y energía oscura en el universo.

La figura 12.1 muestra a la Tierra poniéndose sobre el horizonte lunar, fotografiada por un satélite orbitando a la Luna. Estamos tan acostumbrados a ver a la Luna en el cielo que es un poco sorprendente ver a la Tierra en el cielo. De hecho, los astronautas en la Luna no ven la salida de la Tierra o la puesta de la Tierra porque la Luna siempre mantiene la misma cara vuelta hacia la Tierra. Sólo los astronautas orbitando a la Luna pueden ver a la Tierra dando la apariencia de cambiar de posición y salir o ponerse. Sin embargo, la imagen nos recuerda que, como todas las fuerzas, la fuerza de gravedad es una atracción mutua entre dos objetos; la Tierra tira de la Luna, pero la Luna también tira de la Tierra.

Hemos examinado fuerzas en términos generales en los capítulos anteriores. En este capítulo, nos enfocamos en una fuerza en particular, la fuerza de gravedad, la cual es una de las cuatro fuerzas fundamentales en la naturaleza. La gravedad es la más débil de estas cuatro fuerzas (dentro de los átomos, por ejemplo, la gravedad es despreciable en relación con las fuerzas electromagnéticas), pero opera sobre todas las distancias y es siempre la fuerza de atracción entre objetos con masa (a diferencia de la interacción electromagnética, en la cual las cargas pueden ser positivas o negativas, resultando así en fuerzas que pueden ser atractivas o repulsivas y tienden a sumar cero para la mayoría de los cuerpos macroscópicos). Como resultado de esto, la fuerza gravitacional es de importancia primaria sobre las vastas distancias y para las enormes masas de los estudios astronómicos.

La figura 12.2 es una imagen del centro de nuestra galaxia obtenida con el telescopio espacial infrarrojo Spitzer, basado en el espacio. El centro galáctico contiene un agujero negro supermasivo y el conocimiento de la interacción gravitacional permite a los astrónomos calcular que la masa de este agujero negro tiene de manera aproximada un billón de veces la masa terrestre o aproximadamente, 3.7 millones de veces la masa solar. (El ejemplo 12.4 muestra cómo llegaron los científicos a esta conclusión. Un agujero negro es un objeto tan masivo y denso que nada puede escapar de su superficie, ni siquiera la luz.)



FIGURA 12.2 El centro de nuestra galaxia, la Vía Láctea, el cual contiene un agujero negro supermasivo. El tamaño de la región mostrada aquí es de 890 por 640 años luz. El Sistema Solar se encuentra a 26 000 años luz de distancia del centro de la galaxia.

12.1 La ley de gravitación de Newton

Hasta ahora, hemos encontrado la fuerza gravitacional sólo en la forma de una constante de aceleración gravitatoria, $g = 9.81 \text{ m/s}^2$, multiplicada por la masa del objeto sobre la cual actúa la fuerza. Sin embargo, a partir de los videos de los astronautas corriendo y saltando sobre la Luna (figura 12.3), sabemos que la fuerza gravitacional es diferente ahí. Por lo tanto, la aproximación que hemos usado de una fuerza gravitacional constante que depende sólo de la masa del objeto sobre el que actúa la fuerza es incorrecta lejos de la superficie terrestre.

La expresión general para la magnitud de la interacción gravitacional entre dos masas puntuales, m_1 y m_2 , a la distancia $r = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$ entre ambas (figura 12.4) es

$$F(r) = G \frac{m_1 m_2}{r^2}. \quad (12.1)$$

Esta relación, conocida como la **ley de gravitación de Newton**, es una ley empírica, deducida a partir de experimentos y verificada extensamente. La constante de proporcionalidad G se llama **constante de gravitación universal** y tiene el valor (hasta cuatro cifras significativas)

$$G = 6.674 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2. \quad (12.2)$$

Dado que $1 \text{ N} = 1 \text{ kg m/s}^2$, podemos escribir también este valor como $G = 6.674 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}$. La ecuación 12.1 dice que la intensidad de la interacción gravitacional es proporcional al producto de cada una de las masas involucradas en la interacción y es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellas. Por ejemplo, al duplicar una de las masas se duplicará la fuerza de la interacción, mientras que duplicando la distancia se reducirá la fuerza de la interacción por un factor de 4.

Debido a que la fuerza es un vector, la dirección de la fuerza gravitacional debe especificarse. La fuerza gravitacional $\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$ actuando del objeto 2 sobre el objeto 1 siempre actúa en dirección del objeto 2. Podemos expresar este concepto en la forma de una ecuación:

$$\vec{F}_{2 \rightarrow 1} = F(r)\hat{r}_{21} = F(r)\frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}.$$

Combinando este resultado con la ecuación 12.1 resulta en

$$\vec{F}_{2 \rightarrow 1} = G \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1). \quad (12.3)$$

La ecuación 12.3 es la forma general de la fuerza gravitacional actuando sobre el objeto 1 debida al objeto 2. Es estrictamente válida para partículas puntuales, lo mismo que para objetos extensos con simetría esférica, en cuyo caso, el vector de posición es la posición del centro de masa. Es también una buena aproximación para objetos extensos no esféricos, representados por sus coordenadas del centro de masa, siempre y cuando la separación entre los dos objetos sea grande en relación con sus tamaños individuales. Note que el centro de gravedad es idéntico al centro de masas para objetos con simetría esférica.

El capítulo 4 introdujo la tercera ley de Newton: La fuerza $\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$ ejercida sobre el objeto 2 por el objeto 1 debe ser de la misma magnitud y de la dirección opuesta a la fuerza $\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$ ejercida sobre el objeto 1 por el objeto 2:

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\vec{F}_{2 \rightarrow 1}.$$

Usted puede ver que la fuerza descrita por la ecuación 12.3 cumple con los requisitos de la tercera ley de Newton al intercambiar los índices 1 y 2 en todas las variables (F , m y r) y observando que la magnitud de la fuerza permanece igual, pero el signo cambia. La ecuación 12.3 gobierna el movimiento de los planetas alrededor del Sol, lo mismo que el movimiento de objetos en caída libre cerca de la superficie terrestre.

Superposición de fuerzas gravitacionales

Si más de un objeto tiene una interacción gravitacional con el objeto 1, podemos calcular la fuerza gravitacional total sobre el objeto 1 usando el **principio de superposición**, el cual establece que la suma vectorial de todas las fuerzas gravitacionales sobre un objeto específico produce la fuerza gravitacional total sobre ese objeto. Esto es, para encontrar la fuerza gravitacional total que actúa sobre un objeto, simplemente sumamos las contribuciones de todos los otros objetos:

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{2 \rightarrow 1} + \vec{F}_{3 \rightarrow 1} + \cdots + \vec{F}_{n \rightarrow 1} = \sum_{i=2}^n \vec{F}_{i \rightarrow 1}. \quad (12.4)$$

Las fuerzas individuales $\vec{F}_{i \rightarrow 1}$ pueden encontrarse a partir de la ecuación 12.3:

$$\vec{F}_{i \rightarrow 1} = G \frac{m_i m_1}{|\vec{r}_i - \vec{r}_1|^3} (\vec{r}_i - \vec{r}_1).$$

A la inversa, la fuerza gravitacional total sobre cualquiera de los n objetos que experimentan una interacción gravitacional mutua puede escribirse como

$$\vec{F}_j = \sum_{i=1, i \neq j}^n \vec{F}_{i \rightarrow j} = G \sum_{i=1, i \neq j}^n \frac{m_i m_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3} (\vec{r}_i - \vec{r}_j). \quad (12.5)$$



FIGURA 12.3 El comandante John Young del *Apolo 16* salta sobre la superficie lunar y saluda a la bandera de Estados Unidos, el 20 de abril de 1972.

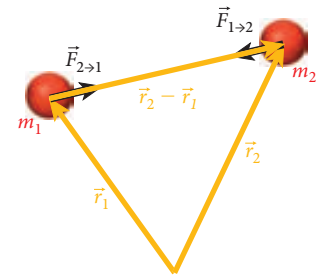


FIGURA 12.4 Las interacciones gravitacionales de dos masas puntuales.

La notación “ $i \neq j$ ” bajo el símbolo de sumatoria indica que la suma de las fuerzas no incluye ninguna interacción del objeto consigo mismo.

La conceptualización de la superposición de las fuerzas es directa, pero la solución de las ecuaciones de movimiento resultantes puede volverse complicada. Incluso en un sistema de tres masas aproximadamente iguales que interactúan unas con otras, algunas condiciones iniciales pueden conducir a trayectorias regulares, mientras que otras conducen a movimiento caótico. La investigación numérica de este tipo de sistema comenzó a ser posible sólo con la llegada de las computadoras. En el transcurso de los últimos 10 años, el campo de la física de muchos cuerpos se ha convertido en uno de los más interesantes de toda la física y es probable que se emprendan muchos esfuerzos intrigantes, tales como el estudio del origen de las galaxias a partir de pequeñas fluctuaciones iniciales en la densidad del universo.

DERIVACIÓN 12.1 Fuerza gravitacional de una esfera

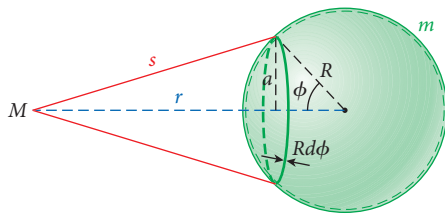


FIGURA 12.5 Fuerza gravitacional sobre una partícula de masa M ejercida por un cascarón esférico (esfera hueca) de masa m .

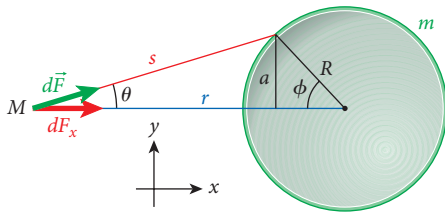


FIGURA 12.6 Sección transversal a través del centro del cascarón esférico de la figura 12.5.

Anteriormente, se dijo que la interacción gravitacional de un objeto con simetría esférica podría tratarse como la de una partícula puntual con la misma masa ubicada en el centro de masa de una esfera extensa. Podemos probar esta afirmación con la ayuda del cálculo y algo de geometría elemental.

Para empezar, tratamos a la esfera como una colección de cascarones esféricos concéntricos y muy delgados. Si podemos probar que un cascarón esférico delgado tiene la misma interacción gravitacional que una partícula puntual ubicada en el centro del cascarón, entonces el principio de superposición implica que la esfera sólida lo hace también.

La figura 12.5 muestra una partícula puntual de masa M ubicada fuera del cascarón de masa m a una distancia r del centro del cascarón. Queremos encontrar la componente x de la fuerza sobre la masa M debida a un anillo de ancho angular $d\phi$. Este anillo tiene un radio de $a = R \sin \phi$ y por lo tanto una circunferencia de $2\pi R \sin \phi$. Tiene un ancho de $R d\phi$, como se muestra en la figura 12.5, y por lo tanto un área total de $2\pi R^2 \sin \phi d\phi$. Debido a que la masa se encuentra distribuida de manera homogénea sobre el cascarón esférico de área $4\pi R^2$, la masa diferencial del anillo es

$$dm = m \frac{2\pi R^2 \sin \phi d\phi}{4\pi R^2} = \frac{1}{2} m \sin \phi d\phi.$$

Debido a que el anillo está posicionado simétricamente en torno del eje horizontal, no hay una fuerza neta en la dirección vertical del anillo actuando sobre la masa M . La componente horizontal de la fuerza es (figura 12.6).

$$dF_x = \cos \theta \left(G \frac{M dm}{s^2} \right) = \cos \theta \left(G \frac{M m \sin \phi d\phi}{2s^2} \right). \quad (i)$$

Ahora, podemos relacionar $\cos \theta$ con s , r y R mediante la ley de los cosenos:

$$\cos \theta = \frac{s^2 + r^2 - R^2}{2sr}.$$

De la misma manera:

$$\cos \phi = \frac{R^2 + r^2 - s^2}{2Rr}. \quad (ii)$$

Si diferenciamos ambos lados de la ecuación (ii), obtenemos

$$-\sin \phi d\phi = -\frac{s}{Rr} ds.$$

Insertando las expresiones para $\sin \phi d\phi$ y $\cos \theta$ en la ecuación (i) para la componente de la fuerza diferencial tenemos

$$\begin{aligned} dF_x &= \frac{s^2 + r^2 - R^2}{2sr} \left(G \frac{Mm}{2s^2} \right) \frac{s}{Rr} ds \\ &= G \frac{Mm}{r^2} \left(\frac{s^2 + r^2 - R^2}{4s^2 R} \right) ds. \end{aligned}$$

Ahora, podemos integrar sobre ds desde el valor mínimo de $s = r - R$ al valor máximo de $s = r + R$:

$$F_x = \int_{r-R}^{r+R} G \frac{Mm}{r^2} \frac{(s^2 + r^2 - R^2)}{4s^2 R} ds = G \frac{Mm}{r^2} \underbrace{\int_{r-R}^{r+R} \frac{s^2 + r^2 - R^2}{4s^2 R} ds}_{\text{Iguales 1}} = G \frac{Mm}{r^2}.$$

(No resulta obvio que el valor de la integral es 1, pero usted puede buscarlo en una tabla de integrales.) Así, un cascarón esférico (y por el principio de superposición una esfera sólida también) ejerce la misma fuerza sobre la masa M como una masa puntual ubicada en el centro de la esfera, que era lo que queríamos probar.

12.1 Oportunidad de autoexamen

La deducción 12.1 supone que $r > R$, lo cual implica que la masa M está ubicada fuera del cascarón esférico. ¿Qué cambia si $r < R$?

El Sistema Solar

El Sistema Solar consiste del Sol, el cual contiene la abrumadora mayoría de la masa total del Sistema Solar, los cuatro planetas interiores semejantes a la Tierra (Mercurio, Venus, Tierra y Marte), el cinturón de los asteroides entre las órbitas de Marte y Júpiter, los cuatro gigantes gaseosos (Júpiter, Saturno, Urano y Neptuno), un número de planetas enanos (incluidos Ceres, Eris, Haumea, Makemake y Plutón) y muchos otros objetos menores encontrados en el Cinturón de Kuiper. La figura 12.7 muestra las órbitas y tamaños relativos de los planetas. La tabla 12.1 proporciona algunos datos físicos para los planetas y el Sol.

Plutón no está listado como planeta y esta omisión merece una explicación. El planeta Neptuno fue descubierto en 1846. Este descubrimiento se había predicho basándose en las pequeñas irregularidades observadas en la órbita de Urano, las cuales sugerían que la interacción gravitacional de otro planeta era la causa. Las observaciones cuidadosas de la órbita de Neptuno revelaron más irregularidades, las cuales apuntaron hacia la existencia de otro planeta más y Plutón (masa = $1.3 \cdot 10^{22}$ kg) fue descubierto en 1930. Después de esto, se les enseñó a los niños en las escuelas que el Sistema Solar tenía nueve planetas. Sin embargo, en 2003, Sedna (masa = $\sim 5 \cdot 10^{21}$ kg) y en 2005, Eris (masa = $\sim 2 \cdot 10^{22}$ kg) fueron descubiertos en el cinturón de Kuiper, una región en la cual varios objetos orbitan al Sol a distancias entre 30 y 48 UA. Cuando la luna de Eris, Dysnomia fue descubierta en 2006, permitió a los astrónomos calcular que Eris es más masiva que Plutón, lo cual comenzó la discusión acerca de qué define a un planeta. La elección era ya sea darle a Sedna, Eris, Ceres (un asteroide que se clasificó como un planeta desde 1801 hasta cerca de 1850) y muchos otros objetos semejantes a Plutón en el Cinturón de Kuiper el rango de un planeta o bien reclasificar a Plutón como un planeta enano. En agosto de 2006, la Unión Astronómica Internacional votó para retirar a Plutón el rango completo de planeta.

FIGURA 12.7 El Sistema Solar. En esta escala, los tamaños de los planetas mismos serían muy pequeños para poder verse. El pequeño punto amarillo en el origen de los ejes representa al Sol, pero es 30 veces más grande de lo que el Sol parecería si estuviese representado a escala. Las fotografías de los planetas y del Sol (parte inferior de la figura) se encuentran todas ampliadas en un factor de 30 000 en relación con la escala de sus órbitas.

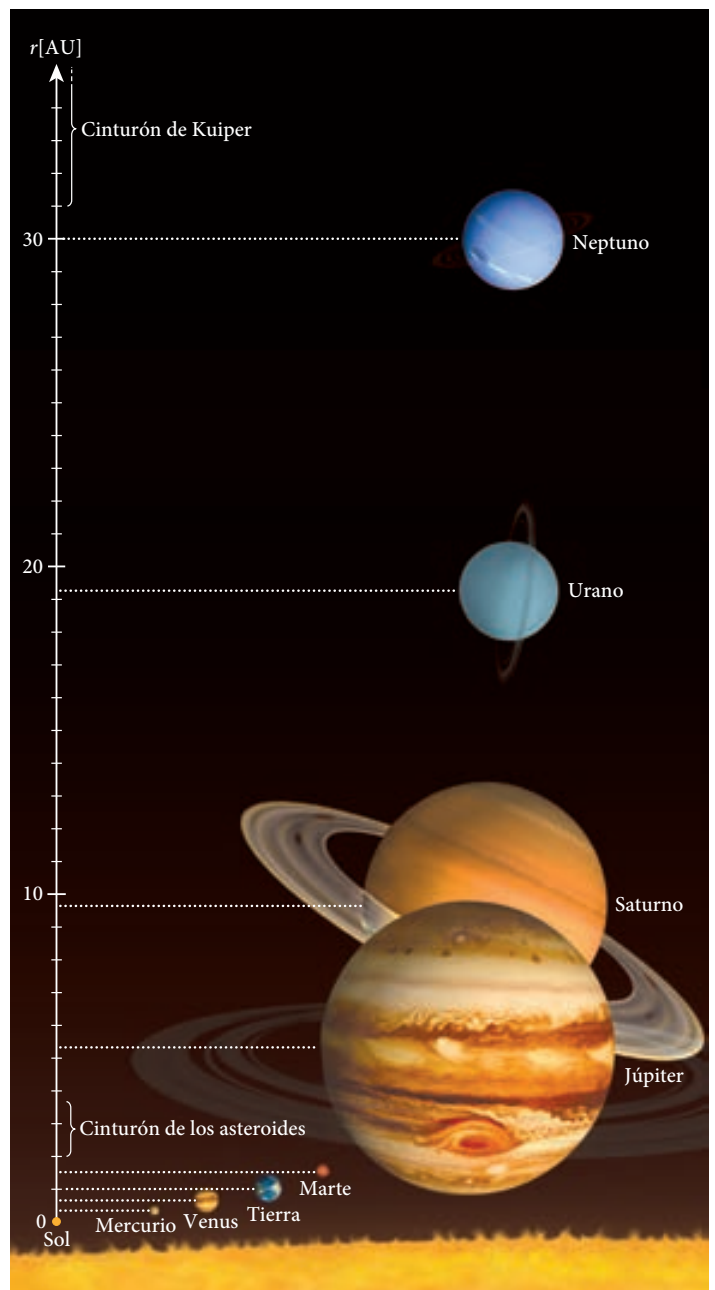


Tabla 12.1 Datos físicos seleccionados para el Sistema Solar

Planeta	Radio (km)	Masa (10^{24} kg)	g (m/s^2)	Rapidez de escape (km/s)	Radio orbital medio (10^6 km)	Excentricidad	Periodo orbital (años)
Mercurio	2 400	0.330	3.7	4.3	57.9	0.205	0.241
Venus	6 050	4.87	8.9	10.4	108.2	0.007	0.615
Tierra	6 370	5.97	9.8	11.2	149.6	0.017	1
Marte	3 400	0.642	3.7	5.0	227.9	0.094	1.88
Júpiter	71 500	1 890	23.1	59.5	778.6	0.049	11.9
Saturno	60 300	568	9.0	35.5	1 433	0.057	29.4
Urano	25 600	86.8	8.7	21.3	2 872	0.046	83.8
Neptuno	24 800	102	11.0	23.5	4 495	0.009	164
Sol	696 000	1 990 000	274	618.0	—	—	—

Como muestra la historia de Plutón, el Sistema Solar todavía guarda el potencial para muchos descubrimientos. Por ejemplo, se han identificado casi 400 000 asteroides y unos 5 000 más se descubren cada mes. La masa total de todos los asteroides en el cinturón de asteroides es menor a 5% de la masa lunar. Sin embargo, se sabe que más de 200 de estos asteroides tienen un diámetro de más de 100 km! Rastrearlos es muy importante, considerando el daño que podría causar alguno si golpeará a la Tierra. Otra área de exploración en curso es la investigación de los objetos en el Cinturón de Kuiper. Algunos modelos postulan que la masa combinada de todos los objetos del Cinturón de Kuiper es hasta 30 veces la masa terrestre, pero la masa observada hasta ahora es menor a este valor por un factor de aproximadamente 1 000.

EJEMPLO 12.1 Influencia de los objetos celestes

La astronomía es la ciencia que se enfoca en planetas, estrellas, galaxias y el universo como un todo. El campo de la astrología, de nombre semejante, no tiene bases científicas en absoluto. Puede ser divertido leer el horóscopo diario, pero las constelaciones de estrellas y/o las alineaciones de planetas no tienen influencia en nuestras vidas. La única manera en que las estrellas y los planetas pueden interactuar con nosotros es a través de la fuerza gravitacional. Calculemos la fuerza de gravedad ejercida sobre una persona por la Luna, Marte y las estrellas en la constelación de Géminis.

PROBLEMA 1

Suponga que usted vive en el Medio Oeste de Estados Unidos. Usted sale a las 9:00 p.m. el 16 de febrero de 2008 y mira hacia el cielo. Usted ve la Luna, el planeta Marte y la constelación Géminis, como se muestra en la figura 12.8. Su masa es $m = 85$ kg. ¿Cuál es la fuerza de gravedad que ejercen sobre usted estos objetos celestes?

SOLUCIÓN 1

Comencemos con la Luna. La masa lunar es de $7.36 \cdot 10^{22}$ kg, y la distancia entre la Luna y usted es de $3.84 \cdot 10^8$ m. La fuerza gravitacional que la Luna ejerce sobre usted es entonces

$$F_{Luna} = G \frac{M_{Luna} m}{r_{Luna}^2} = (6.67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2) \frac{(7.36 \cdot 10^{22} \text{ kg})(85 \text{ kg})}{(3.84 \cdot 10^8 \text{ m})^2} = 0.0028 \text{ N.}$$

La distancia entre Marte y la Tierra el 16 de febrero del 2008 era de 136 millones de km y la masa de Marte es $M_{Marte} = 6.4 \cdot 10^{23}$ kg. De esta manera, la fuerza gravitacional que Marte ejerce sobre usted es

$$F_{Marte} = G \frac{M_{Marte} m}{r_{Marte}^2} = (6.67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2) \frac{(6.4 \cdot 10^{23} \text{ kg})(85 \text{ kg})}{(1.36 \cdot 10^{11} \text{ m})^2} = 2.0 \cdot 10^{-7} \text{ N.}$$

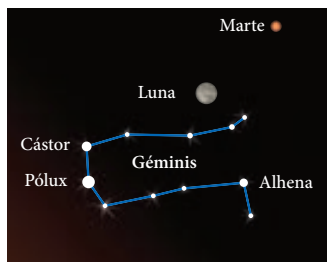


FIGURA 12.8 Posiciones relativas de la Luna, Marte y la constelación de Géminis en el cielo sobre el Medio Oeste el 16 de febrero de 2008.

Podemos estimar la fuerza gravitacional ejercida por la constelación de Géminis, calculando la fuerza ejercida por sus tres objetos más brillantes: Cástor, Pólux y Alhena (vea la figura 12.8). Cástor es un sistema estelar triple con una masa de 6.7 veces la masa solar y se encuentra ubicado a una distancia de 51.5 años luz de usted. Pólux es una estrella con una masa 1.7 veces la masa solar, ubicada a 33.7 años luz de distancia. Alhena es un sistema estelar binario con una masa 3.8 veces la masa solar y está a 105 años luz de distancia. La masa solar es de $2.0 \cdot 10^{30}$ kg, y un año luz corresponde a $9.5 \cdot 10^{15}$ m. La fuerza gravitacional ejercida sobre usted por la constelación de Géminis es entonces:

$$F_{\text{Géminis}} = G \frac{M_{\text{Cástor}} m}{r_{\text{Cástor}}^2} + G \frac{M_{\text{Pólux}} m}{r_{\text{Pólux}}^2} + G \frac{M_{\text{Alhena}} m}{r_{\text{Alhena}}^2} = Gm \left(\frac{M_{\text{Cástor}}}{r_{\text{Cástor}}^2} + \frac{M_{\text{Pólux}}}{r_{\text{Pólux}}^2} + \frac{M_{\text{Alhena}}}{r_{\text{Alhena}}^2} \right)$$

$$= (6.67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2)(85 \text{ kg}) \frac{2.0 \cdot 10^{30} \text{ kg}}{(9.5 \cdot 10^{15} \text{ m})^2} \left(\frac{6.7}{(51.5)^2} + \frac{1.7}{(33.7)^2} + \frac{3.8}{(105)^2} \right)$$

$$= 5.5 \cdot 10^{-13} \text{ N.}$$

La Luna ejerce sobre usted una fuerza que puede medirse, pero Marte y Géminis ejercen sólo fuerzas despreciables.

PROBLEMA 2

Cuando Marte y la Tierra se encuentran a su distancia de separación mínima, están apartados por $r_M = 5.6 \cdot 10^{10}$ m. ¿Qué tan lejos de usted debe estar un camión con una masa de 16 000 kg para tener la misma interacción gravitacional con su cuerpo que la que tiene Marte a esta distancia de separación mínima?

SOLUCIÓN

Si dos fuerzas gravitacionales son iguales en magnitud, podemos escribir

$$G \frac{M_M m}{r_M^2} = G \frac{m_T m}{r_T^2},$$

donde m es su masa, m_T es la masa del camión y r_T es la distancia que queremos encontrar. Cancelando la masa y la constante de gravitación universal, tenemos

$$r_T = r_M \sqrt{\frac{m_T}{M_M}}.$$

Sustituyendo los valores numéricos dados nos lleva a

$$r_T = (5.6 \cdot 10^{10} \text{ m}) \sqrt{\frac{1.6 \cdot 10^4 \text{ kg}}{6.4 \cdot 10^{23} \text{ kg}}} = 8.8 \text{ m.}$$

Este resultado significa que si usted se acerca al camión a una distancia menor a 8.8 m, éste ejerce un mayor tirón gravitatorio sobre usted que Marte en su aproximación más cercana.

12.2 Gravitación cerca de la superficie terrestre

Ahora podemos usar la expresión general para la interacción gravitacional entre dos masas para reconsiderar la fuerza gravitacional debida a la Tierra sobre un objeto cercano a la superficie terrestre. Podemos despreciar la interacción gravitacional de este objeto con cualesquiera otros objetos, debido a que la magnitud de la interacción gravitacional con la Tierra es mayor por muchos órdenes de magnitud, por la gran masa terrestre. Dado que podemos representar un objeto extenso por una partícula puntual de la misma masa ubicado en el centro de gravedad del objeto, cualquier objeto sobre la superficie terrestre está experimentando una fuerza gravitacional dirigida hacia el centro de la Tierra. Esto corresponde a ir directamente hacia abajo en cualquier lugar de la superficie terrestre, de acuerdo por completo con la evidencia empírica.

Es más interesante determinar la magnitud de la fuerza gravitacional que experimenta el objeto cerca de la superficie terrestre. Insertando la masa terrestre, M_E , como la masa de uno de los objetos en la ecuación 12.1 y expresando la altitud h sobre la superficie terrestre como $h + R_E = r$, donde R_E es el radio terrestre, encontramos para este caso especial que

$$F = G \frac{M_E m}{(R_E + h)^2}. \tag{12.6}$$

Debido a que $R_E = 6\,370$ km, la altitud, h , del objeto sobre el suelo puede despreciarse para muchas aplicaciones. Si hacemos esta suposición, encontramos que $F = mg$, con

$$g = \frac{GM_E}{R_E^2} = \frac{(6.67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2})(5.97 \cdot 10^{24} \text{ kg})}{(6.37 \cdot 10^6 \text{ m})^2} = 9.81 \text{ m/s}^2. \tag{12.7}$$

Como se esperaba, cerca de la superficie terrestre, la aceleración debida a la gravedad puede aproximarse por la constante g que se introdujo en el capítulo 2. Podemos sustituir la masa y el radio de otros planetas (vea la tabla 12.1), lunas o estrellas en la ecuación 12.7 y encontrar su gravedad superficial también. Por ejemplo, la aceleración gravitacional en la superficie solar es aproximadamente 28 veces mayor que en la superficie terrestre.

Si queremos encontrar g para altitudes donde no podemos despreciar h con seguridad, podemos comenzar con la ecuación 12.6, dividir entre la masa m para encontrar la aceleración de esta masa,

$$g(h) = \frac{GM_E}{(R_E + h)^2} = \frac{GM_E}{R_E^2} \left(1 + \frac{h}{R_E}\right)^{-2} = g \left(1 + \frac{h}{R_E}\right)^{-2},$$

y luego expandir en series de potencia de h/R_E para obtener, hasta el primer orden,

$$g(h) \approx g \left(1 - 2 \frac{h}{R_E} + \dots\right). \tag{12.8}$$

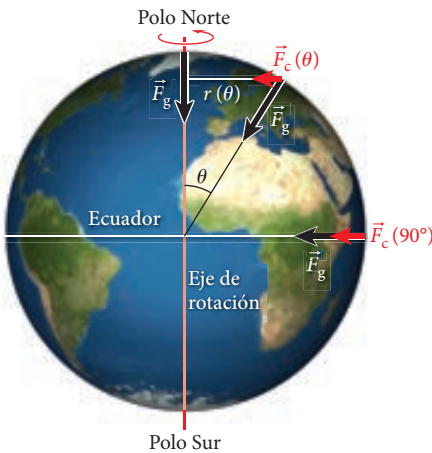


FIGURA 12.9 La variación de la fuerza de gravedad efectiva debida a la rotación terrestre. (Las longitudes de las flechas rojas que representan la fuerza centrípeta se han escalado con un factor de 200 con respecto a las flechas negras que representan la fuerza gravitacional.)

12.2 Oportunidad de autoexamen

¿Cuál es la aceleración debida a la gravedad terrestre a una distancia $d = 3R_E$ del centro de la Tierra, donde R_E es el radio terrestre?

La ecuación 12.8 se cumple para todos los valores de la altitud h que son pequeños comparados con el radio terrestre, y esto implica que la aceleración de la gravedad disminuye en forma aproximadamente lineal como una función de la altitud sobre el suelo. En la cima del Monte Everest, el pico más alto de la Tierra, a una altitud de 8 850 m, la aceleración gravitacional se reduce en un 0.27%, o por menos que 0.03 m/s². La Estación Espacial Internacional se encuentra a una altitud de 365 km, en donde la aceleración gravitacional se reduce en un 11.4%, hasta un valor de 8.7 m/s². Para altitudes mayores, la aproximación lineal de la ecuación 12.8 definitivamente no debe usarse.

Sin embargo, para obtener una determinación más precisa de la aceleración gravitacional, necesitamos considerar otros efectos. Primero, la Tierra no es una esfera exacta; tiene un radio ligeramente mayor en el ecuador que en los polos. (El valor de 6 370 km en la tabla 12.1 es el radio medio terrestre; el radio varía de 6 357 km en los polos a 6 378 en el ecuador.) Segundo, la densidad terrestre no es uniforme, y para una determinación precisa de la aceleración gravitacional, la densidad del suelo justo bajo las mediciones hace una diferencia. Tercero, y quizá más importante, hay una variación sistemática (como una función del ángulo polar θ ; vea la figura 12.9) de la aceleración gravitacional aparente, debido a la rotación terrestre y la aceleración centrípeta asociada. Del capítulo 9 acerca del movimiento circular, sabemos que la aceleración centrípeta está dada por $a_c = \omega^2 r$, donde r es el radio del movimiento circular. Para la rotación terrestre, el radio es la distancia perpendicular al eje de rotación. En los polos, la distancia es cero y no hay contribución de la aceleración centrípeta. En el ecuador, $r = R_E$, y el valor máximo para a_c

$$a_{c,\text{máx}} = \omega^2 R_E = (7.29 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1})^2 (6\,378 \text{ km}) = 0.034 \text{ m/s}^2.$$

De esta manera, encontramos que la reducción en la aceleración gravitacional aparente en el ecuador debido a la rotación terrestre es aproximadamente igual a la reducción en la cima del Monte Everest.

EJEMPLO 12.2 Tirón gravitatorio de un agujero negro

Un agujero negro es un objeto muy masivo y extremadamente compacto que es tan denso que la luz emitida de su superficie no puede escapar (así, luce negro).

PROBLEMA

Suponga que un agujero negro tiene una masa de $6.0 \cdot 10^{30}$ kg, tres veces la masa solar. Una nave espacial con una longitud de $h = 85$ m se aproxima al agujero negro hasta que el frente de la nave está a una distancia $R = 13\,500$ km del agujero negro. ¿Cuál es la diferencia en la aceleración debida a la gravedad entre la parte delantera y la trasera de la nave?

SOLUCIÓN

Podemos determinar la aceleración gravitacional en el frente de la nave debido al agujero negro por vía de

$$g_{bh} = \frac{GM_{bh}}{R^2} = \frac{(6.67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2})(6.0 \cdot 10^{30} \text{ kg})}{(1.35 \cdot 10^7 \text{ m})^2} = 2.2 \cdot 10^6 \text{ m/s}^2.$$

Ahora podemos usar la aproximación lineal de la ecuación 12.8 para obtener

$$g_{bh}(h) - g_{bh}(0) = g_{bh} \left(1 - 2 \frac{h}{R}\right) - g_{bh}(0) = -2g_{bh} \frac{h}{R},$$

donde h es la longitud de la nave espacial. Sustituyendo los valores numéricos, encontramos la diferencia en la aceleración gravitacional entre la parte delantera y la trasera:

$$g_{bh}(h) - g_{bh}(0) = -2(2.2 \cdot 10^6 \text{ m/s}^2) \frac{85 \text{ m}}{1.35 \cdot 10^7 \text{ m}} = -27.7 \text{ m/s}^2.$$

Usted puede ver que en la cercanía de un agujero negro, ¡la aceleración diferencial entre la parte delantera y la trasera es tan grande que la nave espacial debería tener una resistencia interna tremenda para evitar despedazarse! (Cerca del agujero negro, la ley de gravitación de Newton debe modificarse, pero este ejemplo ha ignorado tal cambio. En la sección 35.8, discutiremos los agujeros negros con más detalle y veremos por qué la luz se ve afectada por la interacción gravitacional.)

12.3 Gravitación dentro de la Tierra

La deducción 12.1 mostró que la interacción gravitacional de una masa m con una distribución de masa con simetría esférica (donde m está ubicada fuera de la esfera) no es afectada si la esfera se reemplaza con una partícula puntual con la misma masa total, ubicada en el centro de masa (o el centro de gravedad). La deducción 12.2 muestra ahora que en el interior de un cascarón esférico de densidad uniforme, la fuerza gravitacional neta es cero.

DEDUCCIÓN 12.2 Fuerza de gravedad dentro de una esfera hueca

Queremos mostrar que la fuerza gravitacional actuando sobre una masa puntual dentro de un cascarón esférico homogéneo hueco es cero dentro del cascarón. Para hacerlo, podríamos usar el cálculo y una ley matemática conocida como la ley de Gauss. (La ley de Gauss, discutida en el capítulo 22, se aplica a la interacción electrostática y a la fuerza de Coulomb, que es otra fuerza que disminuye con $1/r^2$.) Sin embargo, en lugar de esto, usaremos un argumento geométrico que fue presentado por Newton en 1687 en su libro *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, comúnmente conocida como los *Principia*.

Considere el cascarón esférico (infinitesimalmente delgado) mostrado en la figura 12.10. Marcamos un punto P en una ubicación arbitraria dentro del cascarón y entonces trazamos una línea recta a través de este punto. Esta línea recta interseca al cascarón en dos puntos y las distancias entre estos dos puntos de intersección y el punto P son los radios r_1 y r_2 . Ahora trazamos conos con los vértices en P y con un pequeño ángulo de abertura θ en torno de la línea recta. Las áreas donde

(continúa)

(continuación)

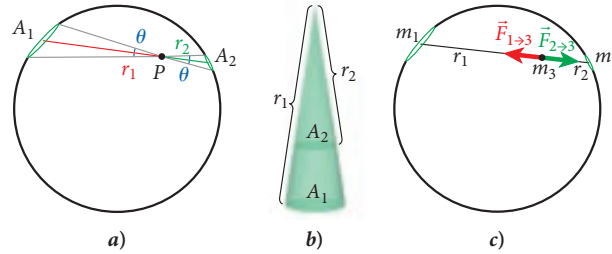


FIGURA 12.10 La interacción gravitacional de un punto con la superficie de una esfera hueca: a) los conos a partir de un punto P dentro de la esfera hasta la superficie de la esfera; b) detalles de los conos a partir de un punto P hasta la superficie; c) el equilibrio de las fuerzas gravitacionales actuando sobre P debida a las áreas opuestas del cascarón esférico.

los dos conos intersecan al cascarón se llaman A_1 y A_2 . Estas áreas son proporcionales al ángulo θ , el cual es el mismo para ambas. El área A_1 también es proporcional a r_1^2 , y el área A_2 es proporcional a r_2^2 (vea la figura 12.10b). Además, dado que el cascarón es homogéneo, la masa de cualquier segmento de éste es proporcional al área del segmento. Por lo tanto, $m_1 = ar_1^2$ y $m_2 = ar_2^2$, con la misma constante de proporcionalidad a .

La fuerza gravitacional $\vec{F}_{1 \rightarrow 3}$ que la masa m_1 de área A_1 ejerce sobre la masa m_3 en el punto P entonces apunta a lo largo de r_1 en la dirección del centro de A_1 . La fuerza gravitacional $\vec{F}_{2 \rightarrow 3}$ actuando sobre m_3 apunta exactamente en la dirección opuesta a lo largo de r_2 . Podemos encontrar las magnitudes de estas dos fuerzas:

$$F_{1 \rightarrow 3} = \frac{Gm_1m_3}{r_1^2} = \frac{G(ar_1^2)m_3}{r_1^2} = Gam_3$$

$$F_{2 \rightarrow 3} = \frac{Gm_2m_3}{r_2^2} = \frac{G(ar_2^2)m_3}{r_2^2} = Gam_3.$$

Ya que la dependencia de la distancia se cancela, las magnitudes de las dos fuerzas son las mismas. Y como las magnitudes son las mismas, y sus direcciones son opuestas, las fuerzas $\vec{F}_{1 \rightarrow 3}$ y $\vec{F}_{2 \rightarrow 3}$ se cancelan exactamente una a la otra (vea la figura 12.10c).

Ya que la ubicación del punto y la orientación de la línea trazada a través de éste eran arbitrarias, el resultado es cierto para cualquier punto dentro del cascarón esférico. La fuerza neta de la gravedad actuando sobre una masa puntual dentro del cascarón esférico es efectivamente cero.

Ahora podemos adquirir una comprensión física de la fuerza gravitacional que actúa dentro de la Tierra. Piense en nuestro planeta como si estuviese compuesta de muchos cascarones esféricos delgados concéntricos. Entonces la fuerza gravitacional en el punto P dentro de la Tierra a una distancia r del centro, se debe a aquellos cascarones con un radio menor a r . Todos los cascarones con un radio mayor no contribuyen a la fuerza gravitacional sobre P . Adicionalmente, la masa, $M(r)$, de todos los cascarones que contribuyen puede imaginarse como concentrada en el centro, a una distancia r de P . La fuerza gravitacional que actúa sobre un objeto de masa m a una distancia r del centro de la Tierra es entonces

$$F(r) = G \frac{M(r)m}{r^2}. \tag{12.9}$$

Ésta es la ley de gravitación de Newton (ecuación 12.1), con la masa de los cascarones para ser determinada. A fin de determinar esa masa, hacemos la suposición simplificadora de una densidad constante, ρ_E , dentro de la Tierra. Entonces obtenemos

$$M(r) = \rho_E V(r) = \rho_E \frac{4}{3} \pi r^3. \tag{12.10}$$

Podemos calcular la densidad de la masa terrestre a partir de su masa total y su radio:

$$\rho_E = \frac{M_E}{V_E} = \frac{M_E}{\frac{4}{3} \pi R_E^3} = \frac{(5.97 \cdot 10^{24} \text{ kg})}{\frac{4}{3} \pi (6.37 \cdot 10^6 \text{ m})^3} = 5.5 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3.$$

Sustituyendo la expresión para la masa de la ecuación 12.10 en la ecuación 12.9, obtenemos una ecuación para la dependencia radial de la fuerza gravitacional dentro de la Tierra:

$$F(r) = G \frac{M(r)m}{r^2} = G \frac{\rho_E \frac{4}{3} \pi r^3 m}{r^2} = \frac{4}{3} \pi G \rho_E m r. \quad (12.11)$$

La ecuación 12.11 afirma que la fuerza gravitacional aumenta en forma lineal con la distancia al centro de la Tierra. En particular, si el punto está ubicado exactamente en el centro de la Tierra, una fuerza gravitacional nula actúa sobre ésta.

Ahora podemos comparar la dependencia radial de la aceleración gravitacional dividida entre g (para un objeto sobre el que actúa sólo la fuerza debida a la Tierra) dentro y fuera de la Tierra. La figura 12.11 muestra el incremento lineal de esta cantidad dentro de la Tierra y la disminución de manera inversamente proporcional al cuadrado de la distancia afuera. En la superficie terrestre, esas curvas se intersecan y la aceleración gravitacional tiene un valor de g . También se muestra en la figura la aproximación lineal (ecuación 12.8) a la dependencia de la aceleración gravitacional como función de la altura sobre la superficie terrestre: $g(h) \approx g(1 - 2h/R_E + \dots) \Rightarrow g(r) \approx g(3 - 2r/R_E + \dots)$, porque $r \approx h + R_E$. Usted puede ver con claridad que esta aproximación es válida en unos cuantos puntos porcentuales para alturas de unos cuantos cientos de kilómetros sobre la superficie terrestre.

Note que la forma funcional de la fuerza en la ecuación 12.11 es la de la fuerza de un resorte, con la fuerza restituidora incrementándose de manera lineal como una función del desplazamiento a partir del equilibrio en $r = 0$. La ecuación 12.11 especifica la magnitud de la fuerza gravitacional. Debido a que la fuerza siempre apunta en la dirección hacia el centro de la Tierra, también podemos escribir la ecuación 12.11 como una ecuación vectorial de una dimensión en términos de x , el desplazamiento a partir del equilibrio:

$$F_x(x) = -\frac{4}{3} \pi G \rho_E m x = -\frac{mg}{R_E} x = -kx.$$

Este resultado es la ley de Hooke para un resorte, la cual encontramos en el capítulo 5. Por lo tanto, la “constante del resorte” de la fuerza gravitacional es

$$k = \frac{4}{3} \pi G \rho_E m = \frac{mg}{R_E}.$$

Consideraciones semejantes también se aplican a la fuerza gravitacional dentro de otras distribuciones de masa con simetría esférica, tales como planetas o estrellas.

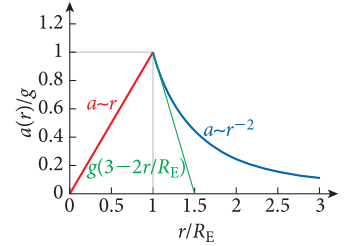


FIGURA 12.11 Dependencia de la aceleración gravitacional con la distancia radial desde el centro de la Tierra.

12.1 Ejercicio en clase

La Luna puede considerarse como una esfera de densidad uniforme con masa M_M y radio R_M . En el centro de la Luna, la magnitud de la fuerza gravitacional que actúa sobre una masa m debida a la masa lunar es

- a) mGM_M/R_M^2 d) cero.
 b) $\frac{1}{2}mGM_M/R_M^2$ e) $2mGM_M/R_M^2$
 c) $\frac{3}{5}mGM_M/R_M^2$

12.4 Energía potencial gravitacional

En el capítulo 6 vimos que la energía potencial gravitacional está dada por $U = mgh$, donde h es la distancia en la dirección de y , dado que la fuerza gravitatoria se escribe $\vec{F} = -mg\hat{y}$ (con la convención de que el signo positivo es hacia arriba). Usando la ley de gravitación de Newton, podemos obtener una expresión más general para la energía potencial gravitacional. Integrando la ecuación 12.1 produce una expresión para la energía potencial gravitacional de un sistema de dos masas m_1 y m_2 , separadas por una distancia r :

$$\begin{aligned} U(r) - U(\infty) &= - \int_{\infty}^r \vec{F}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}' = \int_{\infty}^r F(r') dr' = \int_{\infty}^r G \frac{m_1 m_2}{r'^2} dr' \\ &= Gm_1 m_2 \int_{\infty}^r \frac{1}{r'^2} dr' = -Gm_1 m_2 \left. \frac{1}{r'} \right|_{\infty}^r = -G \frac{m_1 m_2}{r}. \end{aligned}$$

La primera parte de esta ecuación es la relación general entre la fuerza y la energía potencial. Para la interacción gravitacional, la fuerza depende sólo de la separación radial y apunta hacia fuera: $\vec{F}(\vec{r}) = \vec{F}(r)$. La integración es equivalente a traer las dos masas juntándolas en la dirección radial desde una separación infinita inicial a una separación final r . De esta forma, $d\vec{r}$ apunta en la dirección opuesta a la fuerza $\vec{F}(\vec{r})$, y así $\vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = F(r) dr (\cos 180^\circ) = -F(r) dr$.

Note que la ecuación que describe la energía potencial gravitacional sólo nos dice la *diferencia* entre la energía potencial gravitacional en la separación r y en la separación al infinito. Establece $U(\infty) = 0$, lo cual implica que la energía potencial gravitacional tiende a cero entre dos objetos

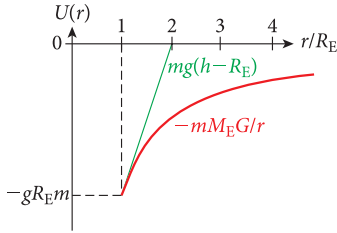


FIGURA 12.12 Dependencia de la energía potencial gravitacional de la distancia al centro de la Tierra, para distancias mayores al radio terrestre. La curva roja representa la expresión exacta; la curva verde representa la aproximación lineal para valores de r no mucho mayores que el radio terrestre, R_E .

que se encuentran separados por una distancia infinita. Esta opción nos da la expresión siguiente para la **energía potencial gravitacional** como una función de la separación entre dos masas:

$$U(r) = -G \frac{m_1 m_2}{r}. \quad (12.12)$$

Note que la energía potencial gravitacional es siempre menor que cero, con $U(\infty) = 0$. Esta dependencia de la energía potencial gravitacional en $1/r$ se ilustra mediante la curva roja en la figura 12.12 para una masa arbitraria cerca de la superficie terrestre.

Para la interacción entre más de dos objetos, podemos escribir todas las interacciones entre dos de éstos e integrar. Las energías potenciales gravitacionales de estas interacciones simplemente se suman para dar la energía potencial gravitacional total. Para tres partículas puntuales, encontramos, por ejemplo:

$$U = U_{12} + U_{13} + U_{23} = -G \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} - G \frac{m_1 m_3}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_3|} - G \frac{m_2 m_3}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|}.$$

Un caso de especial importancia ocurre cuando uno de los dos objetos que interactúan es la Tierra. Para alturas h que son pequeñas comparadas con el radio terrestre, esperamos repetir el resultado previo que la energía potencial gravitacional es mgh . Debido a que la Tierra es muchos órdenes de magnitud más masiva que cualquier objeto sobre la superficie terrestre para el cual podríamos querer calcular la energía potencial gravitacional, el centro de masa combinado de la Tierra y el objeto es prácticamente idéntico al centro de masa de la Tierra, el cual seleccionamos entonces como el origen del sistema de coordenadas. Usando la ecuación 12.12, esto resulta en

$$\begin{aligned} U(h) &= -G \frac{M_E m}{R_E + h} = -G \frac{M_E m}{R_E} \left(1 + \frac{h}{R_E}\right)^{-1} \\ &\approx -\frac{GM_E m}{R_E} + \frac{GM_E m}{R_E^2} h = -gmR_E + mgh. \end{aligned}$$

En el segundo paso usamos el hecho de que $h \ll R_E$ y expandimos. Este resultado (graficado con verde en la figura 12.12) concuerda casi como la expresión $U = mgh$ del capítulo 6, excepto por la adición del término constante $-gmR_E$. Este término constante es el resultado de la selección de la constante de integración en la ecuación 12.12. Sin embargo, como se hizo énfasis en el capítulo 6, podemos agregar cualquier constante aditiva a la expresión para la energía potencial sin cambiar los resultados físicos para el movimiento de los objetos. La única cantidad físicamente relevante es la diferencia en la energía potencial entre dos ubicaciones distintas. Tomando la diferencia entre la altura h y la altura cero da como resultado

$$\Delta U = U(h) - U(0) = (-gmR_E + mgh) - (-gmR_E) = mgh.$$

Como se esperaba, la constante aditiva $-gmR_E$ se cancela y obtenemos el mismo resultado para alturas pequeñas, h , que habíamos obtenido antes: $\Delta U = mgh$.

Velocidad de escape

Con la expresión de la energía potencial gravitacional, podemos determinar la energía mecánica total para un sistema que consiste de un objeto de masa m_1 y velocidad v_1 , que tiene una interacción gravitacional con otro objeto de masa m_2 y velocidad v_2 , si los dos objetos están separados por una distancia $r = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$:

$$E = K + U = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \frac{G m_1 m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}. \quad (12.13)$$

El caso donde uno de los objetos es la Tierra ($m_1 \equiv M_E$) es de particular interés. Si consideramos que el marco de referencia es el de la Tierra ($v_1 = 0$), ésta no tiene energía cinética en este marco. De nuevo, ponemos el origen del sistema de coordenadas en el centro de la Tierra. Entonces, la expresión para la energía total de este sistema es simplemente la energía cinética del objeto 2 (pero hemos omitido el subíndice 2), además de la energía potencial gravitacional:

$$E = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{GM_E m}{R_E + h},$$

donde, como antes, h es la altura sobre la superficie terrestre del objeto con masa m .

Si queremos encontrar qué velocidad inicial debe tener un proyectil para escapar a una distancia infinita de la Tierra, llamada **velocidad de escape**, v_E (donde E representa a la Tierra), podemos usar la conservación de la energía. A una separación infinita, la energía potencial gravitacional es cero y la energía cinética mínima también es cero. Así, la energía total con la cual un proyectil puede apenas escapar al infinito del tirón gravitatorio de la Tierra es cero. La conservación de la energía implica entonces, comenzando desde la superficie terrestre:

$$E(h=0) = \frac{1}{2}mv_E^2 - \frac{GM_E m}{R_E} = 0.$$

Resolviendo esto para v_E brinda una expresión para la velocidad de escape mínima:

$$v_E = \sqrt{\frac{2GM_E}{R_E}}. \quad (12.14)$$

Sustituyendo los valores numéricos de estas constantes, obtenemos por último

$$v_E = \sqrt{\frac{2(6.67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2})(5.97 \cdot 10^{24} \text{ kg})}{6.37 \cdot 10^6 \text{ m}}} = 11.2 \text{ km/s}.$$

Esta velocidad de escape es aproximadamente igual a 25 000 mph (unos 40 000 km/h). Los mismos cálculos pueden realizarse para otros planetas, lunas y estrellas insertando las constantes relevantes (por ejemplo, vea la tabla 12.1).

Note que el ángulo en que se lanzan los proyectiles al espacio no entra en la expresión para la velocidad de escape. Por lo tanto, no importa si el proyectil es disparado hacia arriba o casi en una dirección horizontal. Sin embargo, hemos ignorado la resistencia del aire y el ángulo de lanzamiento haría una diferencia si tomásemos en cuenta su efecto. Un efecto aún mayor resulta de la rotación terrestre. Dado que la Tierra rota sobre su eje una vez al día, un punto en la superficie terrestre ubicado en el ecuador tiene una velocidad de $v = 2\pi R_E / (1 \text{ día}) \approx 0.46 \text{ km/s}$, la cual decrece hasta cero en los polos. La dirección de vector de velocidad correspondiente apunta hacia el este, de manera tangencial a la superficie terrestre. Por lo tanto, el ángulo de lanzamiento es más importante en el ecuador. Para un proyectil disparado en la dirección del este desde cualquier ubicación en el ecuador, la velocidad de escape se reduce a aproximadamente 10.7 km/s.

¿Puede un proyectil lanzado desde la superficie terrestre, con una velocidad de 11.2 km/s escapar del Sistema Solar? ¿No juega un papel la energía potencial gravitacional del proyectil debida a la interacción con el Sol? A primera vista, parecería que no. Después de todo, la fuerza gravitacional que el Sol ejerce sobre un objeto ubicado cerca de la superficie terrestre es despreciable comparado con la fuerza que la Tierra ejerce sobre este objeto. Como prueba de esto, considere que si salta en el aire, aterriza en el mismo lugar, independientemente de qué hora del día es; esto es, dónde esté el Sol en el cielo. De esta manera, podemos efectivamente despreciar la fuerza gravitacional del Sol cerca de la superficie terrestre.

Sin embargo, la fuerza gravitacional es muy diferente de la energía potencial gravitacional. En contraste con la fuerza, la cual disminuye como r^{-2} , la energía potencial disminuye en forma mucho más lenta, ya que es proporcional a r^{-1} . Es sencillo generalizar la ecuación 12.14 para la velocidad de escape para cualquier planeta o estrella con una masa M , si el objeto está inicialmente separado por una distancia R del centro de ese planeta o estrella:

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{R}}. \quad (12.15)$$

Insertando la masa solar y el tamaño de la órbita terrestre encontramos v_S , la velocidad necesaria para que un objeto escape de la influencia gravitacional del Sol si se encuentra al inicio a una distancia de éste igual al radio de la órbita terrestre:

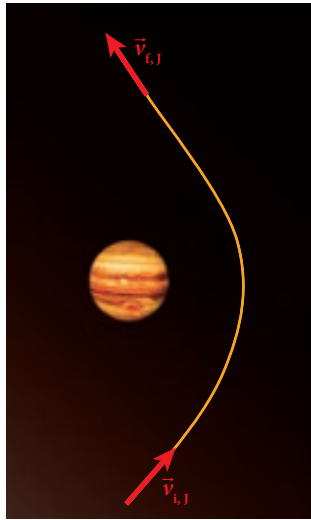
$$v_S = \sqrt{\frac{2(6.67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2})(1.99 \cdot 10^{30} \text{ kg})}{1.49 \cdot 10^{11} \text{ m}}} = 42 \text{ km/s}.$$

Éste es un resultado bastante asombroso: la velocidad de escape necesaria para abandonar al Sistema Solar desde la órbita terrestre es casi cuatro veces mayor que la velocidad de escape necesaria para escapar de la atracción gravitacional de la Tierra.

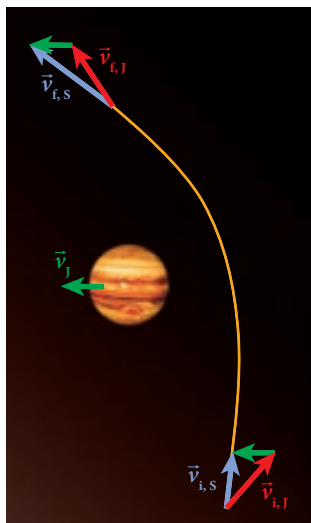
12.2 Ejercicio en clase

La velocidad de escape desde la superficie lunar (masa = $7.35 \cdot 10^{22} \text{ kg}$ y diámetro = 3 476 km) es

- a) 2.38 km/s. c) 11.2 km/s.
b) 1.68 km/s. d) 5.41 km/s.



a)



b)

FIGURE 12.13 Técnica de asistencia gravitacional: a) trayectoria de una nave espacial pasando por Júpiter, visto en el marco de referencia de Júpiter; b) la misma trayectoria vista en el marco de referencia del Sol, en el cual Júpiter se mueve con una velocidad de aproximadamente 13 km/s.

Lanzar un proyectil desde la superficie terrestre con suficiente velocidad para abandonar el Sistema Solar requiere superar la energía potencial gravitacional combinada de la Tierra y el Sol. Dado que las dos energías potenciales se suman, la velocidad de escape combinada es

$$v_{ES} = \sqrt{v_E^2 + v_S^2} = 43.5 \text{ km/s.}$$

Encontramos que la rotación terrestre tiene un efecto no despreciable, pero aún pequeño, sobre la velocidad de escape. Sin embargo, un efecto mucho mayor surge del movimiento orbital de la Tierra en torno del Sol. La Tierra orbita al Sol con una velocidad orbital de $v_O = 2\pi R_{ES}/(1 \text{ año}) = 30 \text{ km/s}$, donde R_{ES} es la distancia entre la Tierra y el Sol (149.6 o casi 150 millones de km, de acuerdo con la tabla 12.1). Un proyectil lanzado en la dirección de su vector de velocidad orbital necesita una velocidad de lanzamiento de sólo $v_{ES,\text{mín}} = (43.5 - 30) \text{ km/s} = 13.5 \text{ km/s}$, en tanto que uno lanzado en la dirección opuesta debe tener $v_{ES,\text{máx}} = (43.5 + 30) \text{ km/s} = 73.5 \text{ km/s}$. Otros ángulos de lanzamiento requieren valores entre estos dos extremos.

Cuando la NASA lanza una sonda para explorar a los planetas exteriores o para abandonar el Sistema Solar —por ejemplo, el *Voyager 2*— se usa la técnica de asistencia gravitacional para disminuir la velocidad de lanzamiento requerida. Se ilustra esta técnica en la figura 12.13. La parte a) es un bosquejo de un sobrevuelo de Júpiter como se vería por un observador en reposo con respecto a Júpiter. Note que el vector de velocidad de la nave espacial cambia de dirección, pero tiene la misma longitud a la misma distancia de Júpiter cuando la nave espacial se aproxima como cuando se aleja. Esto es una consecuencia de la conservación de la energía. La figura 12.13b) es un bosquejo de la trayectoria de la nave espacial vista por un observador en reposo con respecto al Sol. En este marco de referencia, Júpiter se mueve con una velocidad orbital de aproximadamente 13 km/s. Para transformar del marco de referencia de Júpiter al marco de referencia del Sol, debemos sumar la velocidad de Júpiter a las velocidades observadas en el marco de Júpiter (flechas rojas) para obtener las velocidades en el marco del Sol (flechas azules). Como usted puede ver de la figura, en el marco del Sol, la longitud del vector de velocidad final es significativamente mayor que la del vector de velocidad inicial. Esto significa que la nave espacial ha adquirido una energía cinética adicional significativa (y Júpiter ha perdido esta energía cinética) durante el sobrevuelo, permitiéndole continuar su escape del tirón gravitatorio del Sol.

EJEMPLO 12.3 Impacto de un asteroide

Una de las causas más probables de la extinción de los dinosaurios al final del periodo Cretáceo, hace unos 65 millones de años, fue un gran asteroide que golpeó la Tierra. Miremos la energía liberada durante el impacto de un asteroide.

PROBLEMA

Suponga que un asteroide esférico, con un radio de 1.00 km y una densidad de masa de 4 750 kg/m³, ingresa en el Sistema Solar con velocidad despreciable y entonces colisiona con la Tierra de tal manera que la golpea desde una dirección radial con respecto al Sol. ¿Qué energía cinética tendrá el asteroide en el marco de referencia de la Tierra justo antes del impacto con la Tierra?

SOLUCIÓN

Primero, calculamos la masa del asteroide:

$$m_a = V_a \rho_a = \frac{4}{3} \pi r_a^3 \rho_a = \frac{4}{3} \pi (1.00 \cdot 10^3 \text{ m})^3 (4750 \text{ kg/m}^3) = 1.99 \cdot 10^{13} \text{ kg.}$$

Si el asteroide golpea a la Tierra en una dirección radial con respecto al Sol, el vector de velocidad de la Tierra será perpendicular al del asteroide en el impacto, debido a que la Tierra se mueve de modo tangencial en torno del Sol. Así, hay tres contribuciones a la energía cinética del asteroide medida en el marco de referencia de la Tierra: 1) conversión de la energía potencial gravitacional entre la Tierra y el asteroide, 2) conversión de la energía potencial gravitacional entre el Sol y el asteroide, y 3) energía cinética del movimiento de la Tierra relativa a la del asteroide.

Debido a que ya hemos calculado las velocidades de escape correspondientes a los dos términos de energía potencial gravitacional y debido a que el asteroide llega con una energía cinética que corresponde con estas velocidades de escape, podemos escribir simplemente

$$K = \frac{1}{2} m_a (v_E^2 + v_S^2 + v_O^2).$$

Ahora sustituimos los valores numéricos:

$$K = 0.5(1.99 \cdot 10^{31} \text{ kg})[(1.1 \cdot 10^4 \text{ m/s})^2 + (4.2 \cdot 10^4 \text{ m/s})^2 + (3.0 \cdot 10^4 \text{ m/s})^2] \\ = 2.8 \cdot 10^{22} \text{ J.}$$

Este valor es equivalente a la energía liberada por aproximadamente 300 millones de armas nucleares de la magnitud de aquellas usadas para destruir Hiroshima y Nagasaki en la Segunda Guerra Mundial. (Usted puede empezar a comprender el poder destructivo del impacto de un asteroide de esta magnitud: un suceso como éste podría borrar la vida humana sobre la Tierra.) Un asteroide un poco mayor, con un diámetro de 6 a 10 km, golpeó a la Tierra cerca de la punta de la península de Yucatán en el Golfo de México, hace más o menos 65 millones de años. Se cree que fue el responsable de la extinción del K-T (Cretáceo-Terciario), el cual mató a todos los dinosaurios.

EXPLICACIÓN

La figura 12.14 muestra el cráter de impacto Barringer de aproximadamente 1.5 km de diámetro y casi 200 m de profundidad, el cual se formó hace más o menos 50 000 años, cuando un meteorito de cerca de 50 m de diámetro, con una masa aproximada de 300 000 toneladas ($3 \cdot 10^8 \text{ kg}$), golpeó a la Tierra a una velocidad de más o menos 12 km/s. Éste fue un objeto mucho menor que el asteroide descrito en este ejemplo, pero el impacto todavía tuvo el poder destructivo de 150 bombas atómicas de la clase de Hiroshima/Nagasaki.

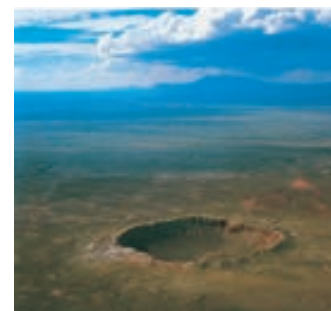


FIGURA 12.14 El cráter de impacto Barringer en el centro de Arizona.

Potencial gravitacional

La ecuación 12.12 afirma que la energía potencial gravitacional de cualquier objeto es proporcional a la masa del objeto. Cuando empleamos la conservación de la energía para calcular la velocidad de escape, vimos que la masa del objeto se cancelaba, debido a que tanto la energía cinética como la energía potencial gravitacional son proporcionales a la masa del objeto. De esta manera, la cinemática es independiente de la masa del objeto. Por ejemplo, consideremos la energía potencial gravitacional de una masa m interactuando con la Tierra, $U_E(r) = -GM_E m/r$. El potencial gravitacional de la Tierra $V_E(r)$ se define como el cociente de la energía potencial gravitacional a la masa del objeto, $V_E(r) = U_E(r)/m$, o

$$V_E(r) = -\frac{GM_E}{r}. \quad (12.16)$$

Esta definición tiene la ventaja de brindar información acerca de la interacción gravitacional con la Tierra, independientemente de la otra masa involucrada. (Exploraremos el concepto de potenciales con mayor profundidad en el capítulo 23, acerca de los potenciales eléctricos.)

12.5 Las leyes de Kepler y el movimiento planetario

Johannes Kepler (1571-1630) usó observaciones empíricas, principalmente datos recolectados por Tycho Brahe y cálculos sofisticados para llegar a las **leyes de Kepler y del movimiento planetario**, publicadas en 1609 y 1619. Estas leyes se publicaron décadas antes de que Isaac Newton naciera en 1643, cuya ley de gravitación mostraría a la larga *por qué* las leyes de Kepler eran verdaderas. Lo que es significativo acerca de las leyes de Kepler es que retaron la visión del mundo prevaletante en ese tiempo, con la Tierra en el centro del universo (una teoría geocéntrica) y el Sol y todos los planetas y las estrellas orbitando alrededor de ésta, justo como lo hace la Luna. Kepler y otros pioneros, particularmente Nicolás Copérnico y Galileo Galilei, cambiaron esta visión geocéntrica en una cosmología heliocéntrica (centrada en el Sol). Hoy, las sondas espaciales han suministrado observaciones directas desde puntos de vista ventajosos fuera de la atmósfera de la Tierra y verificaron que Copérnico, Kepler y Galileo estaban en lo correcto. Sin embargo, la simplicidad con la que el modelo heliocéntrico fue capaz de explicar las observaciones astronómicas se ganó el punto de vista de las personas inteligentes mucho antes de que las observaciones externas fueran posibles.

Primera ley de Kepler: órbitas

Todos los planetas se mueven en órbitas elípticas con el Sol en un punto focal.

Añadido matemático: elipses

Una *elipse* es una curva cerrada en un plano bidimensional. Tiene dos puntos focales, f_1 y f_2 , separados por una distancia $2c$ (figura 12.15). Para cada punto en la elipse, la suma de las distancias a los dos puntos focales es una constante:

$$r_1 + r_2 = 2a.$$

La longitud a se llama el semieje mayor de la elipse (vea la figura 12.15). (Nota: Por desgracia, la notación normal para el semieje mayor de una elipse usa la misma letra, a , que el símbolo convencional de la aceleración. Usted debe ser cuidadoso para evitar confusiones.) El semieje menor, b , está relacionado con a y c mediante

$$b^2 \equiv a^2 - c^2.$$

En términos de las coordenadas cartesianas x y y , los puntos sobre la elipse satisfacen la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

donde el origen del sistema de coordenadas se encuentra en el centro de la elipse. Si $a = b$, resulta un círculo (un caso especial de una elipse).

Es útil introducir la excentricidad, e , de la elipse, definida como

$$e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}.$$

Una excentricidad de cero, el menor valor posible, caracteriza a un círculo. La elipse mostrada en la figura 12.15 tiene una excentricidad de 0.6.

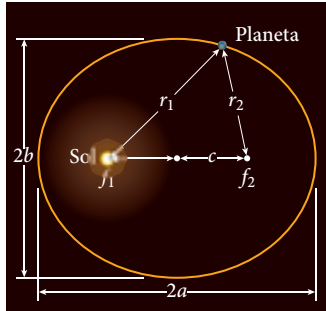


FIGURA 12.15 Parámetros usados en la descripción de elipses y órbitas elípticas.

La excentricidad de la órbita terrestre en torno del Sol es de sólo 0.017. Si dibujara una elipse con este valor de e , usted no la podría distinguir de un círculo por inspección visual. La longitud del semieje menor de la órbita terrestre es aproximadamente 99.98% de la longitud de su semieje mayor. En su aproximación más cercana al Sol, llamada *perihelio*, la Tierra se encuentra a 147.1 millones de kilómetros del Sol. El *afelio*, el cual es el punto más lejano desde el Sol en la órbita terrestre, mide 152.6 millones de km.

Es importante mencionar que el cambio en las estaciones *no* es causado principalmente por la excentricidad de la órbita terrestre. (El punto de la aproximación más cercana al Sol se alcanza a principios de enero de cada año, a la mitad de la estación fría en el hemisferio norte.) En lugar de esto, las estaciones son causadas por el hecho de que el eje de rotación terrestre está inclinado en un ángulo de 23.4° en relación con el eje del plano de la elipse orbital. Esta inclinación expone al hemisferio norte a los rayos solares por periodos más prolongados y a un ángulo más directo en los meses del verano.

Entre las otras órbitas planetarias, la de Mercurio tiene la mayor excentricidad: 0.205. (La excentricidad orbital de Plutón es incluso mayor, con 0.249, pero a Plutón ya no se le clasifica como un planeta desde agosto de 2006.) La órbita de Venus tiene la menor excentricidad, 0.007, seguida de la de Neptuno con una excentricidad de 0.009.

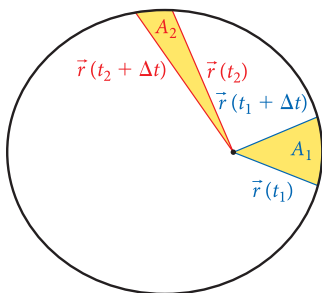


FIGURA 12.16 La segunda ley de Kepler establece que se barren áreas iguales en periodos de tiempo iguales, o $A_1 = A_2$.

Segunda ley de Kepler: áreas

Una línea recta que conecta al centro del Sol con el centro de cualquier planeta (figura 12.16) barre áreas iguales en tiempos iguales:

$$\frac{dA}{dt} = \text{constante.} \tag{12.17}$$

La tercera ley de Kepler: periodos

El cuadrado del periodo de la órbita de un planeta es proporcional al cubo del semieje mayor de la órbita:

$$\frac{T^2}{a^3} = \text{constante.} \quad (12.18)$$

Esta constante de proporcionalidad puede expresarse en términos de la masa solar y la constante de gravitación universal

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}. \quad (12.19)$$

DEDUCCIÓN 12.3

Leyes de Kepler

La demostración general de las leyes de Kepler usa la ley de gravitación de Newton, ecuación 12.1 y la ley de conservación del momento angular. Con bastante álgebra y cálculo, es entonces posible demostrar las tres leyes de Kepler. Aquí vamos a derivar la segunda y la tercera leyes para órbitas circulares con el Sol en el centro, permitiéndonos poner al Sol en el origen del sistema de coordenadas y despreciar el movimiento solar en torno del centro de masa común del sistema Sol-planeta.

Primero, mostramos que el movimiento circular es en realidad posible. Del capítulo 9 sabemos que para obtener una órbita circular cerrada, la fuerza centrípeta necesita ser igual a la fuerza gravitacional:

$$m \frac{v^2}{r} = G \frac{Mm}{r^2} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM}{r}}.$$

Este resultado establece dos hechos importantes: primero, la masa del objeto que orbita se cancela, de tal manera que todos los objetos pueden tener la misma órbita, siempre y cuando su masa sea pequeña comparada con la del Sol. Segundo, cualquier radio orbital dado, r , tiene una velocidad orbital única que le corresponde. También, para un radio orbital dado, obtenemos un valor constante de la velocidad angular:

$$\omega = \frac{v}{r} = \sqrt{\frac{GM}{r^3}}. \quad (i)$$

Luego, examinamos el área recorrida por un vector radial que conecta al Sol con el planeta. Como se indica en la figura 12.17, el área recorrida es $dA = \frac{1}{2}rs = \frac{1}{2}r^2 d\theta$. Al derivar con respecto al tiempo obtenemos

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2}r^2 \omega.$$

Debido a que, para una órbita dada, ω y r son constantes, hemos derivado la segunda ley de Kepler, la cual afirma que $dA/dt = \text{constante}$.

Por último, para la tercera ley de Kepler, usamos $T = 2\pi/\omega$ y sustituimos la expresión para la velocidad angular de la ecuación (i). Esto da como resultado

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{GM}}.$$

Podemos reacomodar esta ecuación para obtener

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM}.$$

Esto demuestra la tercera ley de Kepler y da el valor para la constante de proporcionalidad entre el cuadrado del periodo orbital y el cubo del radio orbital.

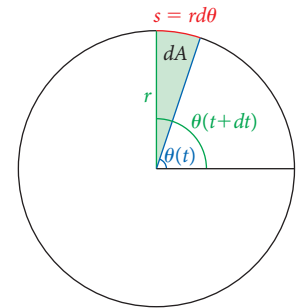


FIGURA 12.17 Ángulo, longitud del arco y área como función del tiempo.

De nuevo, tome en cuenta que las leyes de Kepler son válidas para órbitas elípticas en general, no sólo para órbitas circulares. En lugar de referirse al radio del círculo, r tiene que tomarse como el semieje mayor de la elipse para tales órbitas. Quizás una formulación más útil de la tercera ley de Kepler puede escribirse como

$$\frac{T_1^2}{a_1^3} = \frac{T_2^2}{a_2^3}. \tag{12.20}$$

Con esta fórmula, podemos encontrar con facilidad los periodos orbitales y los radios para dos objetos en órbita distintos.

PROBLEMA RESUELTO 12.1 Período orbital de Sedna

PROBLEMA

El 14 de noviembre de 2003, los astrónomos descubrieron un objeto desconocido previamente en una parte del Cinturón de Kuiper más allá de la órbita de Neptuno. Llamaron a este objeto Sedna, por la diosa Inuit del mar. La distancia promedio de Sedna al Sol es de $78.7 \cdot 10^9$ km. ¿Cuánto toma a Sedna completar una órbita alrededor del Sol?

SOLUCIÓN

PIENSE

Podemos usar las leyes de Kepler para relacionar la distancia de Sedna al Sol con el periodo de la órbita de Sedna alrededor del Sol.

ESBOCE

Se muestra un trazo que compara la distancia promedio de Sedna al Sol con la distancia de Plutón en la figura 12.18.

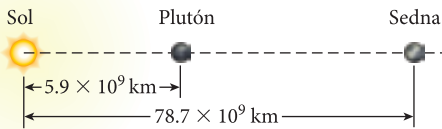


FIGURA 12.18 La distancia a Sedna desde el Sol comparada con la distancia a Plutón desde el Sol.

INVESTIGUE

Podemos relacionar la órbita de Sedna con la órbita conocida de la Tierra usando la ecuación 12.20 (una forma de la tercera ley de Kepler):

$$\frac{T_{\text{Tierra}}^2}{a_{\text{Tierra}}^3} = \frac{T_{\text{Sedna}}^2}{a_{\text{Sedna}}^3}, \tag{i}$$

donde T_{Tierra} es el periodo orbital de la Tierra, a_{Tierra} es el radio de la órbita terrestre, T_{Sedna} es el periodo orbital de Sedna y a_{Sedna} es el radio de la órbita de Sedna.

SIMPLIFIQUE

Podemos resolver la ecuación (i) para el periodo de la órbita de Sedna:

$$T_{\text{Sedna}} = T_{\text{Tierra}} \left(\frac{a_{\text{Sedna}}}{a_{\text{Tierra}}} \right)^{3/2}.$$

CALCULE

Sustituyendo los valores numéricos, tenemos

$$T_{\text{Sedna}} = (1 \text{ año}) \left(\frac{78.7 \cdot 10^9 \text{ km}}{0.150 \cdot 10^9 \text{ km}} \right)^{3/2} = 12\,018 \text{ años.}$$

REDONDEE

Reportamos nuestro resultado con dos cifras significativas

$$T_{\text{Sedna}} = 1.21 \cdot 10^4 \text{ años.}$$

VUELVA A REVISAR

Podemos comparar nuestro resultado con los valores medidos para los semiejes mayores de las órbitas y los periodos orbitales de los planetas y varios planetas enanos. Como muestra la figura 12.19, nuestro resultado calculado (línea punteada, representando la tercera ley de Kepler) se ajusta bien con la extrapolación de los datos de los planetas (puntos rojos) y los planetas enanos (puntos azules).

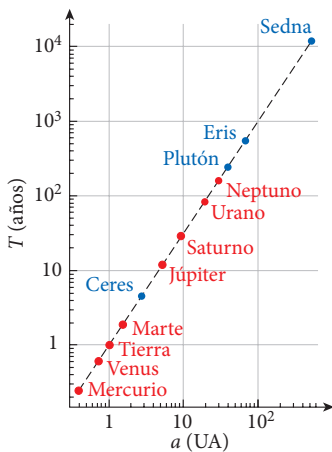


FIGURA 12.19 Período orbital versus la longitud del semieje mayor de las órbitas de objetos en el Sistema Solar.

También podemos usar la tercera ley de Kepler para determinar la masa del Sol. Obtenemos la masa del Sol despejando de la ecuación 12.19:

$$M = \frac{4\pi^2 a^3}{GT^2}. \quad (12.21)$$

Sustituyendo los datos para el periodo orbital y el radio terrestre nos da

$$M = \frac{4\pi^2 (1.496 \cdot 10^{11} \text{ m})^3}{(6.67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}) (3.15 \cdot 10^7 \text{ s})^2} = 1.99 \cdot 10^{30} \text{ kg}.$$

También es posible usar la tercera ley de Newton para determinar la masa de la Tierra a partir del periodo y el radio de la órbita lunar alrededor de la Tierra. De hecho, los astrónomos pueden usar esta ley para determinar la masa de cualquier objeto astronómico que tenga un satélite orbitando si saben el radio y el periodo de la órbita.

12.3 Oportunidad de autoexamen

Use el hecho de que la interacción gravitacional entre la Tierra y el Sol proporciona la fuerza centrípeta que mantiene a la Tierra en su órbita para demostrar la ecuación 12.21. (Suponga una órbita circular.)

EJEMPLO 12.4 El agujero negro en el centro de la Vía Láctea

PROBLEMA

Hay un agujero negro supermasivo en el centro de la Vía Láctea. ¿Cuál es su masa?

SOLUCIÓN

En junio de 2007, los astrónomos midieron la masa del centro de la Vía Láctea. Se rastrearon siete estrellas orbitando cerca del centro galáctico durante 9 años, como se muestra en la figura 12.20. Los periodos y los semiejes mayores extraídos por los astrónomos se muestran en la tabla 12.2. Usando estos datos y la tercera ley de Kepler (ecuación 12.21), podemos calcular la masa del centro galáctico, indicado por el símbolo de una estrella en la figura 12.20. La masa del centro galáctico resultante se muestra en la tabla 12.2 para cada conjunto de mediciones de las estrellas. La masa promedio del centro galáctico es $3.7 \cdot 10^6$ veces la masa solar. De esta forma, los astrónomos infieren que hay un agujero negro supermasivo en el centro de la galaxia, debido a que ninguna estrella es visible en ese punto.

EXPLICACIÓN

Si hay un agujero negro supermasivo en el centro de la Vía Láctea, usted se podría preguntar, ¿por qué la Tierra no está siendo atraída hacia éste? La respuesta es la misma que la respuesta a la pregunta de por qué la Tierra no cae hacia el Sol: La Tierra orbita al Sol, y el Sol orbita al centro galáctico que se encuentra a una distancia de 26 000 años luz del Sistema Solar.

FIGURA 12.20 Las órbitas de siete estrellas cercanas al centro de la Vía Láctea, rastreadas por los astrónomos del Grupo del Centro Galáctico de Keck/UCLA de 1995 a 2004. Las posiciones medidas, representadas por puntos de color, se superponen a una fotografía tomada al principio del rastreo. Las líneas representadas se ajustan a las mediciones usadas para extraer los periodos y los semiejes mayores de las órbitas de las estrellas. Cada lado de la imagen representa una distancia de aproximadamente $\frac{1}{15}$ de años luz.

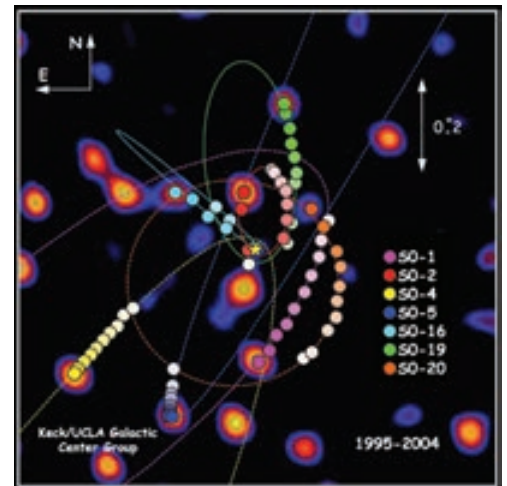


Tabla 12.2 Periodos y semiejes mayores para las estrellas que orbitan el centro de la Vía Láctea

Estrella	Periodo (años)	Semieje mayor (AU)	Periodo (10^8 s)	Semieje mayor (10^{14} m)	Masa del centro galáctico (10^{36} kg)	Equivalente en masas solares (10^6)
S0-2	14.43	919	4.55	1.37	7.44	3.74
S0-16	36	1 680	113	2.51	7.31	3.67
S0-19	37.2	1 720	117	2.57	7.34	3.69
S0-20	43	1 900	135	2.84	7.41	3.72
S0-1	190	5 100	599	7.63	7.34	3.69
S0-4	2 600	30 000	819	44.9	7.98	4.01
S0-5	9 900	70 000	3 120	105	6.99	3.51
Promedio					7.40	3.72

12.3 Ejercicio en clase

La mejor estimación del periodo orbital del Sistema Solar alrededor del centro de la Vía Láctea está entre 220 y 250 millones de años. ¿Cuánta masa (en términos de masas solares) está encerrada dentro del radio de 26 000 años luz ($1.7 \cdot 10^9$ UA) de la órbita del Sistema Solar? (Pista: Un periodo orbital de 1 año para una órbita de radio 1 UA corresponde con 1 masa solar.)

- a) 90 mil millones de masas solares
- b) 7.2 mil millones de masa solares
- c) 52 millones de masas solares
- d) 3.7 millones de masas solares
- e) 432 000 masas solares

La segunda ley de Kepler y la conservación del momento angular

El capítulo 10 (acerca de la rotación) enfatizó la importancia de concepto del momento angular, en particular, la importancia de la conservación del momento angular. Es bastante simple demostrar la ley de la conservación del momento angular para el movimiento planetario y, en consecuencia, también derivar la segunda ley de Kepler. Trabajemos a través de esta demostración.

Primero, mostramos que el momento angular, $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$, de una partícula puntual se conserva si la partícula se mueve bajo la influencia de una fuerza central. Una **fuerza central** es una fuerza que actúa sólo en la dirección radial, $\vec{F}_{\text{central}} = F\hat{r}$. Para probar esta afirmación, tomamos la derivada con respecto al tiempo del momento angular:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Para una partícula puntual, el vector de la velocidad, $\vec{v} = d\vec{r}/dt$, y el vector del momento lineal, \vec{p} son paralelos; por lo tanto, su producto vectorial se vuelve cero: $(d\vec{r}/dt) \times \vec{p} = 0$. Esto nos deja sólo con el término $\vec{r} \times (d\vec{p}/dt)$ en la ecuación anterior. Usando la segunda ley de Newton encontramos (vea el capítulo 7, acerca del momento lineal) $d\vec{p}/dt = \vec{F}$. Si esta fuerza es una fuerza central, entonces es paralela (o antiparalela) al vector \vec{r} . De esta forma, para una fuerza central, el producto vectorial $\vec{r} \times (d\vec{p}/dt)$ también se vuelve cero:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}_{\text{central}} = \vec{r} \times F\hat{r} = 0.$$

Dado que $d\vec{L}/dt = 0$, hemos mostrado que el momento angular se conserva para una fuerza central. La fuerza gravitacional es una fuerza central semejante y, por lo tanto, el momento angular se conserva para cualquier planeta moviéndose en una órbita.

¿Cómo ayuda este resultado general para derivar la segunda ley de Kepler? Si podemos mostrar que el área dA recorrida por el vector radial, \vec{r} durante algún tiempo infinitesimal, dt , es proporcional al valor absoluto del momento angular, entonces hemos terminado, ya que se conserva el momento angular.

Como puede ver en la figura 12.21, el área infinitesimal dA recorrida por el vector \vec{r} es el triángulo abarcado por este vector y el cambio diferencial en el mismo, $d\vec{r}$:

$$dA = \frac{1}{2} |\vec{r} \times d\vec{r}| = \frac{1}{2} \left| \vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} dt \right| = \frac{1}{2} \left| \vec{r} \times \frac{1}{m} m \frac{d\vec{r}}{dt} dt \right| = \frac{dt}{2m} |\vec{r} \times \vec{p}| = \frac{dt}{2m} |\vec{L}|.$$

Por lo tanto, el área recorrida en cada intervalo de tiempo, dt , es

$$\frac{dA}{dt} = \frac{|\vec{L}|}{2m} = \text{constante},$$

lo cual es exactamente lo que afirma la segunda ley de Kepler.

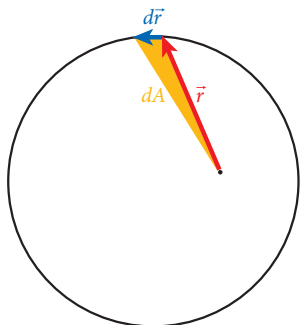
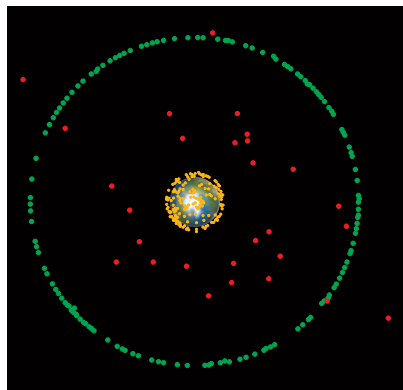


FIGURA 12.21 Área recorrida por el vector radial.

12.6 Órbitas satelitales



La figura 12.22 muestra las posiciones de muchos de los varios cientos de satélites en órbita alrededor de la Tierra. Cada punto representa la posición de un satélite en la tarde del 23 de junio de 2004. En órbitas bajas, sólo unos cuantos cientos de kilómetros sobre el nivel del mar, se encuentran satélites de comunicación para sistemas de telefonía, la Estación Espacial Internacional, el telescopio espacial Hubble y otras aplicaciones (puntos amarillos). El círculo perfecto de satélites a una distancia de aproximadamente 5.6 radios terrestres sobre la superficie (puntos verdes) está compuesto por los **satélites geoestacionarios**, los cuales orbitan a la misma velocidad angular que la Tierra y así permanecen sobre el mismo punto en el suelo. Los satélites entre la órbita geoestacionaria y la órbita baja (puntos rojos) son sobre todo aquellos usados para el Sistema de Posicionamiento Global, pero también se incluyen algunos que llevan instrumentos de investigación.

FIGURA 12.22 Las posiciones de algunos de los satélites en órbita alrededor de la Tierra el 23 de junio de 2004, mirando hacia el Polo Norte. Esta ilustración se produjo con datos disponibles de la NASA.

PROBLEMA RESUELTO 12.2 Satélite en órbita

PROBLEMA

Un satélite está en órbita circular alrededor de la Tierra. La órbita tiene un radio de 3.75 veces el radio terrestre. ¿Cuál es la velocidad lineal del satélite?

SOLUCIÓN

PIENSE

La fuerza de gravedad proporciona la fuerza centrípeta que mantiene a los satélites en su órbita circular alrededor de la Tierra. Podemos obtener la velocidad lineal del satélite igualando la fuerza centrípeta expresada en términos de la velocidad lineal con la fuerza de gravedad entre el satélite y la Tierra.

ESBOCE

Se presenta un bosquejo de la situación del problema en la figura 12.23.

INVESTIGUE

Para un satélite con una masa m , moviéndose con una velocidad lineal v , la fuerza centrípeta requerida para mantener al satélite moviéndose en un círculo con radio r es

$$F_c = \frac{mv^2}{r}. \quad (i)$$

La fuerza gravitacional, F_g , entre el satélite y la Tierra es

$$F_g = G \frac{M_E m}{r^2}, \quad (ii)$$

donde G es la constante de gravitación universal y M_E es la masa de la Tierra. Igualando las fuerzas descritas por las ecuaciones (i) y (ii), obtenemos

$$F_c = F_g \Rightarrow \frac{mv^2}{r} = G \frac{M_E m}{r^2}.$$

SIMPLIFIQUE

La masa del satélite se cancela; de esta manera, la velocidad orbital de un satélite no depende de su masa. Obtenemos

$$v^2 = G \frac{M_E}{r} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM_E}{r}}. \quad (iii)$$

CALCULE

El enunciado del problema especificaba que el radio de la órbita de un satélite es $r = 3.75R_E$, donde R_E es el radio terrestre. Sustituyendo por r en la ecuación (iii) e insertando entonces los valores numéricos conocidos nos da

$$v = \sqrt{\frac{GM_E}{3.75R_E}} = \sqrt{\frac{(6.67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2})(5.97 \cdot 10^{24} \text{ kg})}{3.75(6.37 \cdot 10^6 \text{ m})}} = 4082.86 \text{ m/s}.$$

REDONDEE

Expresando nuestro resultado con tres cifras significativas tenemos

$$v = 4080 \text{ m/s} = 4.08 \text{ km/s}.$$

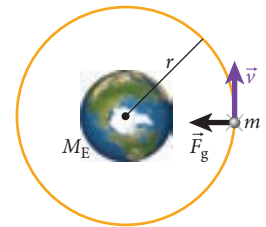


FIGURA 12.23 Satélite en órbita alrededor de la Tierra.

(continúa)

(continuación)

VUELVA A REVISAR

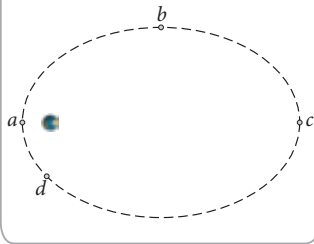
El tiempo que toma este satélite en completar una órbita es

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi(3.75R_E)}{v} = \frac{2\pi \cdot 3.75(6.37 \cdot 10^6 \text{ m})}{4\,080 \text{ m/s}} = 36\,800 \text{ s} = 10.2 \text{ h},$$

lo cual parece razonable ya que los satélites de comunicación toman 24 horas, pero están a alturas mayores, y el telescopio espacial Hubble toma 1.6 horas a una altura menor.

12.4 Ejercicio en clase

La órbita elíptica de un pequeño satélite orbitando a un planeta esférico se muestra en la figura. ¿En qué punto a lo largo de su órbita la velocidad lineal del satélite está en su máximo?



Combinando la expresión para la velocidad orbital del problema resuelto 12.2, $v = \sqrt{GM_E/r}$, con la ecuación 12.15 para la velocidad de escape, $v_{esc} = \sqrt{2GM_E/r}$, encontramos que la velocidad orbital de un satélite es siempre

$$v(r) = \frac{1}{\sqrt{2}} v_{esc}(r). \tag{12.22}$$

La Tierra es un satélite del Sol y, como determinamos en la sección 12.4, la velocidad de escape del Sol partiendo del radio orbital de la Tierra es de 42 km/s. Usando la ecuación 12.22, podemos predecir que la velocidad orbital de la Tierra moviéndose alrededor del Sol es $42/\sqrt{2}$ km/s, o aproximadamente 30 km/s, que coincide con el valor de la velocidad orbital que encontramos antes en el capítulo 9.

Energía de un satélite

Habiendo resuelto el problema muestra 12.2, podemos obtener con facilidad una expresión para la energía cinética de un satélite en órbita alrededor de la Tierra. Multiplicando ambos lados de $mv^2/r = GM_E m/r^2$, la cual encontramos igualando las fuerzas centrípeta y gravitacional, por $r/2$ obtenemos

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}G \frac{M_E m}{r}.$$

El lado izquierdo de esta ecuación es la energía cinética del satélite. Comparando con el lado derecho de la expresión con la energía potencial gravitacional, $U = -GM_E m/r$, vemos que este lado es equivalente a $-\frac{1}{2}U$. De esta manera, obtenemos la energía cinética de un satélite en órbita circular:

$$K = -\frac{1}{2}U. \tag{12.23}$$

La energía mecánica total del satélite es entonces

$$E = K + U = -\frac{1}{2}U + U = \frac{1}{2}U = -\frac{1}{2}G \frac{M_E m}{r}. \tag{12.24}$$

Por consecuencia, la energía total es exactamente el negativo de la energía cinética del satélite:

$$E = -K. \tag{12.25}$$

Es importante notar que las ecuaciones de la 12.23 a la 12.25 se mantienen todas para cualquier radio orbital.

Para una órbita elíptica con un semieje mayor a , obtener la energía del satélite requiere un poco más de matemáticas. El resultado es muy semejante a la ecuación 12.24, con el radio r de la órbita circular reemplazado por el semieje mayor a de la órbita elíptica:

$$E = -\frac{1}{2}G \frac{M_E m}{a}.$$

Órbita de los satélites geoestacionarios

Para muchas aplicaciones, un satélite necesita permanecer en el mismo punto en el cielo respecto de la Tierra. Por ejemplo, las antenas de la TV vía satélite siempre apuntan al mismo lugar en el cielo, así que necesitamos que un satélite esté ubicado ahí, para estar seguro que tengamos recepción de una señal. Estos satélites que están en el mismo punto de manera continua en el cielo se llaman geoestacionarios.

¿Cuáles son las condiciones que un satélite debe cumplir para ser geoestacionario? Primero, debe moverse en un círculo, debido a que ésta es la única órbita que tiene una velocidad angular constante. Segundo, el periodo de rotación de la órbita del satélite debe coincidir con el de la Tierra, exactamente 1 día. Y tercero, el eje de rotación de la órbita del satélite debe estar alineado exactamente con el eje de rotación de la Tierra. Debido a que el centro de la Tierra debe estar en el centro de una órbita circular para cualquier satélite, la única órbita geoestacionaria posible es una que esté exactamente sobre el ecuador. Estas condiciones dejan sólo el radio de la órbita para ser determinado.

Para encontrar al radio, usamos la tercera ley de Kepler en la forma de la ecuación 12.19 y resolvemos para r :

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM} \Rightarrow r = \left(\frac{GMT^2}{4\pi^2} \right)^{1/3}. \quad (12.26)$$

La masa M en este caso es la de la Tierra. Sustituyendo los valores numéricos, encontramos

$$r = \left(\frac{(6.674 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2})(5.9742 \cdot 10^{24} \text{ kg})(86164 \text{ s})^2}{4\pi^2} \right)^{1/3} = 42\,168 \text{ km}.$$

Note que usamos el mejor valor disponible para la masa de la Tierra y el día sideral como el periodo correcto de la rotación terrestre (vea el capítulo 9). La distancia de un satélite geoestacionario sobre el nivel del mar en el ecuador es entonces de 42 168 km $-R_E$. Tomando en cuenta que la Tierra no es una esfera perfecta, sino un poco achatada, esta distancia es

$$d = r - R_E = 35\,790 \text{ km}.$$

Esta distancia es 5.61 veces el diámetro de la Tierra. Ésta es la razón por la cual los satélites geoestacionarios forman un círculo casi perfecto con un radio de $6.61R_E$ en la figura 12.22.

La figura 12.24 muestra una sección transversal a través de la Tierra y la ubicación de un satélite geoestacionario, con el radio de su órbita dibujado a escala. De esta figura, el ángulo ξ respecto de la horizontal al cual se debe orientar una antena satelital para obtener la mejor recepción de TV. Debido a que cualquier satélite geoestacionario está ubicado en el plano del ecuador, una antena en el hemisferio norte deberá apuntar hacia el sur.

También hay satélites geosincrónicos en órbita alrededor de la Tierra. Un satélite geosincrónico también tiene un periodo orbital de 1 día, pero no necesita permanecer en el mismo punto en el cielo visto desde la superficie terrestre. Por ejemplo, el Observatorio de Dinámica Solar de la NASA (programado para lanzarse en enero de 2010) tendrá una órbita geosincrónica que está inclinada, la cual traza una figura 8 en el cielo, visto desde tierra. Una órbita geoestacionaria es un caso especial de las órbitas geosincrónicas.

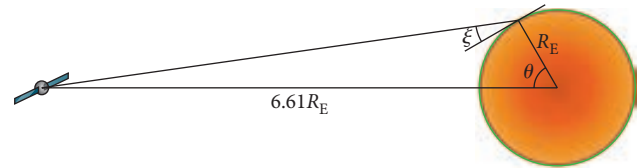


FIGURA 12.24 Ángulo de una antena satelital, ξ , relativa a la horizontal local como una función del ángulo de la latitud, θ .

PROBLEMA RESUELTO 12.3 Antena TV satelital

Usted acaba de recibir su nuevo sistema de televisión, pero la compañía no puede salir a instalar el plato inmediatamente. Usted quiere mirar el gran juego esta noche, así es que decide instalar el plato usted mismo.

PROBLEMA

Suponiendo que usted vive en una ubicación en la latitud de 42.75°N y que la compañía de TV satelital tiene el satélite alineado con su longitud, ¿en qué dirección debe usted apuntar el plato satelital?

SOLUCIÓN

PIENSE

Las compañías de TV vía satélite usan satélites geoestacionarios para difundir las señales. De esta manera, sabemos que usted necesita apuntar la antena satelital hacia el sur, en la dirección

(continúa)

(continuación)

del ecuador, pero usted también necesita conocer el ángulo de inclinación de la antena satelital con respecto a la horizontal. En la figura 12.24, éste es el ángulo ξ . Para determinar ξ , podemos usar la ley de los cosenos, incorporando la distancia de un satélite en órbita geostacionaria, el radio terrestre y la latitud de la ubicación de la antena.

ESBOCE

En la figura 12.25 se encuentra un trazo de la geometría de la ubicación del satélite geostacionario y el punto en la superficie terrestre donde se está instalando la antena. En este bosquejo, R_E es el radio terrestre, R_S es la distancia desde el satélite hasta el centro de la Tierra, d_S es la distancia del satélite a un punto sobre la superficie terrestre donde está ubicada la antena, θ es el ángulo de la latitud de la antena en esa ubicación y ϕ es el ángulo entre d_S y R_E .

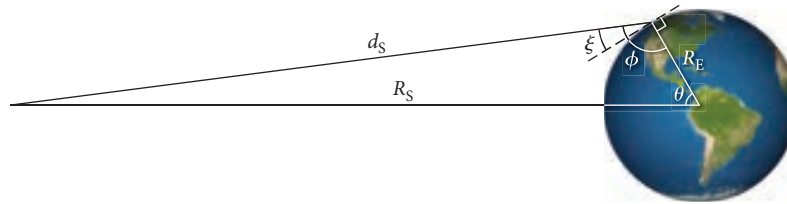


FIGURA 12.25 Geometría de un satélite geostacionario en órbita alrededor de la Tierra.

INVESTIGUE

Para determinar el ángulo ξ , primero necesitamos determinar el ángulo ϕ . Podemos ver de la figura 12.25 que $\xi = \phi - 90^\circ$ ya que la línea punteada es tangente a la superficie terrestre y por lo tanto es perpendicular a una línea desde el punto al centro de la Tierra. Para determinar ϕ , podemos aplicar la ley de los cosenos al triángulo definido por d_S , R_E y R_S . Necesitamos aplicar la ley de los cosenos a este triángulo dos veces. Para usar la ley de los cosenos a fin de determinar ϕ , necesitamos conocer las longitudes de los lados d_S y R_E . Conocemos R_E pero no d_S . Podemos determinar la longitud d_S usando la ley de los cosenos, el ángulo θ , y la longitud de los dos lados conocidos R_E y R_S :

$$d_S^2 = R_S^2 + R_E^2 - 2R_S R_E \cos \theta. \tag{i}$$

Ahora podemos obtener una ecuación para el ángulo ϕ usando la ley de los cosenos con el ángulo ϕ y las dos longitudes conocidas d_S y R_E :

$$R_S^2 = d_S^2 + R_E^2 - 2d_S R_E \cos \phi. \tag{ii}$$

SIMPLIFIQUE

Sabemos que $R_S = 6.61R_E$ para satélites geostacionarios. El ángulo θ corresponde a la latitud, $\theta = 42.75^\circ$. Podemos sustituir estas cantidades en la ecuación (i):

$$d_S^2 = (6.61R_E)^2 + R_E^2 - 2(6.61R_E)R_E (\cos 42.75^\circ).$$

Podemos ahora escribir una expresión para d_S en términos de R_E :

$$d_S^2 = R_E^2 [6.61^2 + 1 - 2(6.61)(\cos 42.75^\circ)] = 34.984R_E^2,$$

o

$$d_S = 5.915R_E.$$

Podemos resolver la ecuación (ii) para ϕ :

$$\phi = \cos^{-1} \left(\frac{d_S^2 + R_E^2 - R_S^2}{2d_S R_E} \right). \tag{iii}$$

CALCULE

Sustituyendo los valores que tenemos para d_S y R_S en la ecuación (iii) nos da

$$\phi = \cos^{-1} \left(\frac{34.984 R_E^2 + R_E^2 - (6.61 R_E)^2}{2(5.915 R_E) R_E} \right) = 130.66^\circ.$$

El ángulo en el cual usted necesita apuntar su antena satelital con respecto a la horizontal es entonces

$$\xi = \phi - 90^\circ = 130.66^\circ - 90^\circ = 40.66^\circ.$$

REDONDEE

Expresando nuestro resultado con tres cifras significativas nos da

$$\xi = 40.7^\circ.$$

VUELVA A REVISAR

Si el satélite se encontrara muy lejos, las líneas d_S y R_S serían paralelas y el bosquejo de la geometría de la situación se volvería a dibujar como se muestra en la figura 12.26. Podemos ver en este trazo que $\phi = 180^\circ - \theta$. Recordando que $\xi = \phi - 90^\circ$, podemos escribir

$$\xi = (180^\circ - \theta) - 90^\circ = 90^\circ - \theta.$$

En esta situación, $\theta = 42.75^\circ$, así que el ángulo estimado sería de $\xi = 90^\circ - 42.75^\circ = 47.25^\circ$, lo cual es muy cercano a nuestro resultado de $\xi = 40.7^\circ$, pero definitivamente mayor, como se requería. De esta manera, nuestra respuesta parece razonable.

12.5 Ejercicio en clase

Si se establece una base permanente en Marte, será necesario tener satélites estacionarios con respecto a Marte en órbita alrededor de él para facilitar las comunicaciones. Un día en Marte tarda 24 h, 39 min y 35 s. ¿Cuál es el radio de la órbita para un satélite estacionario con respecto a Marte?

- a) 12 560 km d) 29 320 km
b) 15 230 km e) 43 350 km
c) 20 450 km

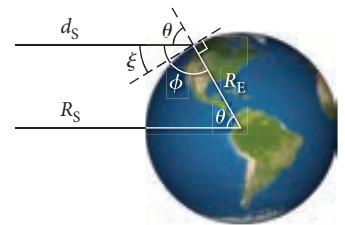


FIGURA 12.26 Geometría de un satélite que se encuentra muy lejos.

12.7 Materia oscura

En el Sistema Solar, casi toda la materia se concentra en el Sol. La masa solar es aproximadamente 750 veces mayor que la masa de todos los planetas combinados (tabla 12.1). La Vía Láctea, nuestra galaxia hogar, contiene gigantescas nubes de gas y polvo, cuya masa combinada es sólo de una décima de la masa contenida en las estrellas de la galaxia. Extrapolando a partir de estos hechos, usted podría concluir que el universo entero está compuesto de casi exclusivamente materia luminosa; esto es, de estrellas. La materia no luminosa en la forma de polvo, asteroides, lunas y planetas debería contribuir sólo con una pequeña fracción de la masa del universo.

Los astrónomos conocen las masas típicas de las estrellas y pueden estimar sus números en las galaxias. De esta forma, han obtenido estimaciones bastante precisas de las masas de las galaxias y cúmulos de galaxias. Además, usan modernos telescopios de rayos X, tales como el *Chandra*, para tomar imágenes del gas interestelar caliente atrapado en los cúmulos galácticos. Pueden deducir la temperatura de este gas a partir de las emisiones de los rayos X y también determinar la fuerza gravitacional necesaria para evitar que este gas caliente se escape de los cúmulos galácticos. La sorpresa que ha emergido de esta investigación es que la masa contenida en la materia luminosa es demasiado pequeña por un factor de aproximadamente de 3 a 5, para proporcionar esta fuerza gravitacional. Este análisis lleva a la conclusión de que debe haber otra materia, a la cual se refieren los astrónomos como *materia oscura*, que proporciona la fuerza faltante.

Parte de la evidencia observacional de la existencia de materia oscura proviene de las mediciones de las velocidades orbitales de las estrellas alrededor del centro de su galaxia como función de su distancia del centro, como se muestra en la figura 12.27 para M 31, la galaxia de Andrómeda. Incluso si suponemos que hay un agujero negro supermasivo, el cual obviamente es no luminoso, en el centro de la galaxia, esperaríamos que la velocidad estelar cayese hasta cero para grandes distancias del centro. La evidencia experimental; sin embargo, indica que éste no es el caso. De esta manera, es probable que se encuentren presentes grandes cantidades de materia oscura, con una extensión radial muy grande.

Otra evidencia de la materia oscura ha emergido de las observaciones de las lentes gravitacionales. En la figura 12.28a), el sombreado azul claro representa la distribución de materia oscura alrededor de un cúmulo galáctico, calculado a partir de las lentes gravitacionales observadas. En

12.4 Oportunidad de autoexamen

Una de las piezas que pone de manifiesto la existencia de la materia oscura es la curva de velocidad de las estrellas en las galaxias en rotación (vea, por ejemplo, la figura 12.27). Los astrónomos observan que la velocidad de las estrellas en una galaxia semejante primero se incrementa y luego permanece constante como función de la distancia desde el centro de la galaxia. ¿Cómo esperaría usted que fuera la velocidad de las estrellas como función de la distancia desde el centro de la galaxia si la galaxia consistiese de estrellas de masa igual distribuidas de manera uniforme a través del disco y no estuviese presente la materia oscura?

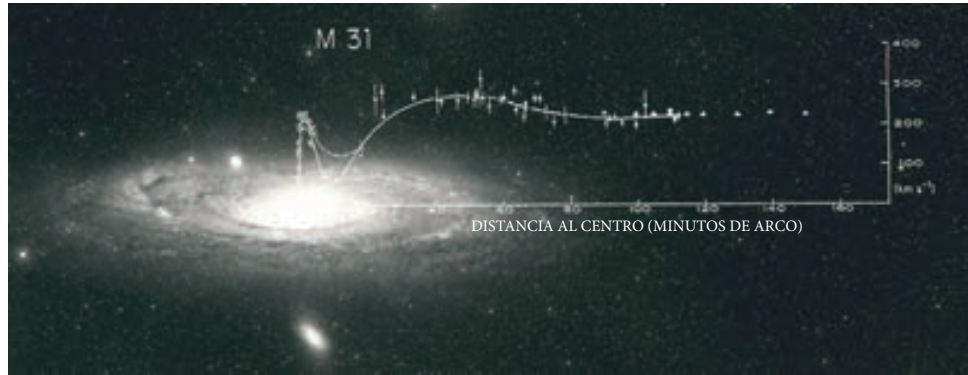


FIGURA 12.27 Imagen de la galaxia de Andr6meda, con datos de las velocidades orbitales superimpuestas. (Los tri6ngulos representan datos de radiotelescopio de 1975 y los otros s6mbolos muestran observaciones en longitudes de onda 6pticas de 1970; la l6nea s6lida y la punteada son ajustes simples para guiar al ojo.) La caracter6stica de inter6s principal aqu6 es que las velocidades orbitales permanecen aproximadamente constantes bastante fuera de las porciones luminosas de Andr6meda, indicando la presencia de materia oscura.

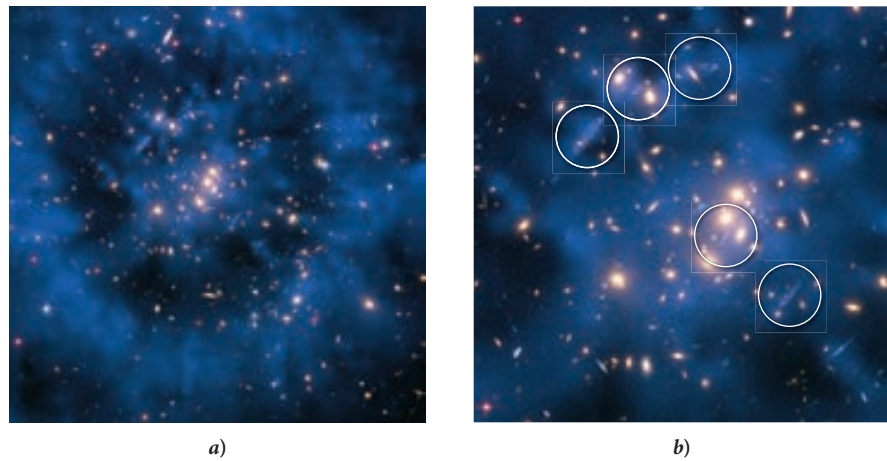


FIGURA 12.28 Un ejemplo de la lente gravitacional debida a la materia oscura. *a)* Fotograf6a del c6mulo gal6ctico Cl 0024+17 tomada por el telescopio espacial *Hubble*. El sombreado azul claro representa la distribuci6n de materia oscura basada en la lente gravitacional observada. *b)* Secci6n expandida de la secci6n central de la fotograf6a en el inciso *a)*, con cinco im6genes de la misma galaxia producidas por la lente gravitacional marcadas por c6rculos.



FIGURA 12.29 Superposici6n de im6genes de rayos X y 6pticas del “c6mulo de la bala”, c6mulo gal6ctico 1E 0657-56, el cual contiene prueba emp6rica directa de la existencia de la materia oscura.

la figura 12.28*b)*, los c6rculos blancos marcan las posiciones de cinco im6genes de la misma galaxia producidas por la lente gravitacional de la materia oscura invisible. (La lente gravitacional se explicar6 en el cap6tulo 35, que trata acerca de la relatividad.) Por lo pronto, esta observaci6n se presenta simplemente como un hecho emp6rico que favorece la hip6tesis de la existencia de materia oscura.

Tambi6n surgieron los datos sustentadores de la misi6n WMAP (Sonda Anisotr6pica de Microondas Wilkinson), la cual midi6 la radiaci6n c6smica de fondo remanente del Big Bang. La mejor estimaci6n basada en estos datos es que 23% del universo est6 compuesto de materia oscura. Adem6s, la combinaci6n de im6genes del telescopio espacial *Hubble*, el observatorio de rayos X *Chandra* y el telescopio *Magallanes* ha producido una prueba emp6rica directa de la existencia de materia oscura en el “c6mulo de la bala” (figura 12.29). La temperatura del gas intergal6ctico medida en este c6mulo gal6ctico es demasiado grande para que el gas est6 contenido dentro del c6mulo sin la presencia de la materia oscura.

Ha habido gran especulaci6n y una exhaustiva investigaci6n te6rica acerca de la naturaleza de esta materia oscura durante los 6ltimos a6os y las teor6as en torno de 6sta todav6a se est6n modificando conforme surgen nuevas investigaciones. Sin embargo, todas las teor6as propuestas requieren el replanteamiento fundamental del modelo est6ndar del universo y muy probablemente los modelos fundamentales para la interacci6n de las part6culas. Se han sugerido nombres caprichosos para los posibles constituyentes de la materia oscura, como WIMP (Weakly Interacting Massive Particle:

Partícula Masiva Débilmente Interactiva) o MACHO (Massive Astrophysical Compact Halo Object: Objeto Astrofísico Masivo del Halo Compacto). (Las propiedades físicas de estos constituyentes postulados se están investigando de manera activa.)

Durante los últimos años, se ha descubierto un fenómeno aún más extraño: parece que, además de la materia oscura, también existe la *energía oscura*. Esta energía oscura parece ser la responsable de un incremento en la aceleración de la expansión del universo. Se estima que un impactante 73% de la masa-energía del universo es energía oscura. Junto con 23% estimado de materia oscura, esto deja sólo 4% del universo para las estrellas, planetas, lunas, gases y todos los otros objetos hechos de materia convencional.

Éstas son nuevas áreas de investigación que de seguro cambiarán nuestra visión acerca del universo en las décadas venideras.

LO QUE HEMOS APRENDIDO | GUÍA DE ESTUDIO PARA EXAMEN

- La fuerza gravitacional entre dos masas puntuales es proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de las distancias entre éstas, $F(r) = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$, con la constante de proporcionalidad $G = 6.674 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$, conocida como constante de gravitación universal.
- En forma vectorial, la ecuación para la fuerza gravitacional puede escribirse como $\vec{F}_{2 \rightarrow 1} = G \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$. Ésta es la ley de gravitación de Newton.
- Si dos o más objetos interactúan gravitacionalmente la fuerza resultante sobre un objeto está dada por la suma vectorial de las fuerzas que actúan sobre este objeto debida a los otros objetos.
- Cerca de la superficie terrestre, la aceleración gravitacional puede aproximarse por la función $g(h) = g \left(1 - 2 \frac{h}{R_E} + \dots \right)$; esto es, disminuye en forma lineal con la altura sobre la superficie.
- La aceleración gravitacional a nivel del mar puede derivarse de la ley de gravitación de Newton: $g = \frac{GM_E}{R_E^2}$.
- Dentro de un cascarón esférico masivo no actúa la fuerza de gravedad. Debido a esto, la fuerza gravitacional dentro de una esfera uniforme se incrementa en forma lineal con el radio: $F(r) = \frac{4}{3} \pi G \rho m r$.
- La energía potencial gravitacional entre dos objetos está dada por $U(r) = -G \frac{m_1 m_2}{r}$.
- La velocidad de escape de la superficie terrestre es $v_E = \sqrt{\frac{2GM_E}{R_E}}$.
- Las leyes de Kepler del movimiento planetario son las siguientes
 - Todos los planetas se mueven en órbitas elípticas con el Sol en uno de los focos.
 - Una línea recta que conecte al centro del Sol y el centro de cualquier planeta recorre áreas iguales en tiempos iguales: $\frac{dA}{dt} = \text{constante}$.
 - El cuadrado del periodo de la órbita de un planeta es proporcional al cubo del semieje mayor de la órbita: $\frac{T^2}{r^3} = \text{constante}$.
- Las relaciones ente la energía cinética, potencial y total de un satélite en órbita circular son $K = -\frac{1}{2}U$, $E = K + U = -\frac{1}{2}U + U = \frac{1}{2}U = -\frac{1}{2}G \frac{Mm}{R}$, $E = -K$.
- Los satélites geoestacionarios tienen una órbita que es circular, sobre el ecuador y con un radio de 42 168 km.
- La evidencia indica fuertemente hacia la existencia de materia oscura y energía oscura, las cuales constituyen la inmensa mayoría del universo.

TÉRMINOS CLAVE

ley de gravitación de Newton, p. 383
constante de gravitación universal, p. 383

principio de superposición, p. 383
energía potencial gravitacional, p. 392

velocidad de escape, p. 393
leyes de Kepler y del movimiento planetario, p. 395

fuerza central, p. 400
satélites geoestacionarios, p. 400

NUEVOS SÍMBOLOS Y ECUACIONES

$F(r) = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$, ley de gravitación de Newton

$G = 6.674 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$, constante de la gravitación universal

$U(r) = -G \frac{m_1 m_2}{r}$, energía potencial gravitacional

$V_E(r) = -\frac{GM_E}{r}$, potencial gravitatorio de la Tierra

$v_E = \sqrt{\frac{2GM_E}{R_E}}$, velocidad de escape de la Tierra

RESPUESTAS A LAS OPORTUNIDADES DE AUTOEXAMEN

12.1 La deducción es casi idéntica, pero la integración de $R - r$ a $R + r$ produce una fuerza cero. Se brinda otra demostración en la deducción 12.2, basada en la geometría.

12.2 $g_d = g/9 = 1.09 \text{ m/s}^2$.

12.3 La atracción gravitacional entre el Sol y la Tierra suministra una fuerza centrípeta para mantener a la Tierra en órbita alrededor del Sol.

$$\frac{m_E v^2}{r} = G \frac{m_E M}{r^2}$$

Ahora use $v = \frac{2\pi r}{T}$ y sustituya, entonces despeje para M :

$$\left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2 = G \frac{M}{r^2}$$

$$M = \frac{(2\pi)^2 r^3}{GT^2}$$

12.4 La velocidad se incrementaría de manera lineal hasta que la distancia de la estrella desde el centro de la galaxia, r , fuese igual al radio de la galaxia en forma de disco. Para las estrellas fuera del radio de la galaxia, la velocidad disminuiría en forma proporcional a $1/\sqrt{r}$.

PRÁCTICA PARA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Pautas para la resolución de problemas: gravitación

1. Este capítulo introdujo la forma general de la ecuación para la fuerza gravitacional y la aproximación $F = mg$ ya no es válida en general. Asegúrese de tener presente que, en general, la aceleración debida a la gravedad tampoco es una constante. Y esto significa que no se pueden usar las ecuaciones cinemáticas de los capítulos 2 y 3 para resolver problemas.

2. La conservación de la energía es esencial para muchos problemas dinámicos que involucran a la gravitación. Asegúrese de

recordar que la energía potencial gravitacional no está dada simplemente por $U = mgh$, como se presentó en el capítulo 6.

3. El principio de superposición de las fuerzas es importante para situaciones que involucran interacciones de más de dos objetos. Le permite a usted calcular las fuerzas en parejas y entonces sumarlas de manera apropiada.

4. Para órbitas planetarias y satelitales, las leyes de Kepler son herramientas computacionales útiles, que nos permiten relacionar los periodos orbitales y los radios orbitales.

PROBLEMA RESUELTO 12.4 Astronauta en una luna pequeña

PROBLEMA

Una pequeña luna esférica tiene un radio de $6.30 \cdot 10^4 \text{ m}$ y una masa de $8.00 \cdot 10^{18} \text{ kg}$. Un astronauta parado en la superficie de la luna arroja una piedra hacia arriba. La roca alcanza una altura máxima de 2.20 km sobre la superficie de la luna antes de regresar a la superficie. ¿Cuál es la velocidad inicial de la piedra cuando deja la mano del astronauta? (Esta luna es demasiado pequeña para tener atmósfera.)

SOLUCIÓN

PIENSE

Sabemos la masa y el radio de la luna, lo cual nos permite calcular el potencial gravitacional. Al conocer la altura que alcanza la piedra, podemos usar la conservación de la energía para calcular la velocidad inicial de la piedra.

ESBOCE

La figura 12.30 es un bosquejo que muestra a la piedra en su punto superior.

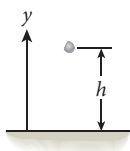


FIGURA 12.30 La piedra en el punto más alto de su trayectoria sobre una línea recta.

INVESTIGUE

Denotamos la masa de la piedra como m , la masa de la luna como m_{luna} y el radio de la luna como R_{luna} . La energía potencial de la piedra sobre la superficie de la luna es entonces

$$U(R_{\text{luna}}) = -G \frac{m_{\text{luna}}}{R_{\text{luna}}} m. \quad (\text{i})$$

La energía potencial en la parte superior de la trayectoria de la piedra es

$$U(R_{\text{luna}} + h) = -G \frac{m_{\text{luna}}}{R_{\text{luna}} + h} m. \quad (\text{ii})$$

La energía cinética de la piedra al dejar la mano del astronauta depende de su masa y de la velocidad inicial v :

$$K(R_{\text{luna}}) = \frac{1}{2} m v^2. \quad (\text{iii})$$

En la parte superior de la trayectoria de la piedra, $K(R_{\text{luna}} + h) = 0$. La conservación de la energía total ahora nos ayuda a resolver el problema:

$$U(R_{\text{luna}}) + K(R_{\text{luna}}) = U(R_{\text{luna}} + h) + K(R_{\text{luna}} + h). \quad (\text{iv})$$

SIMPLIFIQUE

Sustituimos las expresiones de las ecuaciones de la (i) a la (iii) en la (iv):

$$\begin{aligned} -G \frac{m_{\text{luna}}}{R_{\text{luna}}} m + \frac{1}{2} m v^2 &= -G \frac{m_{\text{luna}}}{R_{\text{luna}} + h} m + 0 \Rightarrow \\ -G \frac{m_{\text{luna}}}{R_{\text{luna}}} + \frac{1}{2} v^2 &= -G \frac{m_{\text{luna}}}{R_{\text{luna}} + h} \Rightarrow \\ v &= \sqrt{2Gm_{\text{luna}} \left(\frac{1}{R_{\text{luna}}} - \frac{1}{R_{\text{luna}} + h} \right)}. \end{aligned}$$

CALCULE

Sustituyendo los valores numéricos, tenemos

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{2(6.67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2)(8.00 \cdot 10^{18} \text{ kg}) \left(\frac{1}{6.30 \cdot 10^4 \text{ m}} - \frac{1}{(6.30 \cdot 10^4 \text{ m}) + (2.20 \cdot 10^3 \text{ m})} \right)} \\ &= 23.9078 \text{ m/s}. \end{aligned}$$

REDONDEE

Redondeando a tres cifras significativas nos da

$$v = 23.9 \text{ m/s}.$$

VUELVA A REVISAR

Para verificar nuestro resultado, hagamos la suposición simplificadora que la fuerza de gravedad en la luna pequeña no cambia con la altura. Podemos encontrar la velocidad inicial de la piedra usando la conservación de la energía:

$$m g_{\text{luna}} h = \frac{1}{2} m v^2, \quad (\text{v})$$

donde h es la altura alcanzada por la piedra, v es la velocidad inicial, m es la masa de la piedra y g_{luna} es la aceleración de la gravedad en la superficie de la luna pequeña. La aceleración de la gravedad es

$$g_{\text{luna}} = G \frac{m_{\text{luna}}}{R_{\text{luna}}^2} = \left(6.67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2 \right) \frac{8.00 \cdot 10^{18} \text{ kg}}{(6.30 \cdot 10^4 \text{ m})^2} = 0.134 \text{ m/s}^2.$$

(continúa)

(continuación)

Al resolver la ecuación (v) para la velocidad inicial de la piedra nos da

$$v = \sqrt{2g_{\text{luna}}h}.$$

Al sustituir los valores numéricos, obtenemos

$$v = \sqrt{2(0.134 \text{ m/s}^2)(2200 \text{ m})} = 24.3 \text{ m/s}.$$

Este resultado es cercano pero mayor que nuestra respuesta, 23.9 m/s. El hecho de que la suposición simple de la fuerza gravitacional constante conduce a una velocidad inicial mayor que el caso realista donde la fuerza decrece con la altura tiene sentido. Esta concordancia cercana de los dos resultados también tiene sentido porque la altura alcanzada (2.20 km) no es muy grande comparada con el radio de la luna pequeña (63.0 km). De esta manera, nuestra respuesta parece razonable.

PREGUNTAS DE OPCIÓN MÚLTIPLE

12.1 Un planeta se encuentra en órbita circular en torno de una estrella remota, lejos de cualquier otro objeto en el universo. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta?

- a) Hay sólo una fuerza que actúa sobre el planeta.
- b) Hay dos fuerzas que actúan sobre el planeta y su resultante es cero.
- c) Hay dos fuerzas que actúan sobre el planeta y su resultante no es cero.
- d) Ninguna de las afirmaciones anteriores es cierta.

12.2 Dos masas de 30.0 kg se mantienen en las esquinas de un cuadrado con lados de 20.0 cm. Si una de las masas se libera y se le permite caer hacia la otra masa, ¿cuál es la aceleración de la primera masa justo cuando se libera? Suponga que la única fuerza que actúa sobre la masa es la fuerza gravitacional debida a la otra masa.

- a) $1.5 \cdot 10^{-8} \text{ m/s}^2$
- b) $2.5 \cdot 10^{-8} \text{ m/s}^2$
- c) $7.5 \cdot 10^{-8} \text{ m/s}^2$
- d) $3.7 \cdot 10^{-8} \text{ m/s}^2$

12.3 Con la suposición común de que la energía potencial gravitacional tiende a cero a una distancia infinita, la energía potencial gravitacional debida a la Tierra en el centro de la Tierra es

- a) positiva.
- b) negativa.
- c) cero.
- d) indeterminada.

12.4 Un hombre se dispara desde un cañón en una caja resistente. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones con respecto a las sensaciones de ingravidez del hombre es la correcta?

- a) El hombre percibe la ingravidez sólo cuando él y la caja están viajando hacia arriba.
- b) El hombre percibe la ingravidez sólo cuando el y la caja están viajando hacia abajo.
- c) El hombre percibe la ingravidez cuando él y la caja están viajando tanto hacia arriba como hacia abajo.
- d) El hombre no percibe la ingravidez en ningún momento del vuelo.

12.5 En un sistema estelar binario que consiste de dos estrellas de masas iguales, ¿dónde es el potencial gravitatorio igual a cero?

- a) Exactamente a mitad del camino entre las estrellas.
- b) A lo largo de la línea que biseca a la línea que conecta a las estrellas.
- c) A una distancia infinitamente grande de las estrellas.
- d) Ninguna de las anteriores.

12.6 Dos planetas tienen la misma masa, M , pero una de ellas es mucho más densa que la otra. Se colocan objetos idénticos de masa m sobre las superficies de los planetas. ¿Cuál objeto tendrá una energía potencial gravitacional de mayor magnitud?

- a) Ambos objetos tendrán la misma energía potencial gravitacional.
- b) El objeto sobre la superficie del planeta más denso tendrá la mayor energía potencial gravitacional.
- c) El objeto sobre la superficie del planeta menos denso tendrá la mayor energía potencial gravitacional.
- d) Es imposible determinarlo.

12.7 Dos planetas tienen la misma masa M . Cada uno tiene una densidad constante, pero la densidad del planeta 2 es el doble de la del planeta 1. Se colocan dos objetos idénticos de masa m sobre las superficies de los planetas. ¿Cuál es la relación de la energía potencial gravitacional, U_1 , en el planeta 1 respecto de U_2 en el planeta 2?

- a) $U_1 = U_2$
- b) $U_1 = \frac{1}{2}U_2$
- c) $U_1 = 2U_2$
- d) $U_1 = 8U_2$
- e) $U_1 = 0.794U_2$

12.8 Para dos satélites idénticos con movimiento circular alrededor de la Tierra, ¿cuál de estas afirmaciones es cierta?

- a) El de la órbita inferior tiene una energía total menor.
- b) El de la órbita superior tiene energía cinética mayor.
- c) El de la órbita inferior tiene más energía total.
- d) Ambos tienen la misma energía total.

12.9 ¿Qué condición deben cumplir todos los satélites geos-tacionarios que orbitan a la Tierra?

- a) Deben orbitar sobre el ecuador.
- b) Deben orbitar sobre los polos.
- c) Deben tener un radio orbital que los ubique a menos de 30 000 km sobre la superficie.
- d) Deben tener un radio orbital que lo ubique a más de 42 000 km sobre la superficie.

12.10 Un objeto se coloca entre la Tierra y la Luna, a lo largo de la línea recta que las une. ¿Qué tan lejos de la Tierra debe colocarse el objeto de tal forma que la fuerza gravitacional neta sobre el objeto de la Tierra y de la Luna sea cero? Este punto se conoce como el *Punto L1*, donde la L representa a Lagrange, famoso matemático francés.

- a) A mitad de camino a la Luna.
- b) 60% del camino a la Luna.
- c) 70% del camino a la Luna.
- d) 85% del camino a la Luna.
- e) 95% del camino a la Luna.

12.11 Un hombre con una masa de 100 kg percibe una fuerza gravitacional, F_h , de una mujer con una masa de 50 kg, sentada a 1 m de distancia. La fuerza gravitacional, F_m , experimentada por la mujer será _____ que la experimentada por el hombre.

- a) Más.
- b) Menos.
- c) La misma.
- d) No hay suficiente información.

PREGUNTAS

12.12 ¿Puede usarse la expresión de la energía potencial gravitacional $U_g(y) = mgy$ para analizar el movimiento a gran altura? ¿Por qué sí o por qué no?

12.13 Aunque la Luna no tiene atmósfera, la trayectoria de un proyectil cerca de su superficie es sólo aproximadamente una parábola. Esto se debe a que la aceleración debida a la gravedad cerca de la superficie lunar es sólo aproximadamente constante. Describa de la manera tan precisa como pueda la forma *verdadera* de la trayectoria del proyectil en la Luna, incluso una que viaje a gran distancia sobre la superficie lunar.

12.14 Un científico que trabaja para una agencia espacial notó que un satélite ruso con una masa de 250. kg se encontraba en un curso de colisión con un satélite estadounidense con una masa de 600. kg orbitando a 1 000. km sobre la superficie. Ambos satélites se están moviendo en órbitas circulares, pero en direcciones opuestas. Si los dos satélites colisionan y se mantienen unidos, ¿continuarán en la órbita o chocarán con la Tierra? Explique.

12.15 Tres asteroides, ubicados en los puntos P_1 , P_2 y P_3 , los cuales no están sobre una línea y con masas conocidas m_1 , m_2 y m_3 , interactúan unos con los otros solamente a través de sus fuerzas gravitacionales mutuas; están aislados en el espacio y no interactúan con ningún otro cuerpo. Denotemos con σ el eje que pasa a través del centro de masa de los tres asteroides, perpendicular al triángulo $P_1P_2P_3$. ¿Qué condiciones deben cumplir la velocidad angular ω del sistema (alrededor del eje σ) y las distancias

$$P_1P_2 = a_{12}, \quad P_2P_3 = a_{23}, \quad P_1P_3 = a_{13},$$

para permitir que la forma y el tamaño del triángulo $P_1P_2P_3$ permanezcan sin cambios durante el movimiento del sistema? Esto es, ¿bajo qué condiciones rotará el sistema alrededor del eje σ como un cuerpo rígido?

12.16 Cuanto más intensa es la fuerza gravitacional de un planeta, tanto mayor es su velocidad de escape, v , y tanto mayor es la aceleración gravitacional, g , en su superficie. Sin embargo, en la tabla 12.1, el valor de v es mucho mayor para Urano que

para la Tierra, ¡pero g es menor en Urano que en la Tierra! ¿Cómo puede ser esto?

12.17 ¿La velocidad orbital de la Tierra cuando se encuentra más cerca del Sol, es mayor que, menor que o igual a la velocidad orbital cuando se encuentra más distante del Sol? Explique.

12.18 Señale cualquier falla en la siguiente afirmación de un examen de física: “*La primera ley de Kepler afirma que todos los planetas se mueven en órbitas elípticas con el Sol en un punto focal. Se desprende que durante una revolución completa alrededor del Sol (1 año), la Tierra pasará a través de su punto más cercano al Sol —el perihelio— lo mismo que a través del punto más lejano del Sol —el afelio—. Ésta es la causa principal de las estaciones (verano e invierno) en la Tierra.*”

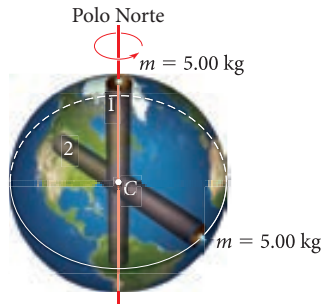
12.19 Un cometa que orbita al Sol se mueve en una órbita elíptica. Dónde es máxima su energía cinética, y por lo tanto también su velocidad, ¿en el perihelio o en el afelio? ¿Dónde es máxima la energía potencial gravitacional?

12.20 Donde orbita la Estación Espacial Internacional, la aceleración gravitacional es apenas 11.4% menor que su valor en la superficie terrestre. Sin embargo, los astronautas en la estación espacial flotan. ¿Por qué ocurre esto?

12.21 Los satélites en órbita baja alrededor de la Tierra pierden energía cuando colisionan con los gases de la atmósfera superior, haciendo que lentamente se muevan en una espiral hacia adentro. ¿Qué pasa con su energía cinética cuando caen hacia adentro?

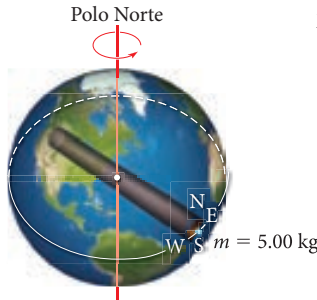
12.22 Compare las magnitudes de la fuerza gravitacional que ejerce la Tierra sobre la Luna y la fuerza gravitacional que ejerce la Luna sobre la Tierra. ¿Cuál es mayor?

12.23 Imagine que dos túneles se perforan atravesando por completo la Tierra y que pasan por el centro. El túnel 1 se encuentra a lo largo del eje de rotación terrestre y el túnel 2 en el plano ecuatorial, con ambos extremos en el ecuador. Dos bolas idénticas, cada una con una masa de 5.00 kg, se dejan caer en forma simultánea en ambos túneles. Desprecie la re-

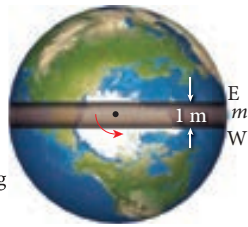


sistencia del aire y la fricción de las paredes del túnel. ¿Alcanzan las bolas al centro de la Tierra (punto C) al mismo tiempo? Si no es así, ¿cuál de las bolas llega al centro de la Tierra primero?

12.24 Imagine que se perfora un túnel en el plano ecuatorial de la Tierra, pasando



Mirando hacia abajo desde arriba del Polo Norte



completamente a través del centro de la Tierra con ambos extremos en el ecuador. Se deja caer una masa de 5.00 kg en el túnel en uno de los extremos, como se muestra en la figura. El túnel tiene un radio que es un poco mayor que el de la masa. Se deja caer una masa en el centro del túnel. Desprecie la resistencia del aire y la fricción de las paredes del túnel. ¿Alguna vez toca la masa a las paredes del túnel cuando cae? Si es así, ¿qué lado toca primero, norte, este, sur u oeste? (*Pista:* El momento angular de la masa se conserva sólo si las fuerzas que actúan sobre ésta son radiales.)

12.25 El peso de una plomada ubicada a una latitud de 55.0°N cuelga sin moverse con respecto al suelo debajo de éste. Una línea recta desde la cuerda que soporta a la plomada no pasa exactamente a través del centro de la Tierra. ¿Interseca esta línea al eje de rotación terrestre al sur o al norte del centro de la Tierra?



PROBLEMAS

Una • y dos •• indican un nivel creciente de dificultad.

Sección 12.1

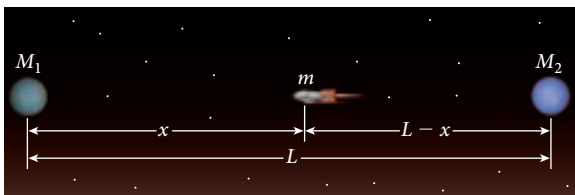
12.26 La Luna causa las mareas porque la fuerza gravitacional que ejerce difiere entre la cara de la Tierra más cercana a la Luna y la más lejana de la Luna. Encuentre la diferencia en la aceleración hacia la Luna sobre la cara más cercana y más lejana de la Tierra.

12.27 Después de una caminata espacial, se deja una herramienta de 1.00 kg a 50.0 m del centro de gravedad de una estación espacial de 20.0 toneladas métricas, orbitando junto con ésta. ¿Qué tanto más cerca de la estación espacial se moverá la herramienta en una hora debido a la atracción gravitacional de la estación espacial?

•12.28 a) ¿Cuál es la fuerza total sobre m_1 debido a m_2 , m_3 y m_4 si todas las masas se colocan en las esquinas de un cuadrado de lado a ? Sean $m_1 = m_2 = m_3 = m_4$.

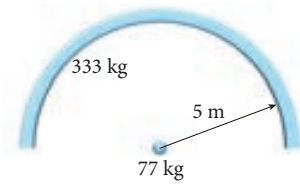
b) Haga un bosquejo de las fuerzas que actúan sobre m_1 .

•12.29 Una nave espacial de masa m se ubica entre dos planetas con masas M_1 y M_2 ; la distancia entre los dos planetas es L , como se muestra en la figura. Suponga que L es mucho mayor que el radio de ambos planetas. ¿Cuál es la posición de la nave espacial (dada como función de L , M_1 y M_2) si la fuerza neta sobre la nave espacial es cero?

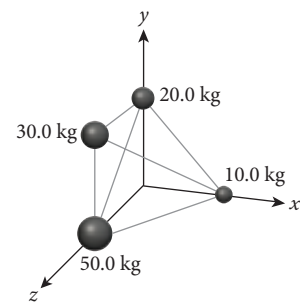


•12.30 Un experimento diseñado de manera cuidadosa puede medir la fuerza gravitacional entre masas de 1 kg. Dado que la densidad del hierro es de $7\,860\text{ kg/m}^3$, ¿cuál es la fuerza gravitacional entre dos esferas de hierro de 1.00 kg que se están tocando?

••12.31 Una barra uniforme con una masa de 333 kg tiene la forma de un semicírculo de 5.00 m de radio. Calcule la magnitud de la fuerza sobre una masa puntual de 77.0 kg colocada en el centro del semicírculo, como se muestra en la figura.



••12.32 La figura muestra un sistema de cuatro masas. La distancia centro a centro entre cualesquiera de las dos masas adyacentes es de 10.0 cm. La base de la pirámide está en el plano xy y la masa de 20.0 kg está en el eje y . ¿Cuáles son la magnitud y la dirección de la fuerza gravitacional que actúa sobre la masa de 10.0 kg? Dé la dirección de la fuerza neta con respecto a las coordenadas xyz mostradas.



Secciones 12.2 y 12.3

12.33 Suponga que se descubre un nuevo planeta extrasolar. Su masa es el doble de la masa de la Tierra, pero tiene la misma densidad y forma esférica al igual que la Tierra. ¿Cómo diferiría el peso de un objeto en la superficie del nuevo planeta con respecto a su peso en la Tierra?

12.34 ¿Cuál es la magnitud de la aceleración en caída libre de una bola (masa m) debida a la gravedad de la Tierra a una altura de $2R$, donde R es el radio terrestre?

12.35 Algunas de las más profundas minas en el mundo se encuentran en Sudáfrica y tienen una profundidad de aproximadamente 3.5 km. Considere a la Tierra como una esfera uniforme de 6 370 km de radio.

a) ¿Qué tan profundo debe ser el pozo de una mina para que la aceleración gravitacional se reduzca por un factor de 2 de su valor sobre la superficie terrestre?

b) ¿Cuál es la diferencia porcentual en la aceleración gravitacional en el fondo de un pozo de 3.5 km de profundidad con respecto al radio medio de la Tierra? Esto es, ¿cuál es el valor de $(a_{\text{sup}} - a_{3.5\text{km}})/a_{\text{sup}}$?

•**12.36** En un experimento realizado en el fondo del pozo vertical de una mina muy profunda, se arroja una bola de manera vertical hacia arriba con una velocidad conocida de 10.0 m/s y la altura máxima que alcanza la bola (medida desde su punto de lanzamiento) es de 5.113 m. Conociendo el radio terrestre, $R_E = 6\,370$ km, y la aceleración gravitacional en la superficie terrestre, $g(0) = 9.81$ m/s², calcule la profundidad del pozo.

••**12.37** Las mediciones cuidadosas de las variaciones locales en la aceleración debida a la gravedad pueden revelar la ubicación de los depósitos de petróleo. Suponga que la Tierra es una esfera uniforme de 6 370 km de radio y una densidad de 5 500. kg/m³, excepto que hay una región esférica de 1.00 km de radio y una densidad de 900. kg/m³, cuyo centro se encuentra a una profundidad de 2.00 km. Suponga que usted está parado sobre la superficie terrestre, directamente sobre la irregularidad con un instrumento capaz de medir la aceleración debida a la gravedad con gran precisión. ¿Cuál es el cociente de la aceleración debida a la gravedad que usted mide comparada con la que hubiese medido si la densidad fuese de 5 500. kg/m³ por todos lados? (*Pista:* Piense en éste como un problema de superposición que involucra dos masas esféricas uniformes, una de ellas con densidad negativa.)

Sección 12.4

12.38 Se lanza una nave espacial desde la superficie terrestre con la velocidad v . El radio terrestre es R . ¿Cuál será su velocidad cuando esté muy lejos de la Tierra?

12.39 ¿Cuál es la proporción entre la velocidad de escape con respecto a la velocidad orbital de un satélite en la superficie lunar, donde la aceleración gravitacional es como de un sexto de la de la Tierra?

12.40 Estando parado sobre la superficie de una luna esférica pequeña cuyo radio es de $6.30 \cdot 10^4$ m y cuya masa es de $8.00 \cdot 10^{18}$ kg, un astronauta arroja una piedra de 2.00 kg de masa hacia arriba con una velocidad inicial de 40.0 m/s. (Esta luna es demasiado pequeña para tener atmósfera.) ¿Qué altura máxima sobre la superficie de la luna alcanzará la piedra?

12.41 Se lanza un objeto con una masa m desde la superficie terrestre. Muestre que la velocidad mínima requerida para mandar al proyectil hasta una altura de $4R_E$ sobre la superficie terrestre es $v_{\text{mín}} = \sqrt{8GM_E/5R_E}$. M_E es la masa de la Tierra y R_E es el radio terrestre. Desprecie la resistencia del aire.

12.42 Para el satélite en el problema resuelto 12.2, que orbita a la Tierra a la distancia de $3.75 R_E$ con una velocidad de 4.08 km/s, ¿con qué velocidad golpearía la superficie terrestre si de alguna manera se detuviese súbitamente y cayese a la Tierra? Ignore la resistencia del aire.

•**12.43** Estime el radio del mayor asteroide del cual usted podría escapar saltando. Suponga una geometría esférica y una densidad uniforme igual al de la densidad promedio de la Tierra.

•**12.44** Eris, el mayor planeta enano conocido en el Sistema Solar, tiene un radio $R = 1\,200$ km y la aceleración debida a la gravedad en su superficie de magnitud $g = 0.77$ m/s².

a) Use estos números para calcular la velocidad de escape de la superficie de Eris.

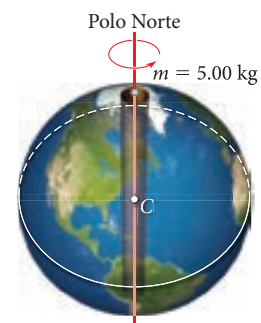
b) Si un objeto se dispara directamente hacia arriba desde la superficie de Eris con la mitad de la velocidad de escape, ¿hasta qué altura máxima sobre la superficie subirá el objeto? (Suponga que Eris no tiene atmósfera y una rotación despreciable.)

•**12.45** Dos esferas idénticas de 20.0 kg y 10 cm de radio se encuentran separadas por 30.0 cm (distancia centro a centro).

a) Si se sueltan desde el reposo y se les permite caer una hacia la otra, ¿cuál es su velocidad cuando hacen contacto por primera vez?

b) Si las esferas se encuentran inicialmente en reposo y apenas tocándose, ¿cuánta energía se requiere para separarlas hasta 1.00 m de distancia? Suponga que la única fuerza que actúa sobre cada masa es la fuerza gravitacional debida a la otra masa.

••**12.46** Imagine que se perfora un túnel completamente a través de la Tierra a lo largo del eje de rotación terrestre. Se deja caer una bola con una masa de 5.00 kg a partir del reposo dentro del túnel en el Polo Norte, como se muestra en la figura. Desprecie la resistencia del aire y la fricción con la pared del túnel. Calcule la energía potencial de la bola como una función de su distancia al centro de la Tierra. ¿Cuál es la velocidad de la bola cuando llega al centro de la Tierra (punto C)?



Sección 12.5

12.47 La misión del *Apolo 8* en 1968 incluyó una órbita circular a una altitud de 111 km sobre la superficie lunar. ¿Cuál era el periodo de su órbita? (¿Usted necesita buscar la masa y el radio de la Luna para contestar esta pregunta!)

•**12.48** El cometa Halley orbita al Sol con un periodo de 76.2 años.

a) Encuentre el semieje mayor de la órbita del cometa Halley en unidades astronómicas (1 UA es igual al semieje mayor de la órbita terrestre).

b) Si el cometa Halley se encuentra a 0.56 UA del Sol en el perihelio, ¿cuál es la distancia máxima del Sol y cuál es la excentricidad de su órbita?

••12.49 Un satélite de masa m tiene una órbita elíptica (que satisface las leyes de Kepler) en torno de un cuerpo de masa M , con m despreciable comparado con M .

- Encuentre la energía total del satélite como función de su velocidad, v , y distancia, r , del cuerpo al que orbita.
- A la distancia máxima y mínima entre el satélite y el cuerpo, y sólo ahí, el momento angular se relaciona simplemente con la velocidad y la distancia. Use esta relación y el resultado del inciso a) para obtener una relación entre las distancias extremas y la energía y el momento angular del satélite.
- Resuelva el inciso b) para los radios máximo y mínimo de la órbita en términos de la energía y el momento angular por unidad de masa del satélite.
- Transforme el resultado del inciso c) en expresiones para el semieje mayor, a , y la excentricidad de la órbita, e , en términos de la energía y el momento angular por unidad de masa del satélite.

••12.50 Considere al Sol en el origen de un sistema de coordenadas xy . Un telescopio detecta un asteroide en el plano xy en una posición dada por $(2.0 \cdot 10^{11} \text{ m}, 3.0 \cdot 10^{11} \text{ m})$ con una velocidad dada por $(-9.0 \cdot 10^3 \text{ m/s}, -7.0 \cdot 10^3 \text{ m/s})$. ¿Cuáles serán la velocidad y la distancia desde el Sol en su aproximación más cercana?

Sección 12.6

12.51 Se lanzó un satélite espía a una órbita circular con una altura de 700. km sobre la superficie terrestre. Determine su velocidad y periodo orbital.

12.52 Expresar de manera algebraica el cociente de la fuerza gravitacional en la Luna debida a la Tierra con respecto a la fuerza gravitacional sobre la Luna debido al Sol. ¿Por qué, dado que la razón es tan pequeña, no arranca el Sol a la Luna lejos de la Tierra?

12.53 Un transbordador espacial se encuentra inicialmente en una órbita circular con un radio de $r = 6.60 \cdot 10^6 \text{ m}$ del centro de la Tierra. Se dispara un retrocohetes hacia delante, reduciendo la energía total del transbordador espacial en 10% (esto es, incrementando la magnitud de la energía total negativa en 10%) y el transbordador espacial se mueve ahora en una nueva órbita con un radio que es menor que r . Encuentre la velocidad del transbordador espacial a) antes de y b) después de que se dispara el retrocohetes.

•12.54 Un satélite de 200. kg se encuentra en órbita circular alrededor de la Tierra y moviéndose con una velocidad de 5.00 km/s. ¿Cuánto trabajo debe realizarse para mover al satélite a otra órbita circular que esté al doble de la altura sobre la superficie terrestre?

•12.55 El radio de un agujero negro es la distancia desde el centro del agujero negro en la cual la velocidad de escape es la velocidad de la luz.

- ¿Cuál es el radio de un agujero negro con una masa del doble que la solar?
- A qué radio desde el centro del agujero negro del inciso a) sería la velocidad orbital igual a la velocidad de la luz?

c) ¿Cuál es el radio de un agujero negro con la misma masa que la de la Tierra?

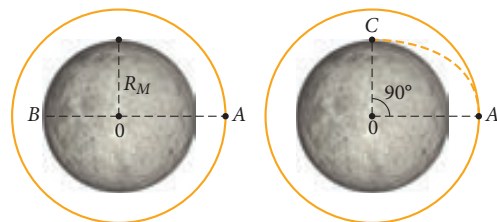
•12.56 Un satélite se encuentra en una órbita circular alrededor de un planeta. La razón de la energía cinética del satélite con respecto a la energía potencial gravitacional, K/U_g , es una constante cuyo valor es independiente de las masas del satélite y del planeta y del radio y la velocidad de la órbita. Encuentre el valor de esta constante. (Se toma la energía potencial como cero a una separación infinita.)

•12.57 Determine la cantidad mínima de energía que debe ganar un proyectil de 100.0 kg de masa para alcanzar una órbita circular de 10.00 km sobre la superficie terrestre si se lanza desde a) el Polo Norte o b) el Ecuador (presente sus respuestas con cuatro cifras significativas). No se preocupe acerca de la dirección del lanzamiento o de la órbita final. ¿Hay alguna ventaja o desventaja en lanzar desde el Ecuador? Si es así, ¿cuán significativa es la diferencia? No desprecie la rotación terrestre cuando calcule las energías iniciales.



••12.58 Un cohete con una masa de $M = 12.0$ toneladas se está moviendo alrededor de la Luna en una órbita circular a una altura de $h = 100.$ km. Se activa el motor de frenado durante un corto tiempo para bajar la altura de la órbita, de tal suerte que el cohete pueda efectuar un aterrizaje lunar. La velocidad de los gases de escape es $u = 10^4 \text{ m/s}$. El radio lunar es $R_M = 1.74 \cdot 10^3 \text{ km}$; la aceleración de la gravedad cerca de la superficie lunar es $g_M = 1.62 \text{ m/s}^2$.

- ¿Qué cantidad de combustible se usará para el motor de frenado si se activa en el punto A de la órbita y el cohete aterriza sobre la Luna en el punto B (vea la parte izquierda de la figura)?
- Suponga que, en el punto A , se le da al cohete un impulso dirigido hacia el centro de la Luna, para ponerlo en una trayectoria que se encuentra con la superficie lunar en el punto C (vea la parte derecha de la figura). ¿Qué cantidad de energía se necesita en este caso?

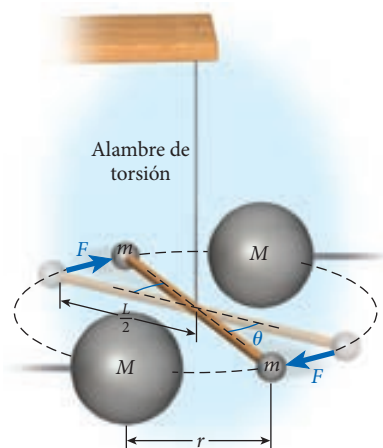


Problemas adicionales

12.59 Calcule las magnitudes de las fuerzas gravitacionales ejercidas sobre la Luna por el Sol y la Tierra cuando las dos fuerzas se encuentran en competencia directa; esto es, cuando el Sol, la Luna y la Tierra están alineadas con la Luna entre el Sol y la Tierra. (Esta alineación corresponde a un eclipse solar.) ¿Se curva realmente alguna vez la órbita lunar lejos del Sol en dirección a la Tierra?

12.60 Se dispara un proyectil desde la superficie terrestre por medio de un cañón muy poderoso. Si el proyectil alcanza una altura de 55.0 km sobre la superficie terrestre, ¿cuál es la velocidad del proyectil cuando deja al cañón?

12.61 La ley de gravitación de Newton especifica la magnitud de la fuerza de interacción entre dos masas puntuales, m_1 y m_2 , separadas por una distancia r como $F(r) = Gm_1m_2/r^2$. La constante de gravitación G puede determinarse midiendo de manera directa la fuerza de interacción (atracción gravitacional) entre dos juegos de esferas usando el aparato construido a finales del siglo XVIII por el científico inglés Henry Cavendish. Este aparato era una balanza de torsión que consistía de una barra de madera de 6.0 pies suspendida de un alambre de torsión, con una esfera de plomo con un diámetro de 2.00 pulgadas y un peso de 1.61 libras sujeta en cada extremo. Dos bolas de plomo de 12.0 pulgadas y 348 libras se ubicaban cerca de las bolas menores, a unas 9.00 pulgadas de distancia y mantenidas en su lugar con un sistema de suspensión separado. El valor aceptado actualmente para G es de $6.674 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}$. Determine la fuerza de atracción entre las bolas mayores y menores que debían ser medidas por esta balanza. Compare esta fuerza con el peso de las bolas menores.



12.62 Newton sostenía una manzana con una masa de 100. g y pensaba acerca de las fuerzas gravitacionales ejercidas sobre la manzana por sí mismo y el Sol. Calcule la magnitud de la fuerza gravitacional que actúa sobre la manzana debida a a) Newton, b) el Sol y c) la Tierra, suponiendo que la distancia de la manzana al centro de masa es de 50.0 cm y la masa de Newton es de 80.0 kg.

12.63 Un satélite de comunicaciones de 1 000. kg se libera de un transbordador espacial para orbitar a la Tierra inicialmente a un radio de $7.00 \cdot 10^6$ m. Después de desplegarse, se disparan los cohetes del satélite para ponerlo en una órbita de mayor altitud con radio de $5.00 \cdot 10^7$ m. ¿Cuál es la energía mecánica mínima aplicada por los cohetes para efectuar este cambio en la órbita?

12.64 Considere una manzana de 0.300 kg a) colgada de un árbol y b) cayendo. ¿Ejerce la manzana una fuerza gravitacional sobre la Tierra? Si es así, ¿cuál es la magnitud de esta fuerza?

12.65 ¿A qué altura h sobre la Tierra se moverá un satélite en una órbita circular para tener la mitad del periodo de la rotación terrestre sobre su propio eje?

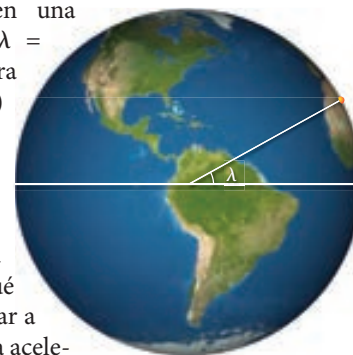
12.66 En el sistema Tierra-Luna hay un punto donde se equilibran las fuerzas gravitacionales. Este punto se conoce como el punto L1, donde L representa a Lagrange, famoso matemático francés. Suponga que la masa de la Luna es $\frac{1}{81}$ de la masa terrestre.

a) ¿En qué punto, sobre la línea entre la Tierra y la Luna, la fuerza gravitacional ejercida sobre un objeto por la Tierra está equilibrada exactamente por la fuerza ejercida sobre el objeto por la Luna?

b) ¿Es este punto uno de equilibrio estable o inestable?

c) Calcule la razón de la fuerza de gravedad debida al Sol, que actúa sobre el objeto en este punto respecto a la fuerza de gravedad debida a la Tierra y, por separado, calcule este cociente respecto a la fuerza de gravedad debida a la Luna.

12.67 Considere una partícula sobre la superficie terrestre, en una posición con un ángulo $\lambda = 30.0^\circ \text{N}$ como se muestra en la figura. Encuentre a) la magnitud y b) la dirección de la fuerza gravitacional efectiva que actúa sobre la partícula, tomando en consideración la rotación terrestre. c) ¿Qué ángulo de latitud λ da lugar a la desviación máxima de la aceleración gravitacional?



12.68 Se descubre que un asteroide tiene una luna diminuta que lo orbita en una trayectoria circular a una distancia de 100. km y con un periodo de 40.0 h. El asteroide es aproximadamente esférico (poco común para un cuerpo tan pequeño) con un radio de 20.0 km.

a) Encuentre la aceleración de la gravedad en la superficie del asteroide.

b) Encuentre la velocidad de escape del asteroide.

12.69 a) ¿En qué porcentaje cambia la energía potencial gravitacional de la Tierra entre el perihelio y el afelio? (Suponga que la energía potencial de la Tierra fuese cero si se le moviera a una gran distancia del Sol.)

b) ¿En qué porcentaje cambia la energía cinética de la Tierra entre el perihelio y el afelio?

12.70 Un planeta con una masa de $7.00 \cdot 10^{21}$ kg está en una órbita circular alrededor de una estrella con masa de $2.00 \cdot 10^{30}$ kg. El planeta tiene radio orbital de $3.00 \cdot 10^{10}$ m.

a) ¿Cuál es la velocidad orbital lineal del planeta?

b) ¿Cuál es el periodo de la órbita del planeta?

c) ¿Cuál es la energía mecánica total del planeta?

12.71 La unidad astronómica (UA, igual al radio medio de la órbita terrestre) es de $1.4960 \cdot 10^{11}$ m, y un año es de $3.1557 \cdot 10^7$ s. La constante de gravitación de Newton es $G = 6.6743 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}$. Calcule la masa solar en kilogramos. (Recuerde que la masa solar no constituye una solución a este problema.)

12.72 Las distancia al Sol en el perihelio y el afelio de Plutón son de $4\,410 \cdot 10^6$ km y $7\,360 \cdot 10^6$ km, respectivamente. ¿Cuál es la razón de la velocidad alrededor del Sol en el perihelio y el afelio?

12.73 El peso de una estrella por lo común está equilibrado por dos fuerzas: la fuerza gravitacional, que actúa hacia

dentro, y la fuerza creada por las reacciones nucleares, que actúan hacia fuera. En el transcurso de un gran lapso de tiempo, la fuerza debida a las reacciones nucleares se torna más débil, causando el colapso gravitatorio de la estrella y aplastando a los átomos hasta destruirlos. Bajo condiciones tan extremas, los protones y los electrones son apretados para formar neutrones, dando lugar al nacimiento de una estrella de neutrones. Las estrellas de neutrones son masivamente pesadas; una cucharadita de la sustancia de una estrella de neutrones pesaría 100 millones de toneladas métricas sobre la Tierra.

- a) Considere una estrella de neutrones cuya masa es el doble de la masa solar y cuyo radio es de 10.0 km. Si rota con un periodo de 1.00 s, ¿cuál es la velocidad de un punto sobre el ecuador de esta estrella? Compare esta velocidad con la velocidad de un punto sobre el ecuador terrestre.
- b) ¿Cuál es el valor de g en la superficie de esta estrella?
- c) ¿Compare el peso de una masa de 1.00 kg sobre la Tierra con su peso sobre la estrella de neutrones.
- d) Si un satélite debe circular 10.0 km sobre la superficie de una estrella neutrónica semejante, ¿cuántas revoluciones por minuto efectuaría?
- e) ¿Cuál es el radio de una órbita geoestacionaria para esta estrella de neutrones?

••12.74 Usted ha sido enviado en una pequeña nave espacial para encontrarse con una estación espacial que está en una órbita circular con radio de $2.500 \cdot 10^4$ km del centro de la Tierra. Debido al mal manejo de las unidades de un técnico, ¡usted se

encuentra en la misma órbita que la estación, pero exactamente a mitad de camino alrededor de la órbita de ésta! Usted no aplica impulso hacia delante en un intento por perseguir a la estación; esto sería un disparate fatal. En lugar de esto, usted aplica una breve fuerza de frenado contra la dirección de su movimiento, para ponerse en una órbita elíptica, cuyo punto superior sea su posición actual y cuyo periodo sea la mitad del periodo en su órbita actual. De esta forma, usted regresará a su posición actual cuando la estación espacial haya llegado a la mitad de camino alrededor del círculo para encontrarse con usted. ¿Es el radio mínimo desde el centro de la Tierra —el punto inferior— de su nueva órbita elíptica mayor que el radio terrestre (6 370 km), o ha echado a perder usted su último problema de física?

••12.75 Si usted y la estación espacial están al inicio en órbita terrestre baja, digamos, con un radio de 6 720 km, aproximadamente el de la órbita de la Estación Espacial Internacional, la maniobra del problema 12.74 fallará de manera desagradable. Teniendo presente que la capacidad de soportar la vida de su pequeña nave espacial es limitada y, así el tiempo es esencial, ¿puede realizar usted una maniobra similar que le permita encontrarse con la estación espacial? Encuentre el radio y el periodo de la órbita de transferencia que debe usar.

••12.76 Se coloca un satélite entre la Tierra y la Luna, a lo largo de una línea recta que conecta sus centros de masa. El satélite tiene un periodo orbital alrededor de la Tierra que es el mismo que el de la Luna, 27.3 días. ¿Qué tan lejos de la Tierra debe colocarse el satélite?

Sólidos y fluidos

13

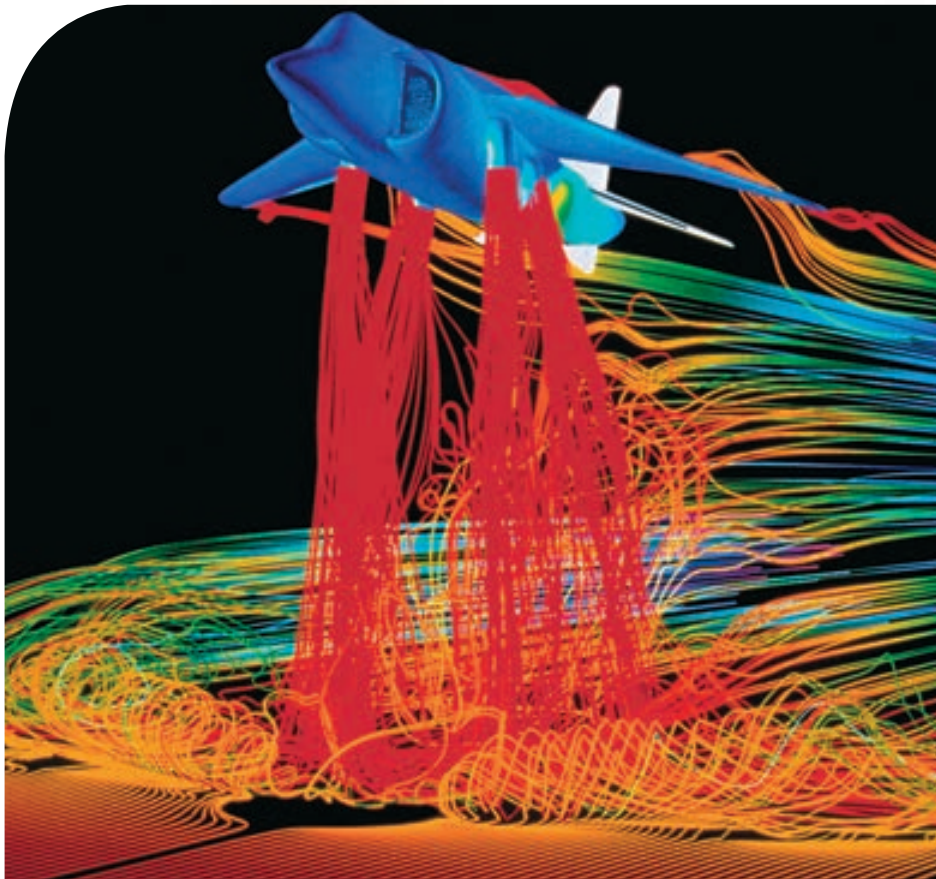


FIGURA 13.1 Simulación por computadora de la NASA de las líneas de flujo del aire de los sistemas de propulsión de un jet Harrier en vuelo. Los colores de las líneas de flujo indican el tiempo transcurrido desde que el gas fue emitido.

LO QUE APRENDEREMOS	418
13.1 Los átomos y la composición de la materia	418
13.2 Estados de la materia	420
13.3 Tensión, compresión y corte	421
Elasticidad de los sólidos	421
Esfuerzo y deformación	421
Ejemplo 13.1 Montura de pared para una TV de pantalla plana	423
Problema resuelto 13.1 Alambre estirado	423
13.4 Presión	425
Relación entre presión y profundidad	425
Ejemplo 13.2 Submarino	426
Presión manométrica y barómetros	426
Relación de altitud barométrica de los gases	427
Ejemplo 13.3 Presión del aire en el Monte Everest	428
Principio de Pascal	428
13.5 Principio de Arquímedes	430
Fuerza de flotación	430
Ejemplo 13.4 Témpano flotante	431
Ejemplo 13.5 Globo de aire caliente	432
Determinación de la densidad	432
Ejemplo 13.6 Determinación de la densidad de un objeto	432
13.6 Movimiento de un fluido ideal	434
Ecuación de Bernoulli	434
Aplicaciones de la ecuación de Bernoulli	436
Ejemplo 13.7 Botella de atomizador	438
Problema resuelto 13.2 Tubo de Venturi	439
Drenado de un tanque	440
Ejemplo 13.8 Drenado de una botella	441
13.7 Viscosidad	442
Ejemplo 13.9 Aguja hipodérmica	443
13.8 Turbulencia y fronteras de la investigación en el flujo de fluidos	444
LO QUE HEMOS APRENDIDO/ GUÍA DE ESTUDIO PARA EXAMEN	445
Práctica para resolución de problemas	446
Problema resuelto 13.3 Encontrar la densidad de un líquido desconocido	446
Problema resuelto 13.4 Campana de buceo	448
Preguntas de opción múltiple	449
Preguntas	450
Problemas	450

LO QUE APRENDEREMOS

- El átomo es el bloque de construcción básico de la materia macroscópica.
- El diámetro de un átomo es de aproximadamente 10^{-10} m.
- La materia puede existir como gas, líquido o sólido.
 - Un gas es un sistema en el cual los átomos se mueven libremente a través del espacio.
 - Un líquido es un sistema en el cual los átomos se mueven libremente, pero forman una sustancia casi incompresible.
 - Un sólido define su propio tamaño y forma.
- Los sólidos son casi incompresibles.
- Las diversas formas de presión, tales como estiramiento, compresión y corte pueden deformar a los sólidos. Estas deformaciones pueden expresarse en términos de las relaciones lineales entre la presión aplicada y la deformación resultante.
- La presión es la fuerza aplicada por unidad de área.
- La presión atmosférica terrestre puede medirse usando un barómetro de mercurio o un instrumento semejante.
- La presión de un gas puede medirse usando un manómetro de mercurio.
- El principio de Pascal afirma que la presión aplicada a un fluido confinado se transmite a todas las partes del fluido.
- El principio de Arquímedes afirma que la fuerza de flotación sobre un objeto inmerso en un fluido es igual al peso del fluido desplazado por el objeto.
- El principio de Bernoulli afirma que cuanto más rápido fluya un fluido, tanto menor es la presión que ejerce sobre su frontera.

El flujo de aire alrededor de un avión en movimiento es de gran interés para los diseñadores, constructores y usuarios de los aviones. Sin embargo, las características de los fluidos en movimiento no son fácilmente descritas en forma matemática. A menudo, se construyen modelos a escala de nuevos aviones y se colocan en un túnel de viento para ver cómo fluye el aire alrededor de éstos. En años recientes, se han desarrollado modelos por computadora, los cuales pueden mostrar el flujo del aire y los vórtices con detalles asombrosos. La figura 13.1 ilustra el flujo de aire alrededor de un jet de despegue vertical. El Boeing 777 fue la primera aeronave en ser modelada de manera completa en una computadora, sin pruebas de túnel de viento. La dinámica de fluidos es en la actualidad un área importante de investigación, con aplicaciones a todas las áreas de la física desde la astronomía hasta la investigación nuclear.

Hasta ahora, hemos estudiado el movimiento de los objetos ideales, ignorando factores tales como los materiales de los cuales están hechos y el comportamiento de estos materiales como respuesta a las fuerzas ejercidas sobre éstos. En general, hemos ignorado la resistencia del aire y otros factores que involucran el medio a través del cual se mueven los objetos. Este capítulo considera algunos de dichos factores, presentando una visión general de las características físicas de los sólidos, líquidos y gases.

13.1 Los átomos y la composición de la materia

Durante la evolución de la física, los científicos han explorado dimensiones cada vez más pequeñas, mirando más profundamente en la materia a fin de examinar los bloques elementales que la constituyen. Esa manera general de aprender más acerca de un sistema estudiando sus subsistemas se llama *reduccionismo* y ha demostrado ser un principio guiador fructífero durante los últimos cuatro o cinco siglos de avances científicos.

Hoy, sabemos que los **átomos** son los bloques elementales que constituyen la materia, a pesar de que ellos mismos son partículas compuestas. La subestructura de los átomos, sin embargo, puede estudiarse sólo con aceleradores y otras herramientas de la física nuclear moderna y de partículas. Para los propósitos de este capítulo es razonable ver a los átomos como bloques de construcción elementales. De hecho, la palabra *átomo* viene del griego *atomos*, que significa “indivisible”. El diámetro de un átomo es como de 10^{-10} m = 0.1 nm. Esta distancia a menudo se le conoce como un angstrom Å.

El átomo más simple es el de hidrógeno, compuesto por un protón y un electrón. El hidrógeno es el elemento más abundante en el universo. El siguiente elemento más abundante es el helio, el cual tiene dos protones y dos neutrones en su núcleo, junto con dos electrones rodeando al núcleo. Otro elemento común es el oxígeno, con ocho protones, ocho electrones, y normalmente ocho neutrones. El átomo más pesado que ocurre de manera natural es el de uranio, con 92 protones, 92

electrones y comúnmente 146 neutrones. Hasta ahora se han reconocido 117 elementos y se han clasificado en la tabla periódica de los elementos.

En esencia, todo el hidrógeno en el universo, junto con algo de helio, se produjo en el Big Bang hace unos 13.7 miles de millones de años. Los elementos más pesados, hasta llegar al hierro, se produjeron y siguen produciéndose en las estrellas. Los elementos con más protones y neutrones que el hierro (oro, mercurio, plomo, y así, sucesivamente) se cree que son producidos por las explosiones de supernovas. La mayor parte de los átomos de los elementos en la Tierra se produjo hace más de cinco mil millones de años, quizás en la explosión de una supernova y se han reciclado desde entonces. Incluso nuestros cuerpos están compuestos de átomos de las cenizas de una estrella moribunda. (La producción y reciclado de los elementos será estudiada en detalle en los capítulos 39 y 40.)

Considere el número de átomos en 12 g del isótopo más común de carbono, ^{12}C , donde 12 representa el número de masa atómica, esto es, el número total de protones (seis) más neutrones (seis) en el núcleo de carbono. Este número de átomos se ha medido y resulta ser $6.022 \cdot 10^{23}$, el cual se llama el **número de Avogadro**, N_A :

$$N_A = 6.022 \cdot 10^{23}.$$

Para lograr una comprensión de cuánto carbono corresponde a N_A átomos, considere dos formas de carbono: el diamante y el grafito. Los diamantes están compuestos de átomos de carbono dispuestos en un retículo cristalino, en tanto que los átomos en el grafito están dispuestos en capas bidimensionales (figura 13.2). En la estructura del diamante, los átomos de carbono están unidos en un retículo entrelazado, lo cual hace al diamante muy duro y transparente a la luz. En el grafito, los átomos de carbono están dispuestos en capas que pueden resbalar una sobre otra, haciendo al grafito suave y resbaloso. No refleja la luz, sino que luce negro en lugar de esto. El grafito se usa en lápices y para la lubricación.

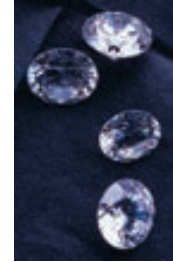
La densidad del diamante es de 3.51 g/cm^3 y la densidad del grafito es de 2.20 g/cm^3 . Los diamantes se clasifican a menudo en términos de su masa en quilates, donde 1 quilate = 200 mg. Un diamante de 12 g tendría N_A átomos, una masa de 60 quilates y un volumen como de 3.4 cm^3 , más o menos 1.5 veces más grande que el Diamante Hope. Un anillo de matrimonio típico podría tener un diamante de 1 quilate, con aproximadamente 10^{22} átomos de carbono.

Se han producido nuevas estructuras compuestas por completo de átomos de carbono; las cuales incluyen fullerenos y nanotubos de carbono. Los fullerenos están compuestos de 60 átomos de carbono dispuestos en un icosaedro truncado, como la forma de un balón de fútbol soccer, como se ilustra en la figura 13.3a). Por su descubrimiento de los fullerenos, el premio Nobel de Química de 1996 fue otorgado a Robert Curl, Harold Kroto y Richard Smalley. Los fullerenos también se nombraron *buckyesferas* y son llamadas así por Buckminster Fuller (1895-1983), quien inventó el domo geodésico, cuya geometría se parece a la de los fullerenos. La figura 13.3b) muestra la estructura de un nanotubo de carbono, que consiste de hexágonos entrelazados de átomos de carbono. Puede pensarse en un nanotubo de carbono como una capa de grafito [figura 13.2c)] enrollada en un tubo. Los fullerenos y los nanotubos de carbono son de los primeros productos de un área emergente de investigación llamada *nanotecnología*, que se refiere al tamaño de los objetos bajo investigación. Los nuevos materiales construidos usando nanotecnología podrían revolucionar la ciencia de los materiales. Por ejemplo, los cristales de fullereno son más duros que los diamantes y las fibras compuestas de nanotubos de carbono son ligeras y más resistentes que el acero.

Un mol de cualquier sustancia contiene $N_A = 6.022 \cdot 10^{23}$ átomos o moléculas. Debido a que las masas de los protones y los neutrones son más o menos iguales y la masa de cualquiera de ellos es



a)



b)



c)



d)

FIGURA 13.2 Los diamantes y el grafito están compuestos de átomos de carbono. a) La estructura del diamante que consiste en átomos de carbono unidos en una disposición tetraédrica. b) Diamantes. c) La estructura del grafito que está compuesta de capas paralelas de estructuras hexagonales. d) Un lápiz que muestra la mina de grafito.



a)



b)

FIGURA 13.3 Nanoestructuras que consisten de disposiciones de átomos de carbono: a) fullereno, o buckyesfera; b) nanotubo de carbono.

13.1 Oportunidad de autoexamen

¿Cuántas moléculas de agua se encuentran en una botella de medio litro? La masa de 1 mol de agua es de 18.02 g.

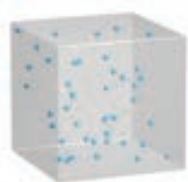
13.2 Oportunidad de autoexamen

Un mol de cualquier gas ocupa un volumen de 22.4 L a temperatura y presión normales (las STP, por sus siglas en inglés, son $T = 0\text{ }^{\circ}\text{C}$ y $p = 1\text{ atm}$). ¿Cuáles son las densidades del hidrógeno gaseoso y del helio gaseoso?

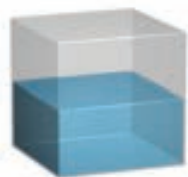
mucho mayor que la de un electrón, la masa de 1 mol de una sustancia en gramos está dada por el número de masa atómica. Así, 1 mol de ^{12}C tiene una masa de 12 g y 1 mol de ^4He tiene una masa de 4 g. La tabla periódica de los elementos lista los números de masa atómica para cada elemento. El número de masa atómica es igual al número de protones y neutrones contenidos en el núcleo de un átomo; no es un entero debido a que toma en cuenta las abundancias isotópicas naturales. (Los isótopos de un elemento tienen distintos números de neutrones en su núcleo. Si un núcleo de carbono tiene siete neutrones, es el isótopo ^{13}C .) Para las moléculas, la masa molecular se obtiene sumando los números de masa de todos los átomos en la molécula. De esta manera, 1 mol de agua, $^1\text{H}_2\text{ }^{16}\text{O}$, tiene una masa de 18.02 g. (No es exactamente 18 g, porque 0.2% de los átomos del oxígeno son del isótopo ^{18}O .)

Los átomos son eléctricamente neutros. Tienen el mismo número de protones cargados en forma positiva que de electrones cargados negativamente. Las propiedades químicas de un átomo están determinadas por su estructura electrónica. Esta estructura permite la unión de ciertos átomos con otros átomos para formar moléculas. Por ejemplo, el agua es una molécula que contiene dos átomos de hidrógeno y un átomo de oxígeno. Las estructuras electrónicas de los átomos y las moléculas determinan las propiedades macroscópicas de las sustancias, tales como si existen como gas, líquido o sólido a una determinada temperatura y presión.

13.2 Estados de la materia



a)



b)



c)

FIGURA 13.4 a) Un recipiente cúbico lleno con un gas; b) el mismo recipiente lleno parcialmente con un líquido; c) un sólido, que no necesita un recipiente.

Un **gas** es un sistema en el cual cada átomo o molécula se mueve a través del espacio como una partícula libre. De modo ocasional, un átomo o molécula colisiona con otro átomo o molécula o con la pared del recipiente. Un gas puede ser tratado como un **fluido** porque puede fluir y ejercer presión sobre las paredes del recipiente. Un gas es compresible, lo que significa que se puede cambiar el volumen del recipiente y el gas seguirá llenando el volumen, a pesar de que la presión que ejerce sobre las paredes cambiará.

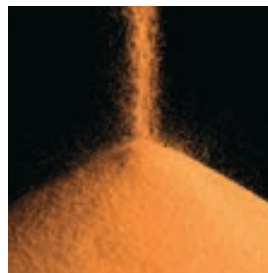
En contraste con los gases, la mayoría de los líquidos son casi incompresibles. Si coloca un gas en un recipiente, se expandirá para llenar el recipiente [figura 13.4a)]. Cuando se coloca un **líquido** en un recipiente, sólo llenará el volumen correspondiente a su volumen inicial [figura 13.4b)]. Si el volumen del líquido es menor al del recipiente, el recipiente sólo se llena de manera parcial.

Un **sólido** no requiere un recipiente, sino en lugar de esto, define su propia forma [figura 13.4c)]. Como los líquidos, los sólidos son casi incompresibles; sin embargo, los sólidos pueden comprimirse y deformarse ligeramente.

La categorización de la materia en sólidos, líquidos y gases no cubre la gama completa de posibilidades. El estado en que se encuentra cierta sustancia depende de su temperatura. El agua, por ejemplo, puede ser hielo (sólido), agua (líquido) o vapor (gas). La misma condición se mantiene para prácticamente todas las demás sustancias. Sin embargo, hay estados de la materia que no encajan en esta clasificación de sólido/líquido/gas. La materia en las estrellas, por ejemplo, no se encuentra en ninguno de estos tres estados. En lugar de esto, forma un *plasma*, un sistema de átomos ionizados. En la Tierra muchas playas están hechas de arena, un ejemplo de primera de una *medio granular*. Los granos en los medios granulares son sólidos, pero sus características macroscópicas pueden estar más cercanas a las de los líquidos (figura 13.5). Por ejemplo, la arena puede fluir como un líquido. Los *vidrios* parecen sólidos a primera vista, debido a que no cambian su forma. Sin embargo, también hay una justificación en ver al vidrio como un tipo de líquido con una viscosidad



a)



b)

FIGURA 13.5 a) Vertido de plata líquida (un metal sólido a temperatura ambiente); b) vertido de arena (un medio granular).

en extremo alta. Para los propósitos de una clasificación de la materia en estados, un vidrio no es ni un sólido ni un líquido, sino un estado separado de la materia. Las *espumas* y los *geles* son aun otros estados de la materia. En una espuma, el material forma membranas delgadas alrededor de burbujas de gas encerrado de distintos tamaños; de esta suerte, algunas espumas son muy rígidas en tanto que tienen una densidad de masa muy baja.

Hace más de dos décadas se verificó de modo experimental una nueva forma de materia llamada los *condensados de Bose-Einstein*. Comprender este nuevo estado de la materia requiere algunos conceptos básicos de física cuántica; sin embargo, en términos básicos, a temperaturas muy bajas, un gas con cierto tipo de átomos puede asumir un estado ordenado en el cual todos los átomos tienden a tener la misma energía y momento lineal, de una manera muy similar a la que asume la luz en un estado ordenado en el láser (vea el capítulo 38).

Por último, la materia en nuestros cuerpos y en la mayoría de los organismos biológicos no encaja en ninguna de estas clasificaciones. El tejido biológico consiste predominantemente de agua y, sin embargo, es capaz de cambiar su forma, dependiendo de las condiciones de frontera del ambiente.

13.3 Tensión, compresión y corte

Examinemos cómo responden los sólidos a las fuerzas externas.

Elasticidad de los sólidos

Muchos sólidos están compuestos de átomos dispuestos en una retícula cristalina tridimensional en la cual los átomos tienen una distancia de equilibrio bien definida con respecto a sus vecinos. Los átomos en un sólido se mantienen en su sitio por fuerzas interatómicas que pueden modelarse como resortes. La retícula es muy rígida, lo cual implica que los resortes imaginarios son muy rígidos. Los objetos sólidos macroscópicos tales como las llaves (herramienta) y cucharas están compuestos de átomos dispuestos en retícula rígida semejante. Sin embargo, otros objetos sólidos, tales como las pelotas de hule, están compuestas de átomos dispuestos en largas cadenas en lugar de una retícula bien definida. Dependiendo de la estructura atómica o molecular, los sólidos pueden ser extremadamente rígidos o más fácilmente deformables.

Todos los objetos rígidos son un poco elásticos, incluso aunque no parezcan serlo. Comprimirlo, tirar de él o torcerlo, puede deformar un objeto rígido. Si un objeto rígido se deforma un poco, regresará a su tamaño y forma originales cuando se elimine la fuerza deformadora. Si el objeto rígido se deforma más allá del punto llamado **límite elástico**, el objeto no regresará a su tamaño y forma originales, sino que quedará deformado en forma permanente. Si un objeto rígido se deforma mucho más allá de su límite elástico, se romperá.

Esfuerzo y deformación

Las deformaciones de los sólidos se clasifican comúnmente en tres tipos: estiramiento (o tensión), compresión y corte (o esfuerzo cortante). Se muestran ejemplos de estiramiento, compresión y corte en la figura 13.6. Lo que tienen en común estas tres deformaciones es que un **esfuerzo**, o fuerza deformante por unidad de área, produce una **deformación** (o deformación unitaria). El **estiramiento**, o **tensión**, se asocia con esfuerzo en tensión (o tracción). La **compresión** puede producirse por esfuerzo hidrostático. El corte es producido por un esfuerzo cortante, también llamado en ocasiones *esfuerzo desviatorio*. Cuando se aplica una fuerza cortante, los planos del material paralelos a la fuerza y a ambos lados de ésta permanecen paralelos, pero desplazándose en forma relativa unos en relación con otros.

A pesar de que el esfuerzo y la deformación toman diferentes formas para los tres tipos de deformación, están relacionados linealmente a través de una constante llamada **módulo de elasticidad**:

$$\text{esfuerzo} = \text{módulo de elasticidad} \cdot \text{deformación}. \quad (13.1)$$

Esta relación empírica se aplica en tanto no se exceda el límite elástico del material.

En el caso de la tensión, se aplica una fuerza F a los extremos opuestos de un objeto de longitud L y el objeto se estira hasta una nueva longitud, $L + \Delta L$ (figura 13.7). El esfuerzo de estiramiento o tensión se define como la fuerza, F , por unidad de área, A , aplicada al extremo de un objeto. La deformación unitaria se define como el cambio fraccional de la longitud del objeto, $\Delta L/L$. La relación entre el esfuerzo y la deformación hasta llegar al límite elástico es entonces

$$\frac{F}{A} = Y \frac{\Delta L}{L}, \quad (13.2)$$



a)



b)



c)

FIGURA 13.6 Tres ejemplos de esfuerzo y deformación: a) el estiramiento de las líneas de potencia; b) la compresión en la presa de Hoover; c) corte con tijeras.

Tabla 13.1 Algunos valores típicos del módulo de Young	
Material	Módulo de Young (10^9 N/m^2)
Aluminio	70
Hueso	10-20
Concreto	30-60 (compresión)
Diamante	1 000-1 200
Vidrio	70
Poliestireno	3
Hule	0.01-0.1
Acero	200
Titanio	100-120
Tungsteno	400
Madera	10-15

Tabla 13.2 Algunos valores típicos del módulo de compresibilidad	
Material	Módulo volumétrico (10^9 N/m^2)
Aire	0.000142
Aluminio	76
Roca basáltica	50-80
Gasolina	1.5
Roca granítica	10-50
Mercurio	28.5
Acero	160
Agua	2.2

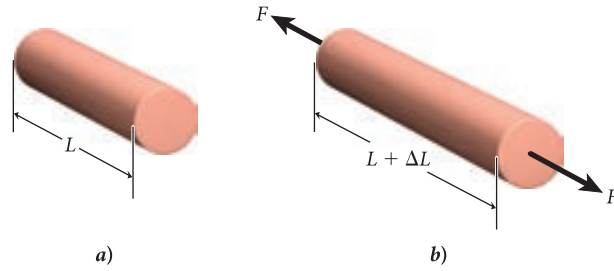


FIGURA 13.7 Tensión aplicada a los extremos opuestos de un objeto por una fuerza de tracción. a) El objeto antes de que se aplique la fuerza. b) Objeto después de que se aplica la fuerza. Nota: También puede aplicarse una fuerza de compresión empujando, lo que ocasiona un cambio negativo en la longitud (no mostrado).

donde Y se llama **módulo de Young** y depende sólo del tipo de material y no de su tamaño o su forma. Se muestran algunos valores típicos del módulo de Young en la tabla 13.1.

La compresión lineal puede tratarse de manera semejante al estiramiento para la mayoría de los materiales, dentro de los límites elásticos. Sin embargo, muchos materiales tienen distintos puntos de ruptura para el estiramiento y la compresión. El ejemplo más notable es el concreto, el cual resiste la compresión mucho mejor que el estiramiento, ésta es la razón por la cual se le agregan varillas de acero en lugares donde se requiere tolerancia al estiramiento. Una varilla de acero resiste el estiramiento mucho mejor que la compresión, bajo la cual se puede comparar.

El esfuerzo relacionado con la compresión volumétrica es causado por una fuerza por unidad de área aplicada al área superficial entera de un objeto, por ejemplo, uno sumergido en un líquido (figura 13.8). La deformación unitaria resultante es el cambio fraccional en el volumen del objeto, $\Delta V/V$. El módulo de elasticidad en este caso es el **módulo volumétrico**, B . De suerte que podemos escribir la ecuación que relaciona el esfuerzo y la deformación para la compresión volumétrica como

$$\frac{F}{A} = B \frac{\Delta V}{V} \tag{13.3}$$

Algunos valores típicos para el módulo volumétrico se brindan en la tabla 13.2. Note el salto extremadamente grande en el módulo volumétrico para el aire, el cual es gas y puede comprimirse fácilmente, a los líquidos tales como gasolina y agua. Los sólidos tales como rocas y metales tienen valores para el módulo volumétrico que son superiores a los de los líquidos por un factor entre 5 y 100.

En el caso del corte, el esfuerzo es también una fuerza por unidad de área. Sin embargo, para el corte, la fuerza es paralela al área en lugar de perpendicular a ésta (figura 13.9). Para el corte, el esfuerzo está dado por la fuerza por unidad de área, F/A , ejercida en el extremo del objeto. La deformación resultante está dada por la deflexión fraccional del objeto, $\Delta x/L$. El esfuerzo se relaciona con deformación unitaria a través del **módulo de corte** (o **módulo de rigidez**) G :

$$\frac{F}{A} = G \frac{\Delta x}{L} \tag{13.4}$$

Algunos valores típicos del módulo de rigidez se listan en la tabla 13.3.

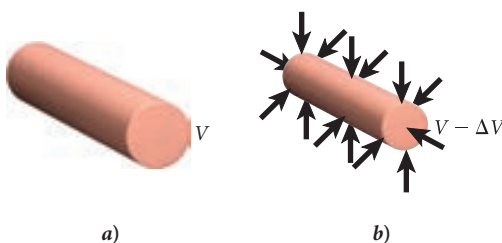


FIGURA 13.8 Compresión de un objeto por la presión de un fluido; a) objeto antes de la compresión; b) objeto después de la compresión.

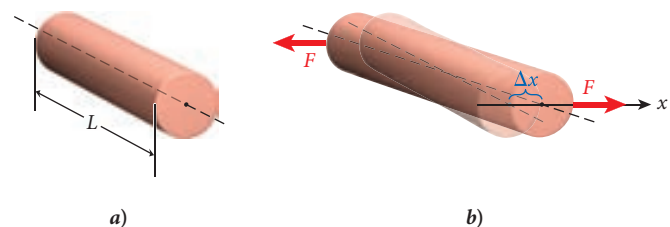


FIGURA 13.9 Corte o cizalladura de un objeto causado por una fuerza paralela al área del extremo de un objeto. a) Objeto antes de que se aplique la fuerza cortante. b) Objeto después de que se aplica la fuerza cortante.

EJEMPLO 13.1 Montura de pared para una TV de pantalla plana

Usted recientemente se ha comprado una nueva TV (figura 13.10) y quiere montarla en la pared con cuatro pernos, cada uno con un diámetro de 0.50 cm. No puede montar la TV al ras contra la pared, sino que debe dejar un espacio de 10.0 cm entre la pared y la TV para la circulación del aire.

PROBLEMA 1

Si la masa de su nueva TV es de 42.8 kg, ¿cuál es el esfuerzo cortante en los pernos?

SOLUCIÓN 1

El área de sección transversal combinada de los pernos es

$$A = 4 \left(\frac{\pi d^2}{4} \right) = \pi (0.005 \text{ m})^2 = 7.85 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2.$$

Una fuerza que actúa sobre los pernos es \vec{F}_g , la fuerza de la gravedad sobre la TV, ejercida en un extremo de cada perno. Esta fuerza está equilibrada por una fuerza debida a la pared, que actúa en el otro extremo de cada perno. Esta fuerza de la pared mantiene a la TV en su lugar; de esta forma, tiene exactamente la misma magnitud que la fuerza de gravedad, pero apunta en la dirección opuesta. Por lo tanto, la fuerza que se usa en la ecuación 13.4 para el esfuerzo es

$$F = mg = (42.8 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2) = 420 \text{ N}.$$

De esta manera, obtenemos el esfuerzo cortante sobre los pernos:

$$\frac{F}{A} = \frac{420 \text{ N}}{7.85 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2} = 5.35 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2.$$

PROBLEMA 2

El módulo de rigidez del acero usado en los pernos es de $9.0 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$. ¿Cuál es la deflexión vertical resultante sobre los pernos?

SOLUCIÓN 2

Resolviendo la ecuación 13.4 para la deflexión, Δx , encontramos

$$\Delta x = \left(\frac{F}{A} \right) \frac{L}{G} = (5.35 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2) \frac{0.1 \text{ m}}{9.0 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2} = 5.94 \cdot 10^{-6} \text{ m}.$$

Incluso cuando el esfuerzo cortante es mayor a 5 millones de N/m^2 , el pandeo resultante de su TV de pantalla plana es de sólo unos 0.006 mm, lo cual es indetectable a simple vista.

Material	Módulo de corte (10^9 N/m^2)
Aluminio	25
Cobre	45
Vidrio	26
Polietileno	0.12
Hule	0.0003
Titanio	41
Acero	80-90

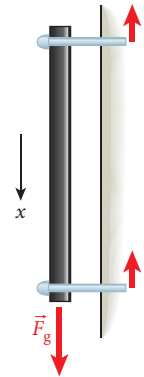


FIGURA 13.10 Las fuerzas que actúan sobre la montura de pared para una TV de pantalla plana.

PROBLEMA RESUELTO 13.1 Alambre estirado

PROBLEMA

Un alambre de acero de 1.50 m de longitud con un diámetro de 0.400 mm cuelga verticalmente. Se sujeta un reflector de masa $m = 1.50 \text{ kg}$ al alambre y se suelta. ¿Cuánto se estira el alambre?

SOLUCIÓN

PIENSE

Por el diámetro del alambre podemos obtener su área de sección transversal. El peso del proyector nos proporciona una fuerza hacia abajo. El esfuerzo sobre el alambre es el peso del proyector dividido entre el área de sección transversal. La deformación unitaria es el cambio en la longitud del alambre dividido entre su longitud original. El esfuerzo y la deformación están relacionados a través del módulo de Young para el acero.

ESBOCE

La figura 13.11 muestra el alambre antes y después de que se cuelgue el proyector.

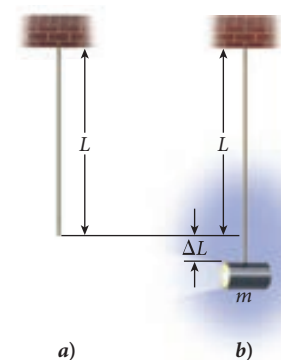


FIGURA 13.11 Un alambre a) antes y b) después de que se cuelgue un proyector de él.

(continúa)

(continuación)

INVESTIGUE

El área de sección transversal del alambre, A , puede calcularse del diámetro, d , del alambre:

$$A = \pi \left(\frac{d}{2} \right)^2 = \frac{\pi d^2}{4}. \tag{i}$$

La fuerza sobre el alambre es el peso del reflector,

$$F = mg. \tag{ii}$$

Podemos relacionar el esfuerzo y la deformación sobre el alambre a través del módulo de Young, Y , para el acero:

$$\frac{F}{A} = Y \frac{\Delta L}{L}, \tag{iii}$$

donde ΔL es el cambio en la longitud del alambre y L es su longitud original.

SIMPLIFIQUE

Podemos combinar las ecuaciones (i), (ii) y (iii) para obtener

$$\frac{F}{A} = \frac{mg}{\left(\frac{1}{4} \pi d^2 \right)} = \frac{4mg}{\pi d^2} = Y \frac{\Delta L}{L}.$$

Al despejar para el cambio en la longitud del alambre, obtenemos

$$\Delta L = \frac{4mgL}{Y\pi d^2}.$$

CALCULE

Poniendo los valores numéricos nos da

$$\Delta L = \frac{4mgL}{Y\pi d^2} = \frac{4 \cdot 1.50 \text{ kg} \cdot (9.81 \text{ m/s}^2) \cdot 1.50 \text{ m}}{(200 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2) \pi (0.400 \cdot 10^{-3} \text{ m})^2} = 0.00087824 \text{ m}.$$

REDONDEE

Reportamos nuestro resultado con tres cifras significativas:

$$\Delta L = 0.000878 \text{ m} = 0.878 \text{ mm}.$$

VUELVA A REVISAR

Una sencilla e importante primera verificación del resultado es confirmar que las unidades sean correctas. El cambio de longitud, que hemos calculado, tiene unidad de milímetros, lo cual tiene sentido. A continuación, examinamos la magnitud. El alambre se estira un poco menos que 1 mm comparado con su longitud original de 1.50 m. Este estiramiento es menor a 0.1%, lo cual parece razonable. Cuando un alambre experimenta un estiramiento notable, preocupa que el alambre se pueda romper. Éste no es el caso aquí, lo cual nos brinda algo de confianza de que nuestro resultado es aproximadamente del orden de magnitud correcto.

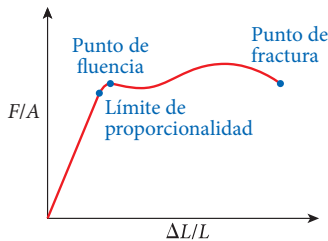


FIGURA 13.12 Un diagrama de esfuerzo-deformación unitaria típico para un metal dúctil bajo tensión que muestra el límite de proporcionalidad, el punto de fluencia y el punto de fractura.

Tabla 13.4 Esfuerzo de ruptura para materiales comunes

Material	Esfuerzo de ruptura (10^6 N/m^2)
Aluminio	455
Latón	550
Cobre	220
Acero	400
Hueso	130

Note que estos valores son aproximados.

Como se hizo notar antes, el esfuerzo aplicado a un objeto es proporcional a la deformación, en tanto no se exceda el límite elástico del material. La figura 13.12 muestra un diagrama de esfuerzo-deformación típico para un metal dúctil bajo tensión (que se puede estirar formando un alambre). Hasta el límite de proporcionalidad, el material dúctil responde de manera lineal al esfuerzo. Si se quita el esfuerzo, el material regresará a su longitud original. Si se aplica el esfuerzo más allá del límite de proporcionalidad, el material continuará alargándose hasta que alcance su punto de fluencia. Si el esfuerzo se aplica entre el límite de proporcionalidad y el punto de fractura y luego se quita, el material no regresará a su longitud original, sino que quedará deformado de manera permanente. El punto de fluencia es el punto donde el esfuerzo causa una deformación repentina sin ningún incremento en la fuerza como puede verse del achatamiento de la curva (vea la figura 13.12). El esfuerzo adicional continuará estirando al material hasta que alcance su punto de fractura, en donde se rompe. El esfuerzo de ruptura también se llama *esfuerzo último*, o en el caso de la tensión, *resistencia a la tracción*. Se ofrecen algunos esfuerzos de ruptura aproximados en la tabla 13.4.

13.4 Presión

Esta sección examina las propiedades de líquidos y gases, llamados conjuntamente *fluidos*. Las propiedades de esfuerzo y deformación, discutidos en la sección 13.3, son útiles cuando se estudian los sólidos, debido a que las sustancias que fluyen, tales como líquidos y gases, ofrecen poca resistencia al corte o la tensión. En esta sección consideramos las propiedades de los fluidos en reposo. Más tarde en este capítulo discutiremos las propiedades de los fluidos en movimiento.

La **presión**, p , es la fuerza por unidad de área:

$$p = \frac{F}{A}. \quad (13.5)$$

La presión es una cantidad escalar. La unidad de presión en el SI es N/m^2 , el cual se llama **pascal**, abreviado como Pa:

$$1 \text{ Pa} \equiv \frac{1 \text{ N}}{1 \text{ m}^2}.$$

La presión media de la atmósfera terrestre a nivel del mar, 1 atm, es una unidad que no corresponde al SI, es comúnmente usada y se expresa en otras unidades como sigue:

$$1 \text{ atm} = 1.01 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 760 \text{ torr} = 14.7 \text{ lb/in}^2.$$

Los manómetros usados para medir cuánto aire se ha retirado de un recipiente se calibran por lo común en *torr*, una unidad llamada así por el físico italiano Evangelista Torricelli (1608-1647). La presión de los neumáticos de los automóviles en Estados Unidos se miden a menudo en libras por pulgada cuadrada (lb/in^2 , o psi).

Relación entre presión y profundidad

Considere un tanque de agua abierto a la atmósfera terrestre e imagine un cubo de agua dentro de éste (mostrado en rosa en la figura 13.13). Suponga que la superficie de la parte superior del cubo es horizontal y está a una profundidad de y_1 y que la superficie inferior del cubo es horizontal y está a una profundidad y_2 . Los otros lados del cubo se encuentran orientados de modo vertical. La presión del agua que actúa sobre el cubo produce fuerzas. Sin embargo, de acuerdo con la primera ley de Newton, no debe haber ninguna fuerza neta actuando sobre este cubo estacionario de agua. Las fuerzas que actúan sobre los lados verticales del cubo claramente se cancelan. Las fuerzas verticales que actúan sobre los lados inferior y superior también deben sumar cero:

$$F_2 - F_1 - mg = 0, \quad (13.6)$$

donde F_1 es la fuerza descendente en la parte superior del cubo, F_2 es la fuerza ascendente en la parte inferior del cubo y mg es el peso del cubo de agua. La presión a la profundidad y_1 es p_1 , y la presión a la profundidad y_2 es p_2 . Podemos escribir las fuerzas a esas profundidades en términos de las presiones, suponiendo que el área de las superficies superior e inferior del cubo es A :

$$F_1 = p_1 A$$

$$F_2 = p_2 A.$$

También podemos expresar la masa, m , del agua en términos de la densidad del agua, ρ , suponiendo que es constante y el volumen, V , del cubo, $m = \rho V$. Al sustituir F_1 , F_2 y m en la ecuación 13.6 nos da

$$p_2 A - p_1 A - \rho V g = 0.$$

Al recomodar esta ecuación y sustituir $A(y_1 - y_2)$ por V , obtenemos

$$p_2 A = p_1 A + \rho A(y_1 - y_2)g.$$

Al dividir entre el área da una expresión para la presión como función de la profundidad en un líquido de densidad uniforme ρ :

$$p_2 = p_1 + \rho g(y_1 - y_2). \quad (13.7)$$

Un problema común involucra la presión como función de la profundidad bajo la superficie del líquido. Comenzando con la ecuación 13.7, podemos definir la presión en la superficie del

13.1 Ejercicio en clase

Suponga que usted bombea el aire, sacándolo de una lata de pintura, cubierta por una tapa. La lata de pintura es cilíndrica, con 22.4 cm de alto y con un diámetro de 16.0 cm. ¿Cuánta presión ejerce la atmósfera sobre la tapa de la lata de pintura evacuada?

- a) 9.81 N c) 2 030 N
b) 511 N d) 8 120 N

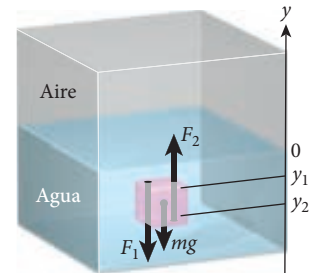


FIGURA 13.13 Cubo de agua en un tanque de agua.



FIGURA 13.14 Tres columnas conectadas: el fluido sube hasta la misma altura en cada uno.

líquido ($y_1 = 0$) como p_0 y la presión a una profundidad dada h ($y_2 = -h$) como p . Estas suposiciones conducen a la ecuación

$$p = p_0 + \rho gh \tag{13.8}$$

para la presión a una profundidad dada del líquido con una densidad uniforme ρ .

Note que al deducir la ecuación 13.8, utilizamos el hecho de que la densidad de un fluido no cambia como función de la profundidad. Esta suposición de incompresibilidad es esencial para obtener este resultado. Más tarde en esta sección el relajar este requerimiento de incompresibilidad nos conducirá a fórmulas distintas que relacionan la altura y la presión para los gases. Además, es importante notar que la ecuación 13.8 especifica la presión en un líquido a una profundidad vertical h , sin ninguna dependencia en la posición horizontal. De esta manera, la ecuación se mantiene independientemente de la forma del recipiente que contiene al fluido. En la figura 13.14 puede ver que el fluido alcanza la misma altura en cada columna, independientemente de la forma o del área de la sección transversal, esto ocurre debido a que las partes inferiores están intercomunicadas y por lo tanto tienen la misma presión.

EJEMPLO 13.2 Submarino



FIGURA 13.15 Submarino que emerge a la superficie.

Un submarino de la Marina de Guerra de Estados Unidos, de la clase Los Ángeles tiene una longitud de 110 m y un casco con diámetro de 10 m (figura 13.15). Suponga que el submarino tiene una parte superior plana con un área $A = 1\,100\text{ m}^2$ y que la densidad del agua de mar es de $1\,024\text{ kg/m}^3$.

PROBLEMA

¿Cuál es la fuerza total que empuja hacia abajo sobre la parte superior del submarino a una profundidad de inmersión de 250 m?

SOLUCIÓN

La presión dentro del submarino es la presión atmosférica normal, p_0 . De acuerdo con la ecuación 13.8, la presión a una profundidad de 250 m está dada por $p = p_0 + \rho gh$. Por lo tanto, la diferencia de presión entre el interior y el exterior del submarino es

$$\Delta p = \rho gh = (1\,024\text{ kg/m}^3)(9.81\text{ m/s}^2)(250\text{ m}) = 2.51 \cdot 10^6\text{ N/m}^2 = 2.51\text{ MPa},$$

o aproximadamente 25 atm.

Al multiplicar el área por la presión brinda la fuerza total, de acuerdo con la ecuación 13.5. De esta manera, encontramos la fuerza total de

$$F = \Delta p A = (2.51 \cdot 10^6\text{ N/m}^2)(1\,100\text{ m}^2) = 2.8 \cdot 10^9\text{ N}.$$

Este número es asombrosamente grande y ¡corresponde con el peso de una masa de $\approx 280\,000$ toneladas métricas!

13.2 Ejercicio en clase

Una esfera de acero con un diámetro de 0.250 m se sumerge en el océano a una profundidad de 500.0 m. ¿Cuál es el cambio porcentual en el volumen de la esfera? El módulo volumétrico del acero es de $160 \cdot 10^9\text{ Pa}$.

- a) 0.0031%
- b) 0.045%
- c) 0.33%
- d) 0.55%
- e) 1.5%

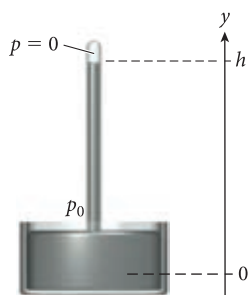


FIGURA 13.16 Un barómetro de mercurio mide la presión atmosférica p_0 .

Presión manométrica y barómetros

La presión p en la ecuación 13.8 es una **presión absoluta**, lo que significa que incluye la presión del líquido así como la presión del aire sobre éste. La diferencia entre la presión absoluta y la presión del aire atmosférico se llama **presión manométrica**. Por ejemplo, el manómetro usado para medir la presión del aire en un neumático está calibrado de tal manera que la presión atmosférica marca una lectura de cero. Cuando se conecta al aire comprimido del neumático, el manómetro mide la presión adicional presente en el neumático. En la ecuación 13.8, la presión manométrica es ρgh .

Un sencillo dispositivo usado para medir la presión atmosférica es el **barómetro** de mercurio (figura 13.16). Usted puede construir un barómetro de mercurio tomando un tubo de vidrio largo, cerrado en un extremo, llenándolo con mercurio e invirtiéndolo con su extremo abierto en un platillo con mercurio. El espacio encima del mercurio es un vacío y, por lo tanto, tiene presión cero. La diferencia de altura entre la parte superior del mercurio en el tubo y la parte

superior del mercurio en el platillo, h , puede relacionarse con la presión atmosférica, p_0 , usando la ecuación 13.7 con $p_2 = p_1 + \rho g(y_1 - y_2)$, $y_2 - y_1 = h$, $p_2 = 0$ y $p_1 = p_0$:

$$p_0 = \rho gh.$$

Note que la medición de la presión atmosférica usando un barómetro de mercurio depende del valor local de g . La presión atmosférica se expresa a menudo en milímetros de mercurio (mmHg), que corresponde a una diferencia de altura h . El torr es equivalente a 1 mmHg, de tal manera que la presión atmosférica normal es de 760 torr, o 29.92 pulgadas de mercurio (101.325 kPa).

Un **manómetro** de tubo abierto mide la presión manométrica de un gas. Consiste en un tubo en forma de U parcialmente lleno de un líquido tal como el mercurio (figura 13.17). El extremo cerrado del manómetro se conecta a un recipiente que contiene el gas cuya presión manométrica, p_g , se está midiendo y el otro extremo está abierto y así experimenta la presión atmosférica, p_0 . Usando la ecuación 13.7 con $y_1 = 0$, $p_1 = p_0$, $y_2 = -h$ y $p_2 = p$, donde p es la presión absoluta del gas en el recipiente, obtenemos $p = p_0 + \rho gh$, la relación entre presión y profundidad deducida con anterioridad. La presión manométrica del gas en el recipiente es entonces

$$p_g = p - p_0 = \rho gh. \quad (13.9)$$

Observe que la presión manométrica puede ser positiva o negativa. La presión manométrica de aire en un neumático de automóvil es positiva. La presión manométrica en el extremo de una pajilla que está siendo usada por una persona al tomarse una leche malteada es negativa.

Relación de altitud barométrica de los gases

Al derivar la ecuación 13.8, utilizamos la incompresibilidad de los líquidos. Sin embargo, si el fluido es un gas, no podemos hacer esta suposición. Comencemos de nuevo con una delgada capa de fluido en una columna de fluido. La diferencia de presión entre las superficies de la parte superior e inferior es el negativo del peso de la delgada capa de fluido dividida entre el área:

$$\Delta p = -\frac{F}{A} = -\frac{mg}{A} = -\frac{\rho Vg}{A} = -\frac{\rho(\Delta h A)g}{A} = -\rho g \Delta h. \quad (13.10)$$

El signo negativo refleja el hecho de que la presión decrece con el incremento de altura (h), dado que el peso de una columna de fluido sobre la capa se reducirá. Hasta ahora, no hay nada diferente de la derivación del fluido incompresible. Sin embargo, para fluidos compresibles, la densidad es proporcional a la presión:

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{p}{p_0}. \quad (13.11)$$

Estrictamente hablando, la relación es cierta sólo para un gas ideal a temperatura constante, como veremos en el capítulo 19. Sin embargo, si combinamos las ecuaciones 13.10 y 13.11, obtenemos

$$\frac{\Delta p}{\Delta h} = -\frac{g\rho_0}{p_0} p.$$

Tomando el límite cuando $\Delta h \rightarrow 0$, tenemos

$$\frac{dp}{dh} = -\frac{g\rho_0}{p_0} p.$$

Éste es un ejemplo de una ecuación diferencial. Necesitamos encontrar una función cuya derivada sea proporcional a la función misma, lo que nos lleva a una función exponencial:

$$p(h) = p_0 e^{-h\rho_0 g/p_0}. \quad (13.12)$$

Es fácil convencerse de que la ecuación 13.12 es de hecho una solución a la ecuación diferencial anterior simplemente encontrando la derivada con respecto a h . La ecuación 13.12 se llama en ocasiones **fórmula de presión barométrica**, y relaciona la presión con la altura en los gases. Se aplica sólo en tanto la temperatura no cambie como función de la altitud y en tanto se pueda suponer que la aceleración gravitacional sea constante. (Consideraremos el efecto del cambio de temperatura cuando discutamos la ley de los gases ideales en el capítulo 19.)

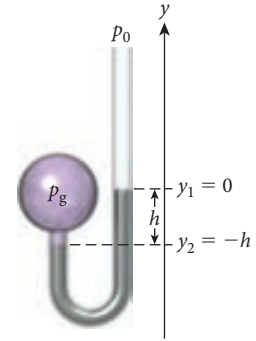


FIGURA 13.17 Un manómetro de tubo abierto mide la presión manométrica de un gas.

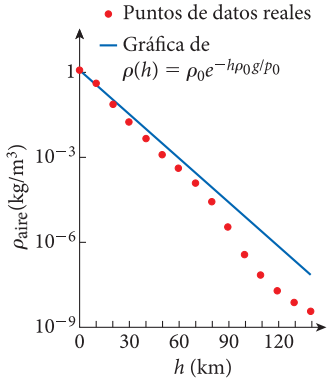


FIGURA 13.18 Comparación de los valores para la densidad del aire graficados de la ecuación 13.13 (línea azul) con los datos reales para la atmósfera (puntos rojos).

Podemos obtener una fórmula para la densidad del aire, ρ , como función de la altura, combinando las ecuaciones 13.11 y 13.12:

$$\rho(h) = \rho_0 e^{-h\rho_0 g/p_0}. \tag{13.13}$$

Incluso cuando los resultados obtenidos con esta ecuación son sólo una aproximación, coinciden bastante bien con datos atmosféricos reales, como se muestra en la figura 13.18, donde se graficó $\rho(h)$ con $g = 9.81 \text{ m/s}^2$, $p_0 = 1.01 \cdot 10^5 \text{ Pa}$, la presión de aire a nivel del mar ($h = 0$), y $\rho_0 = 1.229 \text{ kg/m}^3$, la densidad del aire a nivel del mar. Como puede ver, la concordancia es muy cercana hasta la parte superior de la estratosfera, aproximadamente a 50 km sobre el suelo.

EJEMPLO 13.3 Presión del aire en el Monte Everest

Conforme los alpinistas se aproximan al pico de la montaña más alta de la Tierra, el Monte Everest, comúnmente deben usar equipo de respiración. La razón de esto es que la presión del aire es muy baja, demasiado baja para los pulmones, los cuales están acostumbrados a las condiciones cercanas al nivel del mar.

PROBLEMA

¿Cuál es la presión del aire en la cumbre del Monte Everest (figura 13.19)?

SOLUCIÓN

Ésta es una situación donde podemos usar la fórmula de la presión barométrica (ecuación 13.12). Primero anotamos las constantes: $p_0 = 1.01 \cdot 10^5 \text{ Pa}$, la presión del aire a nivel del mar y $\rho_0 = 1.229 \text{ kg/m}^3$, la densidad del aire a nivel del mar. Entonces encontramos el inverso de la parte constante del exponente en la ecuación 13.12:

$$\frac{p_0}{\rho_0 g} = \frac{1.01 \cdot 10^5 \text{ Pa}}{(1.229 \text{ kg/m}^3)(9.81 \text{ m/s}^2)} = 8377 \text{ m}.$$

Entonces podemos reescribir la ecuación 13.12 como sigue

$$p(h) = p_0 e^{-h/(8377 \text{ m})}.$$

La altura del Monte Everest es de 8850 m. Por lo tanto, obtenemos

$$p(8850 \text{ m}) = p_0 e^{-8850/8377} = 0.348 p_0 = 35 \text{ kPa}.$$

La presión de aire calculada en la cumbre del Monte Everest es sólo 35% de la presión del aire al nivel del mar. (La presión real es un poco menor, debido principalmente a los efectos de la temperatura.)

Usted no tiene que viajar a la cumbre del Monte Everest para apreciar el cambio en la presión del aire con la altura. Usted quizás ha experimentado que sus oídos “se tapan” cuando conduce por las montañas. Este efecto fisiológico de sentir la presión en los tímpanos es el resultado de un retraso al ajustar su cuerpo la presión interna al cambio en la presión externa debido al cambio rápido en la altura.

Principio de Pascal

Si la presión se ejerce sobre parte de un fluido incompresible, la presión se transmitirá a todas las partes del fluido sin pérdida. Éste es el **principio de Pascal**, el cual puede enunciarse de la siguiente manera:

Cuando ocurre un cambio en la presión en cualquier punto de un fluido confinado, se presenta un cambio igual en la presión en todos los puntos en el fluido.

El principio de Pascal es la base de muchos dispositivos hidráulicos modernos, tales como los frenos de los automóviles, grandes máquinas que mueven la tierra y ascensores de coches.

El principio de Pascal puede demostrarse tomando un cilindro parcialmente lleno de agua, colocando un pistón encima de la columna de agua y poniendo un peso encima del pistón (figura



FIGURA 13.19 El Monte Everest es el pico más alto de la Tierra, con 8 850 m (29 035 ft).

13.3 Ejercicio en clase

Si usted desciende en el pozo de una mina por debajo del nivel del mar, la presión del aire

- a) decrece linealmente.
- b) decrece exponencialmente.
- c) crece linealmente.
- d) crece exponencialmente.

13.20). La presión del aire y el peso ejercen una presión, p_t , encima de la columna de agua. La presión, p , a la profundidad h está dada por

$$p = p_t + \rho gh.$$

Debido a que el agua puede considerarse como incompresible, si se agrega un segundo peso encima del pistón, el cambio en la presión, Δp , a la profundidad h se debe solamente al cambio de presión, Δp_t , encima del agua. La densidad del agua no cambia y la profundidad tampoco, así es que podemos escribir

$$\Delta p = \Delta p_t.$$

Este resultado no depende de h , de tal manera que debe cumplirse para todas las posiciones en el líquido.

Ahora, considere dos pistones conectados en cilindros llenos con aceite, como se muestra en la figura 13.21. Un pistón tiene un área A_{ent} y el otro pistón un área A_{sal} , con $A_{ent} < A_{sal}$. Se ejerce una fuerza F_{ent} , sobre el primer pistón, produciendo un cambio en la presión del aceite. Este cambio en la presión se transmite a todos los puntos del aceite, incluyendo los puntos adyacentes al segundo pistón. Podemos escribir

$$\Delta p = \frac{F_{ent}}{A_{ent}} = \frac{F_{sal}}{A_{sal}},$$

o

$$F_{sal} = F_{ent} \frac{A_{sal}}{A_{ent}}. \tag{13.14}$$

Debido a que A_{sal} es mayor a A_{ent} , F_{sal} es mayor a F_{ent} . De esta forma, la fuerza aplicada al primer pistón se amplifica. Este fenómeno es la base de los dispositivos hidráulicos que producen grandes fuerzas de salida con pequeñas fuerzas de entrada.

La cantidad de trabajo efectuada sobre el primer pistón es la misma que la cantidad de trabajo realizada por el segundo pistón. Para calcular el trabajo en total necesitamos calcular la distancia a través de la cual actúan las fuerzas. Para ambos pistones, el volumen, V , de aceite incompresible que se mueve es el mismo:

$$V = h_{ent} A_{ent} = h_{sal} A_{sal},$$

donde h_{ent} es la distancia que se mueve el primer pistón y h_{sal} la distancia que se mueve el segundo. Podemos ver que

$$h_{sal} = h_{ent} \frac{A_{ent}}{A_{sal}}, \tag{13.15}$$

lo cual significa que el segundo pistón se mueve una distancia menor que el primero porque $A_{ent} < A_{sal}$. Podemos encontrar el trabajo efectuado utilizando el hecho de que el trabajo es fuerza por distancia y mediante las ecuaciones 13.14 y 13.15:

$$W = F_{ent} h_{ent} = \left(F_{sal} \frac{A_{ent}}{A_{sal}} \right) \left(h_{sal} \frac{A_{sal}}{A_{ent}} \right) = F_{sal} h_{sal}.$$

De esta manera, este dispositivo hidráulico transmite una fuerza mayor a través de una distancia menor. Sin embargo, no se ha efectuado ningún trabajo adicional.

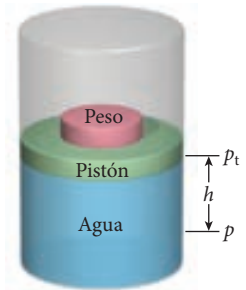
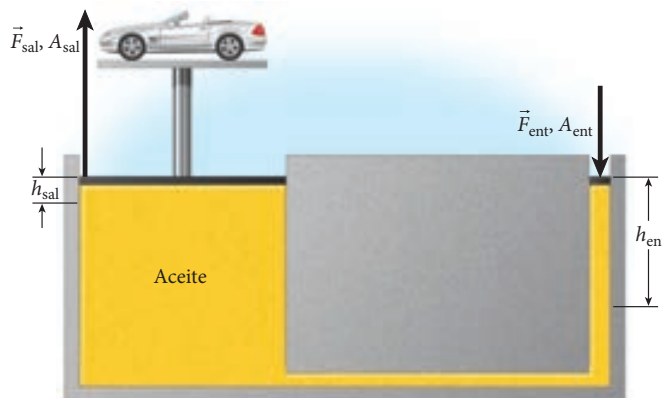


FIGURA 13.20 Cilindro parcialmente lleno de agua con un pistón colocado encima del agua y un peso colocado sobre el pistón.

13.4 Ejercicio en clase

Un coche con una masa de 1 600 kg es soportado por un ascensor de coches hidráulico, como se ilustra en la figura 13.21, el pistón grande que soporta al coche tiene un diámetro de 25.0 cm. El pistón pequeño tiene un diámetro de 1.25 cm. ¿Cuánta fuerza debe ejercerse sobre el pistón pequeño para soportar al coche?

- a) 1.43 N
- b) 5.22 N
- c) 10.2 N
- d) 23.1 N
- e) 39.2 N

FIGURA 13.21 Aplicación del principio de Pascal en un ascensor hidráulico. (La escala del ascensor en relación con el coche está muy fuera de proporción para mostrar con claridad los detalles esenciales.)

13.5 Principio de Arquímedes

Arquímedes (287-212 a.C.) de Siracusa, Sicilia, fue uno de los más grandes matemáticos de todos los tiempos. El rey Hierón II de Siracusa ordenó hacer una nueva corona y dio al orfebre la cantidad exacta de oro necesario para crear la corona. Cuando se terminó la corona, tenía el peso correcto, pero Hierón sospechó que el orfebre había usado un poco de plata en la corona para reemplazar al oro, que es más valioso. Hierón no podía probar esto, y acudió a Arquímedes en busca de ayuda. De acuerdo con la leyenda, la respuesta se le ocurrió a Arquímedes cuando éste estaba a punto de darse un baño y notó que el nivel del agua subía y su peso aparente disminuía cuando se metió en la bañera. Entonces, corrió desnudo por las calles de Siracusa hasta el palacio, gritando “¡Eureka!” (En griego: “¡Lo he encontrado!”) Usando este descubrimiento, Arquímedes fue capaz de demostrar el cambio de plata por oro y probar el robo cometido por el orfebre. Más tarde, en esta sección, examinaremos el método de Arquímedes para resolver este problema, después de considerar la fuerza de flotación y el desplazamiento de los fluidos.

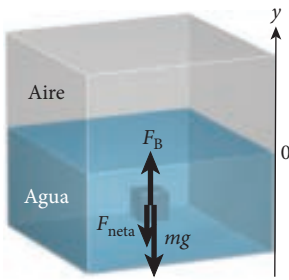


FIGURA 13.22 El peso de un cubo de acero sumergido en el agua es mayor que la fuerza de flotación que actúa sobre el cubo.

Fuerza de flotación

La figura 13.13 muestra un cubo de agua dentro de un volumen mayor de agua. El peso del cubo de agua es soportado por la fuerza que resulta de la diferencia de presión entre las superficies superior e inferior del cubo, como se dio en la ecuación 13.6, la cual podemos reescribir como

$$F_2 - F_1 = mg = F_B, \tag{13.16}$$

donde F_B se define como la **fuerza de flotación** que actúa sobre el cubo de agua. Para el caso del cubo de agua, la fuerza de flotación es igual al peso del agua. En general, la fuerza de flotación que actúa sobre el objeto sumergido está dada por el peso del fluido desplazado,

$$F_B = m_f g.$$

Ahora, suponemos que el cubo de agua es reemplazado por un cubo de acero (figura 13.22). Debido a que el cubo de acero tiene el mismo volumen y se encuentra a la misma profundidad que el cubo de agua, la fuerza de flotación sigue igual. Sin embargo, el cubo de acero pesa más que el cubo de agua, así es que una componente neta en y de la fuerza actúa sobre el cubo de acero, dada por

$$F_{\text{neta},y} = F_B - m_{\text{acero}}g < 0.$$

Esta fuerza neta descendente hace que el cubo de acero se hunda.

Si el cubo de agua se reemplaza por un cubo de madera, el peso del cubo de madera es menor al del cubo de agua, así que la fuerza neta será ascendente. El cubo de madera subirá hacia la superficie. Si un objeto que es menos denso que el agua se coloca en el agua, flotará. Un objeto de masa m_{objeto} se hundirá en el agua hasta que el peso del agua desplazada iguale el peso del objeto:

$$F_B = m_f g = m_{\text{objeto}}g.$$

Un cuerpo en flotación desplaza su propio peso de fluido. Esta afirmación es cierta, independientemente de la cantidad de fluido presente. Para aclarar lo anterior, la figura 13.23 muestra un barco en un dique. El inciso *a*) muestra al barco en una posición baja y el inciso *b*) en una posición alta. En ambas posiciones, el barco flota, con la misma fracción del barco bajo el nivel del agua. Lo que importa para la fuerza de flotación no es la cantidad total de agua en el dique (de azul claro en la figura), sino la cantidad de agua desplazada por la porción del barco sumergida bajo el agua (sombreadas en azul y marrón en la figura). Claramente, en la figura 13.23*a*), queda mucha menos agua en el dique que el volumen que ha sido desplazado por el barco. Lo único que importa es el peso del agua *que estaría donde el barco está*, no el peso del agua que queda todavía en el dique. (De hecho, con un recipiente de la forma adecuada, incluso un solo galón de agua sería “suficiente para hacer flotar a un buque de guerra.”)

Si un objeto que tiene una densidad mayor que la del agua se coloca bajo el agua, experimentará una fuerza de flotación ascendente que es menor a su peso. Entonces, su peso aparente está dado por

$$\text{Peso real} - \text{fuerza de flotación} = \text{peso aparente}. \tag{13.17}$$

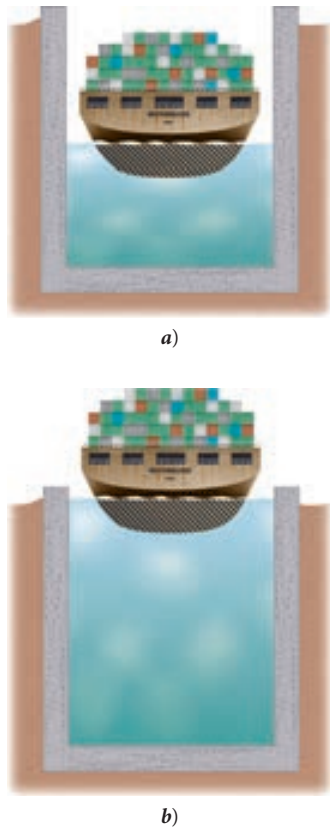


FIGURA 13.23 Un barco en un dique: *a*) posición inferior; *b*) posición superior.

EJEMPLO 13.4 Témpano flotante

Los témpanos de hielo, tales como el mostrado en la figura 13.24a), representan graves peligros para los barcos en alta mar. Muchos barcos, el *Titanic* es el más famoso, se han hundido después de colisionar con témpanos. El problema es que una gran fracción del volumen del témpano se encuentra oculta bajo la línea de flotación y así es prácticamente invisible para los marineros, como se ilustra en la figura 13.24b).



FIGURA 13.24 a) Un témpano de hielo flotando en el océano. b) Ilustración que muestra la fracción del volumen del témpano encima y debajo de la línea de flotación.

PROBLEMA

¿Qué fracción del volumen de un témpano flotando en el agua del mar resulta visible sobre la superficie?

SOLUCIÓN

Sea V_t el volumen total del témpano y V_s el volumen del témpano que está sumergido. La fracción, f , por encima del agua es entonces

$$f = \frac{V_t - V_s}{V_t} = 1 - \frac{V_s}{V_t}.$$

Debido a que el témpano está flotando, el volumen sumergido debe desplazar un volumen de agua de mar que tiene el mismo peso que el témpano entero. La masa del témpano, m_t , puede calcularse a partir del volumen del témpano y la densidad del hielo, $\rho_{\text{hielo}} = 0.917 \text{ g/cm}^3$. La masa del agua de mar desplazada puede calcularse a partir del volumen sumergido y la densidad conocida del agua de mar, $\rho_{\text{agua de mar}} = 1.024 \text{ g/cm}^3$. Igualamos los dos pesos:

$$\rho_{\text{hielo}} V_t g = \rho_{\text{agua de mar}} V_s g,$$

o

$$\rho_{\text{hielo}} V_t = \rho_{\text{agua de mar}} V_s.$$

Podemos reacomodar la ecuación para obtener

$$\frac{V_s}{V_t} = \frac{\rho_{\text{hielo}}}{\rho_{\text{agua de mar}}}.$$

Ahora, podemos encontrar la fracción por encima del agua:

$$f = 1 - \frac{V_s}{V_t} = 1 - \frac{\rho_{\text{hielo}}}{\rho_{\text{agua de mar}}} = 1 - \frac{0.917 \text{ g/cm}^3}{1.024 \text{ g/cm}^3} = 0.104,$$

o como 10%. La figura 13.24b) muestra un témpano con aproximadamente 10% de su volumen sobre la línea de flotación.

Un experimento interesante acerca de la flotación puede realizarse de la siguiente manera. Usted vierte agua (con colorante para alimento rojo) en un recipiente [figura 13.25a)] y pone un flotador dentro de éste [figura 13.25b)]. El flotador está sumergido 90%, de tal suerte que su densidad es de 90% del agua, como el témpano de hielo del ejemplo 13.4. A continuación, vierte usted diluyente de pintura encima del agua. El diluyente de pintura no se mezcla con el agua y tiene una densidad igual a 80% del agua. De esta manera, reposa encima del agua. Si usted pusiese el flotador en un recipiente de diluyente de pintura, el flotador se hundiría hasta el fondo. Así, ¿qué pasa cuando vierte usted el diluyente de pintura sobre el agua con el flotador dentro de ésta? ¿Subirá el flotador, se quedará en el mismo nivel o se hundirá?



FIGURA 13.25 Experimento de flotación con dos líquidos: a) agua con un tinte rojo; b) un flotador colocado en el agua; c) diluyente de pintura agregado sobre el agua.

La respuesta se muestra en la figura 13.25c): el flotador sube. ¿Por qué? En los dos líquidos se encuentran presentes fuerzas de flotación: una de la fracción del volumen del flotador sumergido en el agua y la otra fracción del volumen del flotador sumergida en el diluyente de pintura. Por lo tanto, para generar la misma fuerza de flotación, un volumen menor del flotador necesita estar sumergido en el agua cuando el diluyente de pintura también está presente y cuando el aire y no el diluyente de pintura yace encima del agua.

EJEMPLO 13.5 Globo de aire caliente



FIGURA 13.26 Globo aerostático de aire caliente en vuelo.

Un típico globo aerostático de aire caliente tiene un volumen de $2\,200\text{ m}^3$. La densidad del aire a la temperatura de 20 °C es de 1.205 kg/m^3 . La densidad del aire caliente dentro del globo a la temperatura de 100 °C es de 0.946 kg/m^3 .

PROBLEMA

¿Cuánto peso puede levantar el globo de aire caliente mostrado en la figura 13.26 (contando el globo mismo)?

SOLUCIÓN

El peso del aire a 20 °C que desplaza el globo es igual a la fuerza de flotación:

$$F_B = \rho_{20} Vg.$$

El peso del aire caliente dentro del globo es

$$W_{\text{globo}} = \rho_{100} Vg.$$

El peso que puede levantar es

$$\begin{aligned} W &= F_B - W_{\text{globo}} = \rho_{20} Vg - \rho_{100} Vg \\ &= Vg(\rho_{20} - \rho_{100}) = (2\,200\text{ m}^3)(9.81\text{ m/s}^2)(1.205\text{ kg/m}^3 - 0.946\text{ kg/m}^3) \\ &= 5\,590\text{ N}. \end{aligned}$$

Note que este peso debe incluir la envoltura del globo, la canastilla y el combustible, lo mismo que cualquier carga, tal como el piloto y los pasajeros.

13.3 Oportunidad de Autoexamen

Suponga que el globo en el ejemplo 13.5 estuviese lleno con helio en lugar de aire caliente. ¿Cuánto peso podría levantar el globo lleno de helio? La densidad del helio es de 0.164 kg/m^3 .

Determinación de la densidad

Regresemos al método de Arquímedes para averiguar si la nueva corona del rey era de oro puro o de una mezcla de plata y oro. Dado que la densidad del oro es de 19.3 g/cm^3 y la densidad de la plata es sólo de 10.5 g/cm^3 , Arquímedes necesitaba medir la densidad de la corona para encontrar qué fracción de ésta era de oro y qué fracción era de plata. Sin embargo, ¿cómo podía medir la densidad? Él necesitaba sumergir la corona en agua y determinar su volumen a partir de la elevación del nivel de agua. Pesar la corona le dio la masa y dividir la masa entre el volumen le brindó la densidad; es decir, la respuesta que el rey quería.

EJEMPLO 13.6 Determinación de la densidad de un objeto

El método mostrado en la figura 13.27 puede usarse para determinar la densidad de un objeto con sólo pesarlo, sin necesidad de medir los niveles del agua. Este método es comúnmente más preciso y por ende se prefiere. Primero pesamos un vaso de precipitados que contenga agua (con colorante para alimento verde agregado) cuya densidad se supone que es de $1\,000\text{ kg/m}^3$, como se muestra en el inciso *a*). Se determina que la masa del vaso y del agua es $m_0 = 0.437\text{ kg}$. En el inciso *b*) sumergimos una bola de metal, suspendida de una cuerda, en el agua, cuidando que la bola no toque el fondo del vaso de precipitados. La nueva masa total de esta configuración se determina en el inciso *c*) como $m_1 = 0.458\text{ kg}$. Por último, en el inciso *d*) dejamos que la bola repose en el fondo del vaso, sin tirar de la cuerda. Ahora se determina que la masa es $m_2 = 0.596\text{ kg}$.

PROBLEMA

¿Cuál es la densidad de la bola de metal?

SOLUCIÓN

La figura 13.28 muestra los diagramas de cuerpo libre para las diferentes partes de la figura 13.27. El diagrama del extremo izquierdo muestra la bola suspendida de la cuerda en equilibrio estático, con el peso $-m_b g \hat{y}$, equilibrado por la tensión de la cuerda, \vec{T} . El segundo diagrama en la figura 13.28 corresponde a la figura 13.27a) y muestra las únicas fuerzas que actúan sobre el recipiente lleno de agua, las cuales son su peso, $-m_w g \hat{y}$, y la fuerza normal, $m_0 g \hat{y}$. El valor de m_0 se determinó como resultado de la primera medición. El tercer diagrama en la figura 13.28 corresponde a los incisos b) y c) en la figura 13.27 y muestra el diagrama de cuerpo libre de la bola sumergida lo mismo que el diagrama de cuerpo libre del recipiente; ilustra el efecto de la fuerza de flotación, \vec{F}_B , sobre la bola y sobre el recipiente lleno de líquido. Note que la bola experimenta una fuerza de flotación ascendente y por lo tanto el recipiente debe experimentar una fuerza de igual magnitud pero con dirección opuesta (descendente), o $-\vec{F}_B$, de acuerdo con la tercera ley de Newton. La fuerza normal requerida para mantener el recipiente en equilibrio en esta situación es, $m_1 g \hat{y}$. El último diagrama de cuerpo libre del extremo derecho en la figura 13.28 corresponde con el inciso d) de la figura 13.27 y muestra la fuerza normal como $m_2 g \hat{y}$.

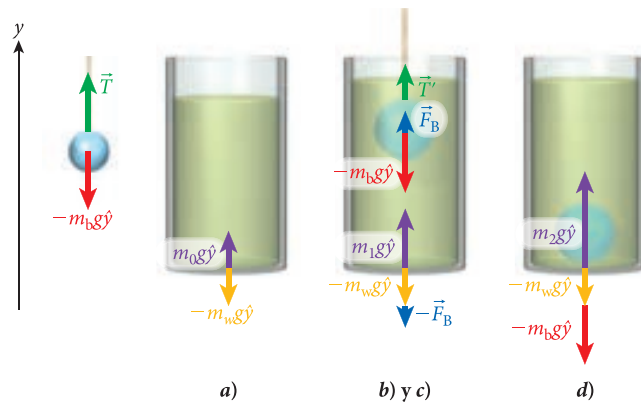


FIGURA 13.28 Diagramas de cuerpo libre para las diferentes partes del experimento.

La masa combinada del agua y del vaso, m_0 , se determinó en el inciso a) del método ilustrado en la figura 13.28. En el inciso c) medimos además la masa del agua desplazada por el volumen, V (todavía desconocido) de la bola de metal. La masa del agua desplazada es $m_w = \rho_w V_b$, y la masa total medida en el inciso c) es

$$m_1 = m_0 + \rho_w V_b. \quad (i)$$

Finalmente, la masa medida en el inciso d) es la masa combinada de la bola, el vaso y el agua. Para la masa de la bola podemos usar otra vez el producto de la densidad y el volumen:

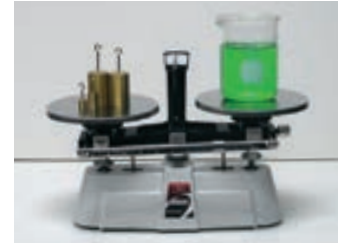
$$m_2 = m_0 + m_b = m_0 + \rho_b V_b. \quad (ii)$$

Combinando las ecuaciones (i) y (ii), tenemos

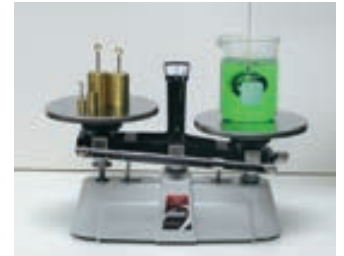
$$\frac{m_2 - m_0}{m_1 - m_0} = \frac{\rho_b V_b}{\rho_w V_b} = \frac{\rho_b}{\rho_w}.$$

Como puede ver, el volumen de la bola se ha cancelado y podemos obtener la densidad de la bola a partir de la densidad conocida del agua y nuestras tres mediciones, m_0 , m_1 y m_2 :

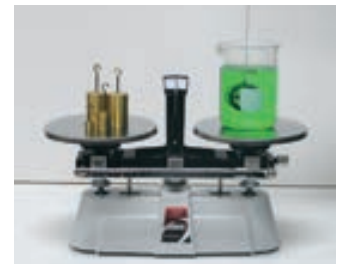
$$\rho_b = \frac{m_2 - m_0}{m_1 - m_0} \rho_w = \frac{0.596 - 0.437}{0.458 - 0.437} (1000 \text{ kg/m}^3) = 7570 \text{ kg/m}^3.$$



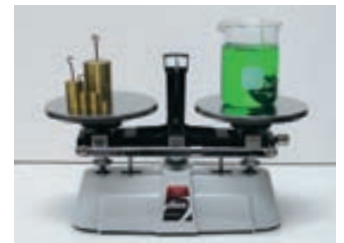
a)



b)



c)



d)

FIGURA 13.27 Método para determinar la masa de un objeto metálico.

13.5 Ejercicio en clase

Suponga que usamos el mismo montaje del ejemplo 13.6 y una bola del mismo tamaño, pero con la mitad de la densidad: $\rho_b = 3\,785\text{ kg/m}^3$. La medición de m_1 (la bola se cuelga de una cuerda de tal manera que se mantiene bajo el agua, pero sin tocar el fondo del vaso de precipitados) dará como resultado

- a) un valor menor. b) el mismo valor. c) un valor mayor.

La medición de la masa de m_2 (la bola está reposando en el fondo del vaso) dará como resultado

- a) un valor menor. b) el mismo valor. c) un valor mayor.

13.6 Movimiento de un fluido ideal



FIGURA 13.29 a) Flujo laminar del río Firehole en Yellowstone; b) transición de flujo laminar a turbulento en el humo ascendiendo; c) flujo turbulento en las Upper Falls en el río Yellowstone.

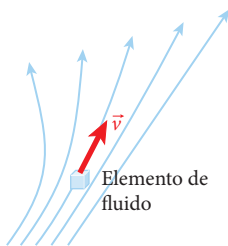


FIGURA 13.30 Líneas de flujo de un fluido en flujo laminar.



FIGURA 13.31 Soplo de aire a través del espacio entre dos latas de refresco.

Hemos estado examinando el comportamiento de los fluidos en reposo pero ahora estudiaremos a los fluidos en movimiento. El movimiento de los fluidos en la vida real es complicado y difícil de describir. Se requieren a menudo técnicas numéricas y computadoras para calcular las cantidades relacionadas con el movimiento de los fluidos. En esta sección consideramos los fluidos ideales que pueden ser tratados en forma más simple y todavía brindar resultados importantes y relevantes. Para considerarse como ideal, un fluido debe exhibir un flujo que sea laminar, incompresible, no viscoso y no rotacional.

El **flujo laminar** significa que la velocidad del fluido en movimiento en relación con un punto fijo en el espacio no cambia con el tiempo. Un río que fluye de manera tranquila muestra flujo laminar (figura 13.29a).

El agua en una catarata exhibe flujo no laminar, o **flujo turbulento** (figura 13.29c). El humo ascendiendo ejemplifica una transición de flujo laminar a turbulento (figura 13.29b). El humo caliente muestra inicialmente flujo laminar a medida que asciende. Conforme el humo continúa ascendiendo, su velocidad se incrementa hasta que se establece el flujo turbulento.

El **flujo incompresible** significa que la densidad del líquido no cambia cuando el líquido fluye. Un **fluido no viscoso** fluye de forma completamente libre. Algunos líquidos que no fluyen en forma libre son la miel y la lava. La viscosidad de un fluido tiene un efecto análogo a la fricción. Un objeto que se mueve en un líquido no viscoso no experimenta una fuerza semejante a la fricción, pero el mismo objeto moviéndose en un líquido viscoso está sujeto a una fuerza de arrastre debido a la viscosidad, una fuerza de fricción. Un fluido que fluye de manera viscosa pierde energía cinética de movimiento en forma de energía térmica. Suponemos que los fluidos ideales no pierden energía cuando fluyen.

El **flujo no rotacional** significa que ninguna parte del fluido rota en torno de su propio centro de masa. El movimiento rotacional de una pequeña parte del fluido significaría que la parte rotatoria tiene energía rotacional, la cual se supone que no ocurre en los fluidos ideales.

El flujo laminar puede describirse en término de líneas de flujo (o corriente) (figura 13.30). Una línea de flujo representa la trayectoria que toma un pequeño elemento del fluido a lo largo del tiempo. La velocidad, \vec{v} , de un pequeño elemento es siempre tangente a la línea de flujo. Note que las líneas de flujo nunca se cruzan; si lo hiciesen, la velocidad de flujo en el punto de cruce tendría dos valores.

Ecuación de Bernoulli

¿Qué suministra la sustentación que permite a un aeroplano volar a través del aire? Para entender este fenómeno, usted puede hacer una demostración simple con dos latas de refresco vacías y cinco pajillas. Coloque cada lata vacía sobre dos de las pajillas, con un espacio de aproximadamente 1 cm entre ellas, como se muestra en la figura 13.31. En esta disposición, las latas son capaces de hacer movimientos laterales con relativa facilidad. Ahora, usando la quinta pajilla, sople aire a través del espacio entre las latas. ¿Qué sucede? (Esta pregunta será respondida más tarde en esta sección.)

Para comenzar nuestro estudio del movimiento de los fluidos, introduzcamos la ecuación de continuidad. Considere un fluido ideal que fluye con una velocidad v en un recipiente o tubería con un área de sección transversal A (figura 13.32). Entonces ΔV es el volumen de fluido que fluye a través de la tubería durante el tiempo Δt y está dado por

$$\Delta V = A\Delta x = Av\Delta t.$$

Podemos escribir el volumen del fluido que pasa por un punto dado en la tubería por unidad de tiempo como

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = Av.$$

Ahora consideremos un fluido ideal que fluye en una tubería que tiene un área de sección transversal que cambia (13.33). El fluido está inicialmente fluyendo con una velocidad v_1 a través de una parte de la tubería con un área de sección transversal A_1 . Corriente abajo, el fluido fluye con una velocidad v_2 en una parte de la tubería con una sección transversal A_2 . El volumen de fluido ideal que entra en esta sección de la tubería por unidad de tiempo debe ser igual al volumen de fluido ideal que sale de la tubería por unidad de tiempo porque el fluido es incompresible y la tubería no tiene pérdidas. Podemos expresar el volumen que fluye en la primera parte de la tubería por unidad de tiempo como

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = A_1 v_1$$

y el volumen que fluye en la segunda parte de la tubería por unidad de tiempo como

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = A_2 v_2.$$

El volumen de fluido que pasa por cualquier punto de la tubería por unidad de tiempo debe ser el mismo en todas las partes de la tubería, o de otra suerte, el fluido estaría de alguna manera creándose o destruyéndose. De esta manera, tenemos

$$A_1 v_1 = A_2 v_2. \tag{13.18}$$

Esta ecuación se llama **ecuación de continuidad**.

Podemos expresar la ecuación 13.18 como una tasa de flujo volumétrico constante, R_V :

$$R_V = Av.$$

Suponiendo un fluido ideal cuya densidad no cambia, podemos expresar también una tasa de flujo másico constante, R_m :

$$R_m = \rho Av.$$

La unidad de la tasa de flujo másico en el SI es kilogramos por segundo (kg/s).

Consideremos ahora qué pasa con la presión de un fluido ideal que fluye a través de una tubería a una tasa constante (figura 13.34). Comenzamos por aplicar la conservación de la energía al fluido ideal que fluye entre la parte inferior y la parte superior de la tubería. En la parte inferior izquierda de la tubería, el flujo que fluye de densidad constante, ρ , se caracteriza por la presión p_1 , la velocidad v_1 y la elevación y_1 . El mismo fluido fluye a través de la región de transición y hacia la parte superior derecha de la tubería. Aquí el flujo se caracteriza por la presión p_2 , la velocidad v_2 y la elevación y_2 . Mostraremos que la relación entre las presiones y las velocidades en esta situación están dadas por

$$p_1 + \rho g y_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \rho g y_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2. \tag{13.19}$$

Otra forma de enunciar esta relación es

$$p + \rho g y + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{constante}. \tag{13.20}$$

Ésta es la **ecuación de Bernoulli**. Si no hay flujo, $v = 0$ y la ecuación 13.20 es equivalente a la ecuación 13.8.

Una consecuencia importante de la ecuación de Bernoulli se hace evidente si $y = 0$, lo que significa que, a elevación constante,

$$p + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{constante}. \tag{13.21}$$

De la ecuación 13.21 podemos ver que si la velocidad de un fluido en movimiento se incrementa, la presión debe disminuir. Esta disminución en la presión transversal al flujo del fluido tiene muchas aplicaciones, incluyendo la medición de la tasa de flujo de un fluido y la creación de un vacío parcial.

La derivación 13.1 adelante desarrolla la ecuación de Bernoulli matemáticamente. Las únicas dos condiciones que entran en esta derivación son la ley de conservación de la energía y la ecuación de continuidad, que simplemente expresa con otras palabras el hecho básico que el número de átomos en el fluido ideal se conserva.

13.6 Ejercicio en clase

Se hace otra demostración sosteniendo dos hojas de papel paralelas entre sí con una separación de aproximadamente una pulgada y soplando aire entre éstas. ¿Cuál espera que sea el movimiento de las hojas de papel?

- a) Se moverán alejándose una de la otra.
- b) Permanecerán aproximadamente a la misma separación.
- c) Se moverán acercándose una a la otra.

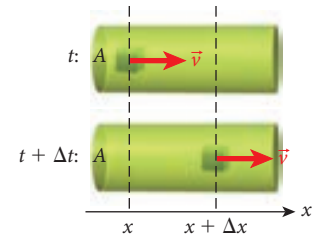


FIGURA 13.32 Fluido ideal que fluye a través de una tubería con un área de sección transversal constante.



FIGURA 13.33 Fluido ideal que fluye a través de una tubería con un área de sección transversal variable.

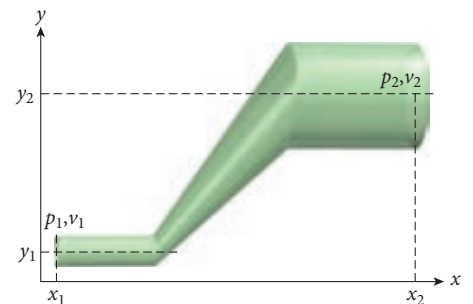


FIGURA 13.34 Fluido ideal que fluye a través de una tubería con un área de sección transversal y elevación variables.

DERIVACIÓN 13.1 Ecuación de Bernoulli

El trabajo neto hecho sobre el sistema, W , es igual al cambio en la energía cinética, ΔK , del fluido que fluye entre las secciones transversales inicial y final de la tubería en la figura 13.34:

$$W = \Delta K. \quad (\text{i})$$

El cambio en la energía cinética está dado por

$$\Delta K = \frac{1}{2} \Delta m v_2^2 - \frac{1}{2} \Delta m v_1^2, \quad (\text{ii})$$

donde Δm es la cantidad de masa que entra por la parte inferior de la tubería y sale por la parte superior de la tubería en un tiempo Δt . El flujo de masa por unidad de tiempo es la densidad del fluido por el cambio en el volumen por unidad de tiempo:

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \rho \frac{\Delta V}{\Delta t}.$$

De esta forma, podemos reescribir la ecuación (ii) como

$$\Delta K = \frac{1}{2} \rho \Delta V (v_2^2 - v_1^2).$$

El trabajo efectuado por la gravedad sobre el fluido que fluye está dado por

$$W_g = -\Delta m g (y_2 - y_1), \quad (\text{iii})$$

donde el signo negativo surge porque la gravedad está efectuando un trabajo negativo sobre el fluido cuando $y_2 > y_1$. También podemos reescribir la ecuación (iii) en términos del flujo volumétrico ΔV y la densidad del fluido:

$$W_g = -\rho \Delta V g (y_2 - y_1).$$

El trabajo efectuado por una fuerza, F , que actúa sobre una distancia, Δx , está dado por $W = F \Delta x$, que en este caso podemos expresar como

$$W = F \Delta x = (pA) \Delta x = p \Delta V,$$

debido a que la fuerza surge de la presión en el fluido. Entonces, podemos expresar el trabajo efectuado sobre el fluido por la presión que fuerza al fluido a fluir hacia adentro de la tubería como $p_1 \Delta V$ y el trabajo efectuado sobre el fluido que sale como $-p_2 \Delta V$, que da el trabajo efectuado como resultado de la presión,

$$W_p = (p_1 - p_2) \Delta V.$$

$p_1 \Delta V$ es positiva pues surge del fluido a la izquierda del flujo que ejerce una fuerza sobre el fluido que entra a la tubería. $p_2 \Delta V$ es negativa pues surge del fluido a la derecha del flujo que ejerce una fuerza sobre el fluido que sale de la tubería. Usando la ecuación (i) y $W = W_p + W_g$, obtenemos

$$(p_1 - p_2) \Delta V - \rho \Delta V g (y_2 - y_1) = \frac{1}{2} \rho \Delta V (v_2^2 - v_1^2),$$

la cual se puede simplificar a

$$p_1 + \rho g y_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \rho g y_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2.$$

Ésta es la ecuación de Bernoulli.

Aplicaciones de la ecuación de Bernoulli

Ahora que hemos derivado la ecuación de Bernoulli, podemos regresar a la demostración de la figura 13.31. Si usted realizó esta demostración, encontró que las dos latas de refresco se movieron más cerca una de la otra. Esto es lo opuesto a lo que espera la mayoría de las personas, que al soplar aire en el espacio forzarán a las latas a apartarse. La ecuación de Bernoulli explica este sorprendente resultado. Dado que $p + \frac{1}{2} \rho v^2 =$ una constante, la gran velocidad con la cual se mueve el aire entre las latas causa que la presión disminuya. Así, la presión del aire entre las latas es menor que la presión del aire en otras partes de las latas, causando que las latas sean empujadas una a la otra. Éste es el *efecto Bernoulli*. Otra manera de mostrar el mismo efecto es sostener dos hojas de papel

paralelas entre sí como a una pulgada de separación y entonces soplar aire ente ellas: las hojas son empujadas una hacia la otra.

Los conductores de camión conocen acerca de este efecto. Cuando dos camiones de 18 ruedas con el típico remolque de caja rectangular conducen en carriles contiguos a gran velocidad, los conductores deben poner atención de no acercarse demasiado entre sí, debido a que el efecto de Bernoulli puede empujar los remolques uno contra el otro.

Los diseñadores de automóviles de carreras también usan el efecto Bernoulli. La mayor limitación de la aceleración de un automóvil de carreras es la fuerza de fricción máxima entre las llantas y la pista. Esta fuerza de fricción, a su vez, es proporcional a la fuerza normal. La fuerza normal puede incrementarse aumentando la masa del automóvil, pero esto frustra el propósito, ya que una mayor masa significa una menor aceleración, de acuerdo con la segunda ley de Newton. Una manera mucho más eficiente de incrementar la fuerza normal es desarrollar una gran diferencia de presión entre la superficie superior e inferior del automóvil. De acuerdo con la ecuación de Bernoulli, esto se puede lograr haciendo que el aire se mueva más rápido a través del fondo del automóvil que a través de la parte de arriba. (Otra manera de lograr esto sería usar un alerón para desviar el aire hacia arriba y crear así una fuerza descendente. Sin embargo, los alerones se han prohibido en las carreras de Fórmula 1.)

Consideremos la pregunta de qué hace que un avión vuele. La figura 13.35 muestra las fuerzas que actúan sobre un avión que vuela a una velocidad constante y a una altitud constante. El impulso, \vec{F}_i , es generado por los motores de reacción que toman aire del frente y lo expelen por detrás. Esta fuerza se dirige hacia el frente del avión. La fuerza de arrastre, \vec{F}_d , debida a la resistencia del aire (discutida en el capítulo 4) se dirige hacia atrás del avión. A una velocidad constante, estas dos fuerzas se cancelan $\vec{F}_i = \vec{F}_d$. Las fuerzas que actúan en la dirección vertical son el peso, \vec{F}_g , y la sustentación (*lift*), \vec{F}_l , la cual está suministrada casi exclusivamente por las alas. Si el avión vuela a una altitud constante, estas dos fuerzas se cancelan $\vec{F}_l = \vec{F}_g$. Ya que un Boeing 747 por completo cargado y con combustible típicamente tiene una masa de 350 toneladas métricas, su peso es de 3.4 MN. De esta forma, la sustentación suministrada por las alas para mantener al avión volando debe ser muy grande. Como comparación, el empuje máximo producido por los cuatro motores del 747 es de 0.9 MN.

La noción más comúnmente aceptada de lo que genera la sustentación que permite al avión permanecer en el aire se muestra en la figura 13.36a): el ala se mueve a través del aire y fuerza a las líneas de flujo del aire a moverse sobre ésta en una trayectoria más larga. De esta forma, el aire sobre el ala necesita moverse a una velocidad mayor a fin de reconectarse con el aire que se mueve bajo el ala. La ecuación de Bernoulli implica entonces que la presión en la cara superior del ala es menor a la de la cara inferior. Dado que el área superficial combinada de ambas alas de un Boeing 747 es de 511 m^2 , se requiere de una diferencia de presión de $\Delta p = F/A = (3.4 \text{ MN})/(511 \text{ m}^2) = 6.6 \text{ kPa}$ (0.66% de la presión atmosférica a nivel del mar) entre la parte de arriba y la de abajo de las alas para que esta idea funcione de manera cuantitativa.

Una interpretación física alternativa se muestra en la figura 13.36b). En este punto de vista, las moléculas del aire son desviadas hacia abajo por la cara inferior del ala y de acuerdo con la tercera ley de Newton, el ala experimenta una fuerza ascendente que proporciona la sustentación. Con objeto de que funcione esta idea, la parte inferior del ala debe tener un ángulo diferente de cero (ángulo de ataque) relativo a la horizontal. [Para alcanzar esta posición, la nariz (proa) del avión apunta un poco hacia arriba, de tal forma que el empuje de los motores también contribuye a la sustentación. De manera alternativa, el ángulo de ataque también puede ser conseguido cambiando el ángulo de los alerones en las alas.]

Ambas ideas contienen elementos de verdad y los efectos contribuyen a la sustentación en distintos grados, dependiendo del tipo de avión y de la fase de vuelo. El efecto newtoniano es más importante durante el despegue y el aterrizaje, y durante todas las fases de los aviones de combate (los cuales tienen un área de las alas menor). Sin embargo, en general, el aire no actúa como un fluido ideal incompresible cuando fluye en torno del ala del avión. Se comprime en el borde delantero del ala y se descomprime en el borde trasero. Este efecto de compresión-descompresión es más fuerte en la superficie superior que en la inferior, creando una presión neta en la parte inferior del ala y suministrando la sustentación. El diseño de las alas de los aviones todavía está bajo intenso estudio y las investigaciones en marcha buscan desarrollar nuevos diseños de alas que puedan brindar mayor eficiencia de combustible y estabilidad.

Podemos aplicar consideraciones semejantes al vuelo de una "bola curva" en el béisbol. Las bolas curvas tienen un giro de costado y si un lanzador zurdo le imprime una fuerte rotación en el sentido de las manecillas del reloj (vista desde arriba), la bola se desviará hacia la derecha en

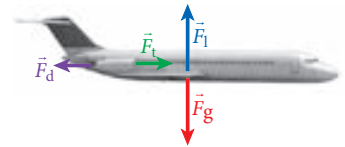


FIGURA 13.35 Fuerzas que actúan sobre un avión en vuelo.

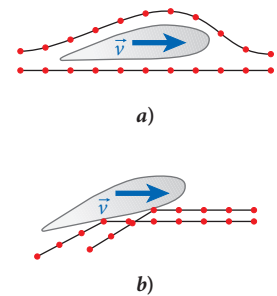


FIGURA 13.36 Dos puntos de vista extremos del proceso que crea la sustentación sobre el ala del avión: a) el efecto Bernoulli; b) la tercera ley de Newton.

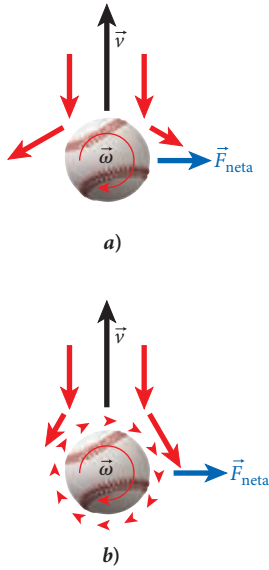


FIGURA 13.37 Vista superior de una pelota de béisbol moviéndose del borde inferior de la página al borde superior de la página: a) interpretación usando la tercera ley de Newton; b) explicación involucrando una capa límite.

relación con la línea recta (vista desde el lanzador). En la figura 13.37, la velocidad relativa entre el aire y un punto sobre la superficie izquierda de la bola es mayor que la velocidad relativa entre el aire y un punto en la superficie derecha. La aplicación de la ecuación de Bernoulli podría hacernos esperar que la presión fuese menor del lado izquierdo de la bola que del derecho, causando así que la bola se mueva a la izquierda.

La interpretación usando la tercera ley de Newton [figura 13.37a)] se acerca más a explicar correctamente por qué una pelota de béisbol girando en la dirección de las manecillas del reloj experimenta un deflexión en el sentido de las manecillas del reloj. La figura muestra una vista desde arriba de una pelota de béisbol girando en la dirección de las manecillas del reloj, moviéndose del borde inferior de la página al superior, con las moléculas de aire que la pelota encuentra representadas por flechas rojas. Conforme las moléculas de aire colisionan con la superficie de la pelota, aquéllas en el lado donde la superficie está rotando hacia ellas [lado izquierdo de la figura 13.37a)] reciben un golpe lateral más fuerte, o impulso, que aquellas moléculas en el otro lado. De acuerdo con la tercera ley de Newton, la fuerza neta de retroceso sobre la pelota de béisbol la desvía en la misma dirección que su rotación. A pesar de que la explicación newtoniana predice la dirección del efecto correctamente, no es una explicación correcta del todo, debido a que las moléculas de aire que se acercan no llegan a la superficie sin ser perturbadas, como se requiere para que este modelo funcione.

De la misma manera que en la sustentación de un avión, el fenómeno de una bola curva tiene una explicación más compleja. Una esfera rotatoria moviéndose a través del aire arrastra una capa límite de aire a lo largo de su superficie. Las moléculas de aire que se encuentran con esta capa límite se ven arrastradas hasta cierto punto. Esto causa que las moléculas de aire en el lado derecho de la pelota en la figura 13.37b) se aceleren y aquellas en el lado izquierdo se desaceleren. La velocidad diferencialmente mayor del aire en el lado derecho implica una presión menor debido al efecto Bernoulli y causa así una desviación a la derecha. Esto es conocido como el *efecto Magnus*.

En el tenis, el *topspin* (giro hacia adelante) causa que la bola se caiga más rápido que una pelota golpeada sin *topspin*; el *backspin* (giro hacia atrás) causa que la pelota vuele más tiempo. Ambos tipos de efecto ocurren por la misma razón que recientemente anotamos para la bola curva en el béisbol. Los golfistas también usan el *backspin* para hacer que sus *drives* (golpes de larga distancia) lleguen más lejos. Una pelota de golf bien golpeada tendrá un *backspin* de más o menos 4 000 rpm. El *sidespin* (giro hacia los lados) en el golf causa *drags* o *hooks* y *fades* o *slices* (diversos efectos con nombres caprichosos), dependiendo de la magnitud y la dirección del giro. De manera incidental, los hoyuelos en la pelota de golf son esenciales para sus características de vuelo; éstas causan turbulencia en torno de la pelota de golf y reducen así la resistencia del aire. Incluso los mejores profesionales no serían capaces de golpear una pelota de golf a más de 200 m sin hoyuelos.

EJEMPLO 13.7 Botella de atomizador

PROBLEMA

Si usted aprieta la manija de una botella de atomizador (aerosol) (figura 13.38), usted hace que el aire fluya de manera horizontal a través de la abertura de un tubo que se extiende hacia abajo dentro del líquido hasta casi llegar al fondo de la botella. Si el aire se está moviendo a 50.0 m/s, ¿cuál es la diferencia de presión entre la parte superior del tubo y la atmósfera? Suponga que la densidad del aire es $\rho = 1.20 \text{ kg/m}^3$.

SOLUCIÓN

Antes de que usted apriete la manija, la velocidad del flujo de aire es $v_0 = 0$. Usando la ecuación de Bernoulli para una diferencia de altura despreciable (ecuación 13.21), encontramos

$$p + \frac{1}{2} \rho v^2 = p_0 + \frac{1}{2} \rho v_0^2.$$

Resolviendo esta ecuación para la diferencia de presión, $p - p_0$, bajo la condición de que $v_0 = 0$, llegamos a

$$p - p_0 = -\frac{1}{2} \rho v^2 = -\frac{(1.20 \text{ kg/m}^3)(50.0 \text{ m/s})^2}{2} = -1500 \text{ Pa}.$$

Por lo tanto, vemos que la presión disminuye en 1.5 kPa, causando que el líquido sea empujado hacia arriba y desintegrado en gotitas en la corriente de aire, para formar niebla.

El mismo principio se usa en los antiguos carburadores, los cuales mezclan el combustible con aire en los coches viejos. (En los coches nuevos, el carburador se ha reemplazado por inyectores de combustible.)



FIGURA 13.38 Botella de atomizador para rociar líquidos en forma de niebla fina.

PROBLEMA RESUELTO 13.2 Tubo de Venturi

PROBLEMA

En algunas aeronaves ligeras se usa un dispositivo llamado *tubo de Venturi* para crear una diferencia de presión que puede usarse para impulsar instrumentos basados en giroscopios para navegar. El tubo de Venturi se monta en el exterior del fuselaje en un área de flujo de aire libre. Suponga que un tubo de Venturi tiene una abertura circular con un diámetro de 10.0 cm, estrechándose hasta una abertura circular con un diámetro de 2.50 cm y luego abriéndose otra vez al diámetro original de 10.0 cm. ¿Cuál es la diferencia de presión entre la abertura de 10 cm y la región más estrecha del tubo de Venturi, suponiendo que la aeronave se encuentra volando a una velocidad constante de 38.0 m/s a una altitud baja, donde la densidad del aire se puede considerar como la del nivel del mar ($\rho = 1.30 \text{ kg/m}^3$) a 5 °C?

SOLUCIÓN

PIENSE

La ecuación de continuidad (ecuación 13.18) nos dice que el producto del área por la velocidad del flujo a través del tubo de Venturi es constante. Podemos relacionar el área de la abertura, el área de la región más estrecha, la velocidad del aire al entrar al tubo de Venturi y la velocidad del aire en la región más estrecha del tubo. Usando la ecuación de Bernoulli podemos relacionar la presión en la abertura con la presión en la región más estrecha.

ESBOCE

Se bosqueja un tubo de Venturi en la figura 13.39.

INVESTIGUE

La ecuación de continuidad es

$$A_1 v_1 = A_2 v_2.$$

La ecuación de Bernoulli nos dice que

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2.$$

SIMPLIFIQUE

La diferencia de presión entre la abertura del tubo de Venturi y el área más estrecha se encuentra reacomodando la ecuación de Bernoulli:

$$p_1 - p_2 = \Delta p = \frac{1}{2} \rho v_2^2 - \frac{1}{2} \rho v_1^2 = \frac{1}{2} \rho (v_2^2 - v_1^2).$$

Resolviendo la ecuación de continuidad para v_2 y sustituyendo ese resultado en la ecuación de Bernoulli reacomodada nos brinda la diferencia de presión, Δp :

$$\Delta p = \frac{1}{2} \rho (v_2^2 - v_1^2) = \frac{1}{2} \rho \left[\left(\frac{A_1}{A_2} v_1 \right)^2 - v_1^2 \right] = \frac{1}{2} \rho v_1^2 \left(\frac{A_1^2}{A_2^2} - 1 \right).$$

Dado que ambas áreas son circulares, tenemos $A_1 = \pi r_1^2$ y $A_2 = \pi r_2^2$, y así $(A_1/A_2)^2 = (\pi r_1^2/\pi r_2^2)^2 = (r_1/r_2)^4$, lo cual conduce a

$$\Delta p = \frac{1}{2} \rho v_1^2 \left[\left(\frac{r_1}{r_2} \right)^4 - 1 \right].$$

CALCULE

Sustituyendo los valores numéricos nos da

$$\Delta p = \frac{1}{2} (1.30 \text{ kg/m}^3) (38.0 \text{ m/s})^2 \left[\left(\frac{10.0/2 \text{ cm}}{2.5/2 \text{ cm}} \right)^4 - 1 \right] = 239 \text{ 343.0 Pa},$$

donde hemos usado $\rho = 1.30 \text{ kg/m}^3$ como la densidad del aire.

REDONDEE

Reportamos nuestro resultado con tres cifras significativas:

$$\Delta p = 239 \text{ kPa}.$$

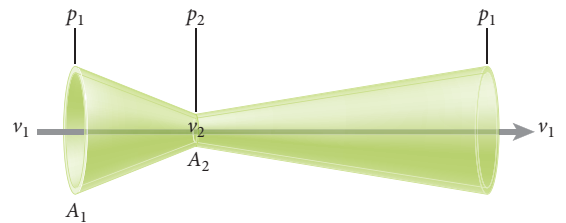


FIGURA 13.39 Un tubo de Venturi con aire fluyendo a través de éste.

(continúa)

(continuación)

VUELVA A REVISAR

La diferencia de presión entre el interior de la aeronave y la parte más estrecha del tubo de Venturi es de 239 kPa, o más del doble de la presión atmosférica normal. Al conectar una manguera entre la parte más estrecha del tubo y el interior de la aeronave permite así una corriente constante de aire a través del tubo, la cual puede usarse para impulsar un giroscopio rotando rápidamente.

Drenado de un tanque

Analicemos otro simple experimento. Un recipiente grande con un agujero pequeño en el fondo se llena con agua y se efectúan mediciones de cuánto tiempo le toma drenarse. La figura 13.40 ilustra este experimento. Podemos analizar este proceso en forma cuantitativa y llegar a una descripción de la altura de la columna como función del tiempo. Dado que la botella se encuentra abierta en la parte superior, la presión atmosférica es la misma en la superficie superior de la columna de fluido como en el agujero pequeño. Por lo que a partir de la ecuación de Bernoulli (ecuación 13.19) obtenemos

$$\rho gy_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = \rho gy_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2.$$

Cancelando la densidad y reordenando los términos, obtenemos

$$v_2^2 - v_1^2 = 2g(y_1 - y_2) = 2gh,$$

donde $h = y_1 - y_2$ es la altura de la columna de fluido. ¡Obtuvimos el mismo resultado en el capítulo 2 para una partícula en caída libre! De esta manera, el drenado de un fluido ideal bajo la influencia de la gravedad procede en la misma forma que la caída libre de una partícula puntual.

La ecuación de continuidad (ecuación 13.18) relaciona las dos velocidades, v_1 y v_2 , una con la otra a través de la razón de las áreas de sección transversal correspondientes: $A_1 v_1 = A_2 v_2$. Así, encontramos la velocidad con la cual el fluido fluye del recipiente como una función de la altura de la columna de fluido sobre el agujero:

$$v_1 = v_2 \frac{A_2}{A_1} \Rightarrow v_2^2 - v_1^2 = v_2^2 \left(1 - \frac{A_2^2}{A_1^2} \right) \Rightarrow$$

$$v_2^2 = \frac{2gh}{1 - \frac{A_2^2}{A_1^2}} = \frac{2A_1^2 g}{A_1^2 - A_2^2} h.$$

Si A_2 es pequeña comparada con A_1 , este resultado se simplifica a

$$v_2 = \sqrt{2gh}. \tag{13.22}$$

La velocidad con la cual se derrama del recipiente se llama en ocasiones **velocidad de derrame** y la ecuación 13.22 se llama a menudo teorema de Torricelli.

¿Cómo cambia la altura de una columna de fluido como una función del tiempo? Para contestar esto, notamos que la velocidad v_1 es la negativa de la derivada con respecto al tiempo de la altura de la columna de fluido, h : $v_1 = -dh/dt$, ya que la altura decrece con el tiempo. De la ecuación de continuidad, encontramos entonces

$$A_1 v_1 = -A_1 \frac{dh}{dt} = A_2 v_2 = A_2 \sqrt{2gh} \Rightarrow$$

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{A_2}{A_1} \sqrt{2gh}. \tag{13.23}$$

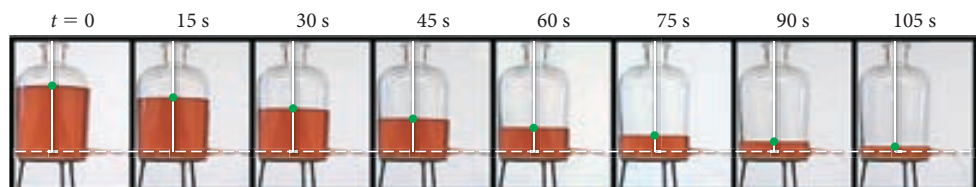


FIGURA 13.40 Drenado de una botella de agua a través de un agujero pequeño en la base.

Debido a que la ecuación 13.23 relaciona la altura con su derivada, es una ecuación diferencial. Su solución es

$$h(t) = h_0 - \frac{A_2}{A_1} \sqrt{2gh_0} t + \frac{g}{2} \frac{A_2^2}{A_1^2} t^2, \quad (13.24)$$

donde h_0 es la altura inicial de la columna de fluido. Usted puede convencerse de que la ecuación 13.24 es realmente la solución, encontrando la derivada y sustituyéndola en la ecuación 13.23. La derivada es

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{A_2}{A_1} \sqrt{2gh_0} + g \frac{A_2^2}{A_1^2} t.$$

El instante en el tiempo en el cual esta derivada llega a cero es el tiempo en el cual el proceso de drenado ha terminado:

$$\frac{dh}{dt} = 0 \Rightarrow t_f = \frac{A_1}{A_2} \sqrt{\frac{2h_0}{g}}. \quad (13.25)$$

Si sustituye esta expresión para t en la ecuación 13.24, usted ve que t_f es también el tiempo en el cual la altura de la columna de fluido llega a cero, como se esperaba. Porque, de acuerdo con la ecuación 13.23, la derivada con respecto al tiempo de la altura es proporcional a la raíz cuadrada de la altura, por lo que la altura debe ser cero cuando la derivada es cero.

La ecuación 13.25 también nos dice que el tiempo que se tarda en drenar un recipiente cilíndrico es proporcional al área de la sección transversal del recipiente e inversamente proporcional al área del agujero a través del cual se está drenando el fluido. Sin embargo, el tiempo es también proporcional a la raíz cuadrada de la altura del fluido. De suerte que, si dos recipientes contienen el mismo volumen de líquido y se drenan a través de agujeros del mismo tamaño, el recipiente más alto y con un área de sección transversal menor se drenará más rápidamente.

Por último, tenga presente que la ecuación 13.15 se ocupa sólo para un fluido ideal en un recipiente con un área de sección transversal constante como función de la altura y cuando el área de sección transversal del agujero es pequeña comparada con la del recipiente.

EJEMPLO 13.8 Drenado de una botella

La figura 13.40 muestra una botella cilíndrica grande con un área de sección transversal $A_1 = 0.100 \text{ m}^2$. El líquido (agua con colorante de alimentos rojo) se drenó a través de un agujero pequeño de 7.40 mm de radio, o de área $A_2 = 1.72 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$. Los cuadros en la figura representan tiempos a intervalos de 15 s. La altura inicial de la columna de fluido sobre el agujero era de $h_0 = 0.300 \text{ m}$.

PROBLEMA

¿Cuánto tiempo se tardó en vaciar la botella?

SOLUCIÓN

Podemos simplemente usar la ecuación 13.25 y sustituir los valores dados:

$$t_f = \frac{A_1}{A_2} \sqrt{\frac{2h_0}{g}} = \frac{0.100 \text{ m}^2}{1.72 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2} \sqrt{\frac{2(0.300 \text{ m})}{9.81 \text{ m/s}^2}} = 144 \text{ s}.$$

En tanto que la solución a este problema es directa, es instructivo graficar la altura como función del tiempo, usando la ecuación 13.24, y comparar la gráfica con los datos experimentales. En la figura 13.40, el nivel del agujero está marcado con una línea horizontal punteada y la altura de la columna de fluido en cada cuadro está marcada con un punto verde. La figura 13.41 muestra la comparación entre la solución calculada (la línea roja) y los datos obtenidos del experimento. Usted mismo puede ver que la concordancia está dentro de la incertidumbre en las mediciones, representada por el tamaño de los puntos verdes.

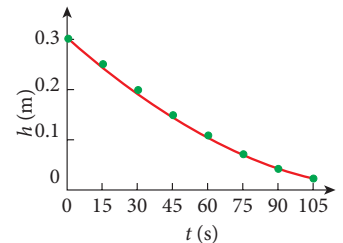


FIGURA 13.41 Altura de una columna de fluido como función del tiempo; los puntos verdes son puntos de datos observados; la línea roja es la solución calculada.

13.7 Ejercicio en clase

Si la botella y el nivel del fluido inicial son iguales que en el ejemplo 13.8, pero el diámetro del agujero se reduce a la mitad, el tiempo que se requiere para drenar el fluido será aproximadamente

- a) 36 s.
- b) 72 s.
- c) 144 s.
- d) 288 s.
- e) 578 s.

13.7 Viscosidad

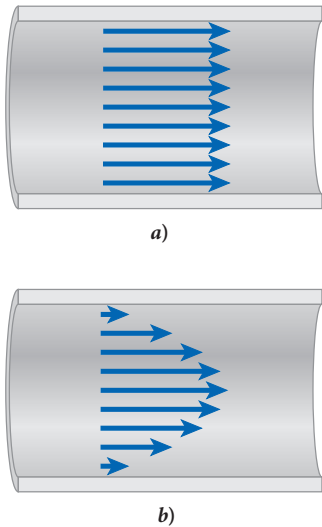


FIGURA 13.42 Perfiles de velocidad en un tubo cilíndrico: a) flujo de fluido ideal no viscoso; b) flujo viscoso.

Si usted se ha encontrado a la deriva en un bote en un río tranquilo, pudo haber notado que su bote se movía de manera más rápida a la mitad del río que cuando estaba cerca de la orilla. ¿Por qué pasaría esto? Si el agua del río fuese un fluido ideal en movimiento laminar, no habría diferencia en qué tan lejos de las orillas se encuentra. Sin embargo, el agua no es del todo un fluido ideal. En lugar de esto, es en cierto grado “pegajosa”, lo que se conoce como **viscosidad**. Para el agua, la viscosidad es bastante baja; para el pesado aceite de motor de servicio es significativamente mayor y es incluso todavía mayor para las sustancias como la miel, las cuales fluyen muy lentamente. La viscosidad causa que las líneas de flujo en la superficie del río se peguen de manera parcial a la frontera y las líneas de flujo adyacente se peguen parcialmente unas a las otras.

El perfil de velocidades para las líneas de corriente en el flujo viscoso de un fluido en un tubo se bosqueja en la figura 13.42b). El perfil es parabólico, con la velocidad tendiendo a cero en las paredes y alcanzando un máximo en el centro. Este flujo es aún laminar, con las líneas de flujo fluyendo todas paralelas entre sí.

¿Cómo se mide la viscosidad de un fluido? El procedimiento normal es usar dos placas paralelas de área A y llenar el espacio de ancho h entre éstas con fluido. Entonces una de las placas se arrastra a través de la otra y se mide la fuerza F que se requiere para hacerlo. El perfil de velocidades resultante del flujo del fluido es lineal (figura 13.43). La viscosidad, η , se define como la razón de la fuerza por unidad de área dividida entre la diferencia de velocidades entre la placa superior e inferior a través de la distancia entre las placas:

$$\eta = \frac{F/A}{\Delta v/h} = \frac{Fh}{A\Delta v} \tag{13.26}$$

La unidad de viscosidad representa presión (fuerza por unidad de área) multiplicada por el tiempo, es decir, pascales segundos (Pa s). Esta unidad también se llama *poiseuille* (Pl). [Debe tenerse cuidado de evitar confundir esta unidad del SI con la unidad del cgs, el poise (P), porque $1\text{ P} = 0.1\text{ Pa s}$.]

Es importante darse cuenta de que la velocidad de cualquier fluido depende fuertemente de la temperatura. Usted puede ver un ejemplo de esta dependencia de la temperatura en la cocina. Si usted guarda el aceite de oliva en el refrigerador y entonces lo vierte directo de la botella, usted puede ver qué lento fluye. Caliente el mismo aceite de oliva en una sartén y éste fluye casi tan fácilmente como el agua. La dependencia de la temperatura es de gran interés para los aceites de motor y el objetivo es lograr una pequeña dependencia de la temperatura. La tabla 13.5 lista algunos de los valores típicos de viscosidad para distintos fluidos. Todos los valores corresponden a la temperatura ambiente ($20\text{ }^\circ\text{C} = 68\text{ }^\circ\text{F}$) excepto la de la sangre, cuyo valor está dado por la temperatura relevante fisiológicamente de la del cuerpo humano ($37\text{ }^\circ\text{C} = 98.6\text{ }^\circ\text{F}$). De manera incidental, la viscosidad de la sangre aumenta 20% durante la vida de un humano y el valor promedio para los hombres es mayor que el de las mujeres ($4.7 \cdot 10^{-3}\text{ Pa s}$ vs. $4.3 \cdot 10^{-3}\text{ Pa s}$).

La viscosidad de un fluido es importante para determinar cuánto fluido puede fluir a través de una tubería de radio dado r y longitud ℓ . Gotthilf Heinrich Ludwig Hagen (en 1839) y Jean Louis Marie Poiseuille (en 1840) encontraron independientemente que R_v , el volumen del fluido que puede fluir por unidad del tiempo, es

$$R_v = \frac{\pi r^4 \Delta p}{8\eta \ell} \tag{13.27}$$

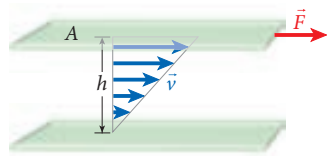


FIGURA 13.43 Medición de la viscosidad de un líquido con dos placas paralelas.

Tabla 13.5 Algunos valores típicos de viscosidad a temperatura ambiente

Material	Viscosidad (Pa s)
Aire	$1.8 \cdot 10^{-5}$
Alcohol (etanol)	$1.1 \cdot 10^{-3}$
Sangre (a temperatura del cuerpo)	$4 \cdot 10^{-3}$
Miel	10
Mercurio	$1.5 \cdot 10^{-3}$
Aceite de motor (SAE10 a SAE40)	0.06 a 0.7
Aceite de oliva	0.08
Agua	$1.0 \cdot 10^{-3}$

Aquí, Δp es la diferencia de presión entre los dos extremos de la tubería. Como se esperaba, el flujo es inversamente proporcional a la viscosidad e inversamente proporcional a la longitud de la tubería. Más significativamente, sin embargo, es proporcional a la cuarta potencia del radio de la tubería. Si consideramos un vaso sanguíneo como una tubería, esta relación nos ayuda a entender el problema asociado con la obstrucción de las arterias. Si los depósitos inducidos por el colesterol reducen el diámetro de un vaso sanguíneo en 50%, entonces el flujo de sangre a través del vaso se reducirá a $1/2^4 = 1/16$ o 6.25% del gasto original: una reducción de 93.75%.

EJEMPLO 13.9 Aguja hipodérmica

Para muchas personas, la parte que da más miedo de una visita al doctor es una inyección. El aprender acerca de la mecánica de los fluidos de una aguja hipodérmica (figura 13.44) no cambiará esto, pero es interesante a pesar de todo.

PROBLEMA 1

Si se deben empujar 2.0 cm^3 de agua fuera de una jeringa de 1.0 cm de diámetro a través de una aguja de calibre 15 y 3.5 cm de longitud (diámetro interior de la aguja = 1.37 mm) en 0.4 s , ¿qué fuerza debe aplicarse al émbolo de la jeringa?

SOLUCIÓN 1

La ley de Hagen-Poiseuille (ecuación 13.27) relaciona el flujo de un fluido con la diferencia de presión que causa el flujo. Podemos resolver esa ecuación para la diferencia de presión, Δp , entre la punta de la aguja y el extremo que está conectado con la jeringa:

$$\Delta p = \frac{8\eta\ell R_v}{\pi r^4}.$$

La viscosidad del agua puede obtenerse de la tabla 13.5: $\eta = 1.0 \cdot 10^{-3} \text{ Pa s}$. La tasa de flujo, R_v , es la razón del volumen al tiempo:

$$R_v = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{2.0 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3}{0.4 \text{ s}} = 5.0 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3/\text{s}.$$

Las dimensiones geométricas de la jeringa se especifican en el planteamiento del problema, así es que obtenemos

$$\Delta p = \frac{8(1.0 \cdot 10^{-3} \text{ Pa s})(0.035 \text{ m})(5.0 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3/\text{s})}{\pi [0.5(1.37 \cdot 10^{-3} \text{ m})]^4} = 2020 \text{ Pa}.$$

Debido a que la presión es fuerza por unidad de área, podemos obtener la fuerza requerida multiplicando la diferencia de presión que recientemente calculamos por el área apropiada. ¿Cuál es esta área? La fuerza requerida es proporcionada al empujar al émbolo, así es que usamos el área del émbolo:

$$A = \pi R^2 = \pi [0.5(0.01 \text{ m})]^2 = 7.8 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2.$$

De esta manera, la fuerza requerida para empujar 2.0 cm^3 de agua en 0.4 s es sólo

$$F = A\Delta p = (7.8 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2)(2020 \text{ Pa}) = 0.16 \text{ N}.$$

PROBLEMA 2

¿Cuál es la velocidad con la cual sale el agua por la aguja de la jeringa?

SOLUCIÓN 2

Vimos en la sección 13.6 que la velocidad del flujo de un fluido está relacionada con el gasto volumétrico mediante $R_v = A v$, donde A es el área de la sección transversal; en este caso, el área de la punta de la aguja cuyo diámetro es de 1.37 mm . Resolviendo esta ecuación para la velocidad, encontramos

$$v = \frac{R_v}{A} = \frac{5.0 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3/\text{s}}{\pi [0.5(1.37 \cdot 10^{-3} \text{ m})]^2} = 3.4 \text{ m/s}.$$

(continúa)



FIGURA 13.44 Una aguja hipodérmica ilustra el flujo de un fluido con viscosidad.

(continuación)

EXPLICACIÓN

Si usted alguna vez empujó el émbolo de un jeringa, sabe que hace falta más de 0.16 N. (Una fuerza de 0.16 N es equivalente al peso de un bolígrafo barato.) ¿Por qué se requiere en realidad una fuerza mayor? Recuerde que el émbolo debe proporcionar un sello ajustado con la pared de la jeringa. De esta manera, el principal esfuerzo al empujar el émbolo resulta de vencer la fuerza de fricción entre la pared de la jeringa y el émbolo. Sería una historia por completo distinta si la jeringa estuviera llena con miel. Note que la aguja de calibre 15 usada en este ejemplo es mayor que la aguja normalmente usada para poner una inyección, que es una aguja de calibre 24 o 25.

13.8 Turbulencia y fronteras de la investigación en el flujo de fluidos



FIGURA 13.45 Flujo extremadamente turbulento; un tornado es un vórtice.

En el flujo laminar, las líneas de flujo de un fluido siguen trayectorias suaves. En contraste, para un fluido en flujo turbulento, se forman vórtices, se separan y se propagan (figura 13.45). Ya hemos visto que el flujo laminar ideal o el flujo laminar viscoso sufre una transición a flujo turbulento cuando la velocidad del flujo excede un cierto valor. Esta transición está claramente ilustrada en la figura 13.29b), la cual muestra cómo el humo de un cigarrillo ascendente experimenta una transición de flujo laminar a turbulento. ¿Cuál es el criterio que determina si un flujo es laminar o turbulento?

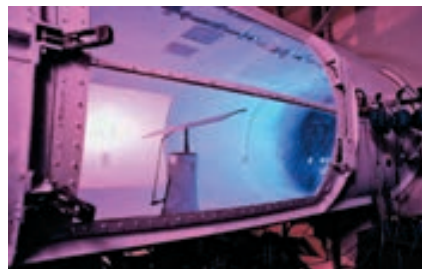
La respuesta yace en el **número de Reynolds**, Re , el cual es la razón de la fuerza inercial típica a la fuerza viscosa y por lo tanto es un número adimensional puro. La fuerza inercial debe ser proporcional a la densidad, ρ , y la velocidad típica del fluido, \bar{v} , debido a que $F = dp/dt$, de acuerdo con la segunda ley de Newton. La fuerza viscosa es proporcional a la viscosidad, η , e inversamente proporcional a la escala de longitud característica, L , a lo largo de la cual el flujo varía. Para el flujo a través de una tubería con sección transversal circular, esta escala de longitud es el diámetro de la tubería, $L = 2r$. De esta manera, la fórmula para calcular el número de Reynolds es

$$Re = \frac{\rho \bar{v} L}{\eta}. \quad (13.28)$$

Como regla general, un número de Reynolds menor a 2 000 significa flujo laminar y uno superior a 4 000 significa flujo turbulento. Para los números de Reynolds entre 2 000 y 4 000, el carácter del flujo depende de muchos detalles finos de la configuración exacta. Los ingenieros se esfuerzan en evitar este intervalo debido a que el comportamiento del fluido es impredecible.

El verdadero poder del número de Reynolds yace en el hecho de que el flujo de fluidos en sistemas con la misma geometría y el mismo número de Reynolds se comporta de forma semejante. Esto le permite a los ingenieros reducir las escalas de longitud típicas o las escalas de velocidad típicas, construir modelos a escala de barcos y aviones y probar su desempeño en tanques de agua o túneles de viento a escala relativamente modesta (figura 13.46).

FIGURA 13.46 a) Pruebas de túnel de viento de un modelo a escala de un ala. b) Modelo a escala de un avión de reacción de combate con partes intercambiables para pruebas en el túnel de viento.



a)



b)

En lugar de modelos a escala, la investigación moderna del flujo de fluidos y la turbulencia confía en los modelos por computadora (figura 13.1). Se emplea el modelado hidrodinámico para estudiar aplicaciones de una increíble variedad de sistemas físicos, tales como el rendimiento y aerodinámica de coches, aviones, cohetes y barcos. Sin embargo, el modelado aerodinámico también se utiliza al estudiar colisiones entre núcleos atómicos con las energías más altas que se puedan alcanzar en los aceleradores modernos y en el modelado de las explosiones de supernovas (figura 13.47). En 2005, un grupo experimental que trabajaba en el Colisionador de Iones Pesados Relativistas en Brookhaven, Nueva York, descubrió que los núcleos de oro muestran las características de un fluido no viscoso perfecto cuando se estrellan uno contra otro a las energías más altas que se puedan alcanzar. (Uno de los autores —Westfall— tuvo el privilegio de anunciar este descubrimiento en la reunión anual de la American Physical Society en 2006.) Los apasionantes resultados de la investigación en el movimiento de los fluidos continuarán emergiendo a lo largo de las próximas décadas, ya que ésta es una de las áreas interdisciplinarias más interesantes en las ciencias físicas.

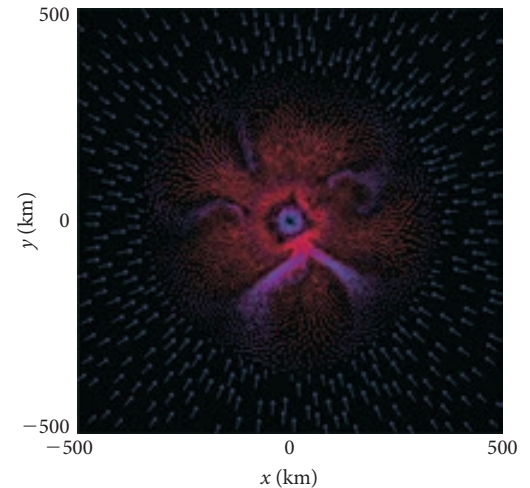


FIGURA 13.47 Modelado hidrodinámico del colapso del núcleo de una supernova. Las flechas indican las direcciones de los elementos del fluido y el color indica la temperatura.

LO QUE HEMOS APRENDIDO | GUÍA DE ESTUDIO PARA EXAMEN

- Un mol de un material tiene $N_A = 6.022 \cdot 10^{23}$ átomos o moléculas. La masa de un mol de material en gramos está dada por la suma de los números de masa atómica de los átomos que componen al material.
- Para un sólido, esfuerzo = módulo · deformación, donde el esfuerzo es la fuerza por unidad de área y la deformación es unitaria. Hay tres tipos de esfuerzos, cada uno con su propio módulo:
 - La tensión o compresión lineal conduce a un cambio positivo o negativo en la longitud: $\frac{F}{A} = Y \frac{\Delta L}{L}$, donde Y es el módulo de Young.
 - La compresión volumétrica conduce a un cambio en el volumen: $p = B \frac{\Delta V}{V}$, donde B es el módulo volumétrico.
 - El corte conduce a la combadura: $\frac{F}{A} = G \frac{\Delta x}{L}$, donde G es el módulo de corte.
- La presión se define como una fuerza por unidad de área: $p = \frac{F}{A}$.
- La presión absoluta, p , a cierta profundidad, h , en un líquido con densidad, ρ , y una presión, p_0 , en la superficie de un líquido es $p = p_0 + \rho gh$.
- La presión manométrica es la diferencia de presión entre el gas en un recipiente y la presión en la atmósfera terrestre.
- El principio de Pascal afirma que cuando ocurre un cambio de presión en cualquier punto en un fluido incompresible confinado, ocurre un cambio igual en la presión en todos los puntos en el fluido.
- La fuerza de flotación sobre un objeto inmerso en un fluido es igual al peso del fluido desplazado: $F_B = m_f g$.
- Se considera que un fluido ideal exhibe un laminar, incompresible, no viscoso y flujo no rotacional.
- El flujo de un gas ideal sigue a las líneas de flujo.
- La ecuación de continuidad para un fluido ideal que fluye relaciona la velocidad y el área de un fluido que fluye a través de un recipiente o tubería: $A_1 v_1 = A_2 v_2$.
- La ecuación de Bernoulli relaciona a la presión, la altura y la velocidad de un fluido ideal que fluye a través de un recipiente o tubería: $p + \rho gy + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{constante}$.
- Para fluidos viscosos, la viscosidad, η , es la razón de la fuerza por unidad de área a la diferencia de velocidades por unidad de longitud: $\eta = \frac{F/A}{\Delta v/h} = \frac{Fh}{A \Delta v}$.
- Para fluidos viscosos, la tasa de flujo volumétrico a través de una tubería cilíndrica de radio r y longitud ℓ está dada por: $R_v = \frac{\pi r^4 \Delta p}{8 \eta \ell}$, donde Δp es la diferencia de presión entre los dos extremos de la tubería.
- El número de Reynolds determina la razón de la fuerza inercial a la fuerza viscosa y está definido como $Re = \frac{\rho \bar{v} L}{\eta}$, donde \bar{v} es la velocidad del fluido promedio y L es la longitud característica a través de la cual cambia el fluido. Un número de Reynolds menor a 2 000 significa un flujo laminar y uno mayor a 4 000 significa un flujo turbulento.

TÉRMINOS CLAVE

átomos, p. 418	estiramiento/tensión, p. 421	presión absoluta, p. 426	flujo incompresible, p. 434
número de Avogadro, p. 419	compresión, p. 421	presión manométrica, p. 426	flujo no rotacional, p. 434
gas, p. 420	corte o cizallamiento, p. 421	barómetro, p. 426	fluido no viscoso, p. 434
fluido, p. 420	módulo de elasticidad, p. 421	manómetro, p. 427	ecuación de continuidad, p. 435
líquido, p. 420	módulo de Young, p. 422	fórmula de la presión barométrica, p. 427	Ecuación de Bernoulli, p. 435
sólido, p. 420	módulo volumétrico, p. 422	principio de Pascal, p. 428	velocidad de derrame, p. 440
límite elástico, p. 421	módulo de corte, p. 422	fuerza de flotación, p. 430	viscosidad, p. 442
esfuerzo, p. 421	presión, p. 425	flujo laminar, p. 434	número de Reynolds, p. 444
deformación unitaria, p. 421	pascal, p. 425	flujo turbulento, p. 434	

NUEVOS SÍMBOLOS Y ECUACIONES

$N_A = 6.022 \cdot 10^{23}$ átomos, el número de Avogadro

Esfuerzo = módulo · deformación, relación esfuerzo-deformación

$p = p_0 + \rho gh$, presión absoluta

$F_B = m_f g$, fuerza de flotación

$A_1 v_1 = A_2 v_2$, ecuación de continuidad

$p + \rho gy + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{constante}$, la ecuación de Bernoulli

$\eta = \frac{F/A}{\Delta v/h} = \frac{Fh}{A\Delta v}$, viscosidad

$R_v = \frac{\pi r^4 \Delta p}{8\eta \ell}$, tasa de flujo volumétrico

$Re = \frac{\rho \bar{v} L}{\eta}$, número de Reynolds

RESPUESTAS A LAS OPORTUNIDADES DE AUTOEXAMEN

13.1 El volumen del agua en una botella es de 500 cm^3 . La densidad del agua es de 1 g/cm^3 . De esta manera, la botella contiene 500 g de agua. La masa de 1 mol de agua es de 18.02 g , así $n = (500 \text{ g}) / (18.02 \text{ g/mol}) = 27.7 \text{ moles}$. De esta manera, $N = n \cdot N_A = 27.7(6.02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}) = 1.67 \cdot 10^{25}$ moléculas.

$$13.2 \rho_H = \frac{2 \text{ g}}{22.4 \text{ L}} = 0.089 \text{ g/L} = 0.089 \text{ kg/m}^3$$

$$\rho_{He} = \frac{4 \text{ g}}{22.4 \text{ L}} = 0.18 \text{ g/L} = 0.18 \text{ kg/m}^3$$

$$13.3 W = F_B - W_{\text{globo}} = \rho_{20} V g - \rho_{He} V g \\ = V g (\rho_{20} - \rho_{100}) = (2200 \text{ m}^3) (9.81 \text{ m/s}^2) (1.205 \text{ kg/m}^3 - 0.164 \text{ kg/m}^3) \\ = 22500 \text{ N, o } 5050 \text{ lb}_f.$$

PRÁCTICA PARA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Lineamientos para resolución de problemas: sólidos y fluidos

- Los tres tipos de esfuerzos tienen la misma relación con la deformación: La razón del esfuerzo a la deformación unitaria es igual a una constante para el material, que puede ser el módulo de Young, el módulo volumétrico o el módulo de corte. Asegúrese de entender qué tipo de esfuerzo está actuando en una situación en particular.
- Recuerde que la fuerza de flotación es ejercida por un fluido sobre un objeto que flota o está sumergido en éste. La fuerza neta depende de la densidad del objeto lo mismo que la den-

sidad del fluido; usted necesitará a menudo calcular la masa y el volumen por separado y tomar su cociente para obtener el valor de la densidad.

- La ecuación de Bernoulli se deriva de la conservación de la energía y los lineamientos para resolución de problemas para los de energía se aplican a los problemas de flujo también. En particular, asegúrese de identificar claramente dónde están ubicados el punto 1 y el punto 2 para aplicar la ecuación de Bernoulli y de listar los valores conocidos para la presión, altura y velocidad del fluido en cada punto.

PROBLEMA RESUELTO 13.3 Encontrar la densidad de un líquido desconocido

PROBLEMA

Una esfera de aluminio sólido (densidad = 2700 kg/m^3) está suspendida en el aire de una báscula [figura 13.48a)]. En la báscula indica 13.06 N . Entonces la esfera se sumerge en un líquido de densidad desconocida [figura 13.48b)]. La báscula ahora indica 8.706 N . ¿Cuál es la densidad del líquido?

SOLUCIÓN**PIENSE**

A partir de la tercera ley de Newton, la fuerza de flotación ejercida por el líquido desconocido sobre la esfera de aluminio es la diferencia entre la lectura de la báscula cuando la esfera está suspendida en el aire y la lectura de la balanza cuando la esfera está sumergida en el líquido.

ESBOCE

Los diagramas de cuerpo libre de la esfera para cada situación se muestran en la figura 13.49.

INVESTIGUE

La fuerza de flotación, F_B , ejercida por el líquido desconocido es

$$F_B = m_1 g, \quad (\text{i})$$

donde la masa del líquido desplazado, m_1 , puede expresarse en términos del volumen de la esfera, V , y la densidad del líquido, ρ_1 :

$$m_1 = \rho_1 V. \quad (\text{ii})$$

Podemos obtener la fuerza de flotación ejercida por el líquido desconocido sustrayendo el peso medido de la esfera cuando está sumergida en el líquido desconocido, F_{sum} , del peso medido cuando está suspendida en el aire, F_{aire} :

$$F_B = F_{\text{aire}} - F_{\text{sum}}. \quad (\text{iii})$$

La masa de la esfera puede obtenerse a partir de su peso en el aire:

$$F_{\text{aire}} = m_s g. \quad (\text{iv})$$

Usando la densidad conocida del aluminio, ρ_{Al} , podemos expresar el volumen de la esfera de aluminio como

$$V = \frac{m_s}{\rho_{\text{Al}}}. \quad (\text{v})$$

SIMPLIFIQUE

Podemos combinar las ecuaciones (i), (ii) y (iii) para obtener

$$F_B = m_1 g = \rho_1 V g = F_{\text{aire}} - F_{\text{sum}}. \quad (\text{vi})$$

Podemos usar las ecuaciones (iv) y (v) a fin de obtener una expresión para el volumen de la esfera en términos de las cantidades conocidas:

$$V = \frac{m_s}{\rho_{\text{Al}}} = \frac{\left(\frac{F_{\text{aire}}}{g}\right)}{\rho_{\text{Al}}} = \frac{F_{\text{aire}}}{\rho_{\text{Al}} g}.$$

Sustituyendo esta expresión para V en la ecuación (vi) nos da

$$\rho_1 V g = \rho_1 \left(\frac{F_{\text{aire}}}{\rho_{\text{Al}} g}\right) g = F_{\text{aire}} \frac{\rho_1}{\rho_{\text{Al}}} = F_{\text{aire}} - F_{\text{sum}}.$$

Ahora, resolvemos para la densidad del líquido desconocido:

$$\rho_1 = \rho_{\text{Al}} \frac{(F_{\text{aire}} - F_{\text{sum}})}{F_{\text{aire}}}.$$

CALCULE

Sustituyendo los valores numéricos obtenemos la densidad del líquido desconocido:

$$\rho_1 = \rho_{\text{Al}} \frac{(F_{\text{aire}} - F_{\text{sum}})}{F_{\text{aire}}} = (2700 \text{ kg/m}^3) \frac{13.06 \text{ N} - 8.706 \text{ N}}{13.06 \text{ N}} = 900.138 \text{ kg/m}^3.$$

REDONDEE

Reportamos nuestro resultado con cuatro cifras significativas:

$$\rho_1 = 900.1 \text{ kg/m}^3.$$



FIGURA 13.48 a) Una esfera de aluminio suspendida en el aire. b) La esfera de aluminio está sumergida en un líquido desconocido.

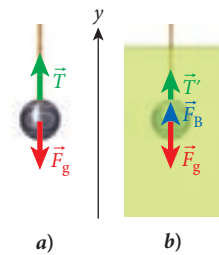


FIGURA 13.49 Diagramas de cuerpo libre para la esfera a) suspendida en el aire y b) sumergida en el líquido desconocido.

(continúa)

(continuación)

VUELVA A REVISAR

La densidad calculada del líquido desconocido es 90% de la densidad del agua. Muchos líquidos tienen densidades semejantes, así es que nuestra respuesta parece razonable.

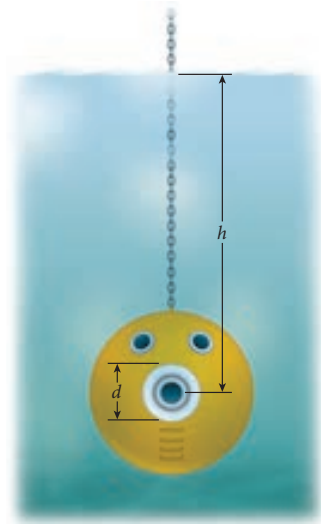


FIGURA 13.50 Campana de buceo sumergida en el lago Michigan.

PROBLEMA RESUELTO 13.4 Campana de buceo**PROBLEMA**

Una campana de buceo con una presión del aire interior igual a la presión atmosférica se sumerge en el lago Michigan a una profundidad de 185 m. La campana de buceo tiene una ventana de observación plana, transparente y circular con un diámetro de 20.0 cm. ¿Cuál es la magnitud de la fuerza sobre la ventana de observación debido a la diferencia de presiones?

SOLUCIÓN**PIENSE**

La presión sobre la ventana de observación depende de la profundidad de la campana de buceo. La presión sobre la ventana es la fuerza total dividida entre el área de la ventana.

ESBOCE

Un bosquejo de la campana de buceo sumergida en el lago Michigan se presenta en la figura 13.50.

INVESTIGUE

La presión, p , a la profundidad, h , está dada por

$$p = p_0 + \rho gh,$$

donde ρ es la densidad del agua y p_0 es la presión atmosférica en la superficie del lago Michigan. La presión dentro de la campana de buceo es la presión atmosférica. Por lo tanto, la diferencia de presión entre el exterior y el interior de la ventana de observación es

$$p = \rho gh. \quad (\text{i})$$

Podemos obtener la fuerza neta, F , sobre la ventana de observación usando la definición de la presión:

$$p = \frac{F}{A}, \quad (\text{ii})$$

donde A es el área de la ventana de observación.

SIMPLIFIQUE

Podemos combinar la ecuación (i) y (ii) para obtener

$$p = \rho gh = \frac{F}{A},$$

la cual podemos usar para despejar la fuerza neta sobre la ventana de observación:

$$F = \rho ghA.$$

CALCULE

Poniendo los valores numéricos nos da la fuerza neta sobre la ventana de observación:

$$F = \rho ghA = (1000 \text{ kg/m}^3)(9.81 \text{ m/s}^2)(185 \text{ m}) \left[\pi \left(\frac{0.200}{2} \right)^2 \text{ m}^2 \right] = 57\,015.2 \text{ N}.$$

REDONDEE

Reportamos nuestro resultado con tres cifras significativas:

$$F = 5.70 \cdot 10^4 \text{ N}.$$

VUELVA A REVISAR

La fuerza de $5.70 \cdot 10^4 \text{ N}$ corresponde a 12 800 lb. Esta ventana de observación tendría que estar construida de un vidrio o cuarzo muy gruesos. Además, el tamaño de esta ventana de observación es limitado; razón por la cual el problema especificaba un diámetro relativamente pequeño de 20 cm (aproximadamente 8 in).

PREGUNTAS DE OPCIÓN MÚLTIPLE

13.1 El agua salada tiene una densidad mayor que el agua dulce. Un bote flota tanto en el agua dulce como en el agua salada. La fuerza de flotación sobre el bote en el agua salada es _____ que en el agua dulce.

- a) igual b) menor c) mayor

13.2 Usted llena un vaso alto con hielo y entonces agrega agua hasta el nivel del borde del vaso, de tal suerte que alguna parte del hielo flota sobre el borde. Cuando se derrite el hielo, ¿qué pasa con el nivel del agua? (Desprecie la evaporación y suponga que el hielo y el agua permanecen a 0°C mientras el hielo se derrite.)

- a) El agua se derrama por los bordes.
 b) El nivel del agua cae por debajo del borde.
 c) El nivel del agua permanece a nivel del borde.
 d) Depende de la diferencia de la densidad entre el agua y el hielo.

13.3 La figura muestra cuatro tanques abiertos idénticos, llenos hasta el borde con agua y puestos en una báscula. Unas bolas flotan en los tanques (2) y (3), pero un objeto se hunde hasta el fondo del tanque (4). ¿Cuál de los siguientes ordenan correctamente los pesos mostrados en las básculas?

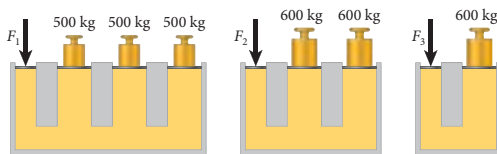


- a) $(1) < (2) < (3) < (4)$ c) $(1) < (2) = (3) = (4)$
 b) $(1) < (2) = (3) < (4)$ d) $(1) = (2) = (3) < (4)$

13.4 Se encuentra en un bote lleno con grandes piedras a la mitad de un estanque pequeño. Usted comienza a tirar las piedras al agua. ¿Qué le pasa al nivel del agua del estanque?

- a) Sube. d) Sube momentáneamente y luego baja cuando las piedras llegan al fondo.
 b) Baja.
 c) No cambia. e) No hay suficiente información para decidir.

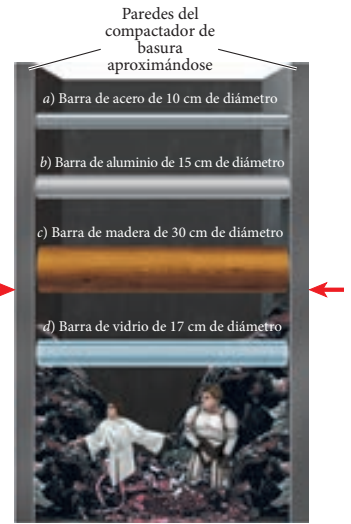
13.5 Ordene jerárquicamente, de mayor a menor, las magnitudes de las fuerzas F_1 , F_2 y F_3 requeridas para equilibrar las masas mostradas en la figura.



13.6 En una tubería horizontal de agua que se estrecha a un radio menor, la velocidad del agua en la sección con el radio menor será mayor. ¿Qué pasa con la presión?

- a) La presión será la misma tanto en la sección más ancha como en la más estrecha de la tubería.
 b) La presión será mayor en la sección más estrecha de la tubería.
 c) La presión será mayor en la sección más ancha de la tubería.
 d) Es imposible decir.

13.7 En una de las películas de *Star Wars*™ cuatro de los héroes quedan atrapados en un compactador de basura de la Estrella de la Muerte. Las paredes del compactador comienzan a acercarse y los héroes necesitan escoger un objeto de entre la basura para colocarlo entre las paredes que se acercan para detenerlas. Todos los objetos tienen la misma longitud y la misma sección transversal circular, pero sus diámetros y composiciones son diferentes.



Suponga que cada objeto está orientado horizontalmente y no se dobla. Tienen el tiempo y la fuerza para sostener sólo uno de estos objetos entre las paredes. ¿Cuál de los objetos mostrados en la figura servirá mejor, esto es, resistirá la mayor fuerza por unidad de compresión?

13.8 Muchos altímetros determinan los cambios de altura midiendo los cambios en la presión atmosférica. Un altímetro que está diseñado para ser capaz de detectar cambios de altitud de 100 m cerca del nivel del mar debería ser capaz de detectar cambios de

- a) aproximadamente 1 Pa. d) aproximadamente 1 kPa.
 b) aproximadamente 10 Pa. e) aproximadamente 10 kPa.
 c) aproximadamente 100 Pa.

13.9 ¿Cuál de las siguientes afirmaciones *no* se hizo de la derivación de la ecuación de Bernoulli?

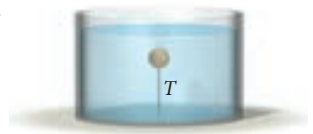
- a) Las líneas de corriente no se cruzan. c) Hay fricción despreciable.
 b) Hay viscosidad despreciable. d) No hay turbulencia.
 e) Hay gravedad despreciable.

13.10 Un vaso de precipitado se llena con agua hasta el borde. Cuando se coloca suavemente un patito de plástico de juguete ocasiona que algo de agua se derrame. El peso del vaso de precipitado con el patito flotando en él es

- a) mayor que el peso antes de poner al patito.
 b) menor que el peso antes de poner al patito.
 c) igual que el peso antes de poner al patito.
 d) mayor o menor que el peso antes de poner al patito, dependiendo del peso del patito.

13.11 Un pedazo de corcho (densidad = 0.33 g/cm^3) con una masa de 10 g se mantiene en su sitio bajo el agua mediante una cuerda, como se muestra en la figura. ¿Cuál es la tensión, T , en la cuerda?

- a) 0.10 N c) 0.30 N e) 200 N
 b) 0.20 N d) 100 N f) 300 N



PREGUNTAS

13.12 Usted sabe por experiencia que si el auto en el que está viajando se detiene súbitamente, los objetos pesados en la parte trasera se mueven hacia la parte delantera. ¿Por qué un globo lleno de helio en una situación semejante se mueve, en lugar de esto, hacia la parte trasera del auto?

13.13 Un pedazo de papel se dobla a la mitad y después se coloca sobre una mesa plana, de tal manera que se “levante” en la mitad como se muestra en la figura. Si usted sopla aire entre el papel y la mesa, ¿se moverá el papel hacia arriba o hacia abajo? Explique.



13.14 ¿En qué dirección actúa la fuerza debida al agua que fluye de la regadera sobre la cortina del baño, hacia adentro en la dirección de la ducha o hacia fuera? Explique.

13.15 Indique y discuta cualesquiera fallas en la siguiente afirmación: *El ascensor de coches hidráulico es un dispositivo que funciona sobre la base del principio de Pascal. Semejante dispositivo puede producir grandes fuerzas de salida con pequeñas fuerzas de entrada. De esta manera, con una pequeña cantidad de trabajo realizado por la fuerza de entrada, se produce una cantidad mucho mayor por la fuerza de salida, y se puede levantar el enorme peso de un coche.*

13.16 Dados dos resortes de tamaño y forma idénticos, uno hecho de acero y otro de aluminio, ¿cuál tiene la mayor constante de resorte? ¿Depende la diferencia más en el módulo de corte o en el módulo volumétrico del material?

13.17 Un material tiene una mayor densidad que otro. ¿Son los átomos o moléculas individuales del primer material necesariamente más pesados que aquellos del segundo?

13.18 Las balanzas analíticas se calibran para dar valores correctos de la masa de artículos como objetos de acero con una densidad de $\rho_s = 8\,000.00\text{ kg/m}^3$. La calibración compensa la fuerza de flotación que surge debido a que las mediciones se realizan en el aire, con una densidad de $\rho_a = 1.205\text{ kg/m}^3$. ¿Qué compensación debe hacerse para medir masas de objetos de un material distinto, de densidad ρ ? ¿Tiene alguna importancia la fuerza de flotación del aire?

13.19 Si usted abre el grifo en el lavabo del baño, observará que la corriente parece estrecharse a partir del punto en el cual deja la abertura del grifo hasta el punto en el cual golpea contra el fondo del lavabo. ¿Por qué ocurre esto?

13.20 En muchos problemas que involucran a la segunda ley de Newton al movimiento de los objetos sólidos, se desprecia la fricción a fin de hacer la solución más fácil. La contraparte de la fricción entre sólidos es la viscosidad de los líquidos. ¿Se tornan los problemas que involucran el flujo de los fluidos más simples si se desprecia la viscosidad? Explique.

13.21 Usted tiene dos esferas de plata idénticas y dos fluidos desconocidos, A y B. Coloca una esfera en el fluido A y se hunde; coloca la otra esfera en el fluido B y flota. ¿Qué puede concluir acerca de la fuerza de flotación del fluido A contra la del fluido B?

13.22 El agua fluye de la abertura circular de un grifo de radio r_0 , dirigido verticalmente hacia abajo, a velocidad v_0 . Conforme la corriente de agua cae, se estrecha. Encuentre una expresión del radio de la corriente como función de la distancia que ha caído, $r(y)$, donde y se mide hacia abajo a partir de la abertura. Desprecie la fragmentación eventual de la corriente en gotitas y cualquier resistencia debida al arrastre o la viscosidad.

PROBLEMAS

Una • y dos •• indican un nivel creciente de dificultad del problema.

Secciones 13.1 y 13.2

13.23 El aire está formado por moléculas de diversos tipos, con una masa molar media de 28.95 g. Un adulto que inhala 0.50 L de aire a nivel del mar, ¿como cuántas moléculas inspira?

•**13.24** La sal de mesa ordinaria (NaCl) consiste de iones de sodio y cloro dispuestos en una *red cristalina cúbica centrada en las caras*. Esto es, los cristales de cloruro de sodio consisten de celdas unitarias cúbicas con un ion de sodio en cada esquina y en el centro de cada cara y un ion de cloro en el centro del cubo y en el punto medio de cada arista. La densidad del cloruro de sodio es de $2.165 \cdot 10^3\text{ kg/m}^3$. Calcule el espacio entre los iones de sodio y de cloro adyacentes en el cristal.

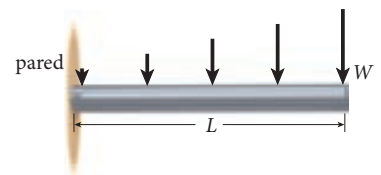
Sección 13.3

13.25 Un candelabro de 20 kg se encuentra suspendido del techo por cuatro alambres de acero verticales. Cada alambre tiene una longitud sin carga de 1 m y un diámetro de 2 mm y cada uno soporta la misma carga. Cuando se cuelga el candelabro, ¿cuánto se estiran los cables?

13.26 Encuentre el diámetro mínimo de una cuerda de nailon de 50.0 m de largo que no se estirará más de 1.00 cm cuando se suspenda una carga de 70.0 kg de su extremo inferior. Suponga que $Y_{\text{nailon}} = 3.51 \cdot 10^8\text{ N/m}^2$.

13.27 Un alambre de acero de 2.0 m de largo en un instrumento musical tiene un radio de 0.03 mm. Cuando el cable está bajo una tensión de 90 N, ¿cuánto cambia su longitud?

•**13.28** Una barra de longitud L se fija a una pared. La carga sobre la barra se incrementa linealmente (como se muestra por las flechas en la figura) desde cero en el extremo izquierdo a W newton por unidad de longitud en el extremo derecho. Encuentre la fuerza de corte (cortante) en



a) el extremo derecho, b) el centro y c) el extremo izquierdo.

•**13.29** El abismo de Challenger en la Fosa de las Marianas del Océano Pacífico es el punto más profundo conocido en los

océanos de la Tierra, con 10.922 km bajo el nivel del mar. Tomando la densidad del agua de mar a presión atmosférica ($p_0 = 101.3$ kPa) como $1\,024$ kg/m³ y su módulo volumétrico como $B(p) = B_0 + 6.67(p - p_0)$, con $B_0 = 2.19 \cdot 10^9$ Pa, calcule la presión y la densidad del agua de mar en el fondo del abismo de Challenger. Ignore las variaciones en la temperatura y la salinidad del agua con la profundidad. ¿Es una buena aproximación tratar a la densidad del agua como esencialmente constante?

Sección 13.4

13.30 ¿Cuánta fuerza ejerce el aire sobre la cubierta frontal de su libro de texto? ¿Qué masa tiene un peso equivalente a esta fuerza?

13.31 La presión sanguínea se reporta en forma común en milímetros de mercurio (mmHg) o la altura de una columna de mercurio que produce el mismo valor de presión. Los valores típicos para un humano adulto son de 130/80; el primer valor es la presión *sistólica*, durante la contracción de los ventrículos del corazón y el segundo valor es la presión *diastólica*, durante la contracción de las aurículas del corazón. La cabeza de una jirafa macho adulta está a 6.0 m por encima del suelo; el corazón de la jirafa está a 2.0 m por encima del suelo. ¿Cuál es la presión sistólica mínima (en mmHg) requerida en el corazón para impulsar la sangre a la cabeza (desprecie la presión adicional requerida para superar los efectos de la viscosidad)? La densidad de la sangre de la jirafa es de 1.00 g/cm³ y la del mercurio es de 13.6 g/cm³.

13.32 Un buzo con equipo autónomo debe descomprimirse después de una inmersión profunda para permitir que el exceso de nitrógeno salga de forma segura de su torrente sanguíneo. El lapso de tiempo requerido para la descompresión depende del cambio total de presión que ha experimentado el buzo. Encuentre el cambio total de presión para un buzo que comienza a una profundidad $d = 20.0$ m en el océano (densidad del agua de mar = $1\,024$ kg/m³ y luego viaja a bordo de un avión pequeño (con una cabina no presurizada) que sube a una altitud de $h = 5\,000$ m sobre el nivel del mar.

13.33 Un niño suelta su globo, el cual sube lentamente en el cielo. Si el globo tiene un diámetro de 20.0 cm cuando el niño lo suelta, ¿cuál es su diámetro a una altura de a) 1 000. m, b) 2 000. m y c) a los 5 000. m? Suponga que el globo es muy flexible y que puede despreciar la tensión superficial.

13.34 La atmósfera de Marte ejerce una presión de sólo 600. Pa sobre la superficie y tiene una densidad de sólo 0.02000 kg/m³.

a) ¿Cuál es el grosor de la atmósfera marciana, suponiendo que el límite entre la atmósfera y el espacio exterior es el punto donde la presión atmosférica cae hasta 0.01000% de su valor a nivel de la superficie?

b) ¿Cuál es la presión atmosférica en el fondo del cañón Hellas Planitia en Marte, a una profundidad de 7.00 km?

c) ¿Cuál es la presión atmosférica en la cima del volcán Monte Olimpo en Marte, a una altura de 27.0 km?

d) Compare el cambio relativo de presión, $\Delta p/p$, entre estos dos puntos en Marte y entre los dos extremos equivalentes en la Tierra: las orillas del Mar Muerto, a 400. m bajo el nivel del mar y el Monte Everest, a una altitud de 8 850 m.

13.35 La densidad del aire en la cima del Monte Everest ($h_{\text{Everest}} = 8\,850$ m) es 35% de la densidad del aire a nivel del mar. Si la presión del aire en la cima del Monte McKinley en Alaska es 47.74% de la presión del aire a nivel del mar, calcule la altura del Monte McKinley, usando sólo la información brindada en este problema.

13.36 Un cilindro vertical sellado de radio R y altura $h = 0.60$ m está lleno inicialmente hasta la mitad con agua y la mitad superior está llena con aire. El aire está inicialmente a una presión atmosférica normal, $p_0 = 1.01 \cdot 10^5$ Pa. Una válvula pequeña en el fondo del cilindro se abre y el agua fluye saliendo del cilindro hasta que la presión reducida del aire en la parte superior del cilindro evita que escape más agua. ¿Por cuánta distancia disminuye la profundidad del agua? (Suponga que la temperatura del agua y del aire no cambian y que no hay fugas de aire en el cilindro.)

13.37 Se crea un estanque cuadrado con lados de 100. m de longitud en un lote de estacionamiento de concreto. Las paredes son de concreto de 50.0 cm de grosor y tienen una densidad de 2.50 g/cm³. El coeficiente de fricción estática entre las paredes y el estacionamiento es de 0.450. ¿Cuál es la profundidad máxima posible del estanque?

13.38 El cálculo de la presión atmosférica en la cumbre del Monte Everest llevado a cabo en el ejemplo 13.3 usó el modelo conocido como *atmósfera isotérmica*, en la cual la presión del gas es proporcional a la densidad: $p = \gamma\rho$, con γ constante. Considere una nube esférica de gas soportada a sí misma bajo su propia gravitación y siguiendo este modelo.

a) Escriba una ecuación de equilibrio hidrostático para la nube, en términos de la densidad como función del radio, $\rho(r)$.

b) Demuestre que $\rho(r) = A/r^2$ es una solución para esta ecuación, para una elección apropiada de la constante A . Explique por qué esta solución no es adecuada como modelo para una estrella.

Sección 13.5

13.39 Una pelota de raquetbol con un diámetro de 5.6 cm y una masa de 42 g se corta a la mitad para hacer un bote para centavos norteamericanos acuñados después de 1982. La masa y el volumen de un centavo norteamericano acuñado después de 1982 son de 2.5 g y 0.36 cm³, respectivamente. ¿Cuántos centavos pueden colocarse en la pelota de raquetbol sin que se hunda?

13.40 Un supertanker lleno con petróleo tiene una masa total de $10.2 \cdot 10^8$ kg. Si las dimensiones del buque son las de una caja rectangular de 250. m de largo, 80.0 m de ancho y 80.0 m de alto, determine qué tanto se hunde el fondo del buque por debajo del nivel del mar ($\rho_{\text{mar}} = 1\,020$ kg/m³).

13.41 Una caja con un volumen $V = 0.0500$ m³ yace en el fondo de un lago cuya agua tiene una densidad de $1.00 \cdot 10^3$ kg/m³. ¿Cuánta fuerza se requiere para levantar la caja, si la masa de la caja es a) 1 000. kg, b) 100. kg y c) 55.0 kg?

13.42 Un hombre con una masa de 64 kg y una densidad de 970 kg/m³ se encuentra de pie en una piscina poco profunda con 32% del volumen de su cuerpo bajo el agua. Calcule la fuerza normal que ejerce el fondo de la piscina sobre sus pies.

•13.43 Un bloque de madera de cerezo que mide 20.0 cm de largo, 10.0 cm de ancho y 2.00 cm de grueso tiene una densidad de $800. \text{ kg/m}^3$. ¿Cuál es el volumen de un pedazo de hierro que, si se pega al fondo del bloque hará que el bloque flote en el agua con su parte superior apenas al ras de la superficie del agua? La densidad del hierro es de $7\,860 \text{ kg/m}^3$ y la densidad del agua es de $1\,000. \text{ kg/m}^3$.

•13.44 La densidad media del cuerpo humano es de 985 kg/m^3 y la densidad típica del agua de mar es como de $1\,020 \text{ kg/m}^3$.

a) Dibuje un diagrama de cuerpo libre de un cuerpo humano flotando en agua de mar y determine qué porcentaje del volumen del cuerpo está sumergido.

b) La densidad media del cuerpo humano, después de la inhalación máxima de aire, cambia a 945 kg/m^3 . Dado que una persona flotando en el agua de mar inhala y exhala con lentitud, ¿qué porcentaje de su volumen sube y baja dentro del agua?

c) El Mar Muerto (un lago de agua salada ubicado entre Israel y Jordania) es el mayor cuerpo de agua salada en el mundo. Su contenido de sal es más de seis veces el del agua de mar típica, lo cual explica por qué no hay vida de plantas o animales en él. Se observa que dos tercios del volumen del cuerpo de una persona que flota en el Mar Muerto se encuentra sumergido. Determine la densidad (en kg/m^3) del agua salada en el Mar Muerto.

•13.45 Un turista de masa 60.0 kg nota un cofre con una cadena corta sujeta a éste en el fondo del océano. Al imaginarse los tesoros que podría contener, decide bucear por el cofre. Él inhala totalmente, estableciendo así su densidad en 945 kg/m^3 , salta al océano (con densidad del agua de mar = $1\,020 \text{ kg/m}^3$), agarra la cadena y trata de tirar el cofre hacia la superficie. Por desgracia, el cofre es demasiado pesado y no se moverá. Suponga que el hombre no toca el fondo.

a) Dibuje un diagrama de cuerpo libre del hombre y determine la tensión sobre la cadena.

b) ¿Qué masa (en kg) tiene un peso que es equivalente a la fuerza de tensión en el inciso a)?

c) Después de darse cuenta que no puede liberar al cofre, suelta la cadena. ¿Cuál es su aceleración ascendente (suponiendo que él simplemente permite que la fuerza de flotación lo suba hasta la superficie)?

•13.46 Un globo muy grande con una masa $M = 10.0 \text{ kg}$ se infla hasta alcanzar un volumen de 20.0 m^3 usando un gas con una densidad de $\rho_{\text{gas}} = 0.20 \text{ kg/m}^3$. ¿Cuál es la máxima masa m que se puede atar al globo usando un trozo de soga de 2.00 kg sin que el globo caiga al suelo? (Suponga que la densidad del aire es de 1.30 kg/m^3 y que el volumen del gas es igual al volumen del globo inflado.)

•13.47 El *Hindenburg*, el dirigible que se incendió en 1937 mientras atracaba en Lakehurst, Nueva Jersey, era un globo rígido con un marco de duraluminio lleno con $2.000 \cdot 10^3 \text{ m}^3$ de hidrógeno. Se reporta que la sustentación útil del *Hindenburg* (más allá del peso de la estructura misma del dirigible) fue de $1.099 \cdot 10^6 \text{ N}$ (o $247\,000 \text{ lb}$). Use $\rho_{\text{aire}} = 1.205 \text{ kg/m}^3$, $\rho_{\text{H}} = 0.08988 \text{ kg/m}^3$ y $\rho_{\text{He}} = 0.1786 \text{ kg/m}^3$.

a) Calcule el peso de la estructura del dirigible (sin el hidrógeno gaseoso).

b) Compare la sustentación útil del *Hindenburg* lleno de hidrógeno (altamente inflamable) con la sustentación útil que hubiese tenido el *Hindenburg* lleno con helio (no inflamable), como se planeó originalmente.

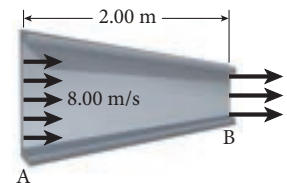
••13.48 Se usan pesas de latón para pesar un objeto de aluminio en una balanza analítica. La medición se efectúa una vez en aire seco y otra vez en aire húmedo, con una presión de vapor del agua de $P_h = 2 \cdot 10^3 \text{ Pa}$. La presión atmosférica total ($P = 1.00 \cdot 10^5 \text{ Pa}$) y la temperatura ($T = 20.0 \text{ }^\circ\text{C}$) son las mismas en ambos casos. ¿Cuál debería ser la masa del objeto para que se pueda notar la diferencia en las lecturas de la balanza, dado que la sensibilidad de la balanza es $m_0 = 0.100 \text{ mg}$? (La densidad del aluminio es $\rho_A = 2.70 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$; la densidad del latón es $\rho_B = 8.50 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$.)

Sección 13.6

13.49 Una fuente lanza agua a una altura de $100. \text{ m}$. ¿Cuál es la diferencia entre la presión del agua justo antes de ser liberada hacia arriba y la presión atmosférica?

13.50 El agua entra por una tubería con una sección transversal rectangular con una velocidad de 1.00 m/s . El ancho de la tubería permanece constante, pero la altura decrece. A veinte metros de la entrada, la altura es la mitad de lo que es a la entrada. Si la presión del agua a la entrada es de $3\,000. \text{ Pa}$, ¿cuál es la presión 20.0 m corriente abajo?

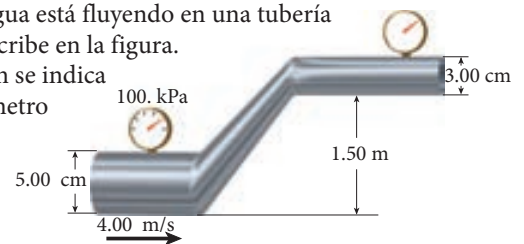
•13.51 El agua a temperatura ambiente fluye a una velocidad constante de 8.00 m/s a través de una tobera con sección transversal cuadrada, como se muestra en la figura. El agua entra a la tobera en el punto A y sale de la tobera en el punto B. Las longitudes de los lados de la sección transversal en A y B son de 50.0 y 20.0 cm , respectivamente.



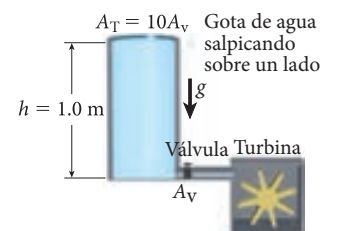
a) ¿Cuál es la tasa de flujo volumétrico a la salida?
 b) ¿Cuál es la aceleración a la salida? La longitud de la tobera es de 2.00 m .

c) Si la tasa de flujo volumétrico a través de la tobera se incrementa a $6.00 \text{ m}^3/\text{s}$, ¿cuál es la aceleración del fluido a la salida?

•13.52 El agua está fluyendo en una tubería como se describe en la figura. ¿Qué presión se indica en el manómetro superior?

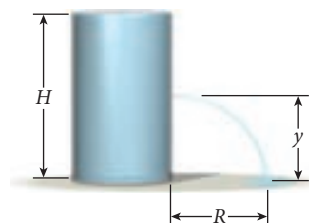


•13.53 Un tanque abierto al aire, completamente lleno de agua tiene una válvula de alivio cerca del fondo. La válvula se encuentra 1.0 m debajo de la superficie del agua. Se libera el agua de la válvula para impulsar una turbina, la cual

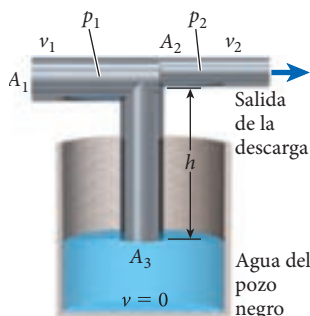


genera electricidad. El área en la parte superior del tanque, A_T , es diez veces el área de sección transversal, A_v , de la abertura de la válvula. Calcule la velocidad del agua conforme sale de la válvula. Desprecie la fricción y la viscosidad. Además, calcule la velocidad de una gota de agua soltada a partir del reposo desde $h = 1.0$ m cuando alcanza la elevación de la válvula. Compare las dos velocidades.

•13.54 Un tanque de altura H está lleno de agua y apoyado en el suelo, como se muestra en la figura. El agua sale a chorros de un agujero a una altura y sobre el suelo y tiene un alcance de R . Para dos valores de y , 0 y H , R es cero. Determine el valor de y para el cual el rango será el máximo.



•13.55 Una bomba de pozo negro de respaldo usa agua de grifo a una presión de 3.00 atm ($p_1 = 3 p_{atm} = 3.03 \cdot 10^5$ Pa) para bombear agua fuera del pozo, como se muestra en la figura ($p_{pozo} = p_{atm}$). Este sistema permite que el agua sea bombeada fuera del pozo negro del sótano cuando la bomba eléctrica se detiene si se interrumpe la energía eléctrica. Usar agua para bombear agua puede sonar extraño al principio, pero estas bombas son bastante eficientes, bombeando típicamente 2.00 L de agua del pozo por cada 1.00 L de agua de grifo presurizada. El agua del suministro se mueve hacia la derecha en una gran tubería con un área de sección transversal A_1 a la velocidad $v_1 = 2.05$ m/s. Entonces el agua fluye dentro de una tubería de menor diámetro con un área de sección transversal que es diez veces menor ($A_2 = A_1/10$).



- ¿Cuál es la velocidad v_2 del agua en la tubería menor, con área A_2 ?
- ¿Cuál es la presión p_2 del agua en la tubería menor, con área A_2 ?
- La bomba está diseñada de tal forma que la tubería vertical, con una sección transversal A_3 , que conduce el agua del pozo también tiene una presión p_2 en su parte superior. ¿Cuál es la altura máxima, h , de la columna de agua que la bomba puede levantar (y por lo tanto actuar sobre ésta) en la tubería vertical?

Sección 13.7

13.56 Un balón de basquetbol con una circunferencia de 75.5 cm y una masa de 598 g se fuerza hasta el fondo de una piscina y después se libera. Después de acelerar inicialmente hacia arriba, sube a una velocidad constante.

- Calcule la fuerza de flotación sobre el balón.
- Calcule la fuerza de arrastre que el balón experimenta mientras se mueve hacia arriba a una velocidad constante.

•13.57 El recipiente cilíndrico mostrado en la figura tiene un radio de 1.00 m y contiene aceite de motor con una viscosidad de 0.300 Pa s y una densidad de 670. kg m⁻³. El aceite fluye saliendo de un tubo de 20.0 cm de largo y 0.200 cm de diámetro en el fondo del recipiente. ¿Cuánto aceite fluye fuera del tubo en un periodo de 10.0 s si el recipiente está lleno originalmente hasta una altura de 0.500 m?



Problemas adicionales

13.58 Estime la presión atmosférica dentro del huracán Rita. La velocidad del viento era de 290 km/h.

13.59 Se obtienen los siguientes datos de un auto. La presión de los neumáticos se mide como 28.0 psi y el ancho y el largo de la superficie de contacto para cada neumático es de 7.50 in y 8.75 in, respectivamente. ¿Cuál es el peso aproximado del auto?

13.60 Calcule la razón de la capacidad de elevación del helio (He) gaseoso y del hidrógeno (H₂) gaseoso bajo circunstancias idénticas. Suponga que la masa molar del aire es de 29.5 g/mol.

13.61 Se vierte el agua en un gran barril cuya altura es de 2.0 m y tiene un corcho cilíndrico con un diámetro de 3.0 cm atorado en un lado a una altura de 0.50 m sobre el suelo. En cuanto el nivel del agua en el barril alcanza la altura máxima, el corcho sale volando del barril.

- ¿Cuál es la magnitud de la fuerza de fricción estática del barril y el corcho?
- Si el barril estuviera lleno con agua de mar, ¿hubiera volado el corcho antes de que se alcanzara la capacidad máxima del barril?

13.62 En un ascensor hidráulico, la presión manométrica máxima es de 17.00 atm. Si el diámetro de la línea de salida es de 22.5 cm, ¿cuál es el vehículo más pesado que puede levantar?

13.63 Una tubería de agua se estrecha desde un radio $r_1 = 5.00$ cm hasta un radio $r_2 = 2.00$ cm. Si la velocidad del agua en la parte más ancha de la tubería es de 2.00 m/s, ¿cuál es la velocidad del agua en la parte más estrecha?

13.64 El Pato Donald y sus sobrinos consiguen hundir el yate del tío Rico McPato ($m = 4$ 500 kg) el cual está hecho de acero ($\rho = 7$ 800 kg/m³). A la manera típica de un cómic, deciden levantar el yate con pelotas de ping-pong. Una pelota de ping-pong tiene una masa de 2.7 g y un volumen de $3.35 \cdot 10^{-5}$ m³.

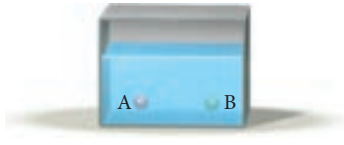
- ¿Cuál es la fuerza de flotación de una pelota de ping-pong en el agua?
- ¿Cuántas pelotas se requieren para hacer flotar el barco?

13.65 Un bloque de madera flotando en el agua tiene dos terceras partes de su volumen sumergido. Cuando se coloca el bloque en aceite mineral, tiene 80.0% de su volumen sumergido. Encuentre la densidad de a) el bloque de madera, b) el aceite mineral.

13.66 Se encuentra que un tendón aproximadamente redondo que tiene un diámetro promedio de 8.5 mm y una longitud de 15 cm se estira 3.7 mm cuando actúa una fuerza de 13.4 N sobre éste. Calcule el módulo de Young del tendón.

•13.67 La luna Europa de Júpiter podría tener océanos (cubiertos de hielo, lo cual puede ignorarse). ¿Cuál sería la presión a 1.00 km bajo la superficie del océano de Europa? La gravedad superficial de Europa es 13.5% de la de la Tierra.

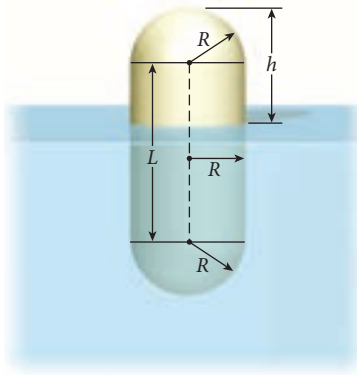
•13.68 Se liberan dos bolas del mismo volumen dentro de un tanque lleno con agua como se muestra en la figura. Las densidades de las bolas A y B son de 0.90 g/cm^3 y 0.8 g/cm^3 . Encuentre la aceleración de a) la bola A y de b) la bola B. c) ¿Cuál gana la carrera hasta la parte superior?



•13.69 Un aeroplano se mueve a través del aire a una velocidad $v = 200. \text{ m/s}$. Las líneas de flujo justo sobre la cara superior del ala se comprimen 80.0% de su área original y aquellas bajo el ala no se comprimen para nada.

- Determine la velocidad del aire justo sobre el ala.
- Encuentre la diferencia de presión entre el aire justo sobre el ala, P , y bajo el ala, P' .
- Encuentre la fuerza ascendente neta sobre ambas alas debida a la diferencia de presión, si el área del ala es de 40.0 m^2 y la densidad del aire es de 1.30 kg/m^3 .

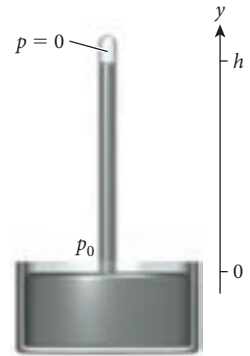
•13.70 Una boya cilíndrica con extremos hemisféricos se deja caer en el agua de mar con una densidad de 1027 kg/m^3 , como se muestra en la figura. La masa de la boya es de 75.0 kg, el radio del cilindro y las tapas hemisféricas es $R = 0.200 \text{ m}$, y la longitud de la sección cilíndrica del centro de la boya es $L = 0.600 \text{ m}$. La parte inferior de la boya se lastra de tal manera que ésta queda



erguida en el agua como se muestra en la figura. En aguas tranquilas, ¿qué tan alto (distancia h) se encontrará la parte superior de la boya sobre la línea de flotación?

•13.71 El agua con una densidad de 998.2 kg/m^3 se está moviendo a una velocidad despreciable bajo una presión de 101.3 kPa, pero entonces es acelerada a gran velocidad por las aspas de una hélice que gira. La presión de vapor a la temperatura inicial de $20.0 \text{ }^\circ\text{C}$ es de 2.3388 kPa. ¿A qué rapidez de flujo comenzará a hervir el agua? Este efecto, conocido como *cavitación*, limita el rendimiento de las hélices en el agua.

•13.72 Una astronauta desea medir la presión atmosférica en Marte usando un barómetro de mercurio como el mostrado en la figura. La calibración del barómetro es la calibración normal en la Tierra: 760 mmHg corresponde a la presión debida a la atmósfera terrestre, 1 atm o 101.325 kPa. ¿Cómo necesita recalibrarse el barómetro para usarse en la atmósfera marciana; por qué factor se necesita “estirar” la escala del barómetro? En su práctica tabla de masas y radios planetarios, la astronauta encuentra que Marte tiene un radio promedio de $3.37 \cdot 10^6 \text{ m}$ y una masa de $6.42 \cdot 10^{23} \text{ kg}$.



•13.73 En muchos lugares, tales como el lago Washington en Seattle, se prefieren los puentes flotantes a los puentes convencionales. Semejante puente puede construirse con pontones de concreto, los cuales son esencialmente cajas de concreto llenas con aire, Styrofoam (poliestireno expandido), o algún otro material poco denso. Imagine que un pontón de puente flotante se construye con concreto y Styrofoam, los cuales tienen densidades de 2200 kg/m^3 y 50.0 kg/m^3 . ¿Cuál debe ser la razón volumétrica de concreto a Styrofoam si el pontón debe flotar con 35% de su volumen global sobre el nivel del agua?

•13.74 Un globo de 1.0 g está lleno con helio gaseoso. Cuando una masa de 4.0 g se fija al globo, la masa combinada pende en equilibrio en el aire. Suponiendo que el globo es esférico, ¿cuál es su diámetro?

•13.75 Un gran tanque de agua tiene una tubería de entrada y una tubería de salida. La tubería de entrada tiene un diámetro de 2.00 cm y está 1.00 m por encima del fondo del tanque. La tubería de salida tiene un diámetro de 5.00 cm y está a 6.00 m por encima del fondo del tanque. Un volumen de 0.300 m^3 de agua entra al tanque cada minuto a la presión manométrica de 1.00 atm.

- ¿Cuál es la velocidad del agua en la tubería de salida?
- ¿Cuál es la presión manométrica en la tubería de salida?

•13.76 Dos esferas con el mismo diámetro (en el aire), una hecha de aleación de plomo y la otra de acero se sumergen a una profundidad $h = 2000. \text{ m}$ bajo la superficie del océano. La razón de los volúmenes de las dos esferas a esta profundidad es $V_{\text{Acero}}(h)/V_{\text{Plomo}}(h) = 1.001206$. Sabiendo que la densidad del agua de mar es $\rho = 1024 \text{ kg/m}^3$ y el módulo volumétrico del acero, $B_{\text{Acero}} = 160 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$, calcule el módulo volumétrico de la aleación de plomo usada en la esfera.

Oscilaciones



FIGURA 14.1 Oscilaciones armónicas usadas para medir el tiempo. *a)* Fotografía de exposición múltiple de un antiguo reloj de péndulo. *b)* El reloj atómico más pequeño del mundo del National Institute of Standards and Technology y en el cual los átomos de cesio realizan 9.2 mil millones de oscilaciones cada segundo. El reloj es del tamaño de un grano de arroz y es exacto hasta 1 parte en 10 mil millones, o en menos de 1 segundo en un periodo de 300 años.

LO QUE APRENDEREMOS 456

14.1 Movimiento armónico simple	456
Condiciones iniciales	458
Ejemplo 14.1 Condiciones iniciales	458
Posición, velocidad y aceleración	459
Periodo y frecuencia	460
Ejemplo 14.2 Túnel a través de la Luna	461
Problema resuelto 14.1	
Bloque unido a un resorte	462
Relación entre el movimiento armónico simple y el movimiento circular	463
14.2 Movimiento pendular	464
Periodo y frecuencia de un péndulo	465
Ejemplo 14.3 Péndulo restringido	466
14.3 Trabajo y energía en las oscilaciones armónicas	466
Masa unida a un resorte	467
Energía de un péndulo	468
Ejemplo 14.4 Rapidez en un trapecio	469
14.4 Movimiento armónico amortiguado	470
Amortiguamiento pequeño	470
Ejemplo 14.5 Salto en bungee	472
Amortiguamiento grande	473
Amortiguamiento crítico	473
Ejemplo 14.6 Movimiento armónico amortiguado	474
Pérdida de energía en oscilaciones amortiguadas	475
14.5 Movimiento armónico forzado y resonancia	477
14.6 Espacio de fase	479
14.7 Caos	480

LO QUE HEMOS APRENDIDO/ GUÍA DE ESTUDIO PARA EXAMEN 481

Práctica para resolución de problemas	482
Problema resuelto 14.2 Determinación de la constante de amortiguamiento	482
Problema resuelto 14.3 Oscilación de una barra delgada	484
Preguntas de opción múltiple	485
Preguntas	486
Problemas	487

LO QUE APRENDEREMOS

- La fuerza de un resorte conduce a una oscilación sinusoidal en el tiempo referida como movimiento armónico simple.
- Una ley de fuerza y una oscilación en el tiempo semejantes se pueden encontrar para un péndulo balanceándose a través de ángulos pequeños.
- Las oscilaciones pueden representarse como una proyección del movimiento circular sobre uno de los dos ejes coordenados cartesianos.
- En la presencia de amortiguamiento, las oscilaciones bajan la velocidad exponencialmente conforme pasa el tiempo. Dependiendo de la intensidad del amortiguamiento, es posible que no ocurran las oscilaciones.
- El impulsor externo periódico de un oscilador conduce a un movimiento sinusoidal a la frecuencia del impulso, con una amplitud máxima cercana a la rapidez angular de resonancia.
- Graficar el movimiento de las oscilaciones en términos de velocidad y posición muestra que el movimiento de las oscilaciones no amortiguadas sigue una elipse y el de las oscilaciones amortiguadas sigue una espiral hacia adentro.
- Un oscilador amortiguado e impulsado puede exhibir movimiento caótico en el cual la trayectoria en el tiempo depende en forma sensible de las condiciones iniciales.

Incluso cuando un objeto parece estar perfectamente en reposo, sus átomos y moléculas están vibrando rápidamente. En ocasiones, estas vibraciones pueden usarse; por ejemplo, los átomos en un cristal de cuarzo vibran con una frecuencia muy constante si el cristal se somete a un campo eléctrico periódico. Esta vibración se usa para medir el tiempo en los relojes modernos de cristal de cuarzo y relojes de pulso. Las vibraciones de los átomos de cesio se usan en los relojes atómicos (figura 14.1).

En este capítulo examinaremos la naturaleza del movimiento oscilatorio. La mayor parte de las situaciones que consideraremos involucran resortes o péndulos, pero éstos son sólo ejemplos de los osciladores más simples. Más tarde en este libro, estudiaremos otro tipo de sistemas vibratorios, los cuales pueden modelarse como un resorte o un péndulo con el propósito de analizar el movimiento. En este capítulo también investigaremos el concepto de resonancia, el cual es una propiedad importante de todos los sistemas oscilatorios, desde el nivel atómico hasta los puentes y rascacielos. Los capítulos 15 y 16 aplicarán los conceptos de oscilaciones para analizar la naturaleza de las ondas y el sonido.

14.1 Movimiento armónico simple

El movimiento repetitivo, comúnmente llamado **movimiento periódico**, es importante en la ciencia, la ingeniería y la vida diaria. Los ejemplos comunes de objetos en movimiento periódico son los limpiaparabrisas en un auto y el péndulo en el reloj de pared. Sin embargo, el movimiento periódico también se encuentra involucrado en la corriente alterna que da energía a la red eléctrica de las ciudades modernas, las vibraciones atómicas en las moléculas y sus propios latidos del corazón y sistema circulatorio.

El movimiento armónico simple es un tipo particular de movimiento repetitivo, el cual es exhibido por un péndulo o un objeto sólido en un resorte. El capítulo 5 introdujo la fuerza de un resorte, la cual es descrita por la ley de Hooke: la fuerza del resorte es proporcional al desplazamiento del resorte a partir del equilibrio. La fuerza del resorte es una fuerza restauradora, siempre apuntando hacia la posición de equilibrio, y es, de esta forma, opuesta en dirección al vector de desplazamiento:

$$F_x = -kx.$$

La constante de proporcionalidad k se llama la *constante de resorte*.

Hemos encontrado la fuerza del resorte repetidamente en otros capítulos. La razón principal de por qué las fuerzas que dependen de manera lineal del desplazamiento son tan importantes en muchas ramas de la física se destacó en la sección 6.4, en donde vimos que para un sistema en equilibrio, un pequeño desplazamiento de la posición de equilibrio resulta en una fuerza semejante a la de un resorte que depende linealmente del desplazamiento a partir de la posición de equilibrio.

Ahora, consideremos la situación en la cual un objeto de masa m está sujeto a un resorte que se estira o se comprime a partir de su posición de equilibrio mediante un agente externo. Cuando

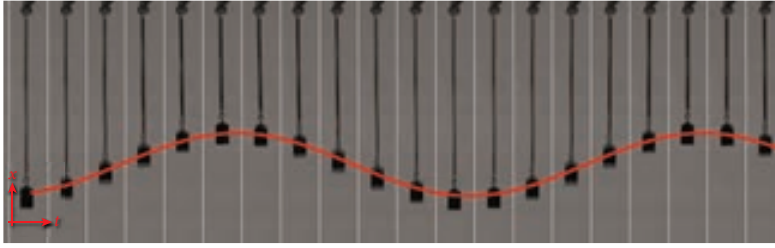


FIGURA 14.2 Imágenes de video consecutivas de una pesa que cuelga de un resorte que experimenta movimiento armónico simple. Sobre las imágenes, se superpone un sistema de coordenadas y una gráfica de la posición como función del tiempo.

se libera el objeto, oscila para delante y para atrás. Este movimiento se llama **movimiento armónico simple (MAS)**, y ocurre cuando la fuerza restauradora es proporcional al desplazamiento. (Como recién notamos, una fuerza restauradora lineal está presente en todos los sistemas que se encuentran cerca del punto de equilibrio estable, así es que el movimiento armónico simple se aparece en muchos sistemas físicos.) La figura 14.2 muestra cuadros de una cinta de video de la oscilación vertical de una pesa en un resorte. Se superpone un eje x vertical y un eje horizontal que representa el tiempo, con cada cuadro a 0.06 s del exterior. La curva roja que corre a través de esta secuencia es una función seno.

Con la comprensión adquirida de la figura 14.2, podemos describir este tipo de movimiento matemáticamente. Comenzamos con la ley de la fuerza para la fuerza de un resorte, $F_x = -kx$, y usamos la segunda ley de Newton, $F_x = ma$, para obtener

$$ma = -kx.$$

Sabemos que la aceleración es la segunda derivada de la posición con respecto al tiempo: $a = d^2x/dt^2$. Al sustituir esta expresión para a en la ecuación anterior obtenida con la segunda ley de Newton tenemos

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx,$$

o

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0. \quad (14.1)$$

La ecuación 14.1 incluye tanto la posición, x , como su segunda derivada con respecto al tiempo. Ambas son funciones del tiempo, t . Este tipo de ecuación se llama *ecuación diferencial*. La solución de esta ecuación diferencial particular es la descripción matemática del movimiento armónico simple.

De la curva en la figura 14.2 podemos ver que la solución de la ecuación diferencial debe ser una función seno o coseno. Veamos si funcionará lo siguiente:

$$x = A \text{sen}(\omega_0 t).$$

Las constantes A y ω_0 se llaman la **amplitud** de la oscilación y su **rapidez angular**, respectivamente. La amplitud es el desplazamiento máximo a partir de la posición de equilibrio, como usted aprendió en el capítulo 5. Esta función sinusoidal funciona para cualquier valor de la amplitud, A . Sin embargo, la amplitud no puede ser arbitrariamente grande o el resorte se estirará demasiado. Por otro lado, veremos que *no* todos los valores de ω_0 dan una solución.

Tomando la segunda derivada de la función de prueba tenemos

$$\begin{aligned} x &= A \text{sen}(\omega_0 t) \Rightarrow \\ \frac{dx}{dt} &= \omega_0 A \cos(\omega_0 t) \Rightarrow \\ \frac{d^2x}{dt^2} &= -\omega_0^2 A \text{sen}(\omega_0 t). \end{aligned}$$

Al insertar este resultado y la expresión sinusoidal para x en la ecuación 14.1 obtenemos

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = -\omega_0^2 A \text{sen}(\omega_0 t) + \frac{k}{m}A \text{sen}(\omega_0 t) = 0.$$

Esta condición se cumple si $\omega_0^2 = k/m$, o

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

14.1 Oportunidad de autoexamen

Muestre que $x(t) = A \text{sen}(\omega_0 t + \theta_0)$ es una solución de la ecuación 14.1.

14.2 Oportunidad de autoexamen

Muestre que $A \text{sen}(\omega_0 t + \theta_0) = B \text{sen}(\omega_0 t) + C \text{cos}(\omega_0 t)$, donde las relaciones entre las constantes están dadas en las ecuaciones 14.4 y 14.5.

De esta manera, hemos encontrado una solución válida de la ecuación diferencial (ecuación 14.1). De la misma manera, podemos mostrar que la función coseno asimismo conduce a una solución, también con una amplitud arbitraria y con la misma rapidez angular. De esta manera, la solución completa para las constantes B y C es

$$x(t) = B \text{sen}(\omega_0 t) + C \text{cos}(\omega_0 t), \text{ con } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (14.2)$$

Las unidades de ω_0 son radianes por segundo (rad/s). Cuando se aplica la ecuación 14.2, $\omega_0 t$ deben expresarse en radianes, no en grados.

Aquí hay otra forma útil de la ecuación 14.2:

$$x(t) = A \text{sen}(\omega_0 t + \theta_0), \text{ con } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (14.3)$$

Esta forma le permite a usted ver más fácilmente que el movimiento es sinusoidal. En lugar de tener dos amplitudes para las funciones seno y coseno, la ecuación 14.3 tiene una sola amplitud, A , y un ángulo de fase, θ_0 . Estas dos constantes están relacionadas con las constantes B y C de la ecuación 14.2 a través de

$$A = \sqrt{B^2 + C^2} \quad (14.4)$$

y

$$\theta_0 = \tan^{-1}\left(\frac{C}{B}\right). \quad (14.5)$$

Condiciones iniciales

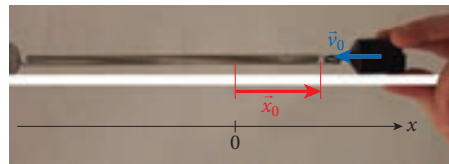
¿Cómo determinamos los valores para usar las constantes B y C , y las amplitudes de las funciones seno y coseno en la ecuación 14.2? La respuesta es que necesitamos dos piezas de información, comúnmente dadas en la forma de la posición inicial, $x_0 = x(t = 0)$, y la velocidad inicial, $v_0 = v(t = 0) = (dx/dt)|_{t=0}$, como en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 14.1 Condiciones iniciales

PROBLEMA 1

Un resorte con una constante de resorte $k = 56.0 \text{ N/m}$ tiene una pesa de plomo con una masa de 1.00 kg sujeta a su extremo (figura 14.3). Se tira la pesa $+5.5 \text{ cm}$ a partir de su posición de equilibrio y entonces se empuja de tal manera que adquiere una velocidad inicial de -0.32 m/s . ¿Cuál es la ecuación del movimiento para la oscilación resultante?

FIGURA 14.3 Una pesa sujeta a un resorte mostrando los vectores de la posición inicial y la velocidad.



SOLUCIÓN 1

La ecuación general del movimiento para esta situación es la ecuación 14.2 para el movimiento armónico simple:

$$x(t) = B \text{sen}(\omega_0 t) + C \text{cos}(\omega_0 t), \text{ con } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

A partir de los datos ofrecidos en el planteamiento del problema, podemos calcular la rapidez angular:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{56.0 \text{ N/m}}{1.00 \text{ kg}}} = 7.48 \text{ s}^{-1}.$$

Ahora debemos determinar los valores de las constantes B y C .

Encontramos la primera derivada de la ecuación general del movimiento:

$$\begin{aligned} x(t) &= B \text{sen}(\omega_0 t) + C \text{cos}(\omega_0 t) \\ \Rightarrow v(t) &= \omega_0 B \text{cos}(\omega_0 t) - \omega_0 C \text{sen}(\omega_0 t). \end{aligned}$$

A un tiempo $t = 0$, $\sin(0) = 0$ y $\cos(0) = 1$, así es que estas ecuaciones se reducen a

$$x_0 = x(t=0) = C$$

$$v_0 = v(t=0) = \omega_0 B.$$

Nos dieron las condiciones iniciales para la posición, $x_0 = 0.055$ m, y velocidad, $v_0 = -0.32$ m/s. De esta forma, encontramos que $C = x_0 = 0.055$ m y $B = -0.043$ m.

PROBLEMA 2

¿Cuál es la amplitud de esta oscilación? ¿Cuál es el ángulo de fase?

SOLUCIÓN 2

Con los valores de las constantes B y C podemos calcular la amplitud, A , de la ecuación 14.4:

$$A = \sqrt{B^2 + C^2} = \sqrt{(0.043 \text{ m})^2 + (0.055 \text{ m})^2} = 0.070 \text{ m}.$$

Por lo tanto, la amplitud de la oscilación es de 7.0 cm. Note que, como consecuencia de la velocidad inicial distinta de cero, la amplitud *no* es de 5.5 cm, el valor de la elongación inicial del resorte.

El ángulo de fase se encuentra por la aplicación directa de la ecuación 14.5:

$$\theta_0 = \tan^{-1}\left(\frac{C}{B}\right) = \tan^{-1}\left(-\frac{0.055}{0.043}\right) = -0.907 \text{ rad}.$$

Expresada en grados, este ángulo de fase es $\theta_0 = -52.0^\circ$.

Posición, velocidad y aceleración

Miremos otra vez las relaciones de posición, velocidad y aceleración, en una forma que describe el movimiento oscilatorio en términos de la amplitud, A , y el ángulo de fase determinado por θ_0 , éstas son

$$\begin{aligned} x(t) &= A \sin(\omega_0 t + \theta_0) \\ v(t) &= \omega_0 A \cos(\omega_0 t + \theta_0) \\ a(t) &= -\omega_0^2 A \sin(\omega_0 t + \theta_0). \end{aligned} \quad (14.6)$$

Aquí, la velocidad y la aceleración se obtienen a partir del vector de posición, encontrando las derivadas sucesivas. Estas ecuaciones sugieren que los vectores de velocidad y aceleración tienen el mismo ángulo de fase que el vector de posición, determinado por θ_0 , pero tienen un ángulo de fase adicional de $\pi/2$ (para la velocidad) y π (para la aceleración), los cuales corresponden a la diferencia de fase entre las funciones seno y coseno, y entre las funciones seno y seno negativo, respectivamente.

La posición, velocidad y aceleración, como se dan en las ecuaciones 14.6, se grafican en la figura 14.4, con $\omega_0 = 1.25 \text{ s}^{-1}$ y $\theta_0 = -0.5$ rad. En la figura 14.4 se indica el ángulo de fase, lo mismo que las tres amplitudes de las oscilaciones: A es la amplitud de la oscilación del vector de posición, $\omega_0 A$ (o $1.25A$, en este caso) es la amplitud de la oscilación del vector velocidad y $\omega_0^2 A$ [o aquí, $(1.25)^2 A$] es la amplitud de la oscilación del vector aceleración. Usted puede ver que cada vez que el vector de posición pasa a través del cero, el valor del vector velocidad se encuentra en el máximo o mínimo, y viceversa. Usted también puede observar que la aceleración (al igual como la fuerza) tiene siempre la dirección opuesta al vector de posición. Cuando la posición pasa a través de cero, así también la aceleración.

La figura 14.5 muestra un bloque conectado a un resorte y con movimiento armónico simple deslizándose en una superficie sin fricción. Se muestran los vectores de velocidad y aceleración del bloque en ocho posiciones diferentes. En la figura 14.5a), el bloque se libera desde $x = A$. El bloque se acelera hacia la izquierda, como se indica. El bloque ha alcanzado $x = A/\sqrt{2}$ en la figura 14.5b). En este punto, la velocidad y la aceleración del bloque se indican hacia la izquierda. En la figura 14.5c), el bloque ha alcanzado la posición de equilibrio. El bloque en esta posición tiene aceleración cero

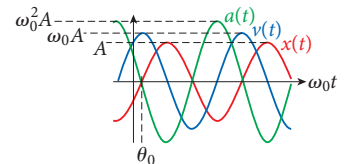
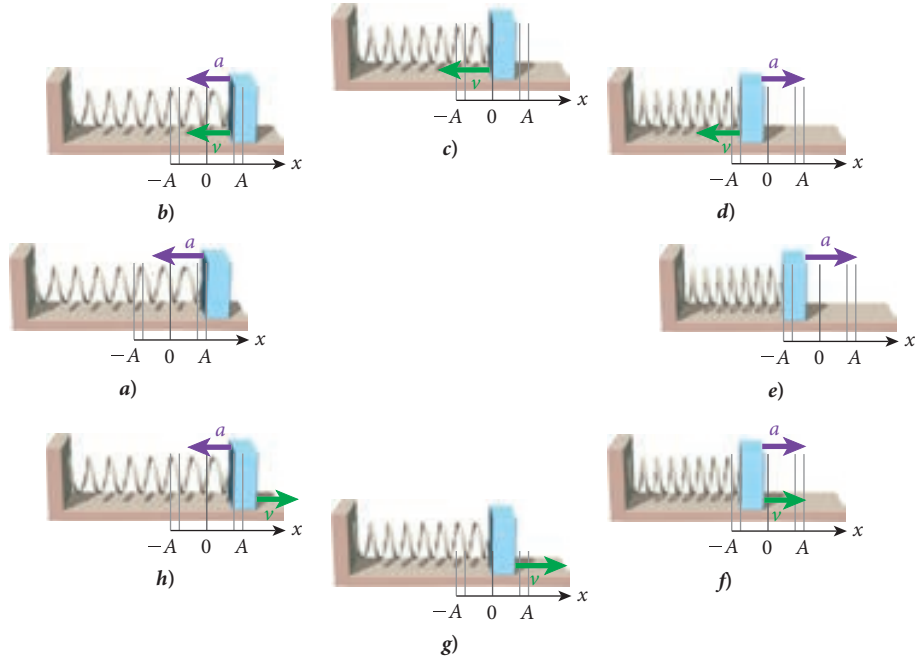


FIGURA 14.4 Gráficas de la posición, velocidad y aceleración para el movimiento armónico simple como función del tiempo.

FIGURA 14.5 Un bloque en un resorte que experimenta movimiento armónico simple. Se muestran los vectores de velocidad y aceleración en diferentes puntos de la oscilación: a) $x = A$; b) $x = A/\sqrt{2}$; c) $x = 0$; d) $x = -A/\sqrt{2}$; e) $x = -A$; f) $x = -A/\sqrt{2}$; g) $x = 0$; h) $x = A/\sqrt{2}$.



14.1 Ejercicio en clase

Un resorte con $k = 12.0 \text{ N/m}$ tiene una pesa con una masa de 3.00 kg sujeta a su extremo. El peso se jala $+10.0 \text{ cm}$ desde su posición de equilibrio y se libera a partir del reposo. ¿Cuál es la velocidad de la pesa cuando pasa por la posición de equilibrio?

- a) -0.125 m/s d) $+0.500 \text{ m/s}$
- b) $+0.750 \text{ m/s}$ e) -0.633 m/s
- c) -0.200 m/s

y velocidad máxima hacia la izquierda. El bloque continúa a través de la posición de equilibrio del resorte y comienza a disminuir su velocidad. En la figura 14.5d), el bloque se ubica a $x = -A/\sqrt{2}$. La aceleración del bloque se dirige ahora hacia la derecha, a pesar de que el bloque todavía está moviéndose a la izquierda. El bloque alcanza $x = -A$ en la figura 14.5e). En esta posición, la velocidad del bloque es cero y la aceleración del bloque se dirige hacia la derecha. En la figura 14.5f), el bloque se ubica nuevamente en $x = -A/\sqrt{2}$, pero ahora la velocidad y la aceleración del bloque se dirigen hacia la derecha. El bloque alcanza de nuevo la posición de equilibrio en la figura 14.5g), con su vector velocidad apuntando hacia la derecha. El bloque continúa a través de la posición de equilibrio y alcanza $x = A/\sqrt{2}$ en la figura 14.5h), donde la velocidad todavía apunta a la derecha, pero la aceleración apunta hacia la izquierda. El bloque regresa a su configuración original en la figura 14.5a) y el ciclo se repite.

Periodo y frecuencia

Como usted sabe, las funciones seno y coseno son periódicas, siendo su periodo igual a 2π . La posición, la velocidad y la aceleración para las oscilaciones del movimiento armónico simple se describen mediante las funciones seno o coseno y agregando un múltiplo de 2π al argumento de tales funciones no cambian su valor:

$$\text{sen}(\omega t) = \text{sen}(2\pi + \omega t) = \text{sen}\left[\omega\left(\frac{2\pi}{\omega} + t\right)\right].$$

(Para obtener el lado derecho de esta ecuación, reescribimos la expresión de medio multiplicando y dividiendo 2π por ω y entonces factorizando el factor común ω .) Hemos descartado el índice 0 en ω , debido a que estamos derivando una relación universal que es válida para todas las rapidezces angulares, no sólo para la situación particular de una masa unida a un resorte.

El intervalo de tiempo a lo largo del cual la función sinusoidal se repite a sí misma es el **periodo**, denotado con T . De la ecuación anterior, para la ecuación de la periodicidad de la función seno, podemos ver que

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \tag{14.7}$$

debido a que $\text{sen}(\omega t) = \text{sen}[\omega(T + t)]$. El mismo argumento funciona para la función coseno. En otras palabras, reemplazando t por $t + T$ produce los mismos vectores de posición, velocidad y aceleración, como lo demanda la definición del periodo del movimiento armónico simple.

El inverso del periodo es la **frecuencia**, f :

$$f = \frac{1}{T},$$

donde f es el número de oscilaciones completas por unidad de tiempo. Por ejemplo, si $T = 0.2$ s, entonces ocurren 5 oscilaciones en 1 s, y $f = 1/T = 1/(0.2 \text{ s}) = 5.0 \text{ s}^{-1} = 5.0 \text{ Hz}$. Al sustituir T de la ecuación 14.7 en la ecuación 14.8 brinda una expresión para la rapidez angular en términos de la frecuencia:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi/\omega} = \frac{\omega}{2\pi}$$

o

$$\omega = 2\pi f.$$

Para la masa unida al del resorte, tenemos lo siguiente para el periodo y la frecuencia:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\sqrt{k/m}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{14.10}$$

y

$$f = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

De manera interesante, el periodo no depende de la amplitud del movimiento.

La figura 14.6 ilustra el efecto al cambiar los valores de las variables que afectan al movimiento armónico simple de un objeto unido a un resorte. El movimiento armónico simple es descrito por la ecuación 14.3 con $\theta_0 = 0$:

$$x = A \text{ sen} \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t \right).$$

A partir de la figura 14.6a), usted puede ver que al incrementarse la masa, m , el periodo de las oscilaciones aumenta. La figura 14.6b) muestra que incrementando la constante de resorte, k , se disminuye el periodo de las oscilaciones. La figura 14.6c) refuerza las conclusiones anteriores de que el aumento en la amplitud, A , no cambia el periodo de las oscilaciones.

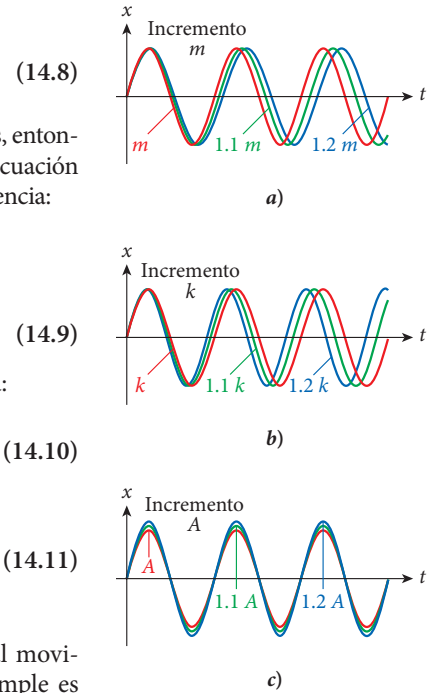


FIGURA 14.6 El efecto sobre el movimiento armónico simple de un objeto conectado a un resorte que resulta de incrementar a) la masa, m ; b) la constante de resorte, k , y c) la amplitud, A .

EJEMPLO 14.2 Túnel a través de la Luna

Suponga que pudiésemos taladrar un túnel directamente a través del centro de la Luna, de un lado al otro. (Como la Luna no tiene atmósfera y está compuesta de roca sólida, este escenario es menos fantástico que taladrar un túnel a través del centro de la Tierra.)

PROBLEMA

Si liberamos una bola de acero con masa de 5.0 kg a partir del reposo en un extremo del túnel, ¿cómo sería su movimiento?

SOLUCIÓN

Del capítulo 12, la magnitud de la fuerza gravitacional dentro de una distribución de masa esférica con densidad constante $F_g = mgr/R$, donde r es la distancia desde el centro de la Tierra y R es el radio terrestre, con $r < R$. Esta fuerza apunta hacia el centro de la Tierra, esto es, en la dirección opuesta al desplazamiento. En otras palabras, la fuerza gravitacional dentro de una distribución de masa esférica sigue la ley de Hooke, $F(x) = -kx$, con una “constante de resorte” de $k = mg/R$, donde g es la aceleración gravitacional a nivel del mar.

Primero, necesitamos calcular la aceleración gravitacional en la superficie lunar. Dado que la masa lunar es de $7.35 \cdot 10^{22}$ kg (1.2% de la masa terrestre) y su radio es de $1.735 \cdot 10^6$ m (27% del radio terrestre), encontramos que (vea el capítulo 12):

$$g_M = \frac{GM_M}{R_M^2} = \frac{(6.67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2})(7.35 \cdot 10^{22} \text{ kg})}{(1.735 \cdot 10^6 \text{ m})^2} = 1.63 \text{ m/s}^2.$$

(continúa)

(continuación)

La aceleración gravitacional en la superficie lunar es aproximadamente un sexto de la aceleración gravitacional en la superficie terrestre.

La ecuación de movimiento apropiada es la ecuación 14.2:

$$x(t) = B \operatorname{sen}(\omega_0 t) + C \operatorname{cos}(\omega_0 t).$$

Al liberar a la bola desde la superficie lunar al tiempo $t = 0$ implica que $x(0) = R_M = B \operatorname{sen}(0) + C \operatorname{cos}(0)$, o $C = R_M$. Para determinar la otra condición inicial, usamos la ecuación de la velocidad del ejemplo 14.1: $v(t) = \omega_0 B \operatorname{cos}(\omega_0 t) - \omega_0 C \operatorname{sen}(\omega_0 t)$. La bola se libera desde el reposo, así que $v(0) = 0 = \omega_0 B \operatorname{cos}(0) - \omega_0 C \operatorname{sen}(0) = \omega_0 B$, dándonos $B = 0$. De esta suerte, la ecuación del movimiento en este caso se convierte en

$$x(t) = R_M \operatorname{cos}(\omega_0 t).$$

La rapidez angular de la oscilación es

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{g_M}{R_M}} = \sqrt{\frac{1.63 \text{ m/s}^2}{1.735 \cdot 10^6 \text{ m}}} = 9.69 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}.$$

Note que la masa de la bola de acero resulta ser irrelevante. El periodo de oscilación es

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 6 \text{ 485 s}.$$

La bola de acero llegaría a la superficie del otro lado de la Luna 3 242 s después de que fuese liberada y luego oscilaría de regreso. Pasar a través de la Luna entera en menos de una hora podría caracterizar un modo extremadamente eficiente de transporte, en especial dado que no se necesita una fuente de poder.

La velocidad de la bola de acero durante su oscilación sería

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -\omega_0 R_M \operatorname{sen}(\omega_0 t).$$

La velocidad máxima se alcanzaría cuando la bola cruzara el centro de la Luna y tendría un valor numérico de

$$v_{\text{máx}} = \omega_0 R_M = (9.69 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1})(1.735 \cdot 10^6 \text{ m}) = 1 \text{ 680 m/s} = 3 \text{ 760 mph}.$$

Si el túnel fuese lo suficientemente grande, podría lograr el mismo movimiento un vehículo que tuviese una o más personas, proporcionando un medio muy eficiente de transporte al otro lado de la Luna, sin la necesidad de propulsión. Durante el viaje completo, las personas dentro del vehículo percibirían la ingravidez absoluta, ¡porque no experimentarían ninguna fuerza de apoyo del vehículo! De hecho, ni siquiera sería necesario usar el vehículo para hacer el viaje; llevando un traje espacial, usted simplemente podría saltar dentro del túnel.

PROBLEMA RESUELTO 14.1 **Bloque unido a un resorte**

PROBLEMA

Un bloque de 1.55 kg, que se desliza sobre un plano horizontal sin fricción, se encuentra conectado a un resorte horizontal con una constante de resorte $k = 2.55 \text{ N/m}$. Se jala el bloque hacia la derecha una distancia $d = 5.75 \text{ cm}$ y se libera a partir del reposo. ¿Cuál es la velocidad del bloque 1.50 s después de que se libera?

SOLUCIÓN

PIENSE

El bloque experimentará un movimiento armónico simple. Podemos usar las condiciones iniciales dadas para determinar los parámetros del movimiento. Con esos parámetros, podemos calcular la velocidad del bloque en el tiempo especificado.

ESBOCE

La figura 14.7 muestra el bloque sujeto a un resorte y desplazado una distancia, d , a partir de la posición de equilibrio.

INVESTIGUE

La primera condición inicial es que en $t = 0$, la posición es $x = d$. De esta manera, podemos escribir

$$x(t=0) = d = A \operatorname{sen}(\omega_0 \cdot 0) + \theta_0 = A \operatorname{sen} \theta_0. \quad (\text{i})$$

Tenemos una ecuación con dos incógnitas. Para obtener una segunda ecuación, usamos la segunda condición inicial: en $t = 0$, la velocidad es cero. Esto conduce a

$$v(t=0) = 0 = \omega_0 A \cos[(\omega_0 \cdot 0) + \theta_0] = \omega_0 A \cos \theta_0. \quad (\text{ii})$$

Ahora tenemos dos ecuaciones con dos incógnitas.

SIMPLIFIQUE

Podemos simplificar la ecuación (ii) para obtener $\cos \theta_0 = 0$, de la cual tenemos el ángulo de fase, $\theta_0 = \pi/2$. Sustituyendo en la ecuación (i) nos da

$$d = A \operatorname{sen} \theta_0 = A \operatorname{sen} \left[\frac{\pi}{2} \right] = A.$$

De esta manera, podemos escribir la velocidad como función del tiempo:

$$v(t) = \omega_0 d \cos \left[\omega_0 t + \left[\frac{\pi}{2} \right] \right] = -\omega_0 d \operatorname{sen}(\omega_0 t).$$

Dado que la rapidez angular está dada por $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, obtenemos

$$v(t) = -\sqrt{\frac{k}{m}} d \operatorname{sen} \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t \right).$$

CALCULE

Sustituyendo los valores numéricos tenemos

$$v(t=1.50 \text{ s}) = -\sqrt{\frac{2.55 \text{ N/m}}{1.55 \text{ kg}}} (0.0575 \text{ m}) \operatorname{sen} \left[\sqrt{\frac{2.55 \text{ N/m}}{1.55 \text{ kg}}} (1.50 \text{ s}) \right] = -0.06920005 \text{ m/s}.$$

REDONDEE

Reportamos nuestro resultado con tres cifras significativas:

$$v = -0.0692 \text{ m/s} = -6.92 \text{ cm/s}.$$

VUELVA A REVISAR

Como de costumbre, es una buena idea verificar que la respuesta tenga las unidades apropiadas. Éste es el caso aquí, porque m/s es una unidad de velocidad. La rapidez máxima que el bloque puede alcanzar es $v = \omega_0 d = 7.38 \text{ cm/s}$. La magnitud de nuestro resultado es menor a la rapidez máxima, así es que parece razonable.

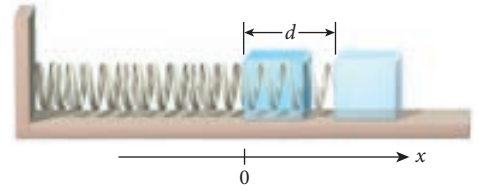


FIGURA 14.7 Un bloque sujeto a un resorte y desplazado una distancia d a partir de la posición de equilibrio.

Relación entre el movimiento armónico simple y el movimiento circular

En el capítulo 9 analizamos el movimiento circular con velocidad angular constante, ω , a lo largo de una trayectoria con radio constante, r . Vimos que las coordenadas x y y de semejante movimiento están dadas por las ecuaciones $x(t) = r \cos(\omega t + \theta_0)$ y $y(t) = r \operatorname{sen}(\omega t + \theta_0)$. La figura 14.8a) muestra cómo el vector $\vec{r}(t)$ realiza un movimiento circular con velocidad angular constante como función del tiempo con un ángulo inicial $\theta_0 = 0$. El segmento de arco rojo muestra la trayectoria de la punta de este radio vector. La figura 14.8b) muestra la proyección de este radio vector sobre la coordenada y . Usted puede ver claramente que el

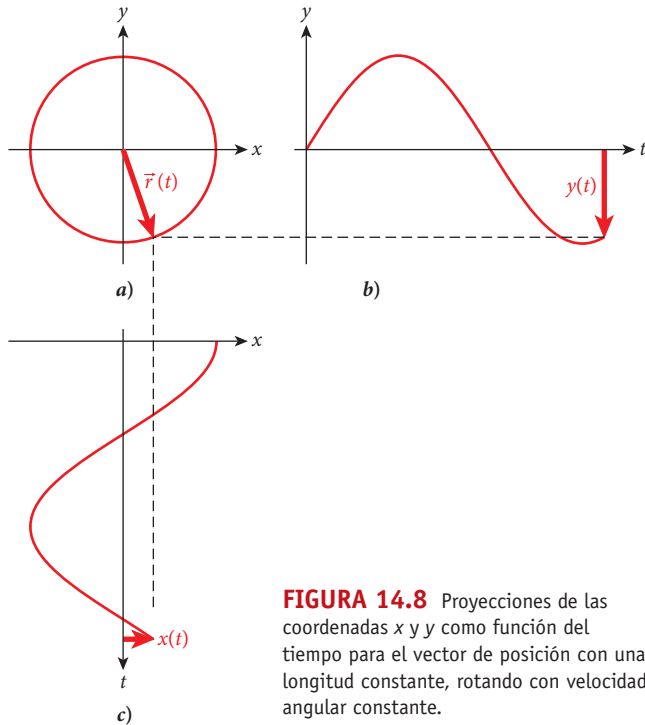


FIGURA 14.8 Proyecciones de las coordenadas x y y como función del tiempo para el vector de posición con una longitud constante, rotando con velocidad angular constante.

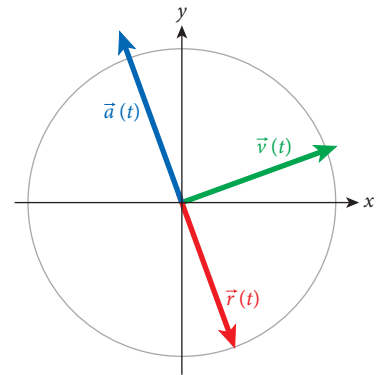


FIGURA 14.9 El vector de posición, el vector velocidad lineal y el vector aceleración para el movimiento circular uniforme.

movimiento del componente y del radio vector traza una función de seno. El movimiento de la componente x como función del tiempo se muestra en la figura 14.8c), y traza una función de coseno. Estas dos proyecciones del movimiento circular con velocidad angular constante exhiben oscilaciones armónicas simples. Esta observación pone en claro que la frecuencia, la velocidad angular y el periodo definido aquí para el movimiento oscilatorio son idénticos a las cantidades introducidas en el capítulo 9 para el movimiento circular.

En la figura 14.8, el vector de posición, $\vec{r}(t)$, tiene su origen en $(x,y) = (0,0)$ y rota con velocidad angular, ω . En el capítulo 9 vimos que para el movimiento circular, la velocidad centrípeta, $\vec{v}(t)$, es tangente al círculo y que la aceleración lineal, $\vec{a}(t)$, siempre apunta hacia el centro del círculo. Los vectores $\vec{v}(t)$ y $\vec{a}(t)$ pueden moverse de tal forma que tengan su origen en $(x,y) = (0,0)$, como se muestra en la figura 14.9. De esta manera, la figura 14.9 muestra que, para el movimiento circular, los tres vectores $\vec{r}(t)$, $\vec{v}(t)$ y $\vec{a}(t)$ rotan juntos con una velocidad angular ω . El vector velocidad lineal siempre se encuentra 90° desfasado con respecto al vector de posición, y el vector aceleración centrípeta siempre se encuentra desfasado 180° con respecto al vector de posición. Las proyecciones de los vectores de velocidad lineal y de aceleración centrípeta sobre los ejes x y y corresponden a la velocidad y la aceleración de un objeto que experimenta movimiento armónico simple.

14.2 Movimiento pendular

Todos estamos familiarizados con otro sistema oscilatorio común: el **pendulo**. En su forma ideal, un péndulo consiste de una delgada cuerda sujeta a un objeto masivo que se balancea hacia delante y hacia atrás. Se supone que la cuerda no tiene masa, esto es, su masa es tal que puede despreciarse. Esta suposición es, dicho de paso, una buena aproximación a la situación de una persona en un columpio.

Determinemos la ecuación del movimiento para un objeto semejante a un péndulo. Mostrada en la figura 14.10 se encuentra una bola al extremo de una cuerda de longitud ℓ a un ángulo θ respecto de la vertical. Para ángulos pequeños, θ , la ecuación diferencial para el movimiento del péndulo (la cual se obtiene en la derivación 14.1) es

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{\ell}\theta = 0. \tag{14.12}$$

La ecuación 14.12 tiene la solución

$$\theta(t) = B \sin(\omega_0 t) + C \cos(\omega_0 t), \quad \text{con } \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}. \quad (14.13)$$

DERIVACIÓN 14.1 El movimiento pendular

El desplazamiento, s , del péndulo en la figura 14.10 se mide a lo largo de la circunferencia de un círculo con radio ℓ . Este desplazamiento puede obtenerse a partir de la longitud de una cuerda y el ángulo: $s = \ell\theta$. Debido a que la longitud no cambia con el tiempo, podemos escribir la segunda derivada del desplazamiento como

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{d^2(\ell\theta)}{dt^2} = \ell \frac{d^2\theta}{dt^2}.$$

La siguiente tarea es encontrar la aceleración angular, $d^2\theta/dt^2$, como una función del tiempo. Para lograr esto, necesitamos determinar la fuerza que causa la aceleración. Dos fuerzas actúan sobre la bola: la fuerza de gravedad, \vec{F}_g , que actúa hacia abajo, y la fuerza de tensión, \vec{T} , que actúa a lo largo de la cuerda. Dado que la cuerda se mantiene tensa y no se estira, la tensión debe ser igual al componente de la fuerza gravitacional a lo largo de la cuerda: $T = mg \cos\theta$. La suma vectorial de las fuerzas da una fuerza neta de magnitud $F_{\text{neta}} = mg \sin\theta$, dirigida como se muestra en la figura 14.10. La fuerza neta siempre tiene una dirección opuesta al desplazamiento, s .

Usando $F_{\text{neta}} = ma$, obtenemos

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = -mg \sin\theta \Rightarrow$$

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = -g \sin\theta \Rightarrow$$

$$\ell \frac{d^2\theta}{dt^2} + g \sin\theta = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{\ell} \sin\theta = 0.$$

Esta ecuación es difícil de resolver sin usar la *aproximación de ángulos pequeños*, $\sin\theta \approx \theta$ (en radianes). Al hacerlo así se produce la ecuación diferencial deseada, 14.12. La figura 14.11 muestra que la aproximación de ángulos pequeños introduce poco error para $\theta < 0.5$ radianes (aproximadamente 30°). Para estos pequeños ángulos, el movimiento del péndulo es aproximadamente el movimiento armónico simple debido a que la fuerza restauradora es aproximadamente proporcional a θ .

Para resolver la ecuación 14.12, podríamos pasar por los mismos pasos que nos condujeron a la solución de la ecuación diferencial del resorte. Sin embargo, dado que las ecuaciones 14.1 y 14.12 son de forma idéntica, podemos simplemente tomar la solución para el movimiento del resorte y realizar las sustituciones apropiadas: el ángulo θ toma el lugar x , y g/ℓ toma el lugar de k/m . De esta forma, llegamos a nuestra solución sin derivar nuestro resultado previo una segunda ocasión.

Periodo y frecuencia de un péndulo

El periodo y la frecuencia de un péndulo están relacionados a la rapidez angular de la misma forma que una masa unida a un resorte, pero con la velocidad angular dada por $\omega_0 = \sqrt{g/\ell}$:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}} \quad (14.14)$$

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{\ell}}. \quad (14.15)$$

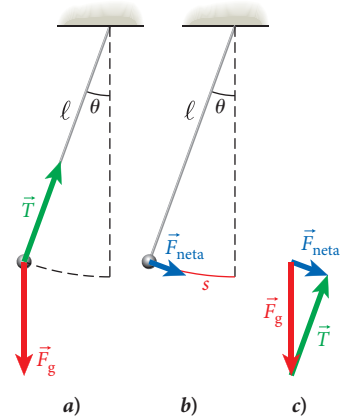


FIGURA 14.10 Un péndulo a) con los vectores fuerza debidos a la gravedad y la tensión de la cuerda y b) con el vector fuerza neta. c) Construcción vectorial de la fuerza neta.

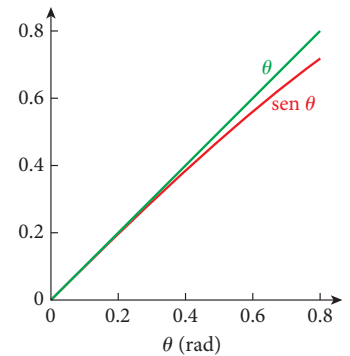


FIGURA 14.11 Gráfica que indica el error en que se incurre usando la aproximación de ángulos pequeños, $\sin\theta \approx \theta$, donde θ se mide en radianes.

14.2 Ejercicio en clase

Un péndulo se libera desde un ángulo de 6.0° con respecto a la vertical y realiza oscilaciones armónicas simples con un periodo de T . Si se duplica el ángulo inicial, a 12° , el péndulo oscilará con un periodo de

- a) $T/2$.
- b) $T/\sqrt{2}$.
- c) T .
- d) $\sqrt{2}T$.
- e) $2T$.

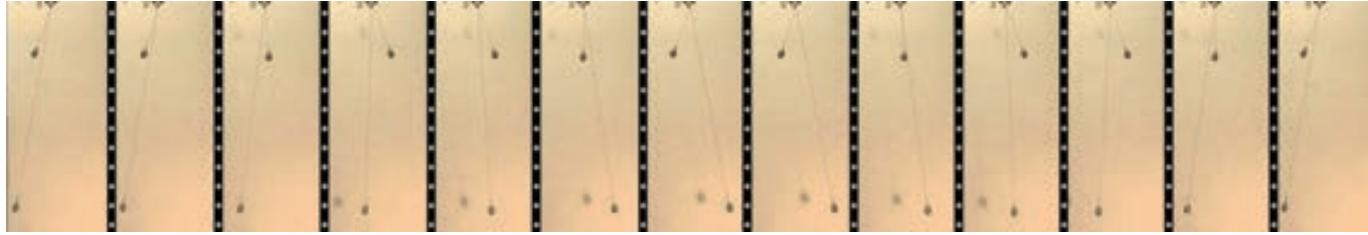


FIGURA 14.12 Secuencia de video de las oscilaciones de dos péndulos cuyas longitudes tienen una proporción de 4:1.

14.3 Oportunidad de autoexamen

Usted tiene un péndulo con un periodo T sobre la Tierra. Usted se lleva el péndulo hasta la Luna. ¿Cuál es el periodo de este péndulo sobre la Luna en términos de su periodo sobre la Tierra?

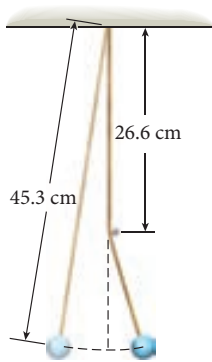


FIGURA 14.13 Péndulo restringido.

14.3 Ejercicio en clase

Un reloj de pared marca la hora usando un péndulo que consiste en una barra ligera conectada a una pequeña masa pesada. ¿Cuál debe ser la longitud de la barra para que el periodo de las oscilaciones sea de 1.00 s?

- a) 0.0150 m d) 0.439 m
- b) 0.145 m e) 0.750 m
- c) 0.248 m

De esta manera, la solución de la ecuación de movimiento del péndulo conduce al movimiento armónico, justo como en el caso de una masa unida a un resorte. Sin embargo, para el péndulo, a diferencia del resorte, la frecuencia es independiente de la masa del objeto que oscila. Este resultado significa que dos péndulos de otra manera idénticos, pero con diferentes masas, tienen el mismo periodo. La única forma de cambiar el periodo de un péndulo, sería llevarlo a otro planeta o a la Luna, en donde la aceleración gravitacional es diferente, es variando su longitud. (Desde luego, la aceleración gravitacional también tiene pequeñas variaciones sobre la Tierra, por ejemplo, dependiendo de la altitud; así es que el periodo del péndulo no es *exactamente* el mismo en todas partes de la Tierra.)

Para acortar el periodo de un péndulo por un factor de 2 se requiere acortar la longitud de la cuerda por un factor de 4. Este efecto se ilustra en la figura 14.12, la cual muestra el movimiento de dos péndulos, uno de ellos cuatro veces más largo que el otro. En esta secuencia, el péndulo más corto completa dos oscilaciones en el mismo tiempo que el péndulo más largo completa una.

EJEMPLO 14.3 Péndulo restringido

PROBLEMA

Un péndulo con una longitud de 45.3 cm cuelga del techo. Su movimiento está restringido por una clavija que sobresale de la pared 26.6 cm directamente abajo del punto del pivote (figura 14.13). ¿Cuál es el periodo de oscilación? (Note que no es necesario especificar la masa.)

SOLUCIÓN

Debemos resolver este problema de manera separada en el lado izquierdo y en el lado derecho de la clavija. Del lado izquierdo, el péndulo oscila con su longitud completa, $\ell_1 = 45.3$ cm. Del lado derecho, el péndulo oscila con una longitud reducida, $\ell_2 = 45.3$ cm - 26.6 cm = 18.7 cm. A cada lado ejecuta exactamente $\frac{1}{2}$ de una oscilación completa. De esta forma, el periodo global del péndulo es $\frac{1}{2}$ de la suma de los dos periodos calculados con las diferentes longitudes:

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{1}{2}(T_1 + T_2) = \frac{2\pi}{2} \left(\sqrt{\frac{\ell_1}{g}} + \sqrt{\frac{\ell_2}{g}} \right) = \frac{\pi}{\sqrt{g}} (\sqrt{\ell_1} + \sqrt{\ell_2}) \\
 &= \frac{\pi}{\sqrt{9.81 \text{ m/s}^2}} (\sqrt{0.453 \text{ m}} + \sqrt{0.187 \text{ m}}) \\
 &= 1.11 \text{ s.}
 \end{aligned}$$

14.3 Trabajo y energía en las oscilaciones armónicas

Los conceptos de trabajo y energía cinética fueron introducidos en el capítulo 5. En el capítulo 6 encontramos la energía potencial debida a la fuerza del resorte. En esta sección analizamos las energías asociadas con el movimiento de una masa unida a un resorte. Veremos que casi todos los resultados son aplicables al péndulo también, pero necesitamos corregir por la aproximación de ángulos pequeños usada al resolver la ecuación diferencial para el movimiento del péndulo.

Masa unida a un resorte

En el capítulo 6 no tuvimos a nuestra disposición la ecuación para el desplazamiento como una función del tiempo; sin embargo, derivamos la energía potencial almacenada en un resorte (spring), U_s , como

$$U_s = \frac{1}{2} kx^2,$$

donde k es la constante de resorte y x es el desplazamiento desde la posición de equilibrio. También vimos que la energía mecánica total de la masa unida a un resorte experimentando oscilaciones de amplitud, A , está dada por

$$E = \frac{1}{2} kA^2.$$

La conservación de la energía mecánica total significa que esta expresión brinda el valor de la energía para cada punto en la oscilación. Usando la ley de la conservación de la energía, podemos escribir

$$\frac{1}{2} kA^2 = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} kx^2.$$

Entonces podemos resolver para la velocidad como función de la posición:

$$v = \sqrt{(A^2 - x^2) \frac{k}{m}}. \quad (14.16)$$

Las funciones $v(t)$ y $x(t)$ dadas en la ecuación 14.6 describen la oscilación a través del tiempo de una masa unida a un resorte. Podemos usar estas funciones para verificar las relaciones entre la posición y la velocidad expresada en la ecuación 14.16, la cual obtuvimos a partir de la conservación de la energía. De esta forma, podemos probar directamente si este nuevo resultado es consistente con lo que hemos encontrado antes. Primero, evaluamos $A^2 - x^2$:

$$\begin{aligned} A^2 - x^2 &= A^2 - A^2 \sin^2(\omega_0 t + \theta_0) \\ &= A^2 [1 - \sin^2(\omega_0 t + \theta_0)] \\ &= A^2 \cos^2(\omega_0 t + \theta_0). \end{aligned}$$

Multiplicando ambos lados por $\omega_0^2 = k/m$, obtenemos

$$\frac{k}{m}(A^2 - x^2) = \frac{k}{m} A^2 \cos^2(\omega_0 t + \theta_0) = v^2.$$

Sacando la raíz cuadrada de ambos lados de esta ecuación, obtenemos la misma ecuación para la velocidad que la obtenida por las consideraciones de energía, ecuación 14.16.

La figura 14.14 ilustra las oscilaciones de las energías cinética y potencial como función del tiempo para una masa oscilando en un resorte. Como usted puede ver, incluso a pesar de que las energías potencial y cinética oscilan con el tiempo, su suma —la energía mecánica total— es constante. La energía cinética siempre alcanza su máximo cuando el desplazamiento pasa a través de cero y la energía potencial siempre alcanza su máximo para la máxima elongación del resorte a partir de la posición de equilibrio.

Los vectores de posición, velocidad y aceleración en varias posiciones para un bloque en un resorte que experimenta movimiento armónico simple se mostraron en la figura 14.5; la cual reproduce esa figura, pero también muestra las energías potencial y cinética (U y K) en cada posición. En la figura 14.15a), el bloque se libera a partir del reposo en una posición $x = A$. En este punto, toda la energía en el sistema existe en la forma de energía potencial almacenada en el resorte y el bloque no tiene energía cinética. Entonces el bloque se acelera hacia la izquierda. En $x = A/\sqrt{2}$, mostrado en la figura 14.15b), la energía potencial almacenada en el resorte y la energía cinética del bloque son iguales. En la figura 14.15c), el bloque alcanza la posición de equilibrio del resorte, $x = 0$, punto en el cual la energía potencial almacenada en el resorte es cero y el bloque tiene la energía cinética máxima. El bloque continúa moviéndose, más allá de la posición de equilibrio, y en la figura 14.15d) se ubica en $x = -A/\sqrt{2}$. De nuevo

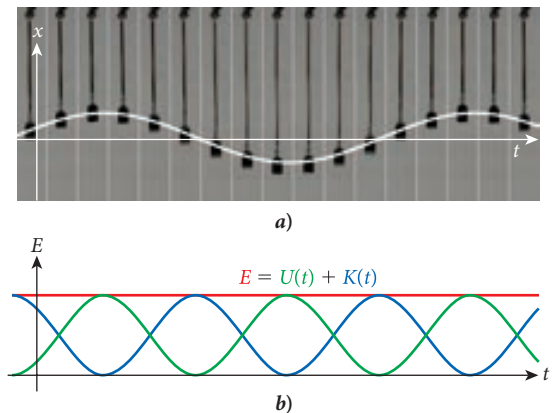
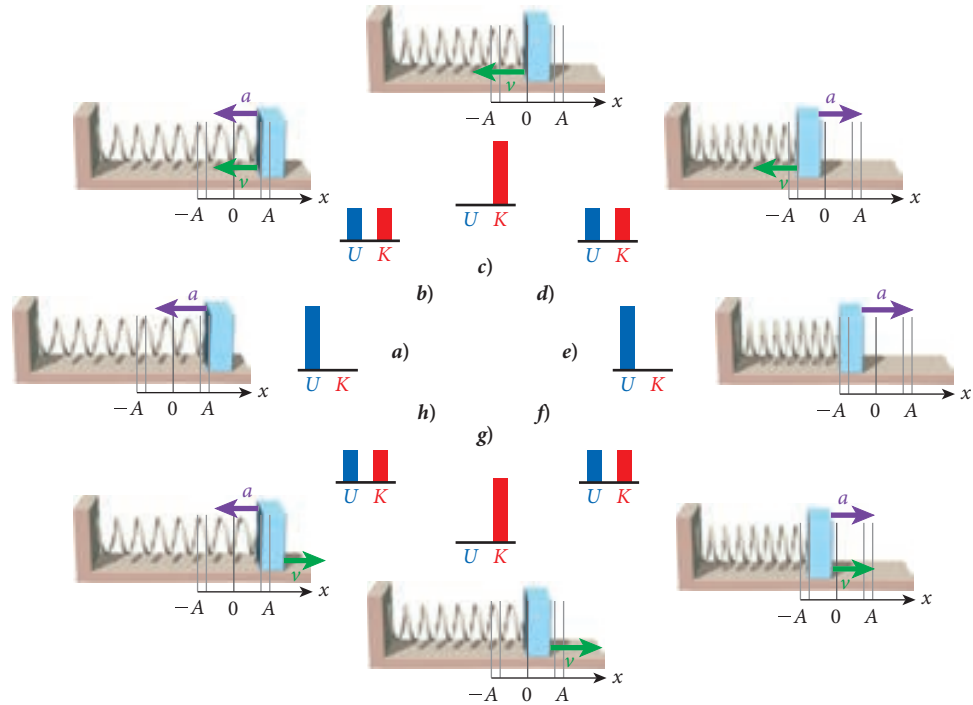


FIGURA 14.14 Oscilaciones armónicas de una masa unida a un resorte: a) desplazamiento como una función del tiempo (lo mismo que en la figura 14.2); b) energías potencial y cinética como función del tiempo en la misma escala de tiempo.

FIGURA 14.15 Vectores de posición, velocidad y aceleración para una masa unida a un resorte (como en la figura 14.5), con las energías potencial y cinética en cada posición.



la energía potencial en el resorte y la energía cinética del bloque son iguales. En la figura 14.15e), el bloque está ubicado en $x = -A$, donde la energía potencial almacenada en el resorte está en el máximo y la energía cinética del bloque es cero. El bloque ha regresado a $x = -A/\sqrt{2}$ en la figura 14.15f), y la energía potencial en el resorte es otra vez igual a la energía cinética del bloque. En la figura 14.15g), el bloque se encuentra ubicado en $x = 0$, donde la energía potencial en el resorte es cero y la energía cinética del bloque se encuentra al máximo. El bloque continúa a través de esa posición de equilibrio y alcanza a $x = A/\sqrt{2}$ en la figura 14.15h), y otra vez la energía potencial en el resorte es igual a la energía cinética del bloque. El bloque regresa a su posición original en la figura 14.15a).

Energía de un péndulo

En la sección 14.2 vimos que la dependencia con respecto al tiempo del ángulo de deflexión es $\theta(t) = \theta_0 \cos(\sqrt{g/\ell} t)$, si se conocen las condiciones iniciales de la deflexión máxima y la rapidez cero al tiempo cero entonces se conoce $\theta(t = 0) = \theta_0$. Podemos entonces encontrar la velocidad lineal en cada punto como función del tiempo sacando la derivada, $d\theta/dt = \omega$, y multiplicando esta rapidez angular por el radio del círculo, ℓ :

$$v = \ell \frac{d\theta(t)}{dt} = -\theta_0 \sqrt{g\ell} \operatorname{sen} \left(\sqrt{\frac{g}{\ell}} t \right).$$

Debido a que $\operatorname{sen} \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$, podemos sustituir la expresión para el ángulo de deflexión como una función del tiempo en esta ecuación para la velocidad y obtener la rapidez del péndulo como función del ángulo:

$$\begin{aligned} |v| &= |\theta_0| \sqrt{g\ell} \left| \operatorname{sen} \left(\sqrt{\frac{g}{\ell}} t \right) \right| \\ &= |\theta_0| \sqrt{g\ell} \sqrt{1 - \cos^2 \left(\sqrt{\frac{g}{\ell}} t \right)} \\ &= |\theta_0| \sqrt{g\ell} \sqrt{1 - \frac{\theta^2}{\theta_0^2}} \Rightarrow \\ |v| &= \sqrt{g\ell(\theta_0^2 - \theta^2)}. \end{aligned} \tag{14.17}$$

¿Cuál es la energía del péndulo? Al tiempo cero, el péndulo sólo tiene energía potencial gravitacional. Podemos asignar a la energía potencial un valor de cero en el punto inferior del arco. A partir de la figura 14.16, la energía potencial en la deflexión máxima, θ_0 , es

$$E = K + U = 0 + U = mg\ell(1 - \cos\theta_0).$$

Esto también nos da el valor de la energía mecánica total, debido a que, por definición, el péndulo tiene energía cinética cero en el punto de la máxima deflexión, de la misma forma que lo hace el resorte. Para cualquiera otra deflexión, la energía es la suma de las energías cinética y potencial:

$$E = mg\ell(1 - \cos\theta) + \frac{1}{2}mv^2.$$

Combinando las dos ecuaciones anteriores para E (dado que se conserva la energía total) obtenemos

$$\begin{aligned} mg\ell(1 - \cos\theta_0) &= mg\ell(1 - \cos\theta) + \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow \\ mg\ell(\cos\theta - \cos\theta_0) &= \frac{1}{2}mv^2. \end{aligned}$$

Al resolver esta ecuación para la rapidez (el valor absoluto de la velocidad), obtenemos

$$|v| = \sqrt{2g\ell(\cos\theta - \cos\theta_0)}. \quad (14.18)$$

La ecuación 14.18 es la expresión exacta para la velocidad del péndulo para cualquier ángulo θ , la cual obtuvimos directamente y sin la necesidad de resolver ninguna ecuación diferencial. Esta ecuación, sin embargo, no coincide con la ecuación 14.17, la cual obtuvimos a partir de la solución de la ecuación diferencial. Sin embargo, recuerde que usamos la aproximación de ángulo pequeño con anterioridad para resolver la ecuación diferencial. Para ángulos pequeños, podemos aproximar $\cos\theta \approx 1 - \frac{1}{2}\theta^2 + \dots$, y así la ecuación 14.17 es un caso especial de la ecuación 14.18. Nuestra derivación de la ecuación 14.18 usando las consideraciones de la energía no usó la aproximación de ángulo pequeño y de este modo la ecuación es válida para todos los ángulos de deflexión. Sin embargo, las diferencias entre los valores obtenidos con las dos ecuaciones son bastante pequeñas, como puede ver en la figura 14.17.

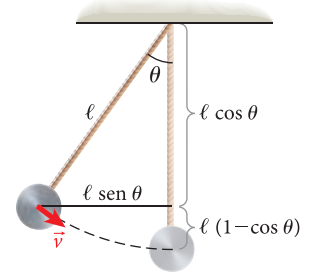


FIGURA 14.16 Geometría de un péndulo.

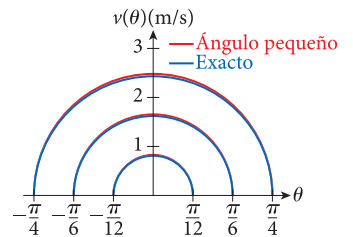


FIGURA 14.17 Comparación de las rapidez de un péndulo (de 1 m de longitud) como una función del ángulo de deflexión, calculadas con la aproximación de ángulo pequeño (curvas rojas) y la fórmula exacta basada en la conservación de la energía (curvas azules). Los tres juegos de curvas representan ángulos iniciales de 15°, 30° y 45° (de adentro hacia afuera).

EJEMPLO 14.4 Velocidad en un trapecio

PROBLEMA

Una trapecionista comienza su movimiento sobre un trapecio a partir del reposo con la cuerda a un ángulo de 45° con respecto a la vertical. La cuerda tiene una longitud de 5.00 m. ¿Cuál es su velocidad en el punto inferior de su trayectoria?

SOLUCIÓN

La condición inicial es $\theta_0 = 45^\circ = \pi/4$ rad. Estamos interesados en encontrar $v(\theta = 0)$. Aplicando la conservación de la energía, usamos la ecuación 14.18:

$$v(\theta) = \sqrt{2g\ell(\cos\theta - \cos\theta_0)}.$$

Al sustituir valores, obtenemos

$$v\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2(9.81 \text{ m/s}^2)(5.00 \text{ m})\left(1 - \sqrt{\frac{1}{2}}\right)} = 5.36 \text{ m/s}.$$

Con la aproximación de ángulo pequeño, por comparación, tenemos $v(\pi/4) = \theta_0 \sqrt{g\ell} = 5.50$ m/s. Esto está muy cerca del resultado exacto, pero para muchas aplicaciones no es suficientemente preciso.

14.4 Movimiento armónico amortiguado

Los resortes y los péndulos no siguen oscilando para siempre; después de algún tiempo, se detienen por completo. Este efecto de disminución de la rapidez se llama **amortiguamiento**. En la figura 14.18, el ejemplo muestra una masa unida a un resorte oscilando en agua, la cual ofrece resistencia al movimiento de la masa y lo amortigua. El centro de masa sigue la curva roja superimpuesta en los cuadros de video de la figura 14.18b). La curva roja es el producto de un movimiento armónico simple (curva naranja) y una función exponencialmente decreciente (curva amarilla).

Con objeto de cuantificar los efectos del amortiguamiento, necesitamos considerar la fuerza de amortiguamiento. Como recién hemos visto, una fuerza como la del resorte, F_s , la cual depende linealmente de la posición, no presenta amortiguamiento. Sin embargo, una fuerza que depende de la velocidad sí lo hace. Para velocidades que no son muy grandes, el amortiguamiento está dado por la forma $F_\gamma = -bv$, donde b es una constante, conocida como la constante de amortiguamiento, y $v = dx/dt$ es la velocidad. Con esta fuerza de amortiguamiento, F_γ , podemos escribir la ecuación diferencial que describe el movimiento armónico amortiguado:

$$\begin{aligned}
 ma &= F_\gamma + F_s \\
 m \frac{d^2x}{dt^2} &= -b \frac{dx}{dt} - kx \Rightarrow \\
 \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{14.19}$$

La solución de esta ecuación depende de qué tan grande es la fuerza de amortiguamiento en relación con la fuerza de restauración lineal, responsable del movimiento armónico. Esta relación establece tres casos generales:

Amortiguamiento pequeño

Para valores pequeños de la constante de amortiguamiento, b (“pequeña” se especificará abajo), la solución de la ecuación 14.19 es

$$x(t) = Be^{-\omega_\gamma t} \cos(\omega' t) + Ce^{-\omega_\gamma t} \sin(\omega' t).
 \tag{14.20}$$

Los coeficientes B y C están determinados por las condiciones iniciales, esto es, la posición, x_0 , y la velocidad, v_0 , al tiempo, $t = 0$:

$$B = x_0 \quad \text{y} \quad C = \frac{v_0 + x_0 \omega_\gamma}{\omega'}.$$

Las rapidezces angulares en esta solución están dadas por

$$\begin{aligned}
 \omega_\gamma &= \frac{b}{2m} \\
 \omega' &= \sqrt{\omega_0^2 - \omega_\gamma^2} = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}.
 \end{aligned}$$

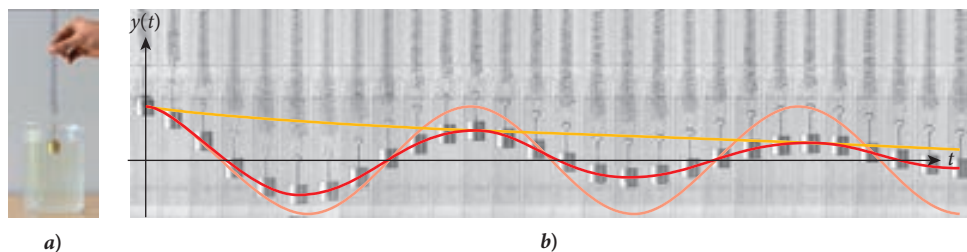


FIGURA 14.18 Ejemplo del movimiento armónico amortiguado: masa unida a un resorte oscilando en agua. a) Condiciones iniciales. b) Cuadros de video que muestran el movimiento de la masa después de ser liberada.

Esta solución es válida para todos los valores de la constante de amortiguamiento, b , para los cuales el argumento de la raíz cuadrada que determina ω' permanece positivo:

$$b < 2\sqrt{mk}. \quad (14.21)$$

Ésta es la condición para amortiguamiento pequeño, también conocida como subamortiguamiento.

DERIVACIÓN 14.2 Amortiguamiento pequeño

Podemos mostrar que la ecuación 14.20 satisface la ecuación para el movimiento armónico amortiguado (ecuación 14.19) en el caso límite de amortiguamiento pequeño. Comenzaremos con una solución supuesta, que los matemáticos llaman un *Ansatz* (la palabra alemana para “intento” <más bien como “apreciación”>). Con objeto de derivar el resultado a partir del *Ansatz*, no se necesita más conocimiento de la ecuación diferencial; todo lo que se requiere es sacar las derivadas.

Ansatz:

$$\begin{aligned} x(t) &= Be^{-\omega_\gamma t} \cos(\omega' t) \\ \Rightarrow \frac{dx}{dt} &= -\omega_\gamma Be^{-\omega_\gamma t} \cos(\omega' t) - \omega' Be^{-\omega_\gamma t} \sin(\omega' t) \\ \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} &= [\omega_\gamma^2 - (\omega')^2] Be^{-\omega_\gamma t} \cos(\omega' t) + 2\omega_\gamma \omega' Be^{-\omega_\gamma t} \sin(\omega' t). \end{aligned}$$

Insertamos estas expresiones en la ecuación 14.19:

$$\begin{aligned} &[\omega_\gamma^2 - (\omega')^2] Be^{-\omega_\gamma t} \cos(\omega' t) + 2\omega_\gamma \omega' Be^{-\omega_\gamma t} \sin(\omega' t) \\ &+ \frac{b}{m} [-\omega_\gamma Be^{-\omega_\gamma t} \cos(\omega' t) - \omega' Be^{-\omega_\gamma t} \sin(\omega' t)] \\ &+ \frac{k}{m} [Be^{-\omega_\gamma t} \cos(\omega' t)] = 0. \end{aligned}$$

Ahora, reacomodamos los términos:

$$\begin{aligned} &[\omega_\gamma^2 - (\omega')^2 - \frac{b}{m} \omega_\gamma + \frac{k}{m}] Be^{-\omega_\gamma t} \cos(\omega' t) + \\ &[2\omega_\gamma \omega' - \frac{b}{m} \omega'] Be^{-\omega_\gamma t} \sin(\omega' t) = 0. \end{aligned}$$

Esta ecuación cumple para cualquier tiempo, t , sólo si los coeficientes que anteceden a las funciones seno y coseno son cero. De esta forma, tenemos dos condiciones:

$$2\omega_\gamma \omega' - \frac{b}{m} \omega' = 0 \quad \omega_\gamma = \frac{b}{2m}$$

y

$$\omega_\gamma^2 - (\omega')^2 - \frac{b}{m} \omega_\gamma + \frac{k}{m} = 0.$$

Para simplificar la segunda condición, usamos la primera condición, $\omega_\gamma = b/(2m)$, y la expresión de la velocidad angular que obtuvimos antes para el movimiento armónico simple, $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. Entonces obtenemos, para la segunda condición:

$$[-(\omega')^2 - \omega_\gamma^2 + \omega_0^2] = 0 \Rightarrow \omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \omega_\gamma^2}.$$

Podríamos pasar por los mismos pasos para mostrar que $Ce^{-\omega_\gamma t} \sin(\omega' t)$ es también una solución válida y además podríamos mostrar que estas dos soluciones son las únicas posibles (pero nos saltaremos dichas demostraciones).

En las derivaciones de este capítulo que involucran ecuaciones diferenciales, hemos procedido de la misma manera. Este método es un acercamiento general a la solución de problemas que involucran ecuaciones diferenciales: escoger la solución de prueba y después ajustar los parámetros y hacer otros cambios basándose en los resultados obtenidos al insertar la solución de prueba en la ecuación diferencial.

De la misma forma que en el caso del movimiento no amortiguado, también podemos escribir la solución en términos de una amplitud, A , y la diferencia de fase determinada por θ_0 en lugar de usar los coeficientes B y C para las funciones seno y coseno, como en la ecuación 14.20:

$$x(t) = Ae^{-\omega\gamma t} \sin(\omega' t + \theta_0). \tag{14.22}$$

Ahora, echemos un vistazo a la gráfica de la ecuación 14.20, la cual describe el movimiento armónico amortiguado (figura 14.19). Las funciones seno y coseno describen el comportamiento oscilatorio. Su combinación resulta en otra función seno, con una diferencia de fase. Se puede pensar en las funciones exponenciales que las multiplican como reduciendo la amplitud en el tiempo. De esta forma, las oscilaciones muestran una amplitud que decae exponencialmente. La rapidez angular, ω' , de la oscilación se reduce en relación con la rapidez angular de las oscilaciones sin amortiguamiento, ω_0 . La gráfica de la figura 14.19 fue generada con $k = 11.00 \text{ N/m}$, $m = 1.800 \text{ kg}$ y $b = 0.500 \text{ kg/s}$. Estos parámetros dan por resultado una rapidez angular $\omega' = 2.468 \text{ s}^{-1}$, comparada con la rapidez angular $\omega_0 = 2.472 \text{ s}^{-1}$ para el caso sin amortiguamiento. La amplitud es $A = 5 \text{ cm}$ y $\theta_0 = 1.6$. La curva azul oscuro es la gráfica de la función, y las dos curvas azul claro muestran la envolvente exponencial, dentro de la cual la amplitud se reduce como función del tiempo.

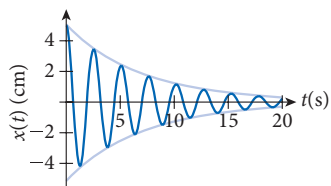


FIGURA 14.19 Posición contra tiempo para una oscilación armónica débilmente amortiguada.

EJEMPLO 14.5 Salto en bungee

Un puente sobre un valle profundo es ideal para salto en bungee. La primera parte del salto en bungee consiste en una caída libre de la misma longitud que la de la cuerda elástica sin estirar. Suponga que la altura del puente es de 50 m. Se usa una cuerda de bungee de 30 m y se estira 5 m por el peso de una persona de 70 kg. De esta manera, la longitud de equilibrio de la cuerda de bungee es de 35 m. Se ha estimado que la cuerda de bungee tiene una velocidad angular de amortiguamiento de 0.3 s^{-1} .

PROBLEMA

Describa el movimiento vertical de la saltadora de bungee como una función del tiempo.

SOLUCIÓN

Desde la parte superior del puente, la saltadora experimenta la caída libre los primeros 30 m de su descenso, mostrado por la parte roja de la trayectoria en la figura 14.20. Una vez que cae la longitud de la cuerda, 30 m, ella alcanza una velocidad de $v_0 = -\sqrt{2g\ell} = -24.26 \text{ m/s}$. Esta parte

de la trayectoria toma un tiempo $t = \sqrt{2\ell/g} = 2.47 \text{ s}$.

Entonces, ella entra en una oscilación amortiguada $y(t)$ en torno de la posición de equilibrio, $y_e = 50 \text{ m} - 35 \text{ m} = 15 \text{ m}$, con el desplazamiento inicial, $y_0 = 5 \text{ m}$. Podemos calcular la velocidad angular de su movimiento vertical a partir de que sabemos que la cuerda se estira 5 m debido a la masa de 70 kg y usando $mg = k(5 \text{ m})$:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{g}{\ell_0 - \ell}} = \sqrt{\frac{9.8 \text{ m/s}^2}{5 \text{ m}}} = 1.4 \text{ s}^{-1}.$$

Debido a que $\omega_\gamma = 0.3 \text{ s}^{-1}$, fue especificada, tenemos

$\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \omega_\gamma^2} = 1.367 \text{ s}^{-1}$. La saltadora de bungee oscila de acuerdo con la ecuación 14.20, con coeficientes $B = y_0 = 5 \text{ m}$ y $C = (v_0 + y_0 \omega_\gamma)/\omega' = -16.65 \text{ m/s}$. Este movimiento está representado por la parte verde de la curva en la figura 14.20.

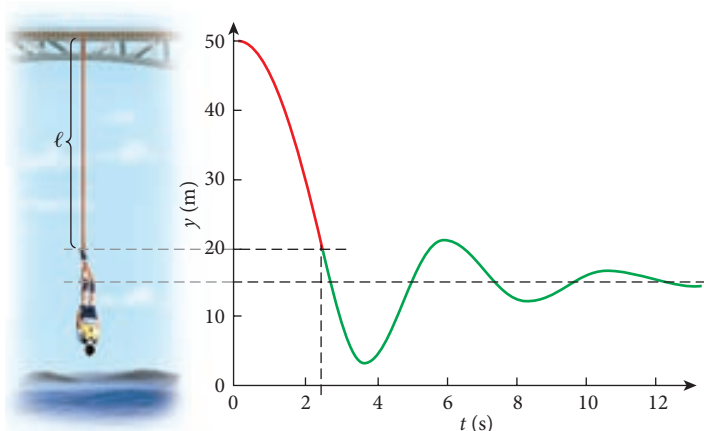


FIGURA 14.20 Movimiento vertical idealizado como una función de tiempo de un salto en bungee.

DISCUSIÓN

La aproximación del movimiento armónico amortiguado para la parte final del salto en bungee no es del todo exacta. Si usted examina la figura 14.20 con cuidado, verá que la saltadora sube por encima de los 20 m durante aproximadamente 1 s, comenzando de manera aproximada a los 5.5 s. Durante este intervalo, la cuerda de bungee no está estirada y de esta forma esta parte del movimiento no es sinusoidal. En lugar de esto, la saltadora de bungee se encuentra en movimiento de caída libre. Sin embargo, para la discusión cualitativa presente, la aproximación del movimiento armónico amortiguado es aceptable. Si usted planea saltar en bungee (se advierte fuertemente en contra de esto, ¡a la luz de las fatalidades pasadas!), siempre debe probar el montaje con un objeto de peso mayor o igual al suyo.

Amortiguamiento grande

¿Qué pasa cuando la condición de amortiguamiento pequeño, $b < 2\sqrt{mk}$ ya no se cumple? El argumento de la raíz cuadrada que determina ω' será menor que cero y de esta manera el *Ansatz* que usamos para el amortiguamiento pequeño ya no funciona más. La solución de la ecuación diferencial para las oscilaciones armónicas amortiguadas (ecuación 14.19) para el caso donde $b > 2\sqrt{mk}$, una situación llamada **sobreamortiguamiento**, es

$$x(t) = Be^{-(\omega_\gamma + \sqrt{\omega_\gamma^2 - \omega_0^2})t} + Ce^{-(\omega_\gamma - \sqrt{\omega_\gamma^2 - \omega_0^2})t}, \quad \text{para } b > 2\sqrt{mk}, \quad (14.23)$$

con las amplitudes dadas por

$$B = \frac{1}{2}x_0 - \frac{x_0\omega_\gamma + v_0}{2\sqrt{\omega_\gamma^2 - \omega_0^2}}, \quad C = \frac{1}{2}x_0 + \frac{x_0\omega_\gamma + v_0}{2\sqrt{\omega_\gamma^2 - \omega_0^2}}.$$

De nuevo, tenemos para las rapidezces angulares

$$\omega_\gamma = \frac{b}{2m}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Los coeficientes B y C se determinan con las condiciones iniciales.

La solución dada en la ecuación 14.23 no tiene oscilaciones, sino que, en lugar de esto, consiste de dos términos exponenciales. El término con el argumento $-\omega_\gamma t + \sqrt{\omega_\gamma^2 - \omega_0^2} t$ gobierna el comportamiento a largo plazo del sistema debido a que decae con más lentitud que el otro término.

En la figura 14.21 se graficó un ejemplo del movimiento de un oscilador sobreamortiguado. Se generó la gráfica para $k = 1.0$ N/m, $m = 1.0$ kg y $b = 3.0$ kg/s, tales que $b (= 3.0 \text{ kg/s}) > 2\sqrt{mk}$ ($= 2 \text{ kg/s}$). Dichos parámetros dan por resultado una rapidez angular $\omega_\gamma = 1.5 \text{ s}^{-1}$, en comparación con la velocidad angular de $\omega_0 = 1.0 \text{ s}^{-1}$ para el caso sin amortiguamiento. El desplazamiento inicial fue de $x_0 = 5.0$ cm, y se supone que el sistema se libera a partir del reposo. El desplazamiento tiende a cero sin ninguna oscilación.

Los coeficientes B y C pueden tener signos opuestos, de tal suerte que el valor x determinado por la ecuación 14.23 puede cambiar de signo una vez a lo sumo. Físicamente, este cambio de signo corresponde a la situación en la cual el oscilador recibe una velocidad inicial grande en la dirección de la posición de equilibrio. En este caso, el oscilador puede pasarse de la posición de equilibrio y acercarse por el otro lado.

Amortiguamiento crítico

Debido a que ya hemos cubierto las soluciones de la ecuación 14.19 para $b < 2\sqrt{mk}$ y $b > 2\sqrt{mk}$, usted podría verse tentado a pensar que podemos encontrar la solución para $b = 2\sqrt{mk}$ a través de algún proceso de límite o alguna interpolación entre estas dos soluciones. Este caso, sin embargo, no es tan sencillo y tenemos que emplear un *Ansatz* un poco diferente. La solución para el caso donde $b = 2\sqrt{mk}$ se conoce como **amortiguamiento crítico**, y está dada por

$$x(t) = Be^{-\omega_\gamma t} + tCe^{-\omega_\gamma t}, \quad \text{para } b = 2\sqrt{mk}, \quad (14.24)$$

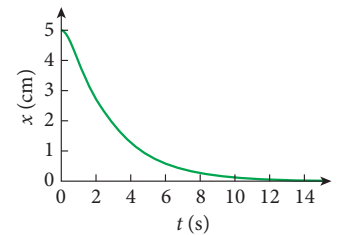


FIGURA 14.21 Posición contra tiempo para un oscilador sobreamortiguado.

donde los coeficientes de la amplitud tienen los valores

$$B = x_0, C = v_0 + x_0\omega_\gamma.$$

La rapidez angular en esta solución es todavía $\omega_\gamma = b/2m$.

Miremos un ejemplo en el cual los coeficientes B y C están determinados a partir de las condiciones iniciales para el movimiento armónico amortiguado.

EJEMPLO 14.6 Movimiento armónico amortiguado

PROBLEMA

Un resorte con una constante de resorte $k = 1.00 \text{ N/m}$ tiene un objeto de masa $m = 1.00 \text{ kg}$ sujeto a éste, el cual se mueve en un medio con una constante de amortiguamiento $b = 2.00 \text{ kg/s}$. El objeto se libera a partir del reposo en $x = +5 \text{ cm}$ desde la posición de equilibrio. ¿Dónde estará después de 1.75 s ?

SOLUCIÓN

Primero, tenemos que decidir cuál de los tres tipos de amortiguamiento se aplica en esta situación. Para averiguarlo, calculamos $2\sqrt{mk} = 2\sqrt{(1 \text{ kg})(1 \text{ N/m})} = 2 \text{ kg/s}$, el cual resulta ser exactamente igual al valor dado para la constante de amortiguamiento, b . Por lo tanto, este movimiento es críticamente amortiguado. Podemos también calcular la rapidez angular de amortiguamiento: $\omega_\gamma = b/2m = 1.00 \text{ s}^{-1}$.

El planteamiento del problema nos brinda las condiciones iniciales: $x_0 = +5 \text{ cm}$ y $v_0 = 0$. Determinamos las constantes B y C a partir de las condiciones iniciales (expresiones para estas constantes). Usamos la ecuación 14.24 para el amortiguamiento crítico:

$$x(t) = Be^{-\omega_\gamma t} + tCe^{-\omega_\gamma t}$$

$$\Rightarrow x(0) = Be^{-\omega_\gamma \cdot 0} + 0 \cdot Ce^{-\omega_\gamma \cdot 0} = B.$$

Luego, sacamos la derivada con respecto al tiempo:

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega_\gamma Be^{-\omega_\gamma t} + C(1 - \omega_\gamma t)e^{-\omega_\gamma t}$$

$$\Rightarrow v(0) = -\omega_\gamma Be^{-\omega_\gamma \cdot 0} + C(1 - (\omega_\gamma \cdot 0))e^{-\omega_\gamma \cdot 0} = -\omega_\gamma B + C.$$

De acuerdo con el planteamiento del problema, $v_0 = 0$, lo cual produce $C = \omega_\gamma B$, y $x_0 = +5 \text{ cm}$, lo cual determina a B . Ya antes hemos calculado $\omega_\gamma = 1.00 \text{ s}^{-1}$. De esta manera, tenemos

$$x(t) = (5 \text{ cm})(1 + \omega_\gamma t)e^{-\omega_\gamma t}$$

$$= (5 \text{ cm})(1 + (1.00 \text{ s}^{-1})t)e^{-(1.00/s)t}.$$

Ahora calculamos la posición de la masa después de 1.75 s :

$$x(1.75 \text{ s}) = (5 \text{ cm})(1 + 1.75)e^{-1.75} = 2.39 \text{ cm}.$$

La figura 14.22 muestra una gráfica para el desplazamiento de este oscilador críticamente amortiguado como una función del tiempo. También incluye la curva de la figura 14.21 para el oscilador sobreamortiguado, el cual tiene la misma masa y constante de resorte, pero una constante de amortiguamiento mayor, $b = 3.0 \text{ kg/s}$. Note que el oscilador críticamente amortiguado alcanza el desplazamiento cero más rápido que el oscilador sobreamortiguado.

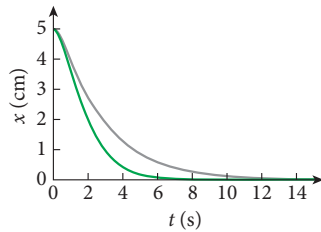


FIGURA 14.22 El desplazamiento de un oscilador críticamente amortiguado como función del tiempo. La línea gris reproduce la curva para el oscilador sobreamortiguado de la figura 14.21.

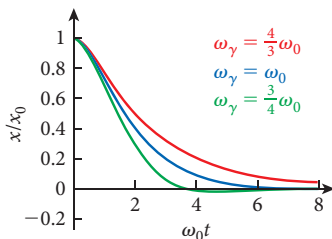


FIGURA 14.23 Posición contra tiempo para el movimiento subamortiguado (línea verde), sobreamortiguado (línea roja) y críticamente amortiguado (línea azul).

Para comparar los movimientos subamortiguados, sobreamortiguados y críticamente amortiguados, la figura 14.23 grafica la posición contra el producto de rapidez angular y el tiempo para cada tipo de movimiento. En los tres casos, el oscilador comienza a partir del reposo al tiempo $t = 0$. La línea verde representa el caso subamortiguado; usted puede ver que la oscilación continúa. La línea roja refleja el amortiguamiento grande por arriba del valor crítico y la línea azul refleja el amortiguamiento crítico.

Una solución de ingeniería que proporciona una oscilación amortiguada que regrese tan pronto como sea posible a la posición de equilibrio y que no tenga oscilaciones necesita usar

la condición de amortiguamiento crítico. Ejemplos de tal aplicación son los amortiguadores de los autos, motocicletas (figura 14.24) y bicicletas. Para un desempeño máximo, necesitan trabajar en el límite del amortiguamiento crítico o justo por debajo de éste. Conforme se van gastando, el efecto de amortiguamiento se hace más débil y los amortiguadores brindan sólo un pequeño amortiguamiento. Esto da por resultado una sensación “de rebote” para los pasajeros e indica que es tiempo de cambiar los amortiguadores del vehículo.

Pérdida de energía en oscilaciones amortiguadas

Las oscilaciones amortiguadas son el resultado de una fuerza dependiente de la velocidad (y por ende, no conservativa), $F_\gamma = -bv$, y están descritas por la ecuación diferencial (compare con la ecuación 14.19)

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\omega_\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0, \quad (14.25)$$

donde $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ (k es la constante de resorte y m es la masa) es la rapidez angular de la oscilación armónica sin amortiguamiento y $\omega_\gamma = b/2m$ es la rapidez angular con amortiguamiento. La fuerza de amortiguamiento no conservativa debe dar por resultado una pérdida de la energía mecánica total. Examinaremos la pérdida de energía para el amortiguamiento pequeño solamente, debido a que este caso es por mucho el de la mayor importancia tecnológica. Sin embargo, los amortiguamientos grande y crítico pueden tratarse de una manera análoga.

Para un amortiguamiento pequeño, vimos que el desplazamiento como función del tiempo puede escribirse en términos de una sola función sinusoidal con un corrimiento de fase (compare con la ecuación 14.22):

$$x(t) = Ae^{-\omega_\gamma t} \sin(\omega' t + \theta_0). \quad (14.26)$$

Esta solución puede comprenderse como una oscilación sinusoidal en el tiempo con una rapidez angular $\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \omega_\gamma^2}$ y con una amplitud que decrece en forma exponencial.

Sabemos que la fuerza de amortiguamiento es no conservativa y así podemos estar seguros de que la energía mecánica se pierde con el tiempo. Dado que la energía de una oscilación armónica es proporcional al cuadrado de la amplitud, $E = \frac{1}{2}kA^2$, podríamos inclinarnos a pensar que la energía decrece suavemente y exponencialmente para las oscilaciones amortiguadas. Sin embargo, éste no es el caso del todo, lo cual puede demostrarse como sigue.

Primero, podemos encontrar la velocidad como función del tiempo, sacando la derivada con respecto al tiempo de la ecuación 14.26:

$$v(t) = \omega' A e^{-\omega_\gamma t} \cos(\omega' t + \theta_0) - \omega_\gamma A e^{-\omega_\gamma t} \sin(\omega' t + \theta_0).$$

Después, sabemos la energía potencial almacenada en el resorte como función del tiempo, $U = \frac{1}{2}kx^2(t)$, lo mismo que la energía cinética debida al movimiento de la masa, $K = \frac{1}{2}mv^2(t)$. Podemos graficar estas energías y el desplazamiento y la velocidad como funciones del tiempo, como se muestra en las gráficas de la figura 14.25, donde $k = 11.00$ N/m, $m = 1.800$ kg y $b = 0.500$ kg/s. Estos parámetros dan por resultado una rapidez angular de $\omega' = 2.468$ s⁻¹, comparada con la rapidez angular de $\omega_0 = 2.472$ s⁻¹ para el caso del sin amortiguamiento y una rapidez angular amortiguada de $\omega_\gamma = 0.139$ s⁻¹. La amplitud es $A = 5$ cm y $\theta_0 = 1.6$.

La figura 14.25 muestra que la energía total no decrece de manera exponencial uniforme, sino que en lugar de esto, disminuye en forma escalonada. Esta pérdida de energía puede representarse de una manera directa escribiendo una expresión para la potencia, esto es, la tasa de pérdida de energía:

$$\frac{dE}{dt} = -bv^2 = vF_\gamma.$$

De esta forma, la tasa de pérdida de energía es mayor donde la velocidad tiene el valor absoluto mayor, lo cual sucede cuando la masa pasa a través de la posición de equilibrio. Cuando la masa alcanza los puntos donde la velocidad es cero y está a punto de cambiar de dirección, toda la energía es potencial y no hay pérdida de energía en esos puntos.



FIGURA 14.24 Los amortiguadores en la rueda frontal de una motocicleta.

14.4 Oportunidad de autoexamen

Considere un péndulo cuyo movimiento es subamortiguado por un término dado por el producto de una constante de amortiguamiento, α , y la velocidad de la masa en movimiento. Haciendo la aproximación de ángulo pequeño, podemos escribir la ecuación diferencial

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \alpha \frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{\ell} \theta = 0.$$

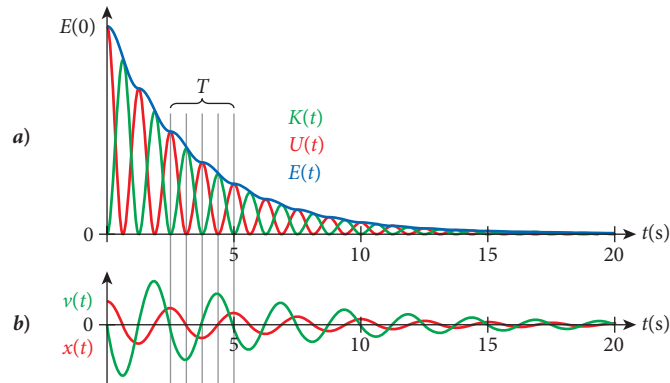
Por analogía con la masa unida a un resorte, dé las expresiones para las velocidades angulares que caracterizan este movimiento angular: ω_γ , ω' y ω_0 .

14.4 Ejercicio en clase

Un automóvil con una masa de 1 640 kg se levanta en el aire. Cuando se levanta el coche, el resorte de la suspensión de cada rueda se alarga por 30.0 cm. ¿Qué constante de resorte se requiere para que el amortiguador de cada rueda produzca el amortiguamiento crítico?

- a) 101 kg/s
- b) 234 kg/s
- c) 1 230 kg/s
- d) 2 310 kg/s
- e) 4 690 kg/s

FIGURA 14.25 a) Energía potencial (rojo), energía cinética (verde) y energía total (azul). b) El desplazamiento (rojo) y la velocidad (verde) para un oscilador armónico amortiguado débilmente. Las cinco líneas verticales delgadas marcan un periodo de oscilación completo, T .



DERIVACIÓN 14.3 Pérdida de energía

Podemos derivar la fórmula para la pérdida de energía en una oscilación amortiguada, sacando las derivadas con respecto al tiempo de las expresiones para las energías cinética y potencial:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dK}{dt} + \frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} k x^2 \right) = m v \frac{dv}{dt} + k x \frac{dx}{dt}.$$

Ahora, usamos $v = dx/dt$ y factorizamos el factor común, $m dx/dt$:

$$\frac{dE}{dt} = m \frac{dx}{dt} \frac{d^2x}{dt^2} + kx \frac{dx}{dt} = m \frac{dx}{dt} \left(\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m} x \right).$$

Ahora, podemos usar $\omega_0^2 = k/m$ para obtener

$$\frac{dE}{dt} = m \frac{dx}{dt} \left(\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x \right). \tag{i}$$

Podemos reorganizar la ecuación 14.25 moviendo el término del amortiguamiento al lado derecho de la ecuación:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = -2\omega_\gamma \frac{dx}{dt} = -\frac{b}{m} \frac{dx}{dt}.$$

Debido a que el lado izquierdo de esta ecuación diferencial es igual al término dentro del paréntesis en la ecuación (i) para la tasa de pérdida de energía, obtenemos

$$\frac{dE}{dt} = m \frac{dx}{dt} \left(-\frac{b}{m} \frac{dx}{dt} \right) = -b \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = -b v^2.$$

La fuerza de amortiguamiento es $F_\gamma = -bv$, y así hemos mostrado que la tasa de pérdida de energía es efectivamente $dE/dt = vF_\gamma$.

Las aplicaciones prácticas requieren la consideración de la **calidad** de un oscilador, Q , la cual especifica la razón de la energía total, E , a la pérdida de energía, ΔE , a lo largo de un periodo completo de oscilación, T :

$$Q = 2\pi \frac{E}{|\Delta E|}. \tag{14.27}$$

En el límite de amortiguamiento cero, el oscilador no experimenta ninguna pérdida de energía, $Q \rightarrow \infty$. En el límite de amortiguamiento pequeño, la calidad del oscilador puede aproximarse mediante

$$Q \approx \frac{\omega_0}{2\omega_\gamma}. \tag{14.28}$$

Combinar estos dos resultados brinda una fórmula práctica para la pérdida de energía durante una oscilación completa del movimiento amortiguado débilmente:

$$|\Delta E| = E \frac{2\pi}{Q} = E \frac{4\pi\omega\gamma}{\omega_0}. \quad (14.29)$$

Para la oscilación armónica graficada en la figura 14.25, la ecuación 14.28 resulta en $Q = 2.472 \text{ s}^{-1} / 2(0.139) \text{ s}^{-1} = 8.89$. Al sustituir este valor de Q en la ecuación 14.29 nos da una pérdida de energía de $|\Delta E| = 0.71E$ durante cada periodo de oscilación. Podemos comparar esto con el resultado exacto de la figura 14.25, midiendo la energía al principio y al final del intervalo indicado en la figura. Encontramos para la diferencia de la energía dividida entre la energía promedio un valor de 0.68, una concordancia bastante buena con el valor de 0.71 obtenido usando la aproximación de la ecuación 14.28.

14.5 Movimiento armónico forzado y resonancia

Si usted está empujando a alguien que está sentado en un columpio, usted le da a la persona empujones periódicos, con el propósito general de columpiarla más alto; esto es, una amplitud creciente de oscilación. Esta situación es un ejemplo de **movimiento armónico forzado**. Las oscilaciones forzadas o impulsadas periódicamente surgen en muchos tipos de problemas en varias áreas de la física, incluyendo la mecánica, acústica, óptica y electromagnetismo. Para representar la fuerza impulsora periódica, usamos

$$F(t) = F_d \cos(\omega_d t), \quad (14.30)$$

donde F_d y ω_d son constantes.

Para analizar el movimiento armónico forzado, comenzamos por considerar el caso sin ningún amortiguamiento. Usando la fuerza impulsora, $F(t)$, la ecuación diferencial para esta situación es

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} &= -kx + F_d \cos(\omega_d t) \Rightarrow \\ \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{m} x - \frac{F_d}{m} \cos(\omega_d t) &= 0. \end{aligned}$$

La solución de esta ecuación diferencial es

$$x(t) = B \sin(\omega_0 t) + C \cos(\omega_0 t) + A_d \cos(\omega_d t).$$

Los coeficientes B y C para la parte del movimiento que oscila con la rapidez angular intrínseca, $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, pueden determinarse a partir de las condiciones iniciales. Sin embargo, es mucho más interesante la parte del movimiento que oscila con la velocidad angular impulsora. Se puede mostrar que la amplitud de esta oscilación forzada está dada por

$$A_d = \frac{F_d}{m(\omega_0^2 - \omega_d^2)}.$$

De esta manera, cuanto más cerca esté la rapidez angular impulsora, ω_d , a la rapidez angular intrínseca, ω_0 , tanto mayor se torna la amplitud. Al estar empujando a una persona en un columpio, esta amplificación es evidente. Usted puede incrementar la amplitud del movimiento del columpio sólo si empuja con casi la misma frecuencia con la cual ya se está balanceando el columpio. Si empuja con dicha frecuencia, la persona en el columpio llegará más y más alto.

Si la rapidez angular impulsora es exactamente igual a la rapidez angular intrínseca del oscilador, la ecuación $A_d = F_d / [m(\omega_0^2 - \omega_d^2)]$ predice que la amplitud crecerá indefinidamente. En la vida real, este crecimiento infinito no ocurre. Siempre hay un amortiguamiento presente en el sistema. En presencia de amortiguamiento, la ecuación diferencial que hay que resolver es

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x - \frac{F_d}{m} \cos(\omega_d t) = 0. \quad (14.31)$$

Esta ecuación tiene la solución en estado estacionario

$$x(t) = A_\gamma \cos(\omega_d t - \theta_\gamma), \quad (14.32)$$

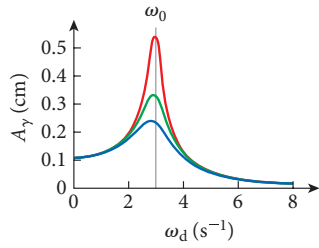


FIGURA 14.26 La amplitud de las oscilaciones forzadas como función de la rapidez angular de la fuerza impulsora. Las tres curvas representan distintas rapideces angulares de amortiguamiento: $\omega_\gamma = 0.3 \text{ s}^{-1}$ (curva roja), $\omega_\gamma = 0.5 \text{ s}^{-1}$ (curva verde) y $\omega_\gamma = 0.7 \text{ s}^{-1}$ (curva azul).

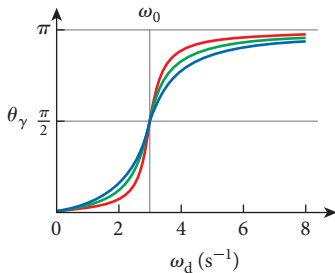


FIGURA 14.27 El desplazamiento de fase como una función de la rapidez angular forzada con los mismos parámetros que la figura 14.26. Las tres curvas representan distintas velocidades angulares de amortiguamiento: $\omega_\gamma = 0.3 \text{ s}^{-1}$ (curva roja), $\omega_\gamma = 0.5 \text{ s}^{-1}$ (curva verde) y $\omega_\gamma = 0.7 \text{ s}^{-1}$ (curva azul).

donde x oscila a la rapidez angular impulsora y la amplitud es

$$A_\gamma = \frac{F_d}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_d^2)^2 + 4\omega_d^2\omega_\gamma^2}} \quad (14.33)$$

Como puede ver, la amplitud dada por la ecuación 14.33 no puede ser infinita, porque aun cuando $\omega_d = \omega_0$, todavía tiene un valor finito, $F_d/(2m\omega_d\omega_\gamma)$, que también es *aproximadamente* su máximo. La frecuencia impulsora que corresponde a la amplitud máxima puede calcularse sacando la derivada de A_γ con respecto a ω_d , estableciendo que la derivada sea igual a 0 y resolviendo para ω_d ,

lo cual brinda el resultado de que A_γ es máxima cuando $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - 2\omega_\gamma^2}$. Note que para $\omega_\gamma \ll \omega_0$, $\omega_d \approx \omega_0$. La forma de la curva de la amplitud A_γ , como una función de la velocidad angular impulsora, ω_d , se conoce como la **forma de la resonancia** y es característica de los fenómenos de resonancia. Cuando $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - 2\omega_\gamma^2}$, la rapidez angular impulsora se llama la **rapidez angular resonante**; A_γ se encuentra cerca del máximo a esta rapidez angular. En la figura 14.26 se grafica A_γ a partir de la ecuación 14.33 para $\omega_0 = 3 \text{ s}^{-1}$ y los tres valores para la velocidad angular amortiguadora, ω_γ . Conforme el amortiguamiento se hace más débil, la forma de la resonancia se vuelve más aguda. Usted puede ver que, en cada caso, la curva de la amplitud alcanza su máximo a un valor de ω_d ligeramente menor a $\omega_0 = 3 \text{ s}^{-1}$.

El ángulo de fase, θ_γ en la ecuación 14.32, depende de la velocidad angular impulsora, lo mismo que de las rapideces angulares amortiguadora e intrínseca:

$$\theta_\gamma = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \left(\frac{\omega_0^2 - \omega_d^2}{2\omega_d\omega_\gamma} \right) \quad (14.34)$$

El desplazamiento de fase como una función de la rapidez angular impulsora se grafica en la figura 14.27, con los mismos parámetros usados en la figura 14.26. Usted puede ver que, para las rapideces angulares impulsoras pequeñas, la oscilación forzada sigue el impulso en fase. Conforme la rapidez angular impulsora se incrementa, la diferencia de fases comienza a crecer y alcanza $\pi/2$ a $\omega_d = \omega_0$. Para rapideces angulares impulsoras mucho mayores que la rapidez angular resonante, el desplazamiento de fase se aproxima a π . Cuanto menor es la rapidez angular amortiguadora, ω_γ , tanto más abrupta es la transición de 0 a π del desplazamiento de fase.

Una nota práctica corresponde en este punto: la solución presentada en la ecuación 14.32 se alcanza por lo general sólo después de algún tiempo. La solución completa para la ecuación diferencial de las oscilaciones amortiguadas e impulsadas (ecuación 14.31) está dada por la combinación de las ecuaciones 14.20 y 14.32. Durante el tiempo de transición, el efecto de las condiciones iniciales particulares dadas al sistema se amortigua y la solución dada por la ecuación 14.32 se aproxima asintóticamente.

La figura 14.28 muestra el movimiento de un sistema impulsado con una rapidez angular impulsora de $\omega_d = 1.2 \text{ s}^{-1}$ y una aceleración de $F/m = 0.6 \text{ m/s}^2$. El sistema tiene una rapidez angular intrínseca de $\omega_0 = 2.2 \text{ s}^{-1}$ y una rapidez angular de amortiguamiento de $\omega_\gamma = 0.4 \text{ s}^{-1}$ y comienza en $x_0 = 0$ con una velocidad inicial positiva. El movimiento no forzado del sistema sigue la ecuación 14.20 y se muestra por la curva punteada verde. El movimiento de acuerdo con la ecuación 14.32 se muestra en rojo. La solución completa (curva azul) es la suma de las dos. Después de algunas oscilaciones de aspecto complicado, durante las cuales las condiciones iniciales se van amortiguando, la solución completa se aproxima al movimiento armónico simple dado por la ecuación 14.32.

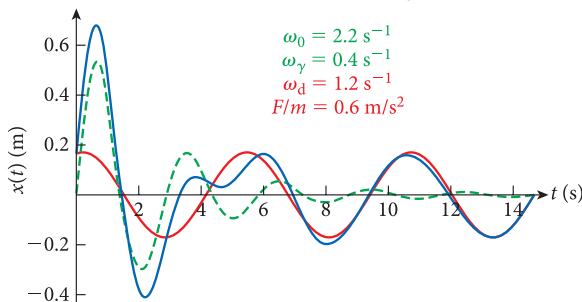


FIGURA 14.28 Posición como una función del tiempo para la oscilación armónica impulsada y armónica: la curva roja grafica la ecuación 14.32 y la curva punteada en verde muestra el movimiento con amortiguamiento (de la ecuación 14.20). La curva azul es la suma de las curvas roja y verde, brindando un panorama completo.

Los sistemas mecánicos impulsados a la resonancia tienen consecuencias técnicas importantes, no todas ellas deseables. Las más preocupantes son las frecuencias de resonancia en las estructuras arquitectónicas. Los constructores tienen que ser cuidadosos, por ejemplo, de no construir edificios altos de tal manera que los terremotos los impulsen a oscilaciones cercanas a la resonancia. Quizás el ejemplo más vergonzoso de una estructura que fue destruida por un fenómeno de resonancia fue el Puente de Tacoma Narrows, conocido como “Gertie Galopante”, en el estado de Washington. Colapsó el 7 de noviembre de 1940, sólo unos

14.5 Ejercicio en clase

El sistema de la figura 14.28, que está impulsado a cuatro distintas rapidezces angulares, se grafica en las figuras de posición contratiempo para los cuatro casos. ¿Cuál de los cuatro casos es más cercano a la resonancia?

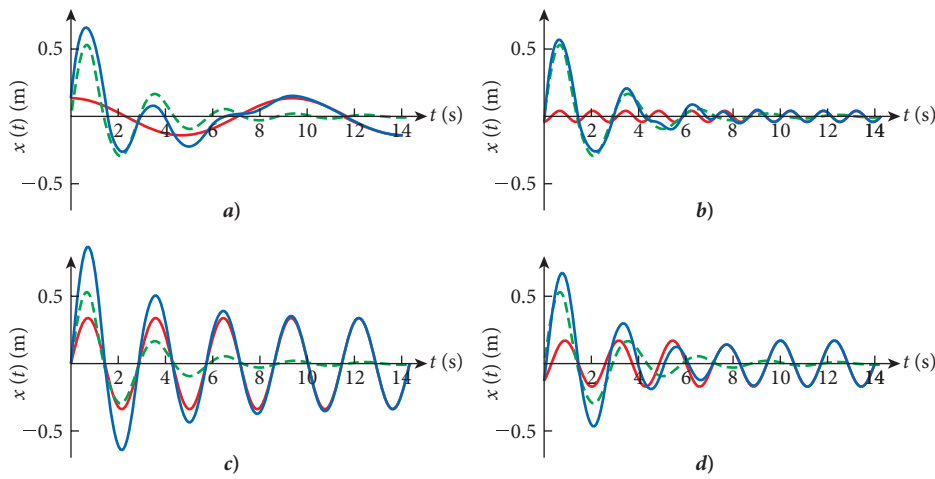


FIGURA 14.29 Colapso en la parte media del puente Tacoma Narrows, el 7 de noviembre de 1940.

cuantos meses después de que se terminó (figura 14.29). Un viento de 40 mph fue capaz de impulsar las oscilaciones del puente a la resonancia y ocurrió una falla mecánica catastrófica.

A las columnas de soldados que marchan a través de un puente se les dice a menudo que rompan la marcha para evitar crear una resonancia debido a los taconeos periódicos con sus pies. Sin embargo, un gran número de caminadores pueden trabarse en fase a través de un mecanismo de retroalimentación. El 12 de junio de 2000, el Puente London Millenium en el Río Támesis tuvo que ser cerrado después de sólo tres días de operación, debido a que los 2 000 transeúntes que caminaban sobre el puente lo llevaron a una resonancia y se ganó el sobrenombre de “puente bamboleante”. El pandeo lateral del puente fue tal que proporcionó retroalimentación y trabó a los transeúntes en un ritmo del paso que amplificó las oscilaciones.

14.6 Espacio de fase

Regresaremos repetidas veces a la física de las oscilaciones a lo largo de este libro. Como se mencionó antes, la razón de este énfasis es que muchos sistemas tienen fuerzas restauradoras que los impulsan otra vez al equilibrio si se les empuja a una distancia pequeña del equilibrio. Muchas situaciones problemáticas en la física pueden, por lo tanto, modelarse en términos de un péndulo o de un resorte. Antes de que abandonemos el tema de las oscilaciones, consideremos una manera más interesante de representar el movimiento de los sistemas oscilatorios. En lugar de graficar el desplazamiento, velocidad o aceleración como función del tiempo, podemos graficar la velocidad contra el desplazamiento. Una gráfica de la velocidad contra el desplazamiento se llama un **espacio de fase**. Al mirar el movimiento físico de esta forma surgen nuevos e interesantes temas en los cuales profundizar.

Comencemos con la oscilación armónica sin amortiguamiento. Al graficar la oscilación con la dependencia del tiempo dada por $x(t) = A \sin(\omega t)$, amplitud de $A = 4$ cm, y rapidez angular $\omega = 0.7 \text{ s}^{-1}$ en un espacio de fase nos brinda una elipse, la curva roja en la figura 14.30. Otros valores de la amplitud, entre 3 y 7 en incrementos de 1, producen distintas elipses, mostradas en azul en la figura 14.30.

Considere otro ejemplo: la figura 14.31 muestra una gráfica en el espacio de fase del movimiento de un oscilador débilmente amortiguado (con $k = 11 \text{ N/m}$, $m = 1.8 \text{ kg}$, $b = 0.5 \text{ kg/s}$, $A = 5 \text{ cm}$ y $\theta_0 = 1.6$), el mismo oscilador cuya posición fue graficada en la figura 14.19

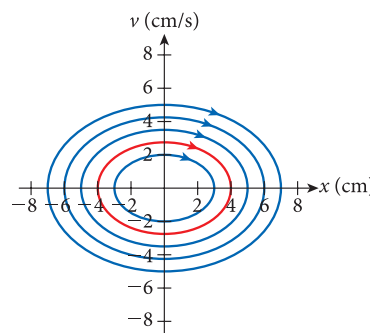


FIGURA 14.30 Velocidad contra desplazamiento para distintas amplitudes del movimiento armónico simple.

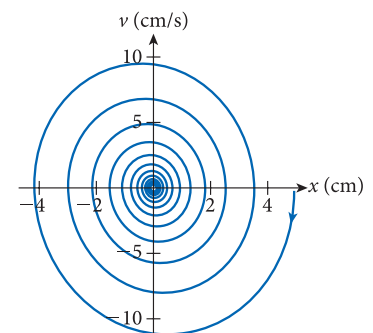


FIGURA 14.31 Velocidad contra desplazamiento para un oscilador amortiguado.

como una función del tiempo. Usted puede ver el punto de partida del movimiento oscilatorio, a $x(t=0) = (5 \text{ cm})\text{sen}(1.6)e^{-0}$ y $v(t=0) = -1.05 \text{ cm/s}$. La trayectoria en el espacio de fase resulta en un espiral hacia el punto $(0,0)$. Luce como si la trayectoria fuese atraída hacia aquel punto. Si la oscilación tuviese distintas condiciones iniciales, la gráfica hubiese caído en espiral hacia adentro en el mismo punto, pero con una trayectoria diferente. El punto en el cual todas las trayectorias convergen a la larga se llama un *atractor punto*.

14.7 Caos

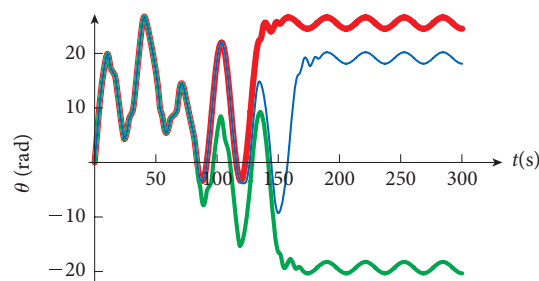
Un campo de investigación en la física ha emergido sólo a partir de la llegada de las computadoras. Este campo de la **dinámica no lineal**, incluido el **caos**, ha producido resultados interesantes y relevantes durante la última década. Si miramos con suficiente atención y bajo ciertas condiciones, podemos descubrir signos de movimiento caótico incluso en los osciladores que hemos manejado en este capítulo. En el capítulo 7 miramos al caos y el billar y anotamos la sensibilidad del movimiento del sistema a las condiciones iniciales; aquí, continuamos este examen con más detalle.

Cuando analizamos el movimiento de un péndulo, usamos la aproximación de ángulo pequeño (sección 14.2). Sin embargo, suponga que queremos estudiar ángulos de deflexión grandes. Podemos hacer esto usando un péndulo cuya cuerda se ha reemplazado por una delgada barra sólida. Un péndulo semejante puede moverse más de 180° , incluso a través de los 360° completos. En este caso, la aproximación $\text{sen } \theta \approx \theta$ no funciona y la función seno debe incluirse en la ecuación diferencial. Si una fuerza impulsora externa periódica, lo mismo que una de amortiguamiento están presentes en este péndulo, no podemos resolver la ecuación del movimiento de una manera analítica. Pero, por otro lado, podemos usar procedimientos de integración numérica con una computadora para obtener la solución, la cual depende de las condiciones iniciales dadas. Con base en lo que ha aprendido hasta aquí acerca de los osciladores, usted podría esperar que condiciones iniciales semejantes den patrones de movimiento semejantes a lo largo del tiempo. Sin embargo, para algunas combinaciones de velocidad angular impulsora y amplitud, constante de amortiguamiento y longitud del péndulo, esta expectativa no se corrobora.

La figura 14.32 muestra las gráficas del ángulo de deflexión del péndulo como función del tiempo usando la misma ecuación de movimiento y el mismo valor de la velocidad inicial. Sin embargo, para la curva roja, el ángulo inicial es exactamente de cero radianes. Para la curva verde, el ángulo inicial es de 10^{-3} rad. Usted puede ver que estas dos curvas comienzan cerca una de la otra por unas cuantas oscilaciones, pero divergen rápidamente. Si el ángulo inicial es de 10^{-5} rad (curva azul), las curvas tampoco se conservan juntas por mucho más tiempo. Dado que la curva azul comienza 100 veces más cerca que la curva roja, podría esperarse que quedara cerca de la curva roja por más tiempo por un factor de 100. Éste no es el caso. Este comportamiento se llama *dependencia sensible a las condiciones iniciales*. Si un sistema es dependiente sensiblemente a las condiciones iniciales, es imposible una predicción de su movimiento a largo plazo. Esta sensibilidad es una de las características distintivas del movimiento caótico.

Los pronósticos precisos del clima a largo plazo son imposibles por la razón de la dependencia sensible en las condiciones iniciales. Con la llegada de las computadoras en la década de 1950, los meteorólogos pensaron que serían capaces de describir el clima futuro con precisión si tan sólo conseguían suficientes mediciones de todas las variables relevantes; tales como temperatura y dirección del viento, en tantos puntos como fuera posible a través del país. Sin embargo, para la década de 1960, era obvio que las ecuaciones diferenciales básicas para las masas de aire que se mueven en la atmósfera muestran una dependencia sensible a las condiciones iniciales. De esta manera, el sueño de un pronóstico preciso del clima a largo plazo se acabó.

FIGURA 14.32 Ángulo de deflexión como función del tiempo para un péndulo impulsado con tres distintas condiciones iniciales: la línea roja resulta de un ángulo inicial de cero. La línea verde resulta de un ángulo inicial de 10^{-3} rad. La línea azul resulta de un ángulo inicial de 10^{-5} rad.



LO QUE HEMOS APRENDIDO | GUÍA DE ESTUDIO PARA EXAMEN

- Un objeto que actúa bajo la ley de Hooke, $F = -kx$, experimenta un movimiento armónico simple, con una fuerza restauradora que actúa en la dirección opuesta al desplazamiento a partir del equilibrio.
- La ecuación de movimiento para una masa unida a un resorte (sin amortiguamiento) es $x(t) = B \sin(\omega_0 t) + C \cos(\omega_0 t)$, donde $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, o alternativamente, $x(t) = A \sin(\omega_0 t + \theta_0)$
- La ecuación de movimiento para un péndulo (sin amortiguamiento) es $\theta(t) = B \sin(\omega_0 t) + C \cos(\omega_0 t)$ con $\omega_0 = \sqrt{g/\ell}$.
- La velocidad y la aceleración para oscilaciones armónicas simples:

$$\begin{aligned}x(t) &= A \sin(\omega_0 t + \theta_0) \\ \Rightarrow v(t) &= \omega_0 A \cos(\omega_0 t + \theta_0) \\ \Rightarrow a(t) &= -\omega_0^2 A \sin(\omega_0 t + \theta_0).\end{aligned}$$

- El periodo de una oscilación es $T = 2\pi/\omega$.
- La frecuencia de una oscilación es $f = 1/T = \omega/2\pi$, o $\omega = 2\pi f$.
- La ecuación de movimiento para la masa unida a un resorte con amortiguamiento pequeño ($b < 2\sqrt{mk}$) es $x(t) = B e^{-\omega_\gamma t} \cos(\omega' t) + C e^{-\omega_\gamma t} \sin(\omega' t)$, con

$$\begin{aligned}\omega_\gamma &= b/2m, \quad \omega' = \sqrt{k/m - (b/2m)^2} = \sqrt{\omega_0^2 - \omega_\gamma^2}, \\ \text{y } \omega_0 &= \sqrt{k/m}.\end{aligned}$$

- La ecuación del movimiento para una masa unida a un resorte con amortiguamiento grande ($b > 2\sqrt{mk}$) es

$$x(t) = B e^{-(\omega_\gamma + \sqrt{\omega_\gamma^2 - \omega_0^2})t} + C e^{-(\omega_\gamma - \sqrt{\omega_\gamma^2 - \omega_0^2})t}.$$

- La ecuación de movimiento para una masa unida a un resorte con amortiguamiento crítico ($b = 2\sqrt{mk}$) es $x(t) = (B + tC) e^{-\omega_\gamma t}$.
- Para un oscilador armónico amortiguado, la tasa de pérdida de energía es $dE/dt = -bv^2 = vF_\gamma$.
- La calidad de un oscilador está relacionada con la pérdida de energía durante un periodo de oscilación completa, $Q = 2\pi E / |\Delta E|$.
- Si una fuerza impulsora externa periódica, $F(t) = F_d \cos(\omega_d t)$, se aplica a un sistema oscilatorio, la ecuación de movimiento se vuelve (después de un tiempo transitorio) $x(t) = A_\gamma \cos(\omega_d t - \theta_\gamma)$, con amplitud

$$A_\gamma = \frac{F_d}{m \sqrt{(\omega_0^2 - \omega_d^2)^2 + 4\omega_d^2 \omega_\gamma^2}}.$$

La gráfica de esta

amplitud exhibe la forma de la resonancia en la cual la amplitud está en su máximo cuando la rapidez angular del impulsor es aproximadamente igual a la rapidez angular intrínseca ($\omega_d = \omega_0$).

- Un espacio de fase exhibe una gráfica de la velocidad de un objeto contra su posición. El movimiento armónico simple produce una elipse en un espacio de fase semejante. Una gráfica de un movimiento armónico amortiguado traza una espiral hacia el punto atractor en (0,0).
- Con una selección adecuada de parámetros, un péndulo de barra amortiguado e impulsado puede mostrar movimiento caótico el cual depende sensiblemente de las condiciones iniciales. En este caso, el comportamiento a largo plazo del sistema no es predecible.

TÉRMINOS CLAVE

movimiento periódico, p. 456	periodo, p. 460	amortiguamiento crítico, p. 473	rapidez angular resonante, p. 478
movimiento armónico simple (MAS), p. 457	frecuencia, p. 461	calidad, p. 476	espacio de fase, p. 479
amplitud, p. 457	péndulo, p. 464	movimiento armónico forzado, p. 477	dinámica no lineal, p. 480
rapidez angular, p. 457	amortiguamiento, p. 470	forma de la resonancia, p. 478	caos, p. 480
	sobreamortiguamiento, p. 473		

NUEVOS SÍMBOLOS Y ECUACIONES

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, rapidez angular del movimiento armónico simple

$x(t) = B \sin(\omega_0 t) + C \cos(\omega_0 t)$, función de desplazamiento para oscilaciones

$T = \frac{2\pi}{\omega}$, periodo de oscilación

$f = \frac{1}{T}$, frecuencia de oscilación

$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$, rapidez angular para un péndulo

$b = 2\sqrt{mk}$, constante de amortiguamiento para amortiguamiento crítico

$Q = 2\pi \frac{E}{|\Delta E|}$, calidad de un oscilador

RESPUESTAS A LAS OPORTUNIDADES DE AUTOEXAMEN

14.1 $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$. Use la función de prueba

$x(t) = A \sin(\omega_0 t + \theta_0)$ y saque las derivadas:

$$\frac{dx}{dt} = A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \theta_0);$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega_0^2 \sin(\omega_0 t + \theta_0).$$

Ahora inserte de nuevo en la ecuación diferencial con

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}. \text{ Encontramos:}$$

$$-A\omega_0^2 \sin(\omega_0 t + \theta_0) + A\omega_0^2 \sin(\omega_0 t + \theta_0) = 0.$$

14.2 Usamos la identidad trigonométrica $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\alpha) \sin(\beta)$

$$A \sin(\omega_0 t + \theta_0) = A \sin(\omega_0 t) \cos(\theta_0) + A \cos(\omega_0 t) \sin(\theta_0)$$

$$A \sin(\omega_0 t + \theta_0) = (A \cos(\theta_0)) \sin(\omega_0 t) + (A \sin(\theta_0)) \cos(\omega_0 t) \\ = B \sin(\omega_0 t) + C \cos(\omega_0 t)$$

$$B = A \cos(\theta_0)$$

$$C = A \sin(\theta_0)$$

eleva al cuadrado y sume estas dos ecuaciones

$$B^2 + C^2 = A^2 \sin^2(\theta_0) + A^2 \cos^2(\theta_0) = A^2 (\sin^2(\theta_0) + \cos^2(\theta_0)) = A^2$$

$$A = \sqrt{B^2 + C^2}.$$

Ahora divide estas mismas dos ecuaciones

$$\frac{C}{B} = \frac{A \sin(\theta_0)}{A \cos(\theta_0)} = \tan(\theta_0)$$

$$\theta_0 = \tan^{-1}\left(\frac{C}{B}\right).$$

14.3 $T_{\text{Luna}} = \sqrt{\frac{g_{\text{Tierra}}}{g_{\text{Luna}}}} T = \sqrt{\frac{9.81 \text{ m/s}^2}{1.63 \text{ m/s}^2}} T = 2.45T.$

14.4 $\omega_\gamma = \frac{\alpha}{2}; \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}; \omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \omega_\gamma^2}.$

PRÁCTICA PARA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Lineamientos para resolución de problemas

1. En el movimiento oscilatorio, algunas cantidades son características del movimiento: posición, x ; velocidad, v ; aceleración, a ; energía, E ; ángulo de fase, θ_0 ; amplitud, A , y velocidad máxima $v_{\text{máx}}$. Otras cantidades son características del sistema particular: masa, m ; constante de resorte, k ; longitud del péndulo, ℓ ; periodo, T ; frecuencia, f , y frecuencia angular, ω . Resulta útil listar las cantidades que está buscando para resolver un problema y las cantidades que conoce o necesita para determinar estas cantidades desconocidas.

2. Algunos movimientos comienzan como un movimiento a lo largo de una línea, en ocasiones con una aceleración constante (por ejemplo, la caída libre), y luego cambian a movimiento oscilatorio. En tales casos, usted necesita identificar dónde o cuándo tiene lugar el cambio de movimiento y cuáles ecuaciones necesita usar para cada tipo de movimiento.

3. En los movimientos que involucran amortiguamiento es esencial determinar primero si el sistema es débilmente amortiguado, críticamente amortiguado o sobreamortiguado, porque la forma de la ecuación de movimiento que usted debe usar depende de esto.

PROBLEMA RESUELTO 14.2 Determinación de la constante de amortiguamiento

PROBLEMA

Un bloque de 1.75 kg está conectado a un resorte vertical con una constante de resorte $k = 3.50$ N/m. El bloque se jala hacia arriba a una distancia $d = 7.50$ cm y se libera a partir del reposo. Después de 113 oscilaciones completas, la amplitud de las oscilaciones es la mitad de la amplitud original. El amortiguamiento del movimiento del resorte es proporcional a la rapidez. ¿Cuál es la constante de amortiguamiento, b ?

SOLUCIÓN

PIENSE

Debido a que el bloque ejecuta 113 oscilaciones y la amplitud decrece por un factor de 2, sabemos que estamos tratando con un amortiguamiento pequeño. Después de un número entero de oscilaciones, el término del coseno será 1 y el término del seno será cero en la ecuación 14.20. Al saber que la amplitud ha decrecido por un factor de 2 después de 113 oscilaciones, podemos obtener una expresión para ω_γ en términos del tiempo requerido para completar 113 oscilaciones, a partir de las cuales podemos obtener la constante de amortiguamiento.

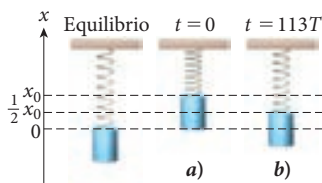


FIGURA 14.33 Posición del bloque oscilando a a) $t = 0$ y b) $t = 113T$.

ESBOCE

La figura 14.33 muestra la posición del bloque en $t = 0$ y $t = 113T$, donde T es el periodo de oscilación.

INVESTIGUE

Debido a que sabemos que estamos tratando con un amortiguamiento pequeño, podemos aplicar la ecuación 14.20:

$$x(t) = Be^{-\omega_\gamma t} \cos(\omega' t) + Ce^{-\omega_\gamma t} \sin(\omega' t).$$

A $t = 0$, sabemos que $x = x_0$ y así $B = x_0$. Después de 113 oscilaciones completas, el término del coseno será 1, el término del seno será cero y $x = x_0/2$. De esta forma, podemos escribir

$$\frac{x_0}{2} = \left(x_0 e^{-\omega_\gamma (113T)} \cdot 1 \right) + 0, \quad (i)$$

donde $T = 2\pi/\omega'$ es el periodo de oscilación. Podemos expresar la ecuación (i) como

$$0.5 = e^{-\omega_\gamma 113(2\pi/\omega')}. \quad (ii)$$

Sacando el logaritmo natural de ambos lados de la ecuación (ii) nos da

$$\ln 0.5 = -\omega_\gamma 113 \left(\frac{2\pi}{\omega'} \right).$$

Hay que recordar que $\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \omega_\gamma^2}$, donde $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ (k es la constante de resorte y m es la masa), podemos escribir

$$-\frac{\ln 0.5}{113(2\pi)} = \frac{\omega_\gamma}{\omega'} = \frac{\omega_\gamma}{\sqrt{\omega_0^2 - \omega_\gamma^2}}. \quad (iii)$$

Podemos elevar al cuadrado la ecuación (iii) para obtener

$$\frac{\omega_\gamma^2}{\omega_0^2 - \omega_\gamma^2} = \left(-\frac{\ln 0.5}{113(2\pi)} \right)^2. \quad (iv)$$

SIMPLIFIQUE

Con objeto de ahorrar un poco de esfuerzo al escribir las constantes del lado derecho de la ecuación (iv), podemos usar la abreviación

$$c^2 = \left(-\frac{\ln 0.5}{113(2\pi)} \right)^2.$$

Entonces, podemos escribir

$$\omega_\gamma^2 = (\omega_0^2 - \omega_\gamma^2)c^2 = \omega_0^2 c^2 - \omega_\gamma^2 c^2.$$

Ahora, podemos resolver para ω_γ :

$$\omega_\gamma = \sqrt{\frac{\omega_0^2 c^2}{1 + c^2}}.$$

Recordemos que $\omega_\gamma = b/2m$, podemos escribir una expresión para la constante de amortiguamiento, b :

$$b = 2m \sqrt{\frac{\omega_0^2 c^2}{1 + c^2}}.$$

Al sustituir $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, obtenemos

$$b = 2m \sqrt{\frac{(k/m)c^2}{1 + c^2}} = 2 \sqrt{\frac{m k c^2}{1 + c^2}}.$$

CALCULE

Primero sustituimos los valores numéricos para obtener c^2 :

$$c^2 = \left(-\frac{\ln 0.5}{113(2\pi)} \right)^2 = 9.53091 \cdot 10^{-7}.$$

(continúa)

(continuación)

Ahora, podemos calcular la constante de amortiguamiento:

$$b = 2\sqrt{\frac{(1.75 \text{ kg})(3.50 \text{ N/m})(9.53091 \cdot 10^{-7})}{1 + 9.53091 \cdot 10^{-7}}} = 0.00483226 \text{ kg/s.}$$

REDONDEE

Reportamos nuestro resultado con tres cifras significativas:

$$b = 4.83 \cdot 10^{-3} \text{ kg/s.}$$

VUELVA A REVISAR

Podemos comprobar que la constante de amortiguamiento calculada es consistente con el amortiguamiento pequeño verificando que $b < \sqrt{mk}$:

$$4.83 \cdot 10^{-3} \text{ kg/s} < \sqrt{(1.75 \text{ kg})(3.50 \text{ N/m})} = 2.47 \text{ kg/s.}$$

De esta manera, la constante de amortiguamiento es consistente con un amortiguamiento pequeño.

PROBLEMA RESUELTO 14.3 Oscilación de una barra delgada

PROBLEMA

Una barra larga y delgada se balancea en torno de un pivote sin fricción en un extremo. La barra tiene una masa de 2.50 kg y una longitud de 1.25 m. La parte inferior de la barra se jala hacia la derecha hasta que la barra hace un ángulo $\theta = 20.0^\circ$ con respecto a la vertical. Entonces, se libera la barra a partir del reposo y oscila con un movimiento armónico simple. ¿Cuál es el periodo de este movimiento?

SOLUCIÓN

PIENSE

No podemos aplicar el análisis normal al movimiento de este péndulo debido a que tenemos que tomar en cuenta el momento de inercia de la barra delgada. Este tipo de péndulo se llama *péndulo físico*. Podemos relacionar el momento de la fuerza del peso de la barra que actúa en su centro de gravedad con la aceleración angular. A partir de esta relación, podemos obtener una ecuación diferencial similar a la ecuación derivada para un péndulo simple. Por analogía con un péndulo simple, podemos encontrar el periodo de oscilación de una barra delgada.

ESBOCE

La figura 14.34 muestra la barra delgada oscilando.

INVESTIGUE

Al mirar la figura 14.34, podemos ver que el peso, mg , de la barra delgada actúa como una fuerza que produce un momento de la fuerza de magnitud τ , dado por

$$\tau = I\alpha = -mgr \sin \theta, \tag{i}$$

donde I es el momento de inercia de la barra, α es la aceleración angular resultante, r es el brazo de momento y θ es el ángulo entre la fuerza y el brazo del momento. El problema plantea que el desplazamiento angular inicial es de 20° , por lo que podemos usar la aproximación de ángulo pequeño, $\sin \theta \approx \theta$. Podemos reescribir la ecuación (i) como

$$I\alpha + mgr\theta = 0.$$

Ahora, reemplazamos la aceleración angular con la segunda derivada del desplazamiento angular y dividimos por el momento de inercia, lo cual nos da

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgr}{I}\theta = 0.$$

Esta ecuación diferencial tiene la misma forma que la ecuación 14.12; por lo tanto, podemos escribir la solución como

$$\theta(t) = B \sin(\omega_0 t) + C \cos(\omega_0 t), \text{ con } \omega_0 = \sqrt{\frac{mgr}{I}}.$$

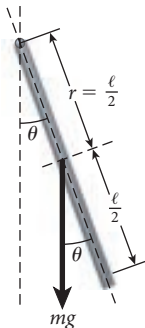


FIGURA 14.34 Un péndulo físico que consiste en una barra delgada balanceándose de un extremo.

SIMPLIFIQUE

Podemos escribir el periodo de oscilación de la barra delgada:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgr}}$$

Este resultado es válido en general para el periodo de un péndulo físico que tenga un momento de inercia I y cuyo centro de gravedad está a una distancia r desde el punto de pivote. En este caso, $r = \ell/2$ e $I = \frac{1}{3}m\ell^2$, así es que tenemos que

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{1}{3}m\ell^2}{mg(\ell/2)}} = 2\pi \sqrt{\frac{2\ell}{3g}}$$

CALCULE

Sustituyendo los valores numéricos nos da

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{2(1.25 \text{ m})}{3(9.81 \text{ m/s}^2)}} = 1.83128 \text{ s.}$$

REDONDEE

Reportamos nuestros resultados con tres cifras significativas:

$$T = 1.83 \text{ s.}$$

VUELVA A REVISAR

Si la masa, m , de la barra se concentrara en un punto a una distancia ℓ desde un punto de pivote, sería un péndulo simple y su periodo sería de

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}} = 2.24 \text{ s.}$$

El periodo de la barra delgada es menor a este valor, lo cual es razonable debido a que la masa de la barra se distribuye por toda su longitud, en lugar de estar concentrada en un extremo.

Como una segunda verificación, comenzamos con $T = 2\pi \sqrt{I/mgr}$ y sustituimos la expresión para el momento de inercia de una masa puntual moviéndose en torno de un punto a una distancia $I = mr^2$. Haciendo $r = \ell$, tenemos

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m\ell^2}{mg\ell}} = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}},$$

el cual es el resultado del periodo para un péndulo simple.

PREGUNTAS DE OPCIÓN MÚLTIPLE

14.1 Dos niños están en columpios adyacentes de la misma altura en el campo de juegos. Un adulto los empuja y los deja columpiando. Suponiendo que cada niño en un columpio puede tratarse como un péndulo simple y que la fricción es despreciable, ¿cuál niño tarda más tiempo en completar una oscilación (es decir, cuál niño tiene un periodo mayor)?

- a) el niño más pesado. d) el niño al que se le da el mayor empujón.
b) el niño más ligero.
c) ninguno de los dos.

14.2 Dos bloques idénticos oscilan en el extremo de un resorte vertical, uno en la Tierra y otro en la Luna. ¿Dónde es mayor el periodo de oscilaciones?

- a) en la Tierra. d) no se puede determinar a partir de la información dada.
b) en la Luna.
c) igual en la Tierra que en la Luna.

14.3 Una masa que puede oscilar sin fricción sobre una superficie horizontal está sujeta a un resorte horizontal que se jala a la derecha 10.0 cm y se libera a partir del reposo. El periodo de oscilación de la masa es de 5.60 s. ¿Cuál es la rapidez de la masa a $t = 2.50$ s?

- a) $-2.61 \cdot 10^{-1}$ m/s c) $-3.71 \cdot 10^{-2}$ m/s
b) $-1.06 \cdot 10^{-1}$ m/s d) $-2.01 \cdot 10^{-1}$ m/s

14.4 La constante de resorte para un sistema masa-resorte que experimenta un movimiento armónico simple se duplica. Si la energía total permanece sin cambios, ¿qué pasará con la amplitud máxima de la oscilación? Suponga que el sistema es subamortiguado.

- a) Permanecerá sin cambios. d) Se multiplicará por
b) Se multiplicará por 2. $1/\sqrt{2}$.
c) Se multiplicará por $\frac{1}{2}$.

14.5 Con la selección adecuada de parámetros, un péndulo físico amortiguado e impulsado puede mostrar un movimiento caótico, el cual depende sensiblemente de las condiciones iniciales. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones acerca de semejante péndulo es verdadera?

- a) Su comportamiento a largo plazo puede predecirse.
- b) Su comportamiento a largo plazo no es predecible.
- c) Su comportamiento a largo plazo es como el de un péndulo simple de una longitud equivalente.
- d) Su comportamiento a largo plazo es como el de un péndulo cónico.
- e) Ninguna de las anteriores es verdadera.

14.6 Un resorte cuelga del techo con una masa sujeta a él. La masa se jala hacia abajo, causando que oscile en forma vertical con un movimiento armónico simple. ¿Cuál de las siguientes incrementará la frecuencia de oscilación?

- a) Agregar un segundo resorte idéntico con un extremo sujeto a la masa y el otro al techo.
- b) Agregar un segundo resorte idéntico con un extremo sujeto a la masa y el otro al suelo.
- c) Aumentar la masa.
- d) Agregar ambos resortes, como se describe en a) y b).

14.7 Un niño de masa M está balanceándose en un columpio de longitud L a un ángulo de deflexión máximo de θ . Un hombre con una masa $4M$ está balanceándose en un columpio semejante de longitud L a un ángulo máximo de 2θ . Cada columpio puede tratarse como un péndulo simple experimentando un movimiento armónico simple. Si el periodo para el movimiento del niño es T , entonces el periodo del movimiento del hombre es

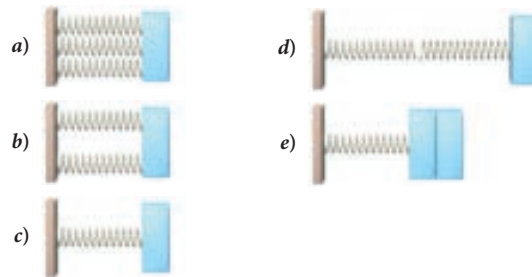
- a) T .
- b) $2T$.
- c) $T/2$.
- d) $T/4$.

14.8 El objeto A es cuatro veces más pesado que el objeto B. Cada objeto se sujeta a un resorte y los resortes tienen la misma

constante de resorte. Entonces, dos objetos se jalan a partir de sus posiciones de equilibrio y se liberan a partir del reposo. ¿Cuál es el cociente de los periodos de las dos oscilaciones si la amplitud de A es la mitad de la de B?

- a) $T_A:T_B = 1:4$
- b) $T_A:T_B = 4:1$
- c) $T_A:T_B = 2:1$
- d) $T_A:T_B = 1:2$

14.9 Ordene jerárquicamente los osciladores armónicos simples de la figura en orden de sus frecuencias intrínsecas, de la mayor a la menor. Todos los resortes tienen constantes de resorte idénticas y todos los bloques tienen masas idénticas.

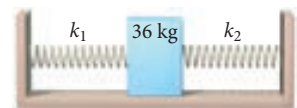


14.10 Un péndulo se suspende del techo de un ascensor. Cuando el ascensor está en reposo, el periodo del péndulo es T . El ascensor acelera hacia arriba y el periodo es ahora

- a) Todavía T .
- b) Menor a T .
- c) Mayor a T .

14.11 Una masa de 36 kg se coloca en una superficie sin fricción y entonces se conecta a las paredes por dos resortes con constantes de resorte $k_1 = 3 \text{ N/m}$ y $k_2 = 4 \text{ N/m}$, como se muestra en la figura. ¿Cuál es el periodo de oscilación de la masa de 36 kg si se desplaza ligeramente hacia un lado?

- a) 11 s
- b) 14 s
- c) 17 s
- d) 20 s
- e) 32 s
- f) 38 s

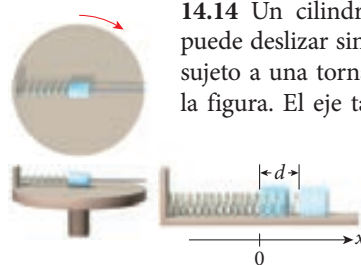


PREGUNTAS

14.12 Usted se encuentra sentado en un vehículo deportivo utilitario en un embotellamiento. En su aburrimiento, usted balancea su cuerpo de lado a lado y se queda quieto. Usted nota que su vehículo continúa balanceándose durante unos 2 s y hace tres oscilaciones de lado a lado, antes de decaer. Usted estima que la amplitud del movimiento de su vehículo debe ser menor a 5% de la amplitud de su balanceo original. Sabiendo que su vehículo tiene una masa de 2 200 kg (incluidos la gasolina, sus cosas y usted mismo), ¿qué puede decir acerca de la constante de resorte efectiva y el amortiguamiento de la suspensión de su vehículo?

14.13 Un astronauta, haciendo su primer vuelo en un transbordador espacial, trae consigo su reloj de pared miniatura favorito. En el momento del lanzamiento, el reloj de pared y su reloj digital de pulsera están sincronizados. El reloj de pared está apuntando en la dirección de la nariz del transbordador

espacial. Durante la fase de impulso, el transbordador tiene una aceleración cuya magnitud es varias veces el valor de la aceleración gravitacional en la superficie terrestre. Conforme el transbordador alcanza una rapidez de crucero constante después de completarse la fase de impulso, el astronauta compara la hora del reloj de pared con el de su reloj de pulsera. ¿Se encuentran los relojes aún sincronizados? Explique.



14.14 Un cilindro pequeño de masa m se puede deslizar sin fricción en un eje que está sujeto a una tornamesa, como se muestra en la figura. El eje también pasa a través de las vueltas de un resorte con constante de resorte k , el cual está sujeto a la tornamesa en un extremo y al cilindro en

el otro extremo. La longitud de equilibrio del resorte (sin estirar ni comprimir) coincide con el radio de la tornamesa; de esta forma cuando la tornamesa no está rotando, el cilindro está en equilibrio en el centro de la tornamesa. Al cilindro se le da un desplazamiento inicial pequeño y , al mismo tiempo, se imprime a la tornamesa un movimiento circular uniforme con rapidez angular ω . Calcule el periodo de oscilaciones realizadas por el cilindro. Discuta el resultado.

14.15 Un mecanismo amortiguador para cerrar una puerta permite que ésta se cierre por sí misma, como se muestra en la figura. El amortiguador consiste en un resorte para regresar sujeto a un pistón amortiguador lleno de aceite. Cuando el resorte jala al pistón a la derecha, los dientes de la barra del pistón engranan una rueda dentada, la cual rota y hace que la puerta se cierre. ¿Deberá el sistema ser subamortiguado, amortiguado críticamente o sobreamortiguado para el mejor desempeño (donde la puerta se cierra rápidamente sin golpear el marco)?



14.16 Cuando la amplitud de oscilación de una masa en una cuerda estirada se incrementa, ¿por qué no se incrementa también el periodo de oscilación?

14.17 Los sistemas de masa-resorte y los de péndulo pueden usarse como dispositivos para medir el tiempo en forma mecánica. ¿Cuáles son las ventajas de usar un tipo de sistema en lugar del otro en un dispositivo diseñado para generar mediciones de tiempo reproducibles por un periodo extendido?

14.18 Usted tiene un resorte lineal (que sigue la ley de Hooke) con una constante de resorte desconocida, una masa estándar y un cronómetro. Explique en forma cuidadosa cómo podría usted usar esto de la manera más práctica para medir la masa en la ausencia de gravedad. Sea tan cuantitativo como pueda. Ignore la masa del resorte.

14.19 El péndulo A tiene una pesa de masa m colgada de una cuerda de longitud L ; el péndulo B es idéntico al A excepto porque su pesa tiene una masa de $2m$. Compare las frecuencias de las oscilaciones pequeñas de los dos péndulos.

14.20 Un pico agudo en la curva de la frecuencia puede representarse como la suma de funciones sinusoidales de todas las frecuencias posibles, con amplitudes iguales. Una campana golpeada con un martillo suena con su frecuencia natural, esto es, la frecuencia con la que vibra como un oscilador libre. Explique por qué, tan clara y concisamente como pueda.

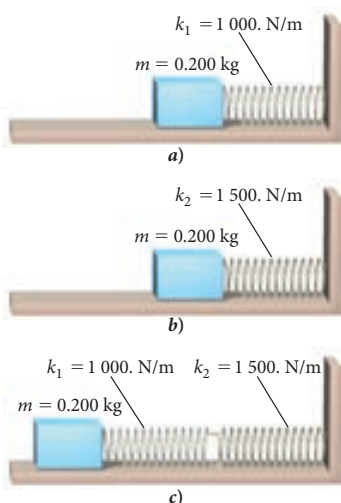
PROBLEMAS

Una • y dos •• indican un nivel creciente de dificultad.

Sección 14.1

14.21 Una masa $m = 5.00$ kg está suspendida de un resorte y oscila de acuerdo con la ecuación de movimiento $x(t) = 0.5 \cos(5t + \pi/4)$. ¿Cuál es la constante de resorte?

14.22 Determine la frecuencia de oscilación de un bloque de 200. g que está conectado mediante un resorte a una pared y deslizándose sobre una superficie sin fricción para estas tres condiciones mostradas en la figura.



14.23 Una masa de 10.0 kg está colgando de un alambre de acero de 1.00 m de longitud y 1.00 mm de diámetro. Si la masa se tira hacia abajo ligeramente y se suelta, ¿cuál será la frecuencia de las oscilaciones resultante? El módulo de Young para el acero es de $2.0 \cdot 10^{11}$ N/m².

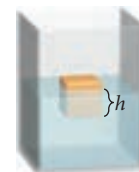
14.24 Un bloque de 100. g cuelga de un resorte con $k = 5.00$ N/m. En $t = 0$ s, el bloque está a 20.0 cm bajo la posición de equilibrio y moviéndose hacia arriba con una velocidad de 200. cm/s. ¿Cuál es la rapidez del bloque cuando el desplazamiento del equilibrio es de 30.0 cm?

14.25 Un bloque de madera con masa de 55.0 g flota en una piscina, oscilando arriba y abajo en un movimiento armónico simple con una frecuencia de 3.00 Hz.

a) ¿Cuál es el valor de la constante de resorte efectiva del agua?
 b) Una botella de agua parcialmente llena y casi del mismo tamaño y forma que el bloque de madera, pero con una masa de 250. g se coloca en la superficie del agua. ¿A qué frecuencia se balanceará de arriba a abajo la botella?

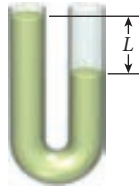
14.26 Cuando una masa se sujeta a un resorte vertical, el resorte se estira una distancia d . Entonces, la masa se jala hacia abajo desde esta posición y se libera. Experimenta 50.0 oscilaciones en 30.0 s. ¿Cuál es la distancia d ?

14.27 Un cubo de densidad ρ_c flota en un líquido de densidad ρ_l como se muestra en

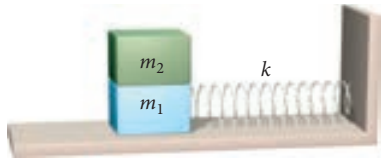


la figura. En el reposo, una cantidad h de la altura del cubo se sumerge en el líquido. Si se empuja el cubo hacia abajo, se balancea de arriba abajo como un resorte y oscila en torno de la posición de equilibrio. Muestre que la frecuencia de la oscilación está dada por $f = (2\pi)^{-1} \sqrt{g/h}$.

•14.28 Un tubo de vidrio en forma de U con un área de sección transversal, A , está parcialmente lleno con un líquido de densidad ρ . Una presión incrementada se aplica a uno de los brazos, lo cual resulta en una diferencia en la elevación de L entre los dos brazos del tubo, como se muestra en la figura. Entonces, se retira el incremento de presión y el fluido oscila en el tubo. Determine el periodo de la oscilación de la columna de fluido. (Usted tiene que determinar cuáles son las cantidades desconocidas.)



•14.29 La figura muestra una masa $m_2 = 20.0$ g reposando encima de una masa $m_1 = 20$ g que está sujeta a un resorte con $k = 10.0$ N/m. El coeficiente de fricción estática entre las dos masas es de 0.600. Las masas están oscilando con movimiento armónico simple sobre una superficie sin fricción. ¿Cuál es la amplitud máxima que puede tener la oscilación sin que m_2 se resbale sobre m_1 ?



••14.30 Considere dos osciladores idénticos, cada uno con una constante de resorte k y masa m , en movimiento armónico simple. Un oscilador se arranca con condiciones iniciales x_0 y v_0 ; el otro arranca con condiciones ligeramente diferentes $x_0 + \delta x$ y $v_0 + \delta v$.

- Encuentre la diferencia en las posiciones de los osciladores, $x_1(t) - x_2(t)$, para todos los t .
- Esta diferencia está limitada; esto es, existe una constante C , independientemente del tiempo, para la cual $|x_1(t) - x_2(t)| \leq C$ se mantiene para todos los t . Encuentre una expresión para C . ¿Cuál es el mejor límite, es decir, cuál es el menor valor de C que funciona? (Nota: una característica importante de los sistemas caóticos es la sensibilidad exponencial a las condiciones iniciales; la diferencia en la posición de dos sistemas semejantes con condiciones iniciales un poco diferentes crece exponencialmente con el tiempo. Usted ha mostrado que un oscilador en movimiento armónico simple no es un sistema caótico.)

Sección 14.2

14.31 ¿Cuál es el periodo de un péndulo simple que tiene una longitud de 1.00 m en cada situación?

- En el laboratorio de física.
- En un ascensor acelerando a 2.10 m/s^2 hacia arriba.
- En un ascensor acelerando a 2.10 m/s^2 hacia abajo.
- En un elevador que se encuentra en caída libre.

14.32 Suponga que se usa un péndulo simple para medir la aceleración debida a la gravedad en varios puntos sobre la Tierra. Si g varía por 0.16% a través de las diversas ubicaciones donde se muestrea, ¿cuál es la variación correspondiente en el periodo del péndulo? Suponga que la longitud del péndulo no cambia de un sitio a otro.

•14.33 Una masa de 1.00 kg está conectada a una masa de 2.00 kg por una barra sin masa de 30.0 cm de longitud, como se muestra en la figura. Entonces, se taladra un agujero en la barra a 10.0 cm y la barra y las masas son libres de rotar en torno del punto de pivote, P . Calcule el periodo de oscilación de las masas si se desplazan ligeramente de la posición de equilibrio estable.

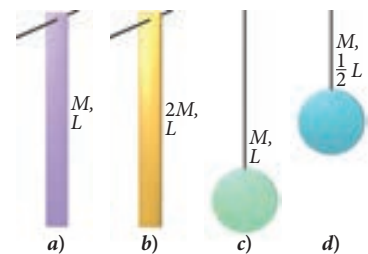


•14.34 Un péndulo de torsión es un alambre suspendido en forma vertical con una masa sujeta a uno de sus extremos y libre de rotar. El alambre se resiste a ser torcido, lo mismo que a la elongación y a la compresión, así es que está sometido al equivalente rotacional de la ley de Hooke: $\tau = -\kappa\theta$. Use esta información para encontrar la frecuencia de un péndulo de torsión.

•14.35 Un péndulo físico consiste en una barra uniforme de masa M y longitud L . El péndulo tiene su pivote en un punto que se encuentra a una distancia x del centro de la barra, de tal manera que el periodo de oscilación del péndulo depende de x : $T(x)$.

- ¿Qué valor de x brinda el valor máximo para T ?
- ¿Qué valor de x brinda el valor mínimo para T ?

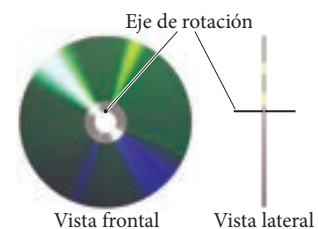
•14.36 En la figura se muestran cuatro péndulos distintos: a) una barra tiene una masa M y una longitud L ; b) una barra tiene una masa $2M$ y una longitud L ; c) una masa M está sujeta a una cuerda sin masa de longitud L ; d) una masa M sujeta a una cuerda sin masa de longitud $\frac{1}{2}L$. Encuentre el periodo de cada péndulo cuando se le jala 20° a la derecha y luego se libera.



•14.37 Un reloj de pared usa un péndulo físico para medir el tiempo. El péndulo consiste en una barra delgada uniforme de masa M y longitud L pivotada libremente en torno de un extremo, con una esfera sólida de la misma masa, M , y un radio $L/2$, centrada en torno del extremo libre de la barra.

- Obtenga una expresión para el momento de inercia del péndulo con respecto a su punto de pivote como función de M y L .
- Obtenga una expresión para el periodo del péndulo para oscilaciones pequeñas.
- Determine la longitud L que brinda un periodo de $T = 2.0$ s.

•14.38 Un CD normal tiene un diámetro de 12 cm y un agujero que está centrado en el eje de simetría y con un diámetro de 1.5 cm. El grosor del CD es de 2.0 mm. Si un alfiler (muy delgado) que se extiende a través del agujero del CD lo suspende en una orientación vertical, como se muestra en la figura, el CD oscilará en torno a un eje paralelo al alfiler, balanceándose de un lado a otro. Calcule la frecuencia de oscilación para oscilaciones pequeñas.

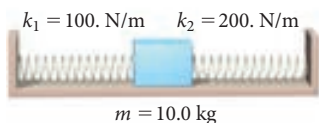


Sección 14.3

14.39 Un objeto sólido de $m = 5.00$ kg oscila con un movimiento armónico simple. Su posición como función del tiempo varía de acuerdo con la ecuación $x(t) = 2\text{sen}(\pi/2t + \pi/6)$.

- ¿Cuál es la posición, velocidad y aceleración del objeto a $t = 0$ s?
- ¿Cuál es la energía cinética del objeto como función del tiempo?
- ¿A qué tiempo después de $t = 0$ se encuentra la energía cinética por primera vez en su máximo?

14.40 La masa m que se muestra en la figura es desplazada a una distancia x a la derecha de su posición de equilibrio.



- ¿Cuál es la fuerza neta que actúa sobre la masa y cuál es la constante de resorte efectiva?
- Si $k_1 = 100$. N/m y $k_2 = 200$. N/m, ¿cuál será la frecuencia de la oscilación cuando se libera la masa?
- Si $x = 0.100$ m, ¿cuál es la energía total del sistema masa-resorte después de que se libera la masa y cuál es la velocidad máxima de la masa?

•**14.41** Una masa de 2.0 kg sujeta a un resorte se desplaza 8.0 cm a partir de la posición de equilibrio. Se libera y entonces oscila con una frecuencia de 4.0 Hz.

- ¿Cuál es la energía del movimiento cuando la masa pasa a través de la posición de equilibrio?
- ¿Cuál es la rapidez de la masa cuando está a 2.0 cm de la posición de equilibrio?

•**14.42** Un péndulo de Foucault está diseñado para demostrar el efecto de la rotación de la Tierra. Un péndulo de Foucault exhibido en un museo es típicamente muy largo, con objeto de hacer que el efecto sea más fácil de ver. Considere un péndulo de Foucault con una longitud de 15 m y con un peso de latón de 110 kg. Se le pone a balancear con una amplitud de 3.5° .

- ¿Cuál es el periodo del péndulo?
- ¿Cuál es la energía cinética máxima del péndulo?
- ¿Cuál es la rapidez máxima del péndulo?

••**14.43** La figura muestra una masa, $m_1 = 8.00$ kg, que se encuentra en reposo en una superficie horizontal sin fricción y conectada a una pared mediante un resorte con $k = 70.0$ N/m. Una segunda masa, $m_2 = 5.00$ kg, se mueve a la derecha a $v_0 = 17.0$ m/s. Las dos masas colisionan y se quedan pegadas.

- ¿Cuál es la compresión máxima del resorte?
- ¿Cuánto tiempo transcurrirá después de la colisión para que el resorte alcance su compresión máxima?



••**14.44** Una masa $M = 0.460$ kg se mueve con una rapidez inicial $v = 3.20$ m/s sobre una pista de aire sin fricción. La masa está a una distancia inicial $D = 0.250$ m de un resorte con $k = 840$ N/m, el cual está montado de manera rígida en un extremo de la pista de aire. La masa comprime el resorte una

distancia máxima d , antes de cambiar de dirección. Después de rebotar en el resorte, la masa viaja a la misma rapidez v , pero en sentido opuesto.

- Determine la distancia máxima que se comprime el resorte.
- Encuentre el tiempo transcurrido total hasta que la masa regresa a su posición inicial. (Pista: La masa experimenta un ciclo parcial de movimiento armónico simple mientras está en contacto con el resorte.)

••**14.45** El movimiento relativo de dos átomos en una molécula puede describirse como el movimiento de un solo cuerpo con una masa m moviéndose en una dimensión, con una energía potencial $U(r) = A/r^{12} - B/r^6$, donde r es la separación entre los átomos y A y B son constantes positivas.

- Encuentre la separación de equilibrio, r_0 , de los átomos, en términos de las constantes A y B .
- Si se mueven ligeramente, los átomos oscilarán alrededor de su separación de equilibrio. Encuentre la frecuencia angular de esta oscilación, en términos de A , B y m .

Sección 14.4

14.46 Una masa de 3.00 kg sujeta a un resorte con $k = 140$. N/m está oscilando en una tina de aceite, el cual amortigua las oscilaciones.

- Si la constante de amortiguamiento del aceite es $b = 10.0$ kg/s, ¿cuánto tiempo le tomará a la amplitud de las oscilaciones para decrecer a 1.00% de su valor original?
- ¿Cuál debe ser la constante de amortiguamiento para reducir la amplitud de las oscilaciones en 99.0% en 1.00 s?

14.47 Un resorte vertical con una constante de resorte de 2.00 N/m tiene una masa de 0.30 kg sujeta a éste y la masa se mueve en un medio con una constante de amortiguamiento de 0.025 kg/s. Se libera la masa a partir del reposo en una posición de 5.0 cm a partir de la posición de equilibrio. ¿Cuánto se demorará para que la amplitud decrezca a 2.5 mm?

14.48 Una masa de 0.404 kg está sujeta a un resorte con una constante de resorte de 206.9 N/m. Su oscilación está amortiguada, con una constante de amortiguamiento $b = 14.5$ kg/s. ¿Cuál es la frecuencia de esta oscilación amortiguada?

•**14.49** Los automóviles tienen amortiguadores para amortiguar las oscilaciones que de otra forma ocurrirían cuando los resortes que sujetan a las ruedas con el bastidor del auto se comprimen o estiran. Idealmente, los amortiguadores suministran amortiguamiento crítico. Si los amortiguadores fallan, éstos proporcionan menor amortiguamiento, lo cual da por resultado un movimiento subamortiguado. Usted puede realizar una prueba sencilla de sus amortiguadores, empujando hacia abajo una esquina de su auto y después soltarlo rápidamente. Si se presenta una oscilación de arriba abajo, usted sabrá que los amortiguadores necesitan cambiarse. El resorte de cada una de las ruedas de un auto tiene una constante de resorte de 4 005 N/m y el auto tiene una masa de 851 kg, distribuida por igual en las cuatro ruedas. Sus amortiguadores se han descompuesto y proporcionan sólo 60.7% del amortiguamiento que inicialmente estaban diseñados para proporcionar. ¿Cuál es el periodo de la oscilación subamortiguada de este auto si se realiza la prueba de empujar hacia abajo a los amortiguadores?

•14.50 En un laboratorio, una estudiante se percató de que la longitud de un resorte sin estirar es de 11.2 cm. Cuando se cuelga una masa de 100.0 g del resorte, su longitud es de 20.7 cm. Al sistema masa-resorte se le pone en movimiento oscilatorio y la estudiante observa que la amplitud de la oscilación decrece por un factor de 2 después de cinco ciclos completos.

- Calcule el periodo de oscilación para este sistema, suponiendo que no hay amortiguamiento.
- Si la estudiante puede medir el periodo con una precisión de 0.05 s, ¿será ella capaz de detectar la diferencia entre el periodo sin amortiguamiento y el periodo con amortiguamiento?

•14.51 Un saltador de bungee de 80.0 kg está disfrutando una tarde de saltos. La primera oscilación del saltador tiene una amplitud de 10.0 m y un periodo de 5.00 s. Trate a la cuerda de bungee como un resorte sin amortiguamiento, calcule:

- la constante de resorte para la cuerda de bungee;
- la rapidez máxima del saltador de bungee durante la oscilación, y
- el tiempo para que la amplitud decrezca a 2.00 m (con la resistencia del aire proporcionando el amortiguamiento de las oscilaciones en 7.50 kg/s).

••14.52 Una pequeña masa, $m = 50.0$ g, está sujeta al extremo de una barra sin masa que cuelga del techo y está libre para balancearse. La barra tiene una longitud $L = 1.00$ m. Se desplaza la barra 10.0° de la vertical y se libera en $t = 0$. Desprecie la resistencia del aire. ¿Cuál es el periodo de oscilación de la barra? Ahora, suponga que el sistema completo se sumerge en un fluido con una constante de amortiguamiento pequeña, $b = 0.0100$ kg/s, y la barra se libera de nuevo desde un ángulo de desplazamiento de 10.0° . ¿Cuál es el tiempo para que la amplitud de la oscilación se reduzca a 5.00% ? Suponga que el amortiguamiento es pequeño. Asimismo, observe que dado que la amplitud de la oscilación es pequeña y la masa del péndulo se encuentra en un extremo de la barra, el movimiento de la masa se puede tratar como estrictamente lineal y usted puede usar la sustitución $R\theta(t) = x(t)$, donde $R = 1.0$ m es la longitud de la barra del péndulo.

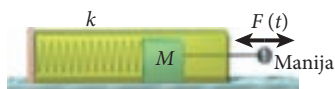
Sección 14.5

14.53 Una masa de 3.0 kg está vibrando en un resorte. Tiene una rapidez angular resonante de 2.4 rad/s y una rapidez angular de amortiguamiento de 0.14 rad/s. Si la fuerza impulsora es de 2.0 N, encuentre la amplitud máxima si la rapidez angular impulsora es de a) 1.2 rad/s, b) 2.4 rad/s y c) 4.8 rad/s.

•14.54 Una masa de 0.404 kg está sujeta a un resorte con una constante de resorte de 204.7 N/m y cuelga en reposo. El resorte cuelga de un pistón. Entonces, el pistón se mueve de arriba a abajo, impulsado por una fuerza dada por $(29.4 \text{ N}) \cos [(17.1 \text{ Hz})t]$.

- ¿Cuál es el desplazamiento máximo con respecto a su posición de equilibrio que puede alcanzar la masa?
- ¿Cuál es la rapidez máxima que puede lograr la masa en este movimiento?

••14.55 Una masa, $M = 1.6$ kg, está sujeta a una pared mediante un resorte con $k =$



578 N/m. La masa de desliza sobre un piso sin fricción. El resorte y la masa están inmersos en un fluido con una constante de amortiguamiento de 6.4 kg/s. Una fuerza horizontal, $F(t) = F_d \cos(\omega_d t)$, con $F_d = 52$ N, se aplica a la masa a través de una manija, haciendo que la masa oscile de un lado a otro. Desprecie la masa de un resorte y de la manija y la varilla. Aproximadamente, ¿a qué frecuencia será mayor la amplitud de la oscilación de la masa y cuál es la amplitud máxima? Si la frecuencia impulsora se reduce un poco (pero la amplitud del impulso permanece igual), ¿a qué frecuencia será la amplitud de la oscilación de la masa igual a la mitad de la amplitud máxima?

Problemas adicionales

14.56 Cuando el desplazamiento de una masa unida a un resorte es la mitad de la amplitud de su oscilación, ¿qué fracción de la energía de la masa es energía cinética?

14.57 Una masa m se sujeta a un resorte con una constante de resorte k y se pone en movimiento armónico simple. Cuando la masa tiene la mitad de su energía cinética máxima, ¿qué tan lejos de su posición de equilibrio se encuentra, expresada como una fracción de su desplazamiento máximo?

14.58 Si usted golpea un oscilador armónico en forma abrupta, le imparte una velocidad inicial, pero ningún desplazamiento inicial. Para un oscilador débilmente amortiguado con masa m , constante de resorte k y fuerza amortiguadora $F_\gamma = -bv$, encuentre $x(t)$, si el impulso total suministrado por el golpe es J_0 .

14.59 Se observa que una masa $m = 1.00$ kg en un sistema resorte-masa con $k = 1$ N/m se está moviendo a la derecha, más allá de su posición de equilibrio con una rapidez de 1 m/s al tiempo $t = 0$.

- Ignorando todo amortiguamiento, determine la ecuación de movimiento.
- Suponga que las condiciones iniciales son tales que en tiempo $t = 0$, la masa se encuentra en $x = 0.500$ m y moviéndose a la derecha con una rapidez de 1 m/s. Determine la nueva ecuación de movimiento. Suponga la misma constante de resorte y la misma masa.

14.60 El movimiento de un sistema bloque-resorte se describe mediante $x(t) = A \sin(\omega t)$. Encuentre ω , si la energía potencial es igual a la energía cinética en $t = 1.00$ s.

14.61 Se puede pensar en una molécula de hidrógeno gaseoso como un par de protones unidos juntos por un resorte. Si la masa de un protón es de $1.7 \cdot 10^{-27}$ kg, y el periodo de oscilación es de $8.0 \cdot 10^{-15}$ s, ¿cuál es la constante de resorte efectiva para el enlace en una molécula de hidrógeno?

14.62 Un amortiguador que proporciona amortiguamiento crítico con $\omega_\gamma = 72.4$ Hz se comprime por 6.41 cm. ¿Qué tan lejos de su posición de equilibrio se encuentra después de 0.0247 s?

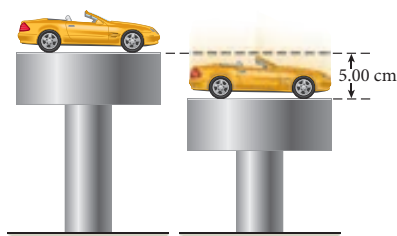
14.63 Imagine que usted es un astronauta que ha aterrizado en otro planeta y desea determinar la aceleración en caída libre de ese planeta. En unos de los experimentos que usted decide conducir, usa un péndulo de 0.50 m de longitud y encuentra que su periodo de oscilación es de 1.50 s. ¿Cuál es la aceleración debida a la gravedad sobre este planeta?

14.64 Una rama de árbol horizontal se encuentra directamente encima de otra rama de árbol horizontal. La elevación de la rama superior es de 9.65 m sobre el suelo y la elevación de la rama inferior es de 5.99 m sobre el suelo. Algunos niños deciden usar las dos ramas para colgar un columpio de neumático (llanta). Un extremo de la cuerda del columpio de neumático se ata a la rama superior del árbol, de tal manera que la parte inferior del columpio está a 0.47 m sobre el suelo. El columpio es, de esta forma, un péndulo restringido. Comenzando con la longitud completa de la cuerda a un ángulo inicial de 14.2° con respecto a la vertical, ¿cuánto tiempo le toma a un niño de masa 29.9 kg completar una oscilación de un lado a otro?

14.65 Dos péndulos con longitudes idénticas de 1.00 m se suspenden del techo y comienzan a oscilar al mismo tiempo. Uno está en Manila, Filipinas, donde $g = 9.784 \text{ m/s}^2$ y el otro en Oslo, Noruega, donde $g = 9.819 \text{ m/s}^2$. ¿Después de cuántas oscilaciones en el péndulo de Manila se encontrarán los dos péndulos en fase otra vez? ¿Cuánto tiempo les tomará para estar en fase otra vez?

14.66 Dos resortes, cada uno con una constante de resorte $k = 125 \text{ N/m}$, se cuelgan de manera vertical y se sujetan masas de 1.00 kg a sus extremos. Un resorte se tira hacia abajo 5.00 cm y se libera en $t = 0$; el otro se jala hacia abajo 4.00 cm y se libera a $t = 0.300 \text{ s}$. Encuentre las diferencias de fases, en grados, entre las oscilaciones de las dos masas y las ecuaciones para los desplazamientos verticales de las masas, tomando hacia arriba la dirección positiva.

14.67 Un pistón tiene un carrito de juguete posado sobre él y está experimentando movimiento armónico simple de manera vertical, con una amplitud de 5.00 cm, como se muestra en la figura. Cuando la frecuencia de oscilación es baja, el carrito se mantiene sobre el pistón. Sin embargo, cuando se incrementa la frecuencia suficientemente, el carrito abandona al pistón. ¿Cuál es la frecuencia máxima en la cual el carrito permanecerá en su sitio sobre el pistón?



14.68 El periodo de un péndulo es de 0.24 s sobre la Tierra. Se encuentra que el periodo del mismo péndulo es de 0.48 s sobre el planeta X, cuya masa es igual a la de la Tierra. a) Calcule la aceleración gravitacional en la superficie del planeta X. b) Encuentre el radio del planeta X en términos del radio de la Tierra.

14.69 Un reloj de pared usa un péndulo y una pesa. El péndulo tiene un periodo de 2.00 s y la masa del peso es de 250. g. La pesa baja con lentitud, suministrando la energía para superar el amortiguamiento de un péndulo debido a la fricción. La pesa tiene una masa de 1.00 kg y se mueve hacia abajo 25.0 cm

cada día. Encuentre Q para este reloj. Suponga que la amplitud de la oscilación del péndulo es de 10.0° .

14.70 Una lata cilíndrica con un diámetro de 10.0 cm contiene un balastro de tal manera que flote verticalmente en el agua. La masa de la lata y el balastro es de 800.0 g y la densidad del agua es de 1.00 g/cm^3 . Se levanta la lata 1.00 cm desde su posición de equilibrio y se libera en $t = 0$. Encuentre el desplazamiento vertical a partir del equilibrio como función del tiempo. Determine el periodo del movimiento. Ignore el efecto de amortiguamiento debido a la viscosidad del agua.

14.71 El periodo de oscilación de un objeto en un túnel sin fricción que corre a través del centro de la Luna es $T = 2\pi/\omega_0 = 6485 \text{ s}$, como se muestra en el ejemplo 14.2. ¿Cuál es el periodo de oscilación de un objeto en un túnel semejante a través de la Tierra ($R_E = 6.37 \cdot 10^6 \text{ m}$; $R_M = 1.74 \cdot 10^6 \text{ m}$; $M_E = 5.98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$; $M_M = 7.36 \cdot 10^{22} \text{ kg}$)?

14.72 El movimiento de un planeta en una órbita circular en torno de una estrella obedece a la ecuación del movimiento armónico simple. Si se observa a la órbita del planeta de canto, de tal forma que el movimiento del planeta parece ser unidimensional, la analogía es bastante directa: el movimiento del planeta luce justo como el movimiento de un objeto unido a un resorte.

a) Use la tercera ley de Kepler del movimiento de los planetas para determinar la “constante de resorte” para un planeta en órbita circular en torno de una estrella con periodo T .

b) Cuando el planeta se encuentra en los extremos de su movimiento observado de canto, la analogía del “resorte” se extiende hasta su mayor desplazamiento. Usando la analogía del “resorte”, determine la velocidad orbital del planeta.

14.73 Un objeto en un movimiento armónico simple es *isócrono*, lo que significa que el periodo de sus oscilaciones es independiente de su amplitud. (Contrariamente a las aseveraciones comunes, el funcionamiento de un reloj de péndulo no está basado en este principio. Un reloj de péndulo funciona a una amplitud fija y finita. El mecanismo del reloj compensa la falta de armonicidad del péndulo.) Considere un oscilador de masa m en un movimiento unidimensional, con una fuerza restauradora $F(x) = -cx^3$, donde x es el desplazamiento a partir del equilibrio y c es una constante con las unidades apropiadas. El movimiento de este oscilador será periódico pero no isócrono.

a) Escriba la expresión para el periodo de las oscilaciones no amortiguadas de este oscilador. Si su expresión involucra una integral, debe ser una integral definida. Usted no necesita evaluar la expresión.

b) Use la expresión del inciso a) y determine la dependencia del periodo de oscilación con la amplitud.

c) Generalice los resultados de los incisos a) y b) a un oscilador de masa m en un movimiento unidimensional con una fuerza restauradora correspondiente a la energía potencial $U(x) = \gamma|x|^\alpha/\alpha$, donde α es un valor positivo y γ es una constante.

15

Ondas

LO QUE APRENDEREMOS 493

15.1 Movimiento ondulatorio 493

15.2 Osciladores acoplados 494

Ondas transversales y longitudinales 495

15.3 Descripción matemática de las ondas 495

Período, longitud de onda, velocidad 496

Formas de onda sinusoidales,

número de onda y fase 497

15.4 Derivación de la ecuación de onda 498

Soluciones de la ecuación de onda 499

Ondas en una cuerda 500

Ejemplo 15.1 Cable de un ascensor 501

Reflexión de ondas 501

15.5 Ondas en espacios bidimensionales y tridimensionales 502

Ondas esféricas 502

Ondas planas 503

Ondas de superficie 503

Ondas sísmicas 504

Ejemplo 15.2 Medición del tamaño del

núcleo fundido de la Tierra 505

15.6 Energía, potencia e intensidad de ondas 505

Energía de una onda 505

Potencia e intensidad de una onda 506

Problema resuelto 15.1 Potencia

transmitida por una onda en una cuerda 507

15.7 El principio de superposición e interferencia 508

Ejemplo 15.3 Superposición de pulsos

de onda 508

Interferencia de ondas 509

15.8 Ondas estacionarias y resonancia 510

Ondas estacionarias en una cuerda 510

Ejemplo 15.4 Afinación de un piano 512

15.9 Investigación sobre ondas 513

LO QUE HEMOS APRENDIDO / GUÍA DE ESTUDIO PARA EXAMEN 515

Práctica para resolución de problemas 516

Problema resuelto 15.2 Onda viajera 516

Problema resuelto 15.3 Onda estacionaria

en una cuerda 518

Preguntas de opción múltiple 519

Preguntas 520

Problemas 520



FIGURA 15.1 Surfista deslizándose sobre una ola inmensa en Australia.

LO QUE APRENDEREMOS

- Las ondas son perturbaciones (o excitaciones) que se propagan a través del espacio o algún medio como una función del tiempo. Una onda puede ser entendida como una serie de osciladores individuales acoplados a sus vecinos más cercanos.
- Las ondas pueden ser longitudinales o transversales.
- La ecuación de onda rige el movimiento general de las ondas.
- Las ondas transportan energía a través de distancias; sin embargo, por lo general no transportan materia, aun cuando una onda es propagada por átomos vibratorios en un medio.
- El principio de superposición establece una propiedad clave de las ondas: se pueden añadir dos formas de onda para formar otra.
- Las ondas pueden interferir una con la otra de manera constructiva o destructiva. Bajo ciertas condiciones se forman patrones de interferencia que se pueden analizar.
- Una onda estacionaria puede ser formada mediante la superposición de dos ondas viajeras.
- Las condiciones de frontera en cuerdas determinan las posibles longitudes y frecuencias de ondas estacionarias.

Al escuchar la palabra *ondas*, la mayoría de la gente piensa primero en olas del mar. Todo el mundo ha visto imágenes de surfistas deslizándose sobre olas enormes del mar en Hawai o en Australia (figura 15.1), o de las olas imponentes creadas por una tormenta devastadora en mar abierto. Estos muros de agua son ciertamente olas, como lo son las olas suaves que se quiebran en una playa. Sin embargo, las olas son mucho más comunes que las perturbaciones en agua. La luz y el sonido también son ondas, y el movimiento ondulatorio está involucrado tanto en terremotos y tsunamis como en transmisiones de radio y televisión. De hecho, más adelante en este libro veremos que las partículas de materia más pequeñas y fundamentales comparten muchas propiedades con las ondas. De alguna manera, todos estamos hechos tanto de ondas como de partículas.

En este capítulo examinamos las propiedades y el comportamiento de las ondas basándonos directamente sobre lo aprendido acerca de las oscilaciones, en el capítulo 14. Regresaremos al tema del movimiento ondulatorio cuando estudiemos la luz y cuando consideremos la mecánica cuántica y la estructura atómica. Áreas completas de la física se dedican al estudio de las ondas; por ejemplo, la óptica es la ciencia de las ondas luminosas, y la acústica es el estudio de las ondas sonoras (vea el capítulo 16). Las ondas también son de fundamental importancia en la astronomía y la electrónica. Los conceptos en este capítulo son apenas los primeros pasos hacia la comprensión de gran parte del mundo físico que nos rodea.

15.1 Movimiento ondulatorio

Si arroja una piedra en un estanque tranquilo, se crean ondas circulares que se propagan a lo largo de la superficie del agua, radialmente hacia afuera (figura 15.2). Si un objeto está flotando en la superficie del estanque (un palito, una hoja o un pato de plástico), se puede observar que el objeto se mueve hacia arriba y abajo conforme las olas se mueven hacia afuera debajo de él, pero que no se mueve de manera notable hacia afuera junto con las olas.

Si se amarra una cuerda a la pared, se sostiene un extremo y luego se mueve el brazo con rapidez hacia arriba y abajo, entonces este movimiento creará una cresta de onda que se propaga a lo largo de la cuerda, tal como se ilustra en la figura 15.3. Nuevamente esta onda se mueve, pero el material a través del cual se propaga la onda (la cuerda) se mueve arriba y abajo pero afuera de esto permanecerá en su lugar.

Estos dos ejemplos ilustran una característica principal de las ondas: una **onda** es una excitación que se propaga a través del espacio o algún medio como una función del tiempo, pero por lo general no transporta materia consigo. De esta manera fundamental, el movimiento ondulatorio es completamente distinto del movimiento que hemos estudiado hasta ahora. Las ondas electromagnéticas y gravitacionales no necesitan un medio para propagarse; pueden moverse a través del espacio vacío. Otras ondas sí se propagan en un medio; por ejemplo, las ondas sonoras pueden moverse a través de un gas (aire), un líquido (agua) o un sólido (rieles de acero), pero no a través del vacío.

Muchos otros ejemplos nos rodean en la vida cotidiana, la mayoría de ellos con oscilaciones que son demasiado pequeñas para ser observadas. La luz es una onda electromagnética, como lo son también las ondas de radio que reciben las radios de AM y FM, así como las ondas que llevan las señales de televisión a nuestras casas, ya sea mediante cables coaxiales o a través del aire vía transmisiones desde antenas en torres o satélites geoestacionarios.



FIGURA 15.2 Ondas circulares en la superficie del agua.

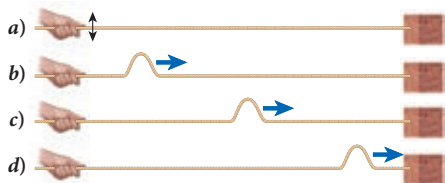


FIGURA 15.3 Una cuerda sostenida por una mano en un extremo y fijada firmemente a una pared en el otro extremo. *a)* El extremo de la cuerda se lleva arriba y abajo por el movimiento de la mano. En *b)*, *c)* y *d)* la onda corre a lo largo de la cuerda hacia la pared.

En este capítulo estudiamos el movimiento de ondas a través de medios. En esta categoría caen las vibraciones mecánicas como las ondas sonoras, las ondas sísmicas y las ondas en agua. Puesto que el sonido es una parte tan importante de la comunicación humana, el capítulo 16 se dedica en forma exclusiva a este fenómeno.

La ola del estadio —simplemente llamada “la ola”— aparece en la mayoría de los eventos deportivos: los espectadores se levantan y gesticulan con los brazos, tan pronto que sus vecinos hacen lo propio, y luego se vuelven a sentar. De este modo la ola da vuelta al estadio, pero cada espectador se queda en su lugar. ¿Con qué velocidad se mueve esta onda? Supongamos que cada persona tiene un retraso de tiempo comparable con su tiempo de reacción, 0.1 segundos, antes de imitar al espectador de junto y de levantarse de su asiento. Por lo general los asientos tienen un ancho de más o menos 0.6 m (2 ft). Esto significa que la ola se mueve 0.6 m en 0.1 s. De la cinemática simple sabemos que esto equivale a una velocidad de $v = \Delta x / dt = (0.6 \text{ m}) / (0.1 \text{ s}) = 6 \text{ m/s}$. Puesto que un estadio de fútbol normal es un óvalo con un perímetro de aproximadamente 400 m, podemos estimar que “la ola” tarda cerca de 1 min para dar una vuelta alrededor del estadio. Este cálculo bastante tosco es aproximadamente correcto, dentro de un factor de 2. De manera empírica consideramos que “la ola” se mueve con una velocidad de más o menos 12 m/s. La razón de esta velocidad más alta es que la gente anticipa la llegada de la ola y salta cuando ve que la gente de dos o tres asientos adelante empieza a saltar.

15.2 Osciladores acoplados

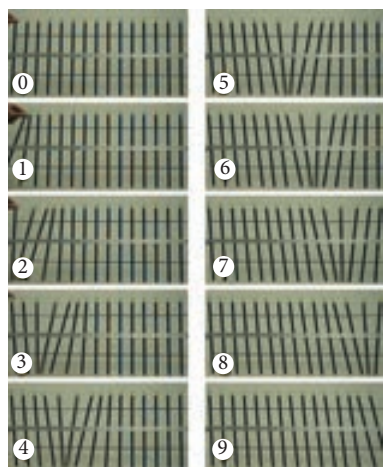


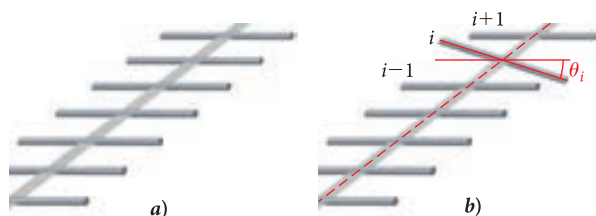
FIGURA 15.4 Serie de varillas idénticas acopladas a sus vecinas más cercanas por medio de resortes. Los números sobre los cuadros indican la secuencia temporal. Cada par de cuadros está separado por un intervalo de tiempo de 0.133 s.

Vamos a iniciar nuestra discusión cuantitativa de las ondas con el análisis de una serie de osciladores acoplados; por ejemplo, una cadena de objetos masivos idénticos acoplados por resortes idénticos. Una realización física se muestra en la figura 15.4, donde una serie de varillas metálicas idénticas es sostenida por una barra horizontal central. Las varillas pueden pivotar libremente sobre sus centros y están conectadas con sus vecinas más cercanas mediante resortes idénticos. Cuando se empuja la primera varilla, se transmite la excitación de cada varilla a su vecina, y el pulso que se genera de esta manera se propaga a lo largo de la hilera de varillas. Cada varilla es un oscilador y se mueve para atrás y para adelante en el plano del papel. Esta configuración representa un acoplamiento longitudinal entre los osciladores en el sentido de que el sentido del movimiento y el sentido del acoplamiento entre las vecinas más cercanas es el mismo.

Una realización física de un acoplamiento transversal se muestra en la figura 15.5. En el inciso *a)* de la figura, todas las varillas están fijas a una tira de tensión en su posición de equilibrio horizontal; en el inciso *b)*, la varilla *i* es desviada de la horizontal por un ángulo θ_i . Una deflexión de este tipo tiene dos efectos: primero, la tira de tensión proporciona una fuerza restauradora que trata de jalar la varilla *i* de regreso a la posición de equilibrio. Segundo, puesto que la tira de tensión es ahora torcida en ambos lados de la varilla *i*, la deflexión de esta varilla por un ángulo θ_i crea una fuerza que actúa para desviar las varillas $i - 1$ e $i + 1$ hacia θ_i . Si se permite que estas varillas se muevan libremente, se desviarán en esta dirección, y cada varilla a su vez generará una fuerza que actúa sobre sus dos vecinas más cercanas.

La figura 15.6 muestra una vista lateral del arreglo de varillas paralelas en la figura 15.5. Cada círculo representa el extremo de una varilla, y el movimiento de ese círculo puede ser caracterizado por una coordenada y_i . Entonces y_i está relacionado con el ángulo de deflexión θ_i , vía $y_i = \frac{1}{2}l \text{ sen } \theta_i$, donde l es la longitud de la varilla. La línea que conecta a los círculos representa el borde de la tira de tensión. En la figura 15.6*a)* todas las varillas están en equilibrio, lo que implica que todas las deflexiones son cero. En la figura 15.6*b)*, la varilla *i* experimenta una deflexión, lo que se ilustra en la figura 15.5*b)*. La fuerza que actúa sobre la varilla *i* debido a la tensión en la tira

FIGURA 15.5 Varillas paralelas sostenidas por una tira de tensión como modelo para osciladores transversalmente acoplados: *a)* posición inicial, todas las varillas están paralelas; *b)* la varilla *i* es desviada por un ángulo θ_i .



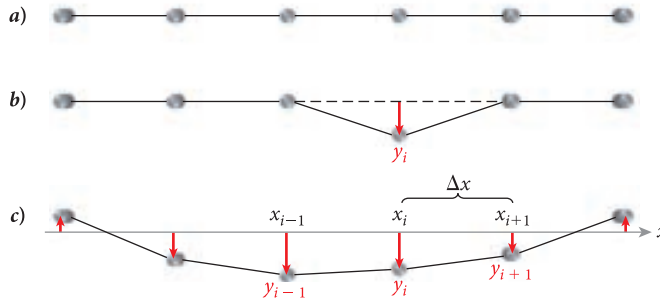


FIGURA 15.6 Vista lateral de las varillas acopladas de la figura 15.5: a) posición de equilibrio; b) una varilla es desviada; c) se permite que todas las varillas se muevan y se desvíen.

es un tipo de fuerza de resorte dada por $F_i = -ky_i$, donde la constante del resorte efectiva depende de las propiedades de la tira de tensión. Finalmente, en la figura 15.6c), se permite que todas las varillas se muevan. La fuerza neta que actúa sobre la varilla i es entonces la suma de las fuerzas ejercidas sobre ella por las varillas $i+1$ e $i-1$, a través de la tira de tensión que conecta las varillas. Estas fuerzas dependen de la diferencia entre las coordenadas y al principio y al final de la sección de la tira de tensión que conecta las tres varillas:

$$F_+ = -k(y_i - y_{i+1})$$

y

$$F_- = -k(y_i - y_{i-1}).$$

De esta manera la fuerza neta que actúa sobre la varilla i es la suma de estas dos fuerzas:

$$F_i = F_+ + F_- = -k(y_i - y_{i+1}) - k(y_i - y_{i-1}) = k(y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}).$$

Aplicando la segunda ley de Newton, $F = ma$, encontramos entonces la aceleración a_i , de la varilla i :

$$ma_i = k(y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}). \tag{15.1}$$

Podríamos resolver la serie resultante de ecuaciones en una computadora si conocemos las condiciones iniciales para la posición y velocidad de cada oscilador. Sin embargo, en realidad podemos derivar una ecuación de onda mediante la ecuación 15.1, lo que vamos a hacer en la sección 15.4.

Ondas transversales y longitudinales

Tenemos que hacer hincapié en una diferencia esencial entre los dos sistemas de osciladores acoplados que se muestran en las figuras 15.4 y 15.5. En el primer caso, se permite que los osciladores se muevan únicamente en la dirección de sus vecinos más cercanos, mientras que en el segundo caso los osciladores están limitados a moverse en una dirección perpendicular a la dirección de sus vecinos más cercanos (figura 15.7). En general, una onda que se propaga a lo largo de la dirección en la que se mueven los osciladores se llama **onda longitudinal**. En el capítulo 16 veremos que las ondas sonoras son prototipos de ondas longitudinales. Una onda que se propaga en una dirección perpendicular a la dirección en la que se mueven los osciladores individuales se llama **onda transversal**. Las ondas luminosas son ondas transversales.

Las ondas sísmicas creadas por terremotos existen como ondas longitudinales (o de compresión) y como ondas transversales. Estas ondas pueden propagarse tanto a lo largo de la superficie de la Tierra como a través de su interior y se pueden detectar lejos del epicentro del terremoto. El estudio de las ondas sísmicas ha revelado informaciones detalladas sobre la composición del interior de la Tierra, como veremos en el ejemplo 15.2.

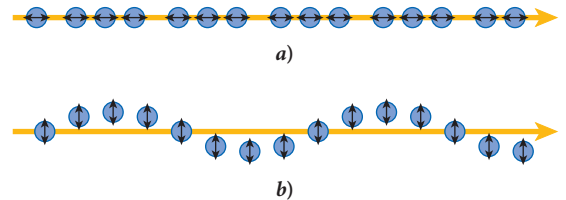
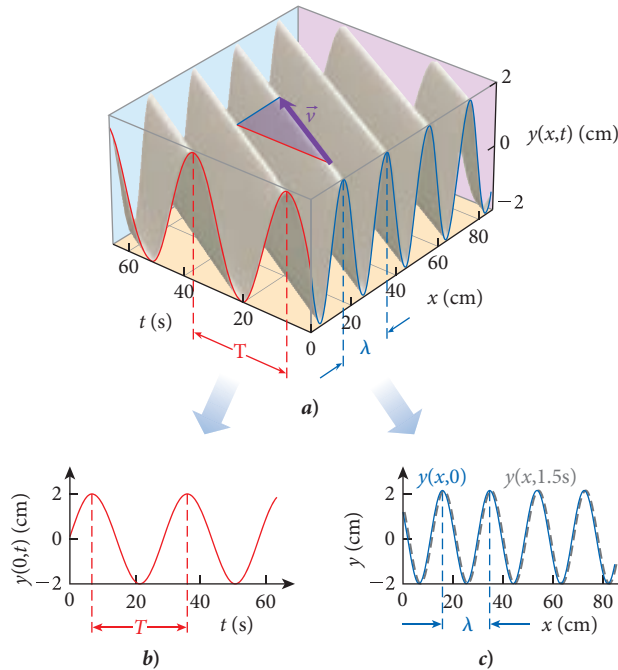


FIGURA 15.7 Representaciones de a) una onda longitudinal y b) una onda transversal que se propagan horizontalmente hacia la derecha.

15.3 Descripción matemática de las ondas

Hasta ahora hemos examinado pulsos de ondas sencillas, tal como la ola del estadio y la onda que resulta de empujar una vez una cadena de osciladores acoplados. Una clase mucho más común de fenómenos de ondas involucra una excitación periódica, en particular una excitación sinusoidal. En la cadena de osciladores de las figuras 15.4 o 15.5, se puede generar una onda continua si se

FIGURA 15.8 Onda sinusoidal: a) la onda como función de las coordenadas de espacio y tiempo; b) dependencia temporal de la onda en la posición $x = 0$; c) dependencia espacial de la onda al tiempo $t = 0$ (curva azul) y en un momento posterior $t = 1.5$ s (curva gris interrumpida).



mueve la primera varilla para adelante y para atrás en forma periódica. Esta oscilación sinusoidal también se propaga a lo largo de la cadena de osciladores, igual que un pulso de una onda sencilla.

Periodo, longitud de onda, velocidad

La figura 15.8a) muestra el resultado de una excitación sinusoidal, tanto como función del tiempo como de la coordenada horizontal, en el límite cuando un gran número de osciladores acoplados están muy cerca entre sí; es decir, en el límite del continuo. Primero vamos a examinar esta onda a lo largo del eje del tiempo para $x = 0$. Esta proyección se muestra en la figura 15.8b), que es una gráfica de la oscilación sinusoidal del primer oscilador de la cadena:

$$y(x=0,t) = A \sin(\omega t + \theta_0) = A \sin(2\pi f t + \theta_0), \tag{15.2}$$

donde ω es la frecuencia angular (o velocidad angular), f es la frecuencia, A es la amplitud de la oscilación y θ_0 da el corrimiento de fase. (Los valores que se utilizan en la figura 15.8 son $A = 2.0$ cm, $\omega = 0.2$ s⁻¹ y $\theta_0 = 0.5$.) Como para todos los osciladores, el periodo T se define como el intervalo de tiempo entre dos máximos sucesivos y está relacionado con la frecuencia mediante

$$T = \frac{1}{f}.$$

La figura 15.8c) muestra que para un tiempo dado t la dependencia de la coordenada horizontal x de las oscilaciones también es sinusoidal. Esta dependencia se muestra para $t = 0$ (curva azul) y $t = 1.5$ s (curva gris interrumpida). La distancia espacial entre dos máximos sucesivos se define como la **longitud de onda**, λ .

Como se puede ver en la figura 15.8a), líneas diagonales de igual altura describen el movimiento de la onda en el plano xt . Estas líneas se llaman **frentes de ondas**. Lo más importante que se debe tomar en cuenta acerca del movimiento de onda se ilustra en la figura 15.8 y el movimiento de ondas en general, es que durante un periodo un frente de onda dada avanza una longitud de onda.

La figura 15.9 presenta el triángulo de color morado claro que se muestra en la superficie superior de la onda en la figura 15.8a) en el plano xt para ilustrar aún más la relación entre la velocidad de la onda, el periodo y la longitud de onda. Ahora podemos ver que la velocidad de propagación de la onda se da por lo general con

$$v = \frac{\lambda}{T},$$

o bien, usando la relación entre periodo y frecuencia, $T = 1/f$, con

$$v = \lambda f. \tag{15.3}$$

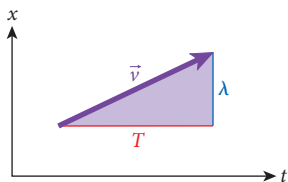


FIGURA 15.9 Vista del plano xt de la figura 15.8 que muestra la relación de la velocidad de onda con el periodo y la longitud de onda.

Esta relación entre longitud de onda, frecuencia y velocidad es válida para todos los tipos de ondas y es uno de los resultados más importantes en este capítulo.

Formas de ondas sinusoidales, número de onda y fase

¿Cómo obtenemos una descripción matemática de una onda sinusoidal como función del espacio y el tiempo? Empezamos con el movimiento del oscilador en $x = 0$ (vea la ecuación 15.2) y nos damos cuenta de que tarda un tiempo $t = x/v$ para que la excitación recorra una distancia x . De este modo podemos simplemente sustituir t en la ecuación 15.2 con $t - x/v$ para encontrar el desplazamiento $y(x,t)$ desde la posición de equilibrio como función del espacio y el tiempo:

$$y(x,t) = A \operatorname{sen} \left(\omega \left(t - \frac{x}{v} \right) + \theta_0 \right).$$

Luego podemos usar la ecuación 15.3 para la velocidad de la onda, $v = \lambda f$, para obtener

$$\begin{aligned} y(x,t) &= A \operatorname{sen} \left[2\pi f t \left(-\frac{x}{v} \right) + \theta_0 \right] \\ &= A \operatorname{sen} \left[2\pi f t - \frac{2\pi f x}{\lambda f} + \theta_0 \right] \\ y(x,t) &= A \operatorname{sen} \left[\frac{2\pi}{T} t - \frac{2\pi}{\lambda} x + \theta_0 \right]. \end{aligned}$$

Así como $\omega = 2\pi/T$, la expresión para el **número de ondas** κ , es

$$\kappa = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (15.4)$$

La sustitución de ω y κ en la expresión de arriba para $y(t)$ nos da entonces la función descriptiva que deseamos:

$$y(x,t) = A \operatorname{sen} (\omega t - \kappa x + \theta_0). \quad (15.5)$$

Una forma de onda sinusoidal de este tipo es casi aplicable universalmente cuando sólo hay una dimensión espacial en la que la onda se pueda propagar. Más adelante en este capítulo vamos a generalizar esta forma de onda a más de una coordenada espacial.

También podemos empezar con una forma de onda sinusoidal dada en algún punto del espacio, preguntando dónde se encontrará esta forma de onda en un momento posterior. Desde esta perspectiva podemos escribir la expresión para la forma de onda como función del espacio y el tiempo como

$$y(x,t) = A \operatorname{sen} (\kappa x - \omega t + \phi_0). \quad (15.6)$$

Las ecuaciones 15.5 y 15.6 son equivalentes entre sí porque $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen}(x) = \operatorname{sen}(\pi + x)$. El corrimiento de fase ϕ_0 , en la ecuación 15.6 está relacionado con el ángulo de fase θ_0 y en la ecuación 15.5 vía $\phi_0 = \pi - \theta_0$. Vamos a utilizar la ecuación 15.6, que es la forma más común, a partir de ahora.

El argumento de la función sinusoidal en la ecuación 15.6 se llama la **fase** de la onda ϕ :

$$\phi = \kappa x - \omega t + \phi_0. \quad (15.7)$$

Si se considera más de una onda en forma simultánea, la relación entre las fases de las ondas juega un papel esencial en el análisis. Más adelante en este capítulo vamos a regresar a este punto.

Finalmente, utilizando $\kappa = 2\pi/\lambda$ y $\omega = 2\pi/T$, podemos reescribir la ecuación para la velocidad del frente de onda (15.3) en términos del número de onda y la frecuencia angular:

$$v = \frac{\omega}{\kappa}. \quad (15.8)$$

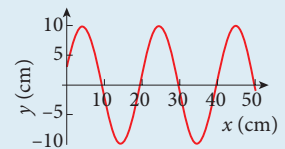
La frecuencia angular, ω , cuenta el número de oscilaciones en cada intervalo de tiempo de 2π : $\omega = 2\pi/T$, donde T es el periodo. De manera similar, el número de onda κ , cuenta el número de longitudes de onda λ , que caben en una distancia de 2π m: $\kappa = 2\pi/\lambda$. Por ejemplo, $\kappa = 0.33 \text{ cm}^{-1}$ en la gráfica de la figura 15.8.

15.1 Oportunidad de autoexamen

Estamos sentados en un bote en el centro del Lago Michigan. Las olas del agua que chocan contra la lancha se mueven a 3.0 m/s y el intervalo entre las crestas es de 7.5 m. ¿Cuál es la frecuencia con la que las crestas de las olas chocan contra el bote?

15.2 Oportunidad de autoexamen

La figura muestra una gráfica en $t = 0$ de una onda de la forma $y(x,t) = A \operatorname{sen}(\kappa x - \omega t + \phi_0)$. Determine la amplitud, A , el número de onda, κ , y el corrimiento de fase, ϕ_0 , de la onda.



Una onda viajera en el instante cuando $t = 0$.

15.4 Derivación de la ecuación de onda

En esta sección derivaremos una ecuación general de movimiento para ondas, que se llama simplemente **ecuación de onda**:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} y(x,t) - v^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} y(x,t) = 0, \quad (15.9)$$

donde $y(x,t)$ es el desplazamiento desde la posición de equilibrio como función de una coordenada espacial x , y una coordenada temporal, t , y v es la rapidez de la propagación de la onda. Esta ecuación de onda describe todos los movimientos no amortiguados de ondas en una dimensión.

DEDUCCIÓN 15.1

La ecuación de onda

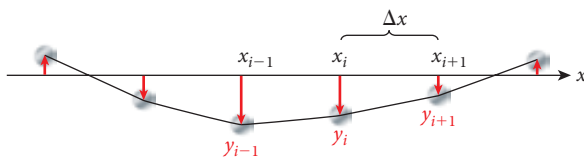


FIGURA 15.10 Vistas laterales de un par de varillas acopladas, donde todas las varillas pueden desviarse.

La figura 15.10 reproduce la figura 15.6c). El eje x que apunta en la dirección horizontal convencional es (como de costumbre) perpendicular al eje y , a lo largo del cual ocurre el movimiento de cada oscilador individual. La distancia horizontal entre osciladores adyacentes es Δx . Los desplazamientos de los osciladores, dados por $y(x,t)$, son entonces funciones de tiempo y de posición a lo largo del eje x , con $y_i = y(x_i, t)$. La aceleración se define como la segunda derivada del vector de posición, $y(x,t)$, con respecto al tiempo. Puesto que el vector de posición depende de más de una variable en este caso (tanto el tiempo como de la coordenada horizontal), tendremos que usar una derivada parcial para expresar esta relación:

$$a = \frac{\partial^2}{\partial t^2} y(x,t). \quad (i)$$

Si regresamos a la definición original de la derivada como límite de la razón de diferencias, podemos aproximar una derivada parcial con respecto a la coordenada x como

$$\frac{\partial}{\partial x} y(x,t) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x}.$$

Ahora podemos aproximar la segunda derivada como

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} y(x,t) = \frac{\Delta \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right)}{\Delta x} = \frac{\frac{(y_{i+1} - y_i)}{\Delta x} - \frac{(y_i - y_{i-1})}{\Delta x}}{\Delta x} = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{(\Delta x)^2}.$$

Tanto el lado derecho de esta ecuación como el lado derecho de la ecuación 15.1 contienen $y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}$. Por consiguiente podemos combinar estas dos ecuaciones:

$$ma_i = k(\Delta x)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} y(x,t).$$

Si sustituimos la segunda derivada parcial de la posición con respecto al tiempo a partir la ecuación (i) para la aceleración, encontramos

$$m \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} y(x,t) \right] = k(\Delta x)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} y(x,t).$$

Finalmente dividimos entre la masa del oscilador y obtenemos

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} y(x,t) - \frac{k}{m} (\Delta x)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} y(x,t) = 0. \quad (ii)$$

Esta ecuación, que relaciona las segundas derivadas parciales con respecto al tiempo y a la posición es una forma de la ecuación de onda. El cociente de la constante del resorte y la masa del oscilador es igual a la raíz cuadrada de la frecuencia angular, tal como lo vimos en el capítulo

14. Esto es también la frecuencia angular de la onda viajera. Por lo tanto, el producto de la frecuencia angular ω , multiplicado por el desplazamiento horizontal, Δx , es la velocidad de la onda (la rapidez con la que se mueve la onda en el espacio):

$$\frac{k}{m}(\Delta x)^2 = \omega^2(\Delta x)^2 = v^2. \quad (\text{iii})$$

De este modo la ecuación (ii) se convierte en la ecuación de onda dada por la ecuación 15.9:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}y(x,t) - v^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}y(x,t) = 0.$$

En el límite cuando los osciladores se acercan mucho entre sí —es decir, cuando $\Delta x \rightarrow 0$ — la solución de la ecuación de onda 15.9 ofrece la solución exacta para la ecuación diferencial 15.1. La ecuación 15.9 es de importancia general, y su aplicabilidad excede por mucho el problema de los osciladores acoplados. La forma básica dada en la ecuación 15.9 es válida para la propagación de ondas sonoras, ondas luminosas u ondas en una cuerda. La diferencia en sistemas físicos que muestran movimientos ondulatorios se manifiesta únicamente en la manera en que se calcula v , la velocidad de propagación de la onda.

En términos matemáticos, la ecuación 15.9 es una ecuación diferencial parcial. Como sabe, algunos cursos semestrales completos se dedican en su totalidad a las ecuaciones diferenciales parciales, y podrá encontrar muchas más ecuaciones de este tipo si estudia Ciencias Físicas o Ingeniería. Sin embargo, esta ecuación de onda será la única ecuación diferencial parcial que encontrará en este libro, y será suficiente tratar las derivadas parciales de la misma manera que las derivadas convencionales de funciones en una variable.

Soluciones de la ecuación de onda

En la sección 15.3 desarrollamos la ecuación 15.6 que describe una forma de onda sinusoidal. Vamos a ver si ésta es una solución de la ecuación de onda general 15.9. Para hacer esto tenemos que tomar las derivadas parciales de la ecuación 15.6 con respecto a la coordenada x y con respecto al tiempo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}y(x,t) &= \frac{\partial}{\partial t}(A \operatorname{sen}(\kappa x - \omega t + \phi_0)) = -A\omega \cos(\kappa x - \omega t + \phi_0) \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2}y(x,t) &= \frac{\partial}{\partial t}(-A\omega \cos(\kappa x - \omega t + \phi_0)) = -A\omega^2 \operatorname{sen}(\kappa x - \omega t + \phi_0) \\ \frac{\partial}{\partial x}y(x,t) &= \frac{\partial}{\partial x}(A \operatorname{sen}(\kappa x - \omega t + \phi_0)) = A\kappa \cos(\kappa x - \omega t + \phi_0) \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}y(x,t) &= \frac{\partial}{\partial x}(A\kappa \cos(\kappa x - \omega t + \phi_0)) = -A\kappa^2 \operatorname{sen}(\kappa x - \omega t + \phi_0). \end{aligned}$$

Si sustituimos estas derivadas parciales en la ecuación 15.9, encontramos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2}y(x,t) - v^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}y(x,t) &= \\ [-A\omega^2 \operatorname{sen}(\kappa x - \omega t + \phi_0)] - v^2 [-A\kappa^2 \operatorname{sen}(\kappa x - \omega t + \phi_0)] &= \\ -A \operatorname{sen}(\kappa x - \omega t + \phi_0)(\omega^2 - v^2\kappa^2) &= 0. \end{aligned} \quad (15.10)$$

De este modo vemos que la función dada por la ecuación 15.6 es una solución de la ecuación de onda 15.9, siempre y cuando $\omega^2 - v^2\kappa^2 = 0$. Sin embargo, ya sabemos de la ecuación 15.8 que éste es el caso, así que hemos establecido que la ecuación 15.6 es verdaderamente una solución de la ecuación de onda.

¿Existe una clase más grande de soluciones que incluye la que hemos encontrado? Sí; cualquier función Y arbitraria, continuamente diferenciable con un argumento que contiene la misma combinación lineal de x y t como en la ecuación 15.6, $\kappa x - \omega t$, es una solución de la ecuación de onda. Las constantes ω , κ y ϕ_0 pueden tener valores arbitrarios. Sin embargo, la convención que

se aplica por lo general es que tanto la frecuencia angular como el número de ondas son números positivos. Por lo tanto, existen dos soluciones generales para la ecuación de onda:

$$Y(\kappa x - \omega t + \phi_0) \text{ para una onda que se mueve en dirección } x \text{ positiva} \quad (15.11)$$

y

$$Y(\kappa x + \omega t + \phi_0) \text{ para una onda que se mueve en dirección } x \text{ negativa.} \quad (15.12)$$

Este resultado es quizá más obvio si escribimos estas funciones en términos de argumentos que involucran la velocidad de onda, $v = \omega/\kappa$. Veremos entonces que $Y(x - vt + \phi_0/\kappa)$ es una solución para una forma de onda arbitraria que se mueve en la dirección x positiva, y $Y(x + vt + \phi_0/\kappa)$ es una solución para una forma de onda que se mueve en la dirección x negativa.

Como hemos mencionado antes, la forma funcional de Y no tiene ninguna importancia. Esto lo podemos ver si consideramos la regla de la cadena para la diferenciación, $df(g(x))/dx = (df/dg)(dg/dx)$. Las derivadas parciales espaciales y temporales contienen el factor común df/dg que se cancela de la misma manera que la función sinusoidal se separaba en la ecuación 15.10. Por lo tanto, las derivadas de la función $g = \kappa x \pm \omega t + \phi_0$ siempre conducen a la misma condición $\omega^2 - v^2\kappa^2 = 0$, como se aplica a la solución para la forma de la onda sinusoidal.

Ondas en una cuerda

Los instrumentos de cuerda forman una clase grande de instrumentos musicales. En esta categoría se ubican las guitarras (figura 15.11), los violonchelos, violines, mandolinas, arpas y otros. Estos instrumentos producen sonidos musicales cuando se inducen vibraciones en sus cuerdas.

Supongamos que una cuerda tiene una masa M y una longitud L . Para encontrar la rapidez de la onda, v , en esta cuerda, podemos pensar como si ella estuviera compuesta de muchos segmentos individuales pequeños de la longitud Δx y la masa m , donde

$$m = \frac{M\Delta x}{L} = \mu\Delta x.$$

Aquí la densidad lineal de masa, μ , es su masa por unidad de longitud (que se supone es constante):

$$\mu = \frac{M}{L}.$$

Luego podemos tratar el movimiento de una onda en una cuerda como el de osciladores acoplados. La fuerza de restitución es proporcionada por la tensión de la cuerda $T = k\Delta x$. Si sustituimos de $m = \mu\Delta x$ en la ecuación para la velocidad de onda para sistemas de osciladores acoplados $k(\Delta x)^2/m = v^2$ [ecuación (iii) en la deducción 15.1] después de despejar v , encontramos la velocidad de onda en una cuerda:

$$v = \sqrt{\frac{k}{m}}\Delta x = \sqrt{\frac{k}{\mu\Delta x}}\Delta x = \sqrt{\frac{k\Delta x}{\mu}} = \sqrt{\frac{T}{\mu}}. \quad (15.13)$$

Observe que la letra T se utiliza para representar tanto la tensión de la cuerda como el periodo de oscilación, de acuerdo con la convención común. Asegúrese de que entiende qué cantidad se aplica a una situación dada.

¿Qué implica la ecuación 15.13? Hay dos consecuencias inmediatas. En primer lugar, aumentar la densidad lineal de masa lineal de la cuerda (es decir, el uso de una cuerda más pesada) reduce la velocidad de onda en la cuerda. En segundo lugar, aumentar la tensión de la cuerda (por ejemplo apretando la clavija de afinación en la parte superior de la guitarra eléctrica que se muestra en la figura 15.11) aumenta la velocidad de onda. Si usted toca un instrumento de cuerda, sabe que aumentando la tensión incrementa el tono del sonido producido por una cuerda. Más adelante regresaremos a la relación entre tensión y sonido.



a)



b)

FIGURA 15.11 a) Guitarra eléctrica típica como la usan las bandas de rock. b) La guitarra más pequeña del mundo, producida en 2004 en la Cornell NanoScale Science and Technology Facility. Es más pequeña que la guitarra en el inciso a) por un factor de 10^5 y tiene una longitud de $10 \mu\text{m}$, aproximadamente $\frac{1}{20}$ del ancho de un cabello humano.

EJEMPLO 15.1 Cable de un ascensor

Un técnico de ascensores (masa = 73 kg) está sentado en la parte superior de una cabina de elevador con una masa de 655 kg dentro del hueco de un rascacielos. Un cable de acero de 61 m, con una masa de 38 kg sostiene la cabina. El hombre envía una señal a su compañero en la parte superior del hueco del ascensor, golpeando el cable con su martillo.

PROBLEMA

¿Cuánto tiempo tardará el pulso de onda generado por el martillo para subir por el cable?

SOLUCIÓN

El cable está bajo tensión por el peso combinado de la cabina del ascensor y el técnico:

$$T = mg = (73 \text{ kg} + 655 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2) = 7\,142 \text{ N.}$$

La densidad lineal de masa del cable de acero es

$$\mu = \frac{M}{L} = \frac{38 \text{ kg}}{61 \text{ m}} = 0.623 \text{ kg/m.}$$

Por lo tanto, conforme a la ecuación 15.13, la rapidez de ondas en este cable es

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = 107 \text{ m/s.}$$

Para recorrer el cable de 61 m, el pulso necesita un tiempo de

$$t = \frac{L}{v} = \frac{61 \text{ m}}{107 \text{ m/s}} = 0.57 \text{ s.}$$

EXPLICACIÓN

Esta solución implica que la tensión de la cuerda sea la misma en todos los puntos del cable. ¿Es cierto? ¡No del todo! No podemos en realidad ignorar el peso del cable para determinar la tensión. La rapidez que hemos calculado es correcta para el punto más bajo del cable, donde está fijado a la cabina. Sin embargo, la tensión en el extremo superior del cable también tiene que incluir el peso completo del cable. Allí la tensión es

$$T = mg = (73 \text{ kg} + 655 \text{ kg} + 38 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2) = 7\,514 \text{ N,}$$

lo que da una rapidez de onda de 110 m/s, aproximadamente 3% más de lo que hemos calculado. Si tuviéramos que tomar en cuenta este efecto, tendríamos que calcular cómo la rapidez de onda depende de la altura y luego realizar la integración correspondiente. Sin embargo, puesto que la corrección máxima es de 3%, podemos suponer que el promedio de corrección es aproximadamente 1.5%, usar un promedio de rapidez de onda de 108.6 m/s y obtener un tiempo de propagación de señales de 0.56 s. Así, tomando la masa del cable en cuenta, el resultado sólo cambia por 0.01 s.

Reflexión de ondas

¿Qué pasa cuando una onda que recorre una cuerda encuentra una frontera? El extremo de una cuerda sujeta a un soporte en la pared se puede considerar como una frontera. En la figura 15.3 se inició una onda en una cuerda moviendo un extremo de la cuerda hacia arriba y abajo. La onda luego recorrió la cuerda. Cuando la onda alcanza el final de la cuerda que está amarrada a un soporte fijo en la pared, la onda se refleja tal como se muestra en la figura 15.12. Puesto que el final de la cuerda está sujeta, la onda reflejada tiene un desfase de 180° y regresa en el sentido opuesto con una altura negativa. La amplitud de la onda en el punto final fijo es cero.

Si el extremo de la cuerda se fija vía una conexión móvil sin fricción, tal como la que se muestra en la figura 15.13, la onda es reflejada sin ningún cambio de fase, y la onda de retorno tiene una amplitud positiva. La máxima amplitud de la onda en el punto final móvil es dos veces la amplitud inicial de la onda.

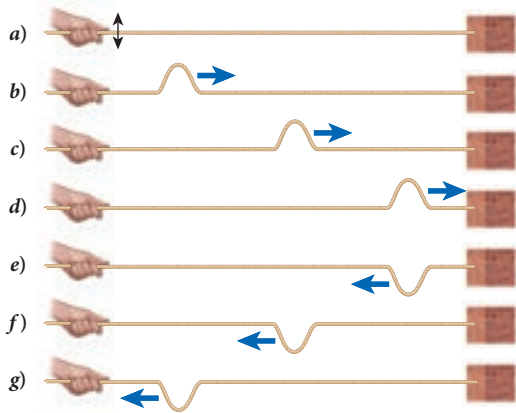


FIGURA 15.12 Una cuerda sostenida por una mano en un extremo y fijada firmemente a una pared en el otro extremo. a) El extremo de la cuerda se mueve hacia arriba y abajo. En b), c) y d), una onda corre a lo largo de la cuerda hacia la derecha. En e), f) y g), la onda corre a lo largo de la cuerda hacia la izquierda después de reflejarse del punto extremo fijo en la pared.

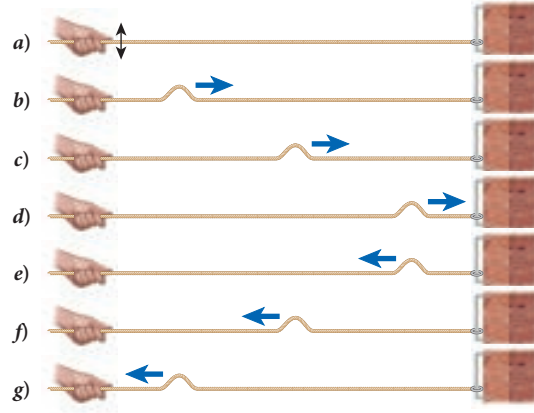


FIGURA 15.13 Una cuerda sostenida por una mano en un extremo y fijada mediante una conexión móvil sin fricción a una pared en el otro extremo. a) El extremo de la cuerda es movido hacia arriba y abajo. En b), c) y d), una onda corre a lo largo de la cuerda hacia la derecha. En e), f) y g), la onda corre a lo largo de la cuerda hacia la izquierda después de reflejar el punto extremo móvil.

15.5 Ondas en espacios bidimensionales y tridimensionales

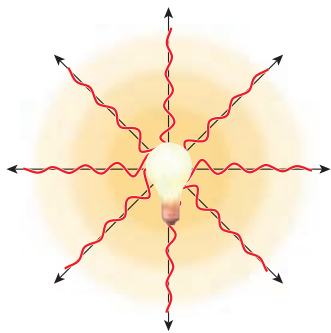


FIGURA 15.14 Ondas que se extienden en forma radial hacia fuera desde una fuente puntual (en este caso un foco). Las superficies internas y externas de cada banda concéntrica de color se encuentran a una distancia de 1 longitud de onda.

Hasta ahora sólo hemos descrito ondas unidimensionales, aquellas que se mueven en una cuerda y en una cadena lineal de osciladores acoplados. Sin embargo, olas en la superficie del agua, tales como las de la figura 15.2, se extienden en un espacio bidimensional, o sea el plano de la superficie del agua. Un foco y una bocina también emiten ondas, y éstas se propagan en tres dimensiones. Por lo tanto se requiere una descripción matemática más compleja del movimiento de ondas. Un tratamiento completamente generalizado excede el propósito de este texto, pero podemos examinar dos casos especiales que cubren la mayor parte de los fenómenos importantes de ondas que ocurren en la naturaleza.

Ondas esféricas

Si examina las figuras 15.2 y 15.14, observa ondas generadas en un punto que se extienden como círculos concéntricos. La idealización matemática de ondas emitidas desde fuentes puntuales describe las ondas como movimientos hacia fuera en círculos concéntricos en dos dimensiones espaciales o en esferas concéntricas en tres dimensiones espaciales. Formas de ondas sinusoidales que se extienden de esta manera se describen matemáticamente como sigue:

$$y(\vec{r}, t) = A(r) \sin(\kappa r - \omega t + \phi_0). \quad (15.14)$$

Aquí \vec{r} es el vector de posición (en dos o tres dimensiones) y $r = |\vec{r}|$ es su valor absoluto. Usted se puede convencer de que esta función en efecto describe formas de ondas en círculos concéntricos (en dos dimensiones) o esferas (en tres dimensiones) si recuerda que la circunferencia de un círculo o la superficie de una esfera tienen una distancia constante del origen y, por lo tanto, r tiene un valor constante. Un valor constante de r en un tiempo t implica una fase constante, $\phi = \kappa r - \omega t + \phi_0$. Puesto que todos los puntos en un círculo dado o en la superficie esférica dada tienen la misma fase, poseen el mismo estado de oscilación. Por lo tanto, la ecuación 15.14 efectivamente describe ondas circulares o esféricas.

Una forma de onda que describe la ecuación 15.14 no tiene una amplitud constante, A , sino una que depende de la distancia radial al origen de la onda (figura 15.15). Cuando hablemos del transporte de energía por ondas en la sección 15.6, se hará claro que la dependencia radial de la amplitud es necesaria para ondas bidimensionales y tridimensionales y que la amplitud tiene que ser una función monótonamente decreciente de la distancia a la fuente. Vamos a usar conserva-

ción de energía para descubrir exactamente cómo la amplitud varía con la distancia, pero por ahora vamos a usar $A(r) = C/r$ (donde C es una constante) para una onda esférica tridimensional. Para este tipo de onda, la ecuación 15.14 se vuelve

$$y(\vec{r}, t) = \frac{C}{r} \text{sen}(\kappa r - \omega t + \phi_0). \quad (15.15)$$

Ondas planas

Ondas esféricas que se originan de una fuente puntual se pueden aproximar como ondas planas que están muy lejos de la fuente. Como se muestra en la figura 15.16, las **ondas planas** son aquellas para las cuales las superficies de fase constante son planas. Por ejemplo, la luz que viene del Sol tiene la forma de ondas planas cuando llega a la Tierra. ¿Por qué podemos usar la aproximación de ondas planas? Si calculamos la curvatura de una esfera como función de su radio y permitimos que ese radio se aproxime al infinito, la curvatura se aproxima a cero. Esto significa que cualquier segmento de superficie de esta esfera se ve como un plano. Por ejemplo, la Tierra es básicamente una esfera, pero es tan grande que de manera local la superficie se ve como un plano para nosotros.

Para una descripción matemática de una onda plana podemos usar la misma forma funcional que para una onda unidimensional:

$$y(\vec{r}, t) = A \text{sen}(\kappa x - \omega t + \phi_0), \quad (15.16)$$

donde el eje x se define localmente como el eje perpendicular al plano de la onda. Quizá se pregunte por qué la ecuación 15.16 de nuevo incluye una amplitud constante. La respuesta es que muy lejos del origen, A/r varía en forma muy lenta como función de r , así que usando una amplitud constante da el mismo grado de aproximación que aproximando la curvatura de la esfera a cero. Para una onda perfectamente plana, la amplitud es efectivamente constante.

Ondas de superficie

El 26 de diciembre de 2004, un terremoto de una magnitud de 9.0 debajo del Océano Índico frente a la costa de Sumatra desencadenó un *tsunami* (palabra japonesa que significa “onda de puerto”). Este tsunami causó una destrucción increíble en la provincia de Aceh de Indonesia, y también cruzó el Océano Índico con la rapidez de un jet comercial, causando muchas desgracias en India y Sri Lanka. Una simulación por computadora de la propagación del tsunami se muestra en la figura 15.17. ¿Cuál es la base física del movimiento de un tsunami?

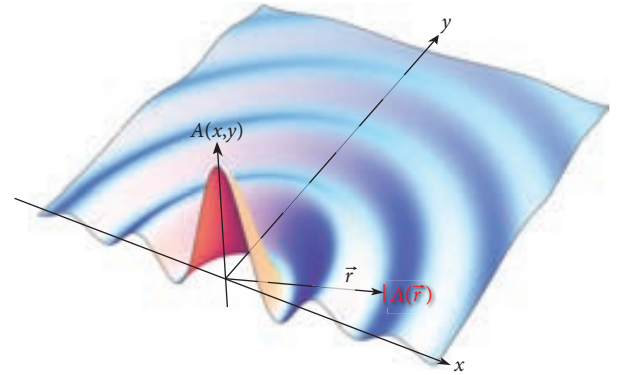


FIGURA 15.15 Una onda esférica como función de dos coordenadas espaciales.

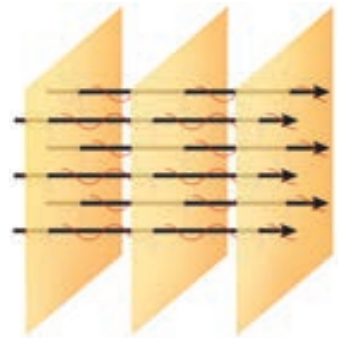


FIGURA 15.16 Ondas planas. Cada plano paralelo representa una superficie de fase constante. Planos contiguos están a una distancia de dos longitudes de onda.

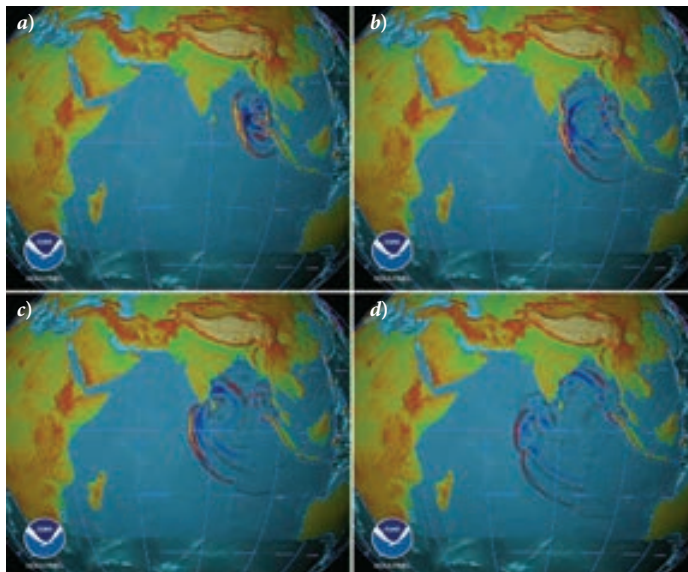


FIGURA 15.17 Una simulación por computadora de la propagación del tsunami cerca de Sumatra que ocurrió el 26 de diciembre de 2004. Las cuatro tomas cubren un periodo de varias horas.

Cuando ocurre un maremoto, frecuentemente se desplaza el fondo del mar y se mueve hacia arriba cuando dos placas de la corteza terrestre se mueven una encima de la otra. De este modo se desplaza el agua en el mar, causando una onda de presión. Ésta es una de las raras instancias de una onda que lleva consigo materia (en este caso agua); el agua choca contra la orilla. Sin embargo, el agua que llega a la orilla no se originó en el sitio del maremoto, así que no se lleva a cabo un transporte de agua en un tsunami. Vamos a considerar ondas de presión con más detalle en el capítulo 16. Por ahora, sólo necesitamos saber que las ondas de presión en el mar tienen longitudes de onda muy largas, hasta 100 km o incluso más. Puesto que esta longitud de onda es mucho mayor que la profundidad normal del océano, que es de aproximadamente 4 km, las ondas de presión que resultan de terremotos no se pueden extender de modo esférico, sino sólo como ondas superficiales. Para estas ondas superficiales, la rapidez de onda local no es constante, sino que depende de la profundidad del mar:

15.1 Ejercicio en clase

En un campo de golf, su pelota está justo en el borde de un foso circular de 120.0 m de diámetro con una profundidad de 1.00 m. En lugar de librar el foso como lo tenía planeado, usted golpea su pelota y cae exactamente a la mitad del foso. ¿Cuánto tarda hasta que la ola de agua creada por la pelota de golf llegue a sus pies?

- a) 19.2 s d) 67.1 s
b) 34.7 s e) 89.3 s
c) 56.1 s

$$v_{\text{superf}} = \sqrt{gd}, \quad (15.17)$$

donde $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ es la aceleración debida a la gravedad y d es la profundidad del mar en metros. Para una profundidad de 4 000 m, esto resulta en una rapidez de onda de 200 m/s, o aproximadamente 450 mph, tan rápido como un avión comercial. Sin embargo, cuando el borde de avanzada llega a las aguas poco profundas de la costa, la rapidez de la onda disminuye conforme a la ecuación 15.17. Esto causa un amontonamiento, ya que el agua más lejos en el océano aún tiene una rapidez mayor y alcanza el agua que forma el borde delantero del tsunami. Por consiguiente, la cresta de onda de un tsunami tiene una altura del orden de apenas un pie en mar abierto y puede pasar inadvertido debajo de un barco, mientras que cerca de la orilla creará un muro de agua hasta de 100 ft de altura que arrasa con todo en su camino.

Ondas sísmicas

Los terremotos también generan ondas que atraviesan la Tierra. Dos tipos de ondas sísmicas generadas por terremotos son las ondas de compresión y las ondas transversales. Las ondas sísmicas de compresión frecuentemente se llaman *ondas P* (o *primarias*), y las ondas sísmicas transversales se denominan a menudo *ondas S* (o *secundarias*). Las ondas P pueden propagarse en sólidos y líquidos, pero las ondas S sólo pueden atravesar sólidos. Líquidos tales como hierro fundido no pueden propagar ondas S.

La Tierra tiene una composición variable como función de la distancia al centro, como se muestra en la figura 15.18a). En el centro de la Tierra se encuentra un núcleo interior compuesto sobre todo por hierro sólido. Luego sigue el núcleo exterior, compuesto principalmente por hierro fundido. Los mantos interior y exterior están compuestos por elementos más ligeros y existen en un estado sólido plástico. La corteza es dura y quebradiza. La mayoría de la masa de la Tierra está concentrada en el manto.

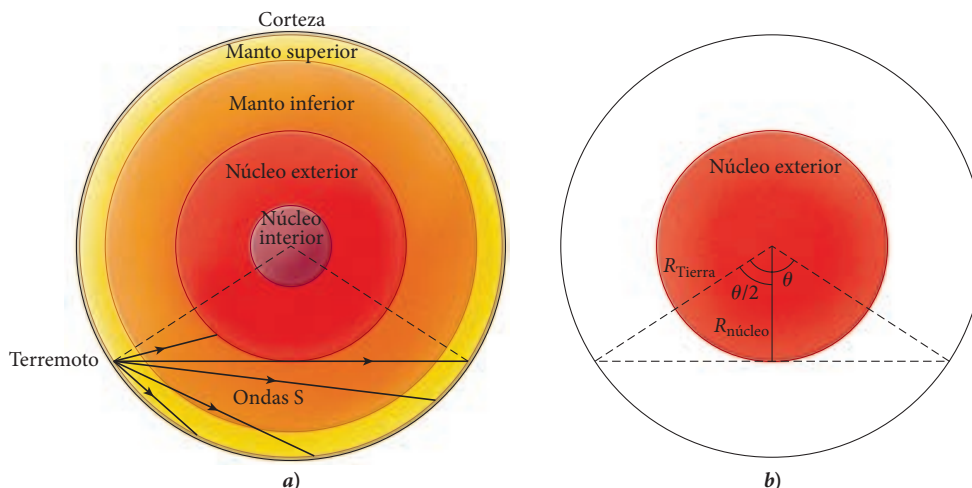


FIGURA 15.18 a) La composición del interior de la Tierra. Se presenta un terremoto que crea ondas S. Este tipo de ondas pueden propagarse en la corteza, el manto superior y el manto inferior, pero no se pueden propagar en el núcleo exterior fundido. b) No se observan ondas S en puntos alrededor de la Tierra con ángulos mayores a θ del terremoto porque las ondas S no pueden atravesar el núcleo exterior fundido.

Las ondas sísmicas viajan desde el epicentro del terremoto a través de la Tierra y se pueden detectar en la superficie desde muy lejos. Las ondas de compresión sísmica (P) pueden atravesar el volumen completo de la Tierra, mientras que las ondas sísmicas transversales (S) no pueden penetrar el núcleo fundido. De este modo el núcleo limita el grado de observación para ondas S, como se ilustra en la figura 15.18.

EJEMPLO 15.2 Medición del tamaño del núcleo fundido de la Tierra

Los científicos han observado que el ángulo máximo alrededor de la superficie de la Tierra donde se observan ondas S de un terremoto es $\theta = 105^\circ$ [vea la figura 15.18b)]. Este efecto se debe al hecho de que las ondas S no pueden propagarse en el núcleo exterior de la Tierra porque el hierro fundido no puede soportar fuerzas de corte. El radio de la Tierra es de 6 370 km.

PROBLEMA

¿Cuál es el radio del núcleo fundido de la Tierra?

SOLUCIÓN

Al observar la figura 15.18b) vemos que podemos relacionar el radio del núcleo fundido $R_{\text{núcleo}}$, el radio de la Tierra R_{Tierra} y el ángulo máximo de observación de ondas S en la superficie de la Tierra:

$$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{R_{\text{núcleo}}}{R_{\text{Tierra}}}.$$

Luego podemos despejar el radio del núcleo fundido:

$$R_{\text{núcleo}} = R_{\text{Tierra}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = (6\,370 \text{ km}) \cos\left(\frac{105^\circ}{2}\right) = 3\,880 \text{ km}.$$

Observe que este resultado es sólo aproximado. Las ondas sísmicas transversales no se propagan exactamente en líneas rectas, debido a variaciones en la densidad como función de la profundidad en la Tierra. Sin embargo, el resultado calculado es razonablemente cercano al valor medido $R_{\text{núcleo}} = 3\,480 \text{ km}$, que se obtuvo mediante la combinación de diferentes métodos.

Los terremotos no son la única fuente de ondas sísmicas. Estas ondas también pueden ser generadas por el uso subterráneo de explosivos tales como dinamita o TNT o incluso de bombas nucleares. Por lo tanto, se utiliza el monitoreo de ondas sísmicas para verificar la prohibición de pruebas nucleares y la no proliferación de armas nucleares. Otros medios para generar ondas sísmicas son los llamados *thumper-trucks*, que levantan una gran masa aproximadamente 3 m del suelo y la dejan caer, cañones de aire, fuentes de sonido de plasma, así como vibradores hidráulicos o electromecánicos. ¿Por qué querría alguien generar ondas sísmicas? Las ondas se pueden usar de manera similar a la forma en la que se usaron las ondas S en el ejemplo 15.2, para la búsqueda de depósitos subterráneos de diferente densidad. Esta técnica básica de sismología de reflexión se utiliza extensamente en la exploración de petróleo y gas y, por lo tanto, es de gran interés para la investigación actual.

15.6 Energía, potencia e intensidad de ondas

En la sección 15.1 se señaló que las ondas por lo general no transportan materia. Sin embargo, transportan energía, y en esta sección vamos a determinar cuánta.

Energía de una onda

En el capítulo 14 vimos que la energía de una masa oscilando en un resorte es proporcional a la constante del resorte y al cuadrado de la amplitud de oscilación: $E = \frac{1}{2}kA^2$. Puesto que podemos imaginar una onda como las oscilaciones de muchos osciladores acoplados, cada pequeño volumen del medio a través del cual pasa la onda tiene esta energía por oscilador. Utilizando (nuevamente) $k/m = \omega^2$, o $k = m\omega^2$, la energía de la onda es

$$E = \frac{1}{2}m\omega^2[A(r)]^2, \quad (15.18)$$

donde la amplitud de la onda tiene una dependencia radial, como se explicó en la discusión general de ondas en dos y tres dimensiones. Vemos que la energía de una onda es proporcional al cuadrado de la amplitud y al cuadrado de la frecuencia.

Si la onda se mueve a través de un medio elástico, la masa m que aparece en la ecuación 15.18 se puede expresar como $m = \rho V$, donde ρ es la densidad y V es el volumen a través del cual pasa la onda. Este volumen es el producto del área de sección transversal A_{\perp} (el área perpendicular al vector de velocidad de la onda) a través del cual pasa la onda, y la distancia que la onda recorre en el tiempo t , o $l = vt$. (Nota: El símbolo A_{\perp} indica el área, mientras que el símbolo A sin el subíndice \perp se utiliza para la amplitud de la onda.) Así encontramos para la energía en este caso

$$E = \frac{1}{2}\rho V\omega^2 [A(r)]^2 = \frac{1}{2}\rho A_{\perp} l\omega^2 [A(r)]^2 = \frac{1}{2}\rho A_{\perp} vt\omega^2 [A(r)]^2. \quad (15.19)$$

Si se trata de una onda esférica que irradia hacia fuera desde una fuente puntual, y si no se pierde energía por amortiguamiento, podemos determinar la dependencia radial de la amplitud de la ecuación 15.19. En este caso la energía es una constante dado un valor fijo de r , tal como lo son la densidad del medio, la frecuencia angular y la velocidad de la onda. La ecuación 15.19 da entonces la condición $A_{\perp}[A(r)]^2 = \text{constante}$. Para una onda esférica en tres dimensiones, el área a través del cual pasa la onda es la superficie de una esfera, como lo muestra la figura 15.14. Por lo tanto, en este caso, $A_{\perp} = 4\pi r^2$, y obtenemos $r^2 [A(r)]^2 = \text{constante} \Rightarrow A(r) \propto 1/r$. Éste es exactamente el resultado para la dependencia radial de la amplitud que se usó en la ecuación 15.5.

Si la onda se extiende de modo estricto en un espacio bidimensional, como es el caso de ondas superficiales sobre agua, entonces el área de la sección transversal es proporcional a la circunferencia de un círculo y es, por ende, proporcional a r , y no a r^2 . En este caso obtenemos para la dependencia radial de la amplitud de la onda $r[A(r)]^2 = \text{constante} \Rightarrow A(r) \propto 1/\sqrt{r}$.

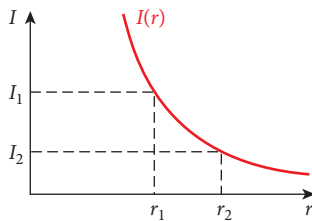


FIGURA 15.19 La ley del cuadrado inverso para las intensidades de una onda esférica en dos distancias diferentes desde la fuente.

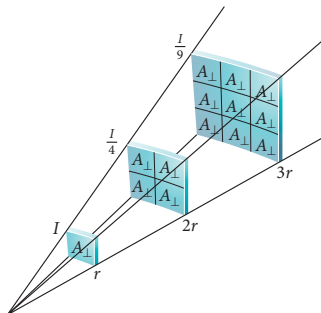


FIGURA 15.20 La intensidad de una onda a una distancia r es I . A una distancia de $2r$ la intensidad es $I/4$. A una distancia de $3r$ la intensidad es $I/9$.

15.3 Oportunidad de autoexamen

La intensidad de ondas electromagnéticas del Sol en la Tierra es de aproximadamente $1\,400\text{ W/m}^2$. ¿Cuál es la intensidad de ondas electromagnéticas del Sol en Marte? La distancia de la Tierra desde el Sol es de $149.6 \cdot 10^6\text{ km}$, y la distancia de Marte al Sol es de $227.9 \cdot 10^6\text{ km}$.

Potencia e intensidad de una onda

En el capítulo 5 vimos que la potencia media es la tasa de transferencia de energía por unidad de tiempo. Con la energía contenida en una onda como la que se da en la ecuación 15.19, tenemos entonces

$$\bar{P} = \frac{E}{t} = \frac{1}{2}\rho A_{\perp} v\omega^2 [A(r)]^2. \quad (15.20)$$

Puesto que todas las cantidades a la derecha de la ecuación 15.20 son independientes del tiempo, la potencia irradiada por una onda es constante en el tiempo.

La intensidad I de una onda se define como la potencia irradiada por unidad del área de sección transversal:

$$I = \frac{\bar{P}}{A_{\perp}}.$$

Sustituyendo \bar{P} de la ecuación 15.20 en esta definición conduce a

$$I = \frac{1}{2}\rho v\omega^2 [A(r)]^2. \quad (15.21)$$

Como se puede ver de este resultado, la intensidad depende del cuadrado de la amplitud, así que la dependencia radial de la intensidad se debe a la dependencia de la amplitud de la distancia radial del punto de propagación. Para una onda esférica en tres dimensiones, $A(r) \propto 1/r$, y por lo tanto

$$I \propto \frac{1}{r^2}.$$

De este modo, para dos puntos que están a una distancia de r_1 y r_2 del punto de propagación de una onda esférica, las intensidades $I_1 = I(r_1)$ e $I_2 = I(r_2)$ medidas en estas dos ubicaciones están relacionadas mediante

$$\frac{I_1}{I_2} = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2, \quad (15.22)$$

como se muestra en la figura 15.19.

La figura 15.20 ilustra la dependencia de la intensidad de una onda con la distancia a la fuente. Si la intensidad de una onda a una distancia r es I , entonces la intensidad de la onda a una distancia de $2r$ es $I/4$. Se puede ver por qué esta relación es cierta en la figura 15.20 dado que la

misma cantidad de potencia pasa a través de un área cuatro veces más grande que A_{\perp} . Del mismo modo, a una distancia de $3r$, la intensidad es $I/9$ porque la misma cantidad de potencia pasa a través de un área nueve veces más grande.

PROBLEMA RESUELTO 15.1

Potencia transmitida por una onda en una cuerda

PROBLEMA

El desplazamiento transversal a partir de la posición de equilibrio de una cuerda particular estirada como función de la posición y tiempo está dado por $y(x,t) = (0.130 \text{ m}) \cos[(9.00 \text{ m}^{-1})x + (72.0 \text{ s}^{-1})t]$. La densidad de masa lineal de la cuerda es de 0.00677 kg/m . ¿Cuál es la potencia media transmitida por la cuerda?

SOLUCIÓN

PIENSE

Empezamos con la ecuación 15.20 para la potencia media transmitida por una onda. Podemos extraer la amplitud, $A(r)$, el número de onda, κ , y la frecuencia angular, ω , de la función dada $y(x,t)$ comparándola con la solución a la ecuación de onda para una onda que corre en la dirección x negativa (compare con la ecuación 15.6). El producto ρA_{\perp} está dado por la densidad de masa lineal, μ .

ESBOCE

La figura 15.21 identifica los factores relevantes de la función de onda.

INVESTIGUE

La potencia transmitida por una onda está dada por la ecuación 15.20:

$$\bar{P} = \frac{1}{2} \rho A_{\perp} v \omega^2 [A(r)]^2.$$

Para una onda que se mueve sobre una cuerda elástica, el producto de la densidad, ρ , y el área de sección transversal, A_{\perp} , se puede escribir como

$$\rho A_{\perp} = \frac{m}{V} A_{\perp} = \frac{m}{L \cdot A_{\perp}} A_{\perp} = \frac{m}{L} = \mu,$$

donde $\mu = m/L$ es la densidad de masa lineal de la cuerda. Para una onda que se mueve en una cuerda elástica, $A(r)$ es constante, y de este modo podemos expresar la potencia transmitida como

$$\bar{P} = \frac{1}{2} \mu v \omega^2 [A(r)]^2.$$

Podemos usar la ecuación 15.8 para obtener la rapidez de la onda:

$$v = \frac{\omega}{\kappa}.$$

SIMPLIFIQUE

Mediante la función de onda dada en el planteamiento del problema, vemos que $A(r) = 0.130 \text{ m}$, $\kappa = 9.00 \text{ m}^{-1}$ y $\omega = 72.0 \text{ s}^{-1}$. Por convención, ω es un número positivo, y la función de onda dada representa una onda que viaja en la dirección x negativa. Ahora podemos calcular v :

$$v = \frac{\omega}{\kappa} = \frac{72.0 \text{ s}^{-1}}{9.00 \text{ m}^{-1}} = 8.00 \text{ m/s}.$$

CALCULE

Si sustituimos los valores numéricos en la ecuación 15.20, obtenemos

$$\begin{aligned} \bar{P} &= \frac{1}{2} \mu v \omega^2 [A(r)]^2 = \frac{1}{2} (0.00677 \text{ kg/m}) (8.00 \text{ m/s}) (72.0 \text{ s}^{-1})^2 (0.130 \text{ m})^2 \\ &= 2.37247 \text{ W}. \end{aligned}$$

REDONDEE

Reportamos nuestro resultado con tres cifras significativas:

$$\bar{P} = 2.37 \text{ W}.$$

15.2 Ejercicio en clase

La intensidad de ondas electromagnéticas del Sol en la Tierra es de 1.400 W/m^2 . ¿Cuánta potencia total genera el Sol? La distancia de la Tierra al Sol es de $149.6 \cdot 10^6 \text{ km}$.

- a) $1.21 \cdot 10^{20} \text{ W}$ d) $2.11 \cdot 10^{28} \text{ W}$
 b) $2.43 \cdot 10^{26} \text{ W}$ e) $9.11 \cdot 10^{30} \text{ W}$
 c) $3.94 \cdot 10^{26} \text{ W}$

$$y(x,t) = \underbrace{(0.130 \text{ m})}_A \cos\left(\underbrace{(9.00 \text{ m}^{-1})}_\kappa x + \underbrace{(72.0 \text{ s}^{-1})}_\omega t\right)$$

FIGURA 15.21 La función de onda con los factores relevantes identificados.

(continúa)

(continuación)

VUELVA A REVISAR

A fin de volver a comprobar nuestra respuesta, vamos a suponer que la energía de la onda corresponde a la energía de un objeto cuya masa es igual a la masa de una sección de cuerda con un largo de una longitud de onda. Este objeto se mueve en la dirección x negativa con la rapidez de la onda viajera. La potencia es entonces la energía transmitida en un periodo. De los valores para κ y ω extraídos de la función dada de la onda, obtenemos la longitud de onda y el periodo:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\kappa} = 0.698 \text{ m}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 0.0873 \text{ s.}$$

Podemos escribir la energía cinética como

$$K = \frac{1}{2}(\mu\lambda)v^2 = 0.151 \text{ J.}$$

La potencia es entonces

$$P = \frac{K}{T} = \frac{0.151 \text{ J}}{0.0873 \text{ s}} = 1.73 \text{ W.}$$

Este resultado es parecido a nuestro resultado para la potencia transmitida a lo largo de la cuerda. Por lo tanto, nuestra respuesta parece ser razonable.

15.7 El principio de superposición e interferencia

Ecuaciones de onda como la ecuación 15.9 tienen una propiedad muy importante: son lineales. ¿Qué significa eso? Si encontramos dos soluciones diferentes, $y_1(x,t)$ y $y_2(x,t)$, para una ecuación diferencial lineal, entonces cualquier combinación lineal de estas soluciones, como por ejemplo

$$y(x,t) = ay_1(x,t) + by_2(x,t), \quad (15.23)$$

donde a y b son constantes arbitrarias, también es una solución para la misma ecuación lineal. Usted puede ver esta propiedad lineal en la ecuación diferencial porque contiene la función $y(x,t)$ solamente a la primera potencia [no hay ningún término que contenga $y(x,t)^2$ o $\sqrt{y(x,t)}$ ni cualquier otra potencia de la función].

En términos físicos, la propiedad lineal significa que se pueden sumar, restar o combinar soluciones de onda en cualquier otra combinación lineal, y el resultado es de nuevo una solución de onda. Esta propiedad física es la base matemática del principio de superposición:

Se pueden sumar dos o más soluciones de onda, lo que da por resultado otra solución de onda.

$$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t). \quad (15.24)$$

La ecuación 15.24 es un caso especial de la ecuación 15.23 con $a = b = 1$. Vamos a considerar un ejemplo de la superposición de dos pulsos de onda con diferentes amplitudes y distintas velocidades.

EJEMPLO 15.3

Superposición de pulsos de onda

Dos pulsos de onda, $y_1(x,t) = A_1 e^{-(x-v_1 t)^2}$ y $y_2(x,t) = A_2 e^{-(x+v_2 t)^2}$, con $A_2 = 1.7A_1$ y $v_1 = 1.6v_2$, se encuentran a cierta distancia entre sí. Debido a su forma matemática, se conocen como *paquetes de ondas gaussianas*. Supongamos que las dos ondas son del mismo tipo, tal como ondas en una cuerda.

PROBLEMA

¿Cuál es la amplitud de la onda resultante con un traslape máximo de los dos pulsos, y en qué momento ocurre esto?

SOLUCIÓN

Ambos paquetes de ondas gaussianas son de la forma funcional $y(x,t) = Y(x \pm vt)$ y por lo tanto son soluciones válidas de la ecuación de onda unidimensional 15.9. De este modo, el principio de superposición (ecuación 15.23) es válido, y así podemos simplemente sumar las dos funciones de onda a fin de obtener la función para la onda resultante. Los dos paquetes de ondas gaussianas tienen su máximo traslape cuando sus centros están en la misma posición en el espacio de coordenadas. El centro de un paquete de ondas gaussianas se encuentra en la ubicación donde el exponente tiene un valor de cero. Como puede ver en las funciones dadas, ambos paquetes de ondas están centrados en $x = 0$ en $t = 0$, que es la respuesta a la pregunta por el momento en que ocurre el traslape máximo. La amplitud del máximo traslape es simplemente $A = A_1 + A_2 = 2.7A_1$ (porque $A_2 = 1.7A_1$, como se especifica en el planteamiento del problema).

EXPLICACIÓN

Es ilustrativo contemplar las gráficas que muestran estas ondas y su superposición. Los dos paquetes de ondas gaussianas empiezan en el momento $t = -3$, en unidades del ancho de un paquete de ondas dividido entre la rapidez v_1 , y se propagan. La figura 15.22a) es una gráfica tridimensional de la función de onda $y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t)$ como función de la coordenada x y el tiempo t . Se muestran los vectores de velocidad \vec{v}_1 y \vec{v}_2 . La figura 15.22b) muestra gráficas de coordenadas espaciales de las ondas en diferentes instantes de tiempo. La curva azul representa $y_1(x,t)$, la curva roja representa $y_2(x,t)$ y la curva negra es su suma. En el instante central los dos paquetes de ondas logran su máximo traslape.

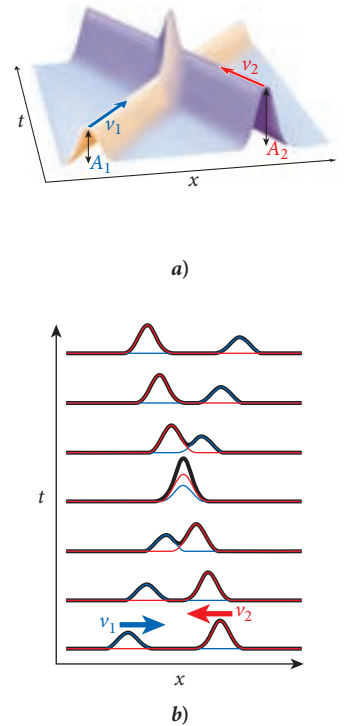


FIGURA 15.22 Superposición de dos paquetes de ondas gaussianas: a) representación tridimensional; b) gráficas de coordenadas espaciales para diferentes tiempos.

Lo que es fundamental recordar del principio de superposición es que las ondas pueden penetrar una a la otra sin cambiar su frecuencia, amplitud, rapidez o dirección. La tecnología de comunicación moderna depende en forma absoluta de este hecho. En cualquier ciudad, varias estaciones de televisión y radio transmiten sus señales en diferentes frecuencias; también hay transmisiones de telefonía celular y TV por satélite así como ondas luminosas y sonoras. Todas estas ondas tienen que ser capaces de penetrar una a la otra sin cambios, o la comunicación cotidiana sería imposible.

Interferencia de ondas

La interferencia es una consecuencia del principio de superposición. Si las ondas se atraviesan, sus desplazamientos simplemente se suman, de acuerdo con la ecuación 15.24. Surgen casos interesantes cuando las longitudes de onda y frecuencia de las dos ondas son iguales, o por lo menos cercanas. Aquí vamos a contemplar el caso de dos ondas con longitudes de onda y frecuencias idénticas. El caso de ondas cuya frecuencia están cercanas se discutirá en el capítulo 16 sobre el sonido, cuando hablemos de pulsaciones.

En primer lugar vamos a considerar las ondas bidimensionales con amplitud idéntica, A , número de onda, κ , y frecuencia angular, ω . El corrimiento de fase ϕ_0 se coloca en cero para la onda 1, pero se permite variarlo para la onda 2. La suma de las formas de ondas es entonces

$$y(x,t) = A \text{sen}(\kappa x - \omega t) + A \text{sen}(\kappa x - \omega t + \phi_0). \tag{15.25}$$

Para $\phi_0 = 0$, las dos funciones sinusoidales en la ecuación 15.25 tienen argumentos idénticos, así que la suma es simplemente $y(x,t) = 2A \text{sen}(\kappa x - \omega t)$. En esta situación las dos ondas se suman al máximo grado posible, lo que se llama **interferencia constructiva**.

Si cambiamos el argumento de una función de seno o coseno por π , obtenemos el negativo de esta función: $\text{sen}(\theta + \pi) = -\text{sen} \theta$. Por esta razón los dos términos en la ecuación 15.25 suman exactamente cero cuando $\phi_0 = \pi$. Esta situación se llama **interferencia destructiva**. Los patrones de interferencia para estos dos valores de ϕ_0 , junto con otros tres, se muestran en la figura 15.23 para $t = 0$.

Se obtienen interesantes patrones de interferencia con dos ondas superficiales idénticas cuyas fuentes están a alguna distancia entre sí. La figura 15.24 muestra el patrón esquemático de interferencia para dos ondas idénticas con $\kappa = 1 \text{ m}^{-1}$ y el mismo valor de ω y A . Una de las ondas fue cambiada por Δx al lado derecho, y la otra por $-\Delta x$ a la izquierda. La figura muestra diez diferentes valores de Δx , lo que nos debe dar una buena idea de cómo se desarrolla el patrón de interferencia como función de la separación de los centros de las ondas. Si usted en alguna ocasión ha tirado dos piedras al mismo tiempo en un estanque, reconocerá estos patrones de interferencia similar a las ondas superficiales resultantes.

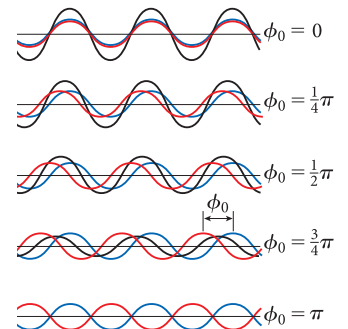
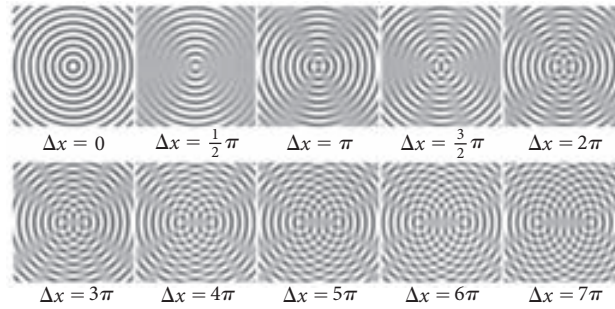


FIGURA 15.23 Interferencia de ondas unidimensionales como función de sus relativos corrimientos de fase en $t = 0$. Posteriormente, los patrones se mueven rígidamente hacia la derecha. La onda 1 es roja, la onda 2 es azul, y negro es la suma de las dos ondas.

FIGURA 15.24 Patrones esquemáticos de interferencia de dos ondas idénticas bidimensionales periódicas movidas a una distancia Δx a cada lado del origen, donde la unidad de Δx está en metros. Los círculos blancos y negros marcan los mínimos y máximos; el gris indica puntos donde la suma de las ondas es igual a cero.



15.8 Ondas estacionarias y resonancia

Un tipo especial de superposición ocurre para dos ondas viajeras si son idénticas con la excepción de signos opuestos para ω : $y_1(x,t) = A \text{sen}(\kappa x + \omega t)$, $y_2(x,t) = A \text{sen}(\kappa x - \omega t)$. Primero vamos a contemplar el resultado matemático de esta superposición (lo que nos va a dar el entendimiento físico):

$$\begin{aligned} y(x,t) &= y_1(x,t) + y_2(x,t) \\ &= A \text{sen}(\kappa x + \omega t) + A \text{sen}(\kappa x - \omega t) \Rightarrow \\ y(x,t) &= 2A \text{sen}(\kappa x) \cos(\omega t). \end{aligned} \tag{15.26}$$

En el último paso para obtener la ecuación 15.26 hemos usado la fórmula de suma trigonométrica $\text{sen}(\alpha \pm \beta) = \text{sen} \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \text{sen} \beta$. Por lo tanto, para la superposición de dos ondas viajeras con la misma amplitud, el mismo número de ondas y la misma velocidad, pero con dirección opuesta de propagación, la dependencia de la coordenada espacial y la dependencia temporal se separa (o factoriza) en una función de sólo x veces que multiplica a t . El resultado de esta superposición es una onda que tiene **nodos** (donde $y = 0$) y **antinodos** (donde y puede alcanzar su máximo valor) en ciertos puntos a lo largo del eje x . Cada antinodo se ubica a la mitad entre nodos adyacentes.

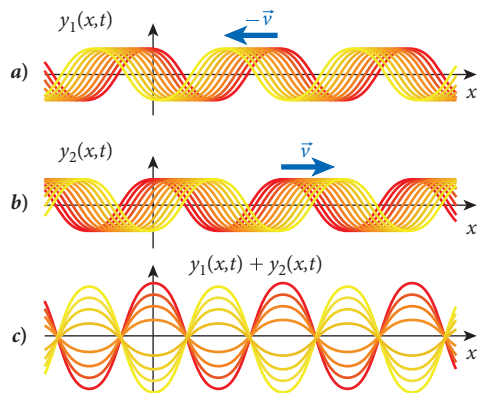


FIGURA 15.25 a) y b) Dos ondas viajeras con vectores de velocidad en direcciones opuestas. c) La superposición de las dos ondas resulta en una onda estacionaria.

Esta superposición es mucho más fácil de visualizar en forma gráfica. La figura 15.25a) muestra una onda dada por $y_1(x,t) = A \text{sen}(\kappa x + \omega t)$, y la figura 15.25b) muestra una onda dada por $y_2(x,t) = A \text{sen}(\kappa x - \omega t)$. La figura 15.25c) muestra la incorporación de las dos ondas. En las tres gráficas se muestra la forma de onda como función de la coordenada x . Cada gráfica también muestra la onda en 11 diferentes instantes de tiempo, con una diferencia de tiempo de $\pi/10$ entre instantes como en una fotografía con toma de imágenes a intervalos. Para comparar los mismos instantes de tiempo en cada gráfica, las curvas aparecen en colores, empezando con rojo y progresando a través de anaranjado a amarillo. Usted puede ver que las ondas viajeras se mueven hacia la izquierda y derecha, respectivamente, pero la onda resultante de su superposición oscila en su lugar, con los nodos y antinodos permaneciendo en ubicaciones fijas sobre el eje x . La onda de interferencia se conoce como **onda estacionaria** y resulta de la factorización de la dependencia del tiempo y la dependencia del espacio en la ecuación 15.26. Las dos ondas viajeras siempre están fuera de fase en los nodos.

Los nodos de una onda estacionaria siempre tienen una amplitud cero. De acuerdo con la ecuación 15.18, la energía contenida en una onda es proporcional al cuadrado de la amplitud. Por lo tanto, no se transporta energía a través de un nodo por parte de una onda estacionaria. La energía de las ondas queda atrapada entre los nodos de una onda estacionaria y permanece localizada allí. Observe también que a pesar de que una onda estacionaria no se mueve, la relación entre longitud de onda, frecuencia y rapidez de onda, $v = \lambda f$, aún es válida. Aquí v es la rapidez de las dos ondas progresivas, lo que compensa la onda estacionaria.

Ondas estacionarias en una cuerda

La base para la creación de sonidos musicales por instrumentos de cuerda es la generación de ondas estacionarias en cuerdas tensas. En la sección 15.4 se analizó cómo la velocidad de una onda en una cuerda depende de la tensión de la cuerda y la densidad lineal de masa de la cuerda (vea la ecuación 15.13). En esta sección vamos a discutir la física básica de ondas estacionarias unidimensionales.

Vamos a empezar con una demostración. En la figura 15.26 se muestra una cuerda sujeta a un ancla al lado izquierdo y un pistón al lado derecho. El pistón oscila arriba y abajo, de manera sinusoidal, con una frecuencia variable f . El movimiento hacia arriba y abajo del pistón sólo tiene una amplitud muy pequeña, así que podemos considerar que la cuerda está sujeta en ambos extremos. La frecuencia de la oscilación del pistón es variable, y con una determinada frecuencia, f_0 , la cuerda desarrolla un movimiento de gran amplitud con un antinodo central [figura 15.26a)]. queda claro que esta excitación de la cuerda produce una onda estacionaria. Se trata de una excitación resonante de la cuerda en el sentido de que la amplitud sólo se hace grande con una **frecuencia de resonancia** bien definida. Si la frecuencia de movimiento del pistón se incrementa 10%, como se muestra en la figura 15.26b), esta oscilación resonante de la cuerda desaparece. Bajar la frecuencia del pistón 10% tiene el mismo efecto. El incremento de la frecuencia a dos veces el valor de f_0 da por resultado otra excitación resonante, una que tiene un solo nodo en el centro y antinodos a $\frac{1}{4}$ y $\frac{3}{4}$ de la longitud de la cuerda [figura 15.26c)]. El incremento de la frecuencia al triple del valor de f_0 da por resultado una onda estacionaria con dos nodos y tres antinodos [figura 15.26d)]. La continuación de esta serie es obvia: una frecuencia de nf_0 dará por resultado una onda estacionaria con n antinodos y $n - 1$ nodos (más los dos nodos en ambos extremos de la cuerda) que están a la misma distancia a lo largo de la longitud de la cuerda.

La figura 15.27 muestra que la condición para tener una onda estacionaria es que un número entero “ n ” múltiplo de la media longitud de onda quepa exactamente en la longitud de la cuerda, L . Le damos a esta longitud de onda el índice n y escribimos

$$n \frac{\lambda_n}{2} = L, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Si resolvemos para la longitud de onda obtenemos

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \tag{15.27}$$

El índice n en la longitud de onda (o frecuencia) indica el **armónico**. Es decir, $n = 1$ identifica el primer armónico (también llamado *frecuencia fundamental*), $n = 2$ denomina el segundo armónico, $n = 3$ el tercero, etcétera.

Como se mencionó antes, $v = \lambda f$ aún es válido para una onda estacionaria. Si usamos esta relación, podemos encontrar las frecuencias resonantes de una cuerda mediante la ecuación 15.27:

$$f_n = \frac{v}{\lambda_n} = n \frac{v}{2L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Finalmente, usando la ecuación 15.13 para la velocidad de onda en una cuerda con la densidad lineal de masa μ bajo una tensión T , $v = \sqrt{T/\mu}$, tenemos

$$f_n = \frac{v}{\lambda_n} = n \frac{\sqrt{T}}{2L\sqrt{\mu}} = n \sqrt{\frac{T}{4L^2\mu}} \tag{15.28}$$

La ecuación 15.28 revela varios hechos interesantes sobre la construcción de los instrumentos de cuerda. En primer lugar, entre más larga la cuerda, más bajas serán las frecuencias resonantes. Ésta es la razón básica por la que un violonchelo, que produce notas más bajas, es más largo que un violín. En segundo lugar, las frecuencias resonantes son proporcionales a la raíz cuadrada de la tensión de la cuerda. Si la frecuencia de un instrumento es demasiado baja (suena “bajo”), se tiene que aumentar la tensión. En tercer lugar, entre más alta sea la densidad de masa lineal μ , de la cuerda, más baja será la frecuencia. Las cuerdas más gruesas producen notas de bajo. En cuarto lugar, el segundo armónico es dos veces más alto que la frecuencia fundamental, el tercero es tres veces más alto, etc. Cuando discutamos el sonido en el capítulo 16, veremos que este hecho es la base de la definición de la octava. Por ahora, usted puede ver que se produce el segundo armónico en la misma cuerda que se usa para el primer armónico, colocando un dedo exactamente a la mitad de la cuerda; de esta manera se fuerza a que allí se ubique un nodo.

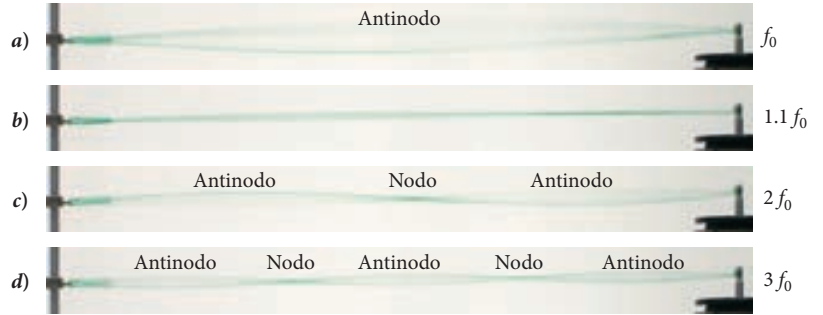


FIGURA 15.26 Generación de ondas estacionarias en una cuerda.

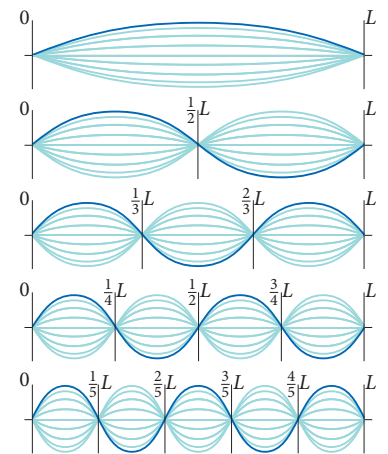


FIGURA 15.27 Las cinco excitaciones más bajas de una onda estacionaria en una cuerda.

15.3 Ejercicio en clase

Una cuerda de una longitud dada se sujeta en ambos extremos y se le da una cierta tensión. ¿Cuál de las siguientes declaraciones sobre una onda estacionaria en esta cuerda es cierta?

- a) Entre más alta sea la frecuencia de una onda estacionaria en la cuerda, más juntos están los nodos.
- b) Para cualquier frecuencia de la onda estacionaria, los nodos siempre se encuentran a la misma distancia entre sí.
- c) Para una onda estacionaria en una cuerda con una tensión dada, sólo una frecuencia es posible a la vez.
- d) Entre más baja sea la frecuencia de una onda estacionaria en la cuerda, más juntos están los nodos.

EJEMPLO 15.4 Afinación de un piano

El trabajo de un afinador de piano es asegurar que todas las teclas del instrumento produzcan los tonos apropiados. En un piano, la cuerda para la tecla de la media se encuentra bajo una tensión de 2 900 N y tiene una masa de 0.006000 kg y una longitud de 0.6300 m.

PROBLEMA

¿Por qué fracción debe el afinador cambiar la tensión en esta cuerda a fin de obtener la frecuencia correcta de 440.0 Hz?

SOLUCIÓN

Primero que nada calculamos la frecuencia fundamental (o el primer armónico), usando $n = 1$ en la ecuación 15.28 y la tensión, longitud y masa dadas:

$$f_1 = \sqrt{\frac{2\,900\text{ N}}{4(0.6300\text{ m})(0.006000\text{ kg})}} = 438\text{ Hz.}$$

Esta frecuencia está equivocada por 2 Hz, o demasiado baja por 0.5%, así que la tensión se debe aumentar. La tensión correcta se puede encontrar resolviendo la ecuación 15.28 para T y luego usando la frecuencia fundamental de 440.0 Hz, la frecuencia correcta para la medio:

$$f_n = n \sqrt{\frac{T}{4L^2(m/L)}} = n \sqrt{\frac{T}{4Lm}} \Rightarrow T = 4Lm \left(\frac{f_n}{n}\right)^2.$$

Al sustituir los números, encontramos

$$T = 4(0.6300\text{ m})(0.006000\text{ kg})(440.0\text{ Hz})^2 = 2\,927\text{ N.}$$

La tensión se deberá aumentar por 27 N, lo que es el 0.93% de 2 900 N. El afinador de piano debe incrementar la tensión de la cuerda por 0.93% para que produzca la frecuencia correcta de la medio.

EXPLICACIÓN

También podríamos haber encontrado el cambio requerido para la tensión argumentando de la siguiente manera: la frecuencia es proporcional a la raíz cuadrada de la tensión, y $\sqrt{1-x} \approx 1 - \frac{1}{2}x$ para x pequeño. Puesto que se requiere un cambio de 0.5% de la frecuencia, la tensión tiene que cambiarse por dos veces esta cantidad, o 1 por ciento.

A propósito, un afinador de piano puede detectar una frecuencia incorrecta por 2 Hz fácilmente, escuchando las pulsaciones, lo que analizaremos en el capítulo 16.

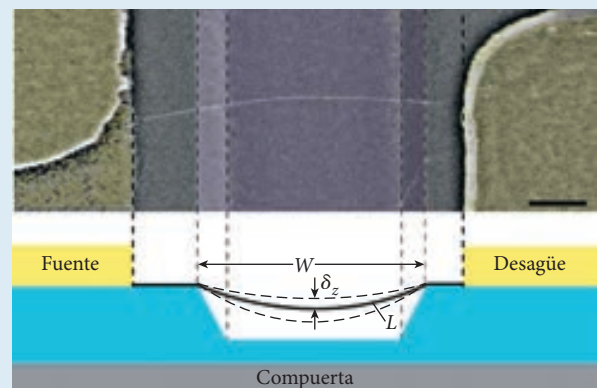
15.4 Ejercicio en clase

Una cuerda de guitarra tiene una longitud de 0.750 m y una masa de 5.00 g. La cuerda está afinada a Mi (660 Hz) cuando vibra con su frecuencia fundamental. ¿Cuál es la tensión requerida para la cuerda?

- a) $2.90 \cdot 10^3\text{ N}$ d) $8.11 \cdot 10^3\text{ N}$
 b) $4.84 \cdot 10^3\text{ N}$ e) $1.23 \cdot 10^4\text{ N}$
 c) $6.53 \cdot 10^3\text{ N}$

15.4 Oportunidad de autoexamen

Científicos del Cornell NanoScale Science and Technology Facility, donde se construyó la guitarra de la figura 15.11b), también hicieron una cuerda de guitarra aún más pequeña de un solo nanotubo de carbono, con tan sólo 1 a 4 nm de diámetro. Está suspendida sobre una zanja de anchura $W = 1.5\ \mu\text{m}$. En su estudio de 2004 en *Nature*, los científicos de Cornell reportaron una frecuencia de resonancia del nanotubo de carbono en 55 MHz. ¿Cuál es la rapidez de una onda en este nanotubo de carbono?



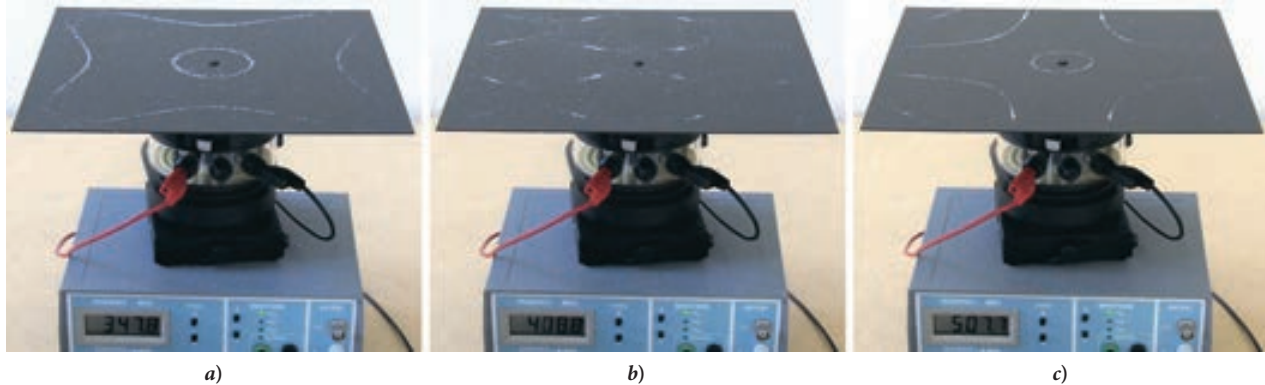
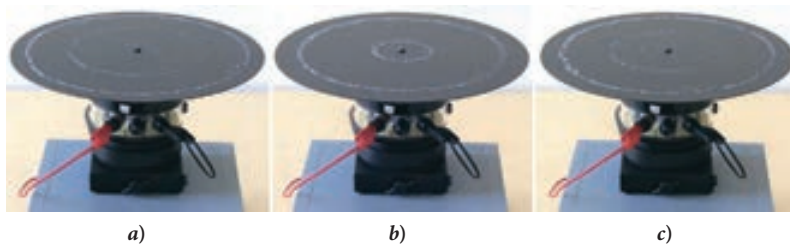


FIGURA 15.28 Patrones nodales de ondas estacionarias en una placa cuadrada accionados con frecuencias de a) 348 Hz, b) 409 Hz y c) 508 Hz.

Las ondas estacionarias también pueden ser creadas en dos y tres dimensiones. Aunque no vamos a abordar estos casos con mucho detalle matemático, es interesante ver los patrones de ondas que pueden surgir. Para visualizar patrones de ondas estacionarias en láminas bidimensionales, las láminas son accionadas mediante un oscilador de tornamesa desde abajo, y se esparcen granos de sal encima de manera uniforme. Los granos de sal se acumulan en los nodos de las ondas, donde no reciben grandes golpes del oscilador abajo. La figura 15.28 muestra el resultado para un plato plano accionado con tres diferentes frecuencias. Usted puede ver que las ondas estacionarias tienen líneas nodales, que tienen distintas formas en diferentes frecuencias. No vamos a analizar estas líneas nodales en detalle cuantitativo, pero es importante notar que entre más alta sea la frecuencia, más cercanas serán las líneas nodales entre sí. Esto se encuentra en completa analogía con el caso de una onda estacionaria unidimensional en una cuerda.

15.5 Ejercicio en clase

El plato circular que se muestra en la figura es accionado con tres diferentes frecuencias. Examinando las tres partes, clasifique las tres frecuencias desde la menor hasta la mayor.



15.9 Investigación sobre ondas

Este capítulo sólo da una breve vista general de los fenómenos ondulatorios. Todos los estudiantes de física y la mayoría de los de ingeniería tomarán otro curso completo sobre ondas que es más detallado. Varios otros capítulos de este libro tratan de ondas. El capítulo 16 está dedicado a las ondas de presión longitudinal llamadas *ondas sonoras*. La descripción de las ondas de la materia llevó directamente al desarrollo de la mecánica cuántica, la base para la mayoría de la física moderna, incluyendo nanociencia y nanotecnología.

Los científicos e ingenieros siguen descubriendo nuevos aspectos de la física de ondas, desde los conceptos fundamentales hasta las aplicaciones. Del lado de las aplicaciones, los ingenieros están estudiando maneras de guiar microondas a través de diferentes geometrías con la ayuda de métodos de elemento finitos (que son métodos computacionales que dividen un objeto grande en un gran número de objetos pequeños) y programas de cómputo que usan mucho tiempo de cálculo. Si estas geometrías no son simétricas desde el punto de vista espacial, es decir, si no están exactamente redondas o rectangulares, pueden ocurrir resultados sorprendentes. Por ejemplo, los físicos pueden estudiar el caos cuántico con la ayuda de microondas que son enviadas a una cavidad metálica en la forma de un estadio (una forma que tiene semicírculos en ambos extremos, conectados por secciones rectas). La figura 15.29 muestra una de estas geometrías de estadio, no para microondas, sino para un sistema físico: una colección de átomos de hierro individuales dispuestos en una super-

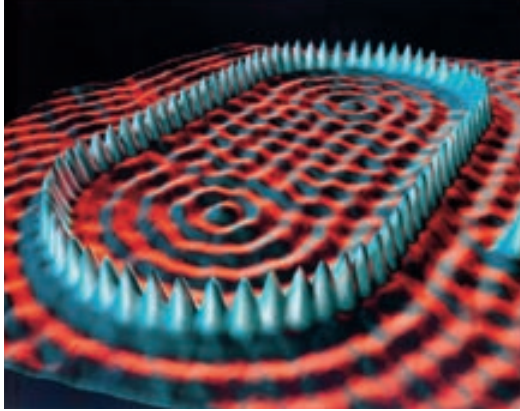


FIGURA 15.29 Átomos de hierro en una superficie de cobre constituyen una cavidad en forma de un estadio en la que los físicos pueden estudiar ondas de materia de electrones.

ficie de cobre mediante el uso de un microscopio de barrido de efecto túnel. Los rizos de ondas en el interior del estadio son ondas de materia de electrones estacionarios.

En el nivel más avanzado de investigación, los teóricos y matemáticos de partículas han encontrado nuevas clases de teorías llamadas *teorías de cuerdas*. La matemática de las teorías de cuerdas excede el alcance de este libro. Sin embargo, es interesante notar que los teóricos de cuerdas obtienen sus ideas físicas de la consideración de sistemas similares a los que hemos considerado en este capítulo; en particular de las ondas estacionarias en una cuerda.

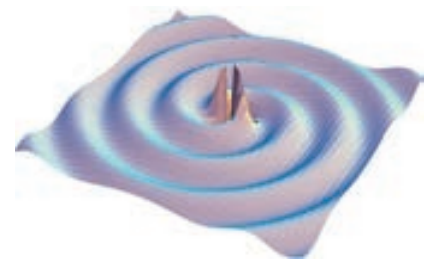
Quizás una de las investigaciones experimentales más interesantes de la física de ondas es la búsqueda por ondas gravitacionales. Estas ondas fueron pronosticadas por la teoría de la relatividad general de Einstein, pero son muy débiles y difíciles de detectar a menos que sean generadas por un objeto extremadamente masivo. Los astrofísicos han postulado que algunos objetos astronómicos emiten ondas gravitacionales de una intensidad tan grande que deberían ser observables en la Tierra. Evidencia indirecta de la existencia de estas ondas gravitacionales ha llegado del estudio de frecuencias orbitales de pares de estrellas de neutrones, puesto que la disminución de la energía rota-

cional medida en el par se puede explicar mediante la radiación de ondas gravitacionales. Sin embargo, hasta la fecha no se ha hecho ninguna observación directa de estas ondas. Grupos de físicos estadounidenses e internacionales han construido o están en proceso de construir varios detectores de ondas gravitacionales, tales como LIGO (*Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory*). Todos estos detectores trabajan usando el principio de interferencia de ondas luminosas. La idea básica es la de suspender en un vacío mediante alambres muy delgados varias masas pesadas con lados reflejantes, colocadas en los extremos de dos brazos perpendiculares del instrumento. Cuando pasa una onda gravitacional, debería causar la extensión y compresión alterna del espacio, que estará fuera de fase para los dos brazos y deberá ser observable como movimientos minúsculos de los espejos. En principio, rebotar una luz de láser de los espejos y luego recombinar los rayos revelaría una interferencia de luz debido al movimiento, detectable como un patrón de interferencia. Estos detectores de ondas gravitacionales requieren túneles muy largos para los láseres. LIGO consiste en dos observatorios: uno en Hanford, Washington, y el otro en Livingston,

FIGURA 15.30 a) Vista aérea del sitio de Livingston de LIGO (*Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory*); b) visualización de una onda gravitacional; c) un científico ajusta el interferómetro; d) mapa de LIGO.



a)



b)



c)



d)

Louisiana (vea la figura 15.30), con una distancia de 3 002 km entre ellos. Cada observatorio tiene dos túneles de 4 km de largo, ordenado en forma de una “L”. Estos experimentos intentan trascender los límites de lo que es técnicamente posible y medible. Por ejemplo, los movimientos esperados de las masas de prueba debidos a una onda gravitacional es del orden de sólo 10^{-18} m, que es menor que el diámetro de un átomo de hidrógeno por un factor de 100 millones, o 10^8 . La medición de una deflexión tan pequeña es un enorme reto tecnológico.

Otros laboratorios en Europa (Virgo y GEO-600) y Japón (TAMA) también intentan medir el efecto de ondas gravitacionales. También existen planes para un observatorio de este tipo de ondas basado en el espacio, llamado LISA (*Laser Interferometer Space Antenna*), que consistirá en tres naves espaciales colocadas en un triángulo equilátero con una longitud lateral de $5 \cdot 10^6$ km. Hace poco, científicos han usado supercomputadoras para simular ondas gravitacionales emitidas de la colisión de dos hoyos negros, como se ilustra en la figura 15.31 en un cálculo realizado por un grupo de la NASA. Estas ondas podrían ser lo suficientemente intensas para detectarlas en la Tierra.

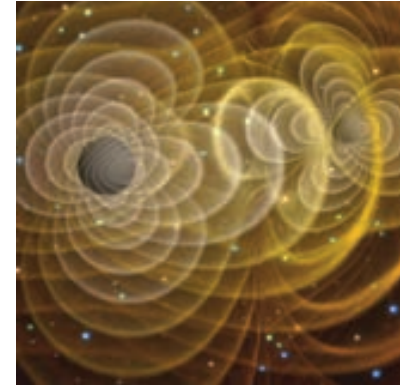


FIGURA 15.31 Simulación por supercomputadora de la colisión de dos enormes hoyos negros, que crean ondas gravitacionales que podrían ser observables.

LO QUE HEMOS APRENDIDO | GUÍA DE ESTUDIO PARA EXAMEN

- La ecuación de onda describe el desplazamiento $y(x,t)$ desde la posición de equilibrio para cualquier movimiento ondulatorio: $\frac{\partial^2}{\partial t^2} y(x,t) - v^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} y(x,t) = 0$.
- Para cualquier onda, v es la velocidad de onda, λ es la longitud de onda, y f es la frecuencia. Las tres están relacionadas por $v = \lambda f$.
- El número de ondas se define como $\kappa = 2\pi/\lambda$, igual que la frecuencia angular es relacionada con el periodo por $\omega = 2\pi/T$.
- Cualquier función de la forma $Y(\kappa x - \omega t + \phi_0)$ o $Y(\kappa x + \omega t + \phi_0)$ es una solución de la ecuación de onda. La primera función describe una onda que se propaga hacia la derecha, y la segunda función describe una onda que se propaga hacia la izquierda.
- La rapidez de onda en una cuerda es $v = \sqrt{T/\mu}$, donde $\mu = m/L$ es la densidad lineal de masa de la cuerda y T es la tensión de la cuerda.
- Una onda sinusoidal unidimensional está dada por $y(x,t) = A \sin(\kappa x - \omega t + \phi_0)$, donde el argumento de la función de seno es la fase de la onda y A es la amplitud de la onda.
- Una onda esférica tridimensional se describe por $y(\vec{r}, t) = \frac{A}{r} \sin(\kappa r - \omega t + \phi_0)$, y una onda plana se describe por $y(\vec{r}, t) = A \sin(\kappa x - \omega t + \phi_0)$.
- La energía contenida en una onda es $E = \frac{1}{2} \rho V \omega^2 [A(r)]^2 = \frac{1}{2} \rho (A_{\perp} l) \omega^2 [A(r)]^2 = \frac{1}{2} \rho (A_{\perp} v t) \omega^2 [A(r)]^2$, donde A_{\perp} es el área perpendicular de sección perpendicular a través del cual pasa la onda.
- La potencia transmitida por una onda es $\bar{P} = \frac{E}{t} = \frac{1}{2} \rho A_{\perp} v \omega^2 [A(r)]^2$, y su intensidad es $I = \frac{1}{2} \rho v \omega^2 [A(r)]^2$.
- Para una onda esférica tridimensional, la intensidad es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia a la fuente.
- El principio de superposición es válido para ondas. Sumando dos soluciones de la ecuación de onda resulta en otra solución válida.
- Las ondas pueden interferir en el espacio y el tiempo, constructiva o destructivamente, dependiendo de sus fases relativas.
- Sumar dos ondas viajeras que son idénticas excepto que tienen vectores de velocidad que apuntan en direcciones opuestas produce una onda estacionaria como $y(x,t) = 2A \sin(\kappa x) \cos(\omega t)$, que factoriza la dependencia en el espacio y en el tiempo.
- Las frecuencias de resonancia (o armónicos) para ondas estacionarias en una cuerda las proporciona $f_n = \frac{v}{\lambda_n} = n \frac{\sqrt{T}}{2L\sqrt{\mu}}$, para $n = 1, 2, 3, \dots$. El índice n indica el armónico (por ejemplo, $n = 4$ corresponde al cuarto armónico).

TÉRMINOS CLAVE

onda, p. 493

onda longitudinal, p. 495

onda transversal, p. 495

longitud de onda, p. 496

frente de onda, p. 496

número de ondas, p. 497

fase, p. 497

ecuación de onda, p. 498

ondas planas, p. 503

interferencia constructiva, p. 509

interferencia destructiva, p. 509

nodos, p. 510

antinodos, p. 510

onda estacionaria, p. 510

frecuencia de resonancia, p. 511

armónico, p. 511

NUEVOS SÍMBOLOS Y ECUACIONES

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} y(x,t) - v^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} y(x,t) = 0, \text{ ecuación de onda}$$

$v = \lambda f$, velocidad; longitud de onda y frecuencia de una onda

$\kappa = 2\pi/\lambda$, número de ondas

$v = \sqrt{T/\mu}$, rapidez de una onda en una cuerda

$y(x,t) = A \text{ sen}(\kappa x - \omega t + \phi_0)$, onda viajera unidimensional

$y(x,t) = 2A \text{ sen}(\kappa x) \cos(\omega t)$, onda estacionaria unidimensional

$f_n = \frac{v}{\lambda_n} = n \frac{\sqrt{T}}{2L\sqrt{\mu}}$, frecuencias de resonancia de una onda en una cuerda

RESPUESTAS A OPORTUNIDADES DE AUTOEXAMEN

15.1 $f = 0.40$ Hz.

15.2 $A = 10$ cm, $\kappa = 0.31$ cm⁻¹, $\phi_0 = 0.30$.

15.3

$$\frac{I_E}{I_M} = \left(\frac{r_M}{r_E} \right)^2$$

$$I_M = I_E \left(\frac{r_E}{r_M} \right)^2 = (1400 \text{ W/m}^2) \left(\frac{149.6 \cdot 10^6 \text{ km}}{227.9 \cdot 10^6 \text{ km}} \right)^2 = 603.3 \text{ W/m}^2.$$

15.4 Frecuencia de resonancia más baja: $f_1 = \frac{v}{\lambda_1} = \frac{v}{2L}$

Rapidez de onda: $v = 2Lf_1 = 2(1.5 \cdot 10^{-6} \text{ m})(5.5 \cdot 10^7 \text{ s}^{-1}) = 165$ m/s.

PRÁCTICA PARA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Lineamientos de problemas resueltos

1. Si una onda se ajusta a la descripción de una onda viajera unidimensional, usted puede escribir una ecuación matemática que la describe si conoce la amplitud A del movimiento, así como dos de estas tres cantidades: velocidad, v , longitud de onda, λ , y frecuencia, f . (Si no, necesita conocer dos de las tres cantidades de velocidad, v , número de ondas, κ , y frecuencia angular, ω .)

2. Si una onda es una onda estacionaria unidimensional en una cuerda, sus frecuencias de resonancia están determinadas por la longitud, L , de la cuerda y la velocidad, v , de las ondas componentes. La velocidad de la onda, a su vez, se determina por la tensión, T , en la cuerda y la densidad lineal de masa, μ , de la cuerda.

PROBLEMA RESUELTO 15.2 Onda viajera

PROBLEMA

Una onda en una cuerda está dada por la función

$$y(x,t) = (0.00200 \text{ m}) \text{ sen} \left[(78.8 \text{ m}^{-1})x + (346 \text{ s}^{-1})t \right].$$

¿Cuál es la longitud de onda de esta onda? ¿Cuál es su periodo? ¿Cuál es su velocidad?

SOLUCIÓN

PIENSE

A partir de la función de onda dada podemos identificar el número de onda y la frecuencia angular, de lo que podemos extraer la longitud de onda y el periodo. Luego podemos calcular la velocidad de la onda viajera del cociente entre la frecuencia angular al número de onda.

ESBOCE

La figura 15.32 muestra gráficas de la función de onda en $t = 0$ (inciso a) y en $x = 0$ (inciso b).

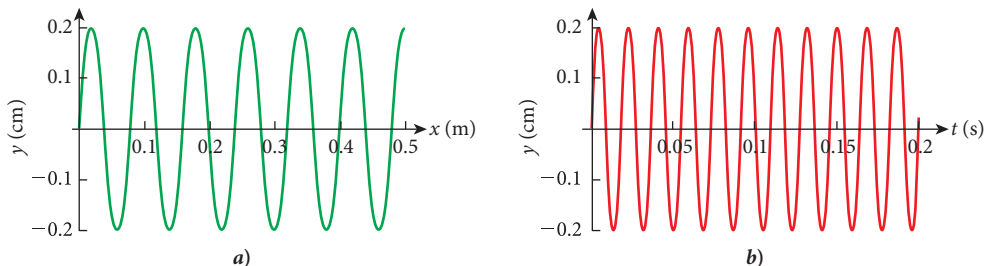


FIGURA 15.32 a) La función de onda en $t = 0$. b) La función de onda como función de tiempo en $x = 0$.

INVESTIGUE

Al contemplar la función de onda dada en el planteamiento del problema, $y(x, t) = (0.00200 \text{ m}) \sin[(78.8 \text{ m}^{-1})x + (346 \text{ s}^{-1})t]$, y comparándola con la solución de la ecuación de onda para una onda que viaja en dirección x negativa (vea la ecuación 15.6),

$$y(x, t) = A \sin(\kappa x + \omega t + \phi_0),$$

vemos que $\kappa = 78.8 \text{ m}^{-1}$ y $\omega = 346 \text{ s}^{-1}$.

SIMPLIFIQUE

Podemos obtener la longitud de onda del número de onda

$$\lambda = \frac{2\pi}{\kappa},$$

y el periodo de la frecuencia angular

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Luego podemos calcular la velocidad de la onda de

$$v = \frac{\omega}{\kappa}.$$

CALCULE

Si sustituimos los valores numéricos, obtenemos la longitud de onda y el periodo:

$$\lambda = \frac{2\pi}{78.8 \text{ m}^{-1}} = 0.079736 \text{ m}$$

y

$$T = \frac{2\pi}{346 \text{ s}^{-1}} = 0.018159 \text{ s}.$$

Ahora calculamos la velocidad de la onda viajera:

$$v = \frac{346 \text{ s}^{-1}}{78.8 \text{ m}^{-1}} = 4.39086 \text{ m/s}.$$

REDONDEE

Reportamos nuestros resultados con tres cifras significativas:

$$\lambda = 0.0797 \text{ m}$$

$$T = 0.0182 \text{ s}$$

$$v = 4.39 \text{ m/s}.$$

VUELVA A REVISAR

Para volver a revisar nuestro resultado para la longitud de onda, contemplamos la figura 15.32a). Podemos ver que la longitud de onda (la distancia requerida para completar una oscilación) es aproximadamente 0.08 m, en concordancia con nuestro resultado. Al analizar la figura 15.32b), podemos ver que el periodo (el tiempo requerido para completar una oscilación) es de aproximadamente 0.018 s, también en concordancia con nuestro resultado.

PROBLEMA RESUELTO 15.3 Onda estacionaria en una cuerda

PROBLEMA

Se utiliza un accionador mecánico para producir una onda estacionaria en una cuerda elástica, tal como se muestra en la figura 15.33a). Se aplica tensión a la cuerda, llevándola a través de una polea sin fricción y colgando un bloque metálico de ella [figura 15.33b)]. La longitud de la cuerda desde la parte superior de la polea hasta el accionador es de 1.25 m, y la densidad lineal de masa de la cuerda es de 5.00 g/m. La frecuencia del accionador es de 45.0 Hz. ¿Cuál es la masa del bloque metálico?

SOLUCIÓN

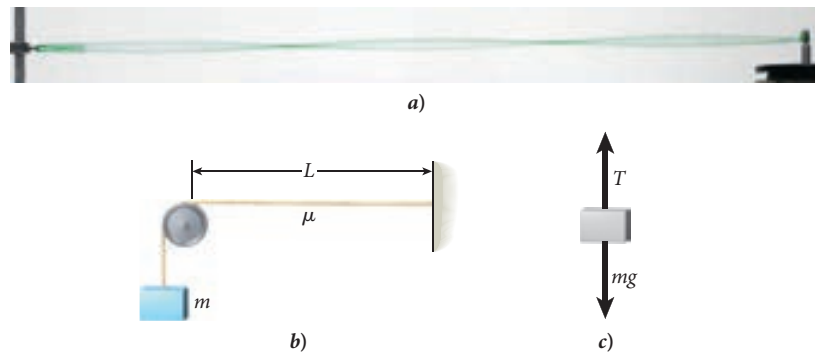
PIENSE

El peso del bloque metálico es igual a la tensión aplicada a la cuerda elástica. Podemos ver de la figura 15.33a) que la cuerda está vibrando en su tercer armónico porque están visibles tres antinodos. Podemos usar la ecuación 15.28 para relacionar la tensión de la cuerda, el armónico, la densidad lineal de masa de la cuerda así como la frecuencia. Una vez que hemos determinado la tensión de la cuerda podemos calcular la masa del bloque metálico.

ESBOCE

La figura 15.33b) muestra la cuerda elástica bajo tensión debido a un bloque metálico colgado de ella. El accionador mecánico establece una onda estacionaria en la cuerda. Aquí L es la longitud de la cuerda desde la polea hasta el accionador de la onda, μ es la densidad lineal de masa y m es la masa del bloque metálico. La figura 15.33c) muestra el diagrama de cuerpo libre del bloque metálico colgante, donde T es la tensión en la cuerda y mg es el peso del bloque metálico.

FIGURA 15.33 a) Una onda estacionaria en una cuerda elástica accionada por un accionador mecánico. b) La cuerda se mantiene tensa por una masa colgante. c) Diagrama de cuerpo libre para el bloque colgante.



INVESTIGUE

Una onda estacionaria con el armónico n y la frecuencia f_n en una cuerda elástica de la longitud L y la densidad lineal de masa μ satisface la ecuación 15.28:

$$f_n = n \sqrt{\frac{T}{4L^2\mu}}$$

Con base en el diagrama de cuerpo libre de la figura 15.33c) y dado que el bloque metálico no se mueve, podemos escribir

$$T - mg = 0.$$

Por lo tanto, la tensión de la cuerda es $T = mg$.

SIMPLIFIQUE

Resolvemos la ecuación 15.28 para la tensión de la cuerda:

$$T = 4L^2\mu \frac{f_n^2}{n^2}.$$

Si sustituimos mg por T y volvemos a arreglar términos, obtenemos

$$m = \frac{\mu}{g} \left(\frac{2Lf_n}{n} \right)^2.$$

CALCULE

Cuando escribimos los valores numéricos, obtenemos

$$m = \frac{\mu}{g} \left(\frac{2Lf_n}{n} \right)^2 = \frac{0.00500 \text{ kg/m}}{9.81 \text{ m/s}^2} \left(\frac{2(1.25 \text{ m})(45.0 \text{ Hz})}{3} \right)^2$$

$$= 0.716743 \text{ kg.}$$

REDONDEE

Reportamos nuestro resultado con tres cifras significativas:

$$m = 0.717 \text{ kg.}$$

VUELVA A REVISAR

Como comprobación de nuestro resultado usamos el hecho de que una botella de agua de medio litro tiene una masa de aproximadamente 0.5 kg. Incluso una cuerda ligera podría soportar esta masa sin romperse. Por lo tanto, nuestra respuesta parece razonable.

PREGUNTAS DE OPCIÓN MÚLTIPLE

15.1 Los seguidores en un estadio de fútbol local están tan emocionados por la victoria de su equipo que inician “la ola” para celebrar. ¿Cuál o cuáles de las siguientes cuatro declaraciones es cierta?

- I. Esta ola es una onda viajera.
 - II. Esta ola es una onda transversal.
 - III. Esta ola es una onda longitudinal.
 - IV. Esta ola es una combinación de una onda longitudinal y una onda transversal.
- a) I y II c) sólo III e) I y III
b) sólo II d) I y IV

15.2 Usted desea reducir la rapidez de una onda que viaja en una cuerda a la mitad de su valor actual mediante el cambio de la tensión en la cuerda. ¿Por qué factor debe reducir la tensión de la cuerda?

- a) 1 c) 2 e) ninguno de los anteriores
b) $\sqrt{2}$ d) 4

15.3 Suponga que la tensión se duplica en una cuerda en la que se propaga una onda estacionaria. ¿Cómo cambiará la velocidad de la onda estacionaria?

- a) Se duplicará. c) Será multiplicada por $\sqrt{2}$.
b) Se cuadruplicará. d) Será multiplicada por $\frac{1}{2}$.

15.4 ¿Cuál de las siguientes ondas transversales tiene la mayor potencia?

- a) Una onda con la velocidad v , amplitud A y frecuencia f
- b) Una onda con la velocidad v , amplitud $2A$ y frecuencia $f/2$
- c) Una onda con la velocidad $2v$, amplitud $A/2$ y frecuencia f
- d) Una onda con la velocidad $2v$, amplitud A y frecuencia $f/2$
- e) Una onda con la velocidad v , amplitud $A/2$ y frecuencia $2f$

15.5 La rapidez de ondas luminosas en el aire es mayor que la rapidez del sonido en el aire por *aproximadamente* un factor de un millón. Dada una onda sonora y una onda luminosa de la misma longitud de onda, ambas atravesando

el aire, ¿cuál de las declaraciones sobre sus frecuencias es cierta?

- a) La frecuencia de la onda sonora será aproximadamente un millón de veces más grande que la de la onda luminosa.
- b) La frecuencia de la onda sonora será aproximadamente mil veces más grande que la de la onda luminosa.
- c) La frecuencia de la onda luminosa será aproximadamente mil veces más grande que la de la onda sonora.
- d) La frecuencia de la onda luminosa será aproximadamente un millón de veces más grande que la de la onda sonora.
- e) Hay poca información para determinar la relación entre las dos frecuencias.

15.6 Una cuerda se pone a oscilar, y se crea una onda estacionaria con tres antinodos. Si la tensión de la cuerda es incrementada por un factor de 4,

- a) el número de antinodos aumenta.
- b) el número de antinodos permanece igual.
- c) el número de antinodos disminuye.
- d) el número de antinodos será igual al número de nodos.

15.7 Los diferentes colores de luz que percibimos son un resultado de las frecuencias (y longitudes de onda) diferentes de la radiación electromagnética. La radiación infrarroja tiene frecuencias más bajas que la luz visible, y la radiación ultravioleta tiene frecuencias más altas que la luz visible. Los colores primarios son rojo (R), amarillo (Y) y azul (B). Ordene estos colores por su longitud de onda, de la más corta a la más larga.

- a) B, Y, R b) B, R, Y c) R, Y, B d) R, B, Y

15.8 Si las ondas transversales en una cuerda viajan con una velocidad de 50 m/s cuando la cuerda está bajo una tensión de 20 N, ¿qué tensión de la cuerda se requiere para que las ondas viajen con una velocidad de 30 m/s?

- a) 7.2 N c) 33 N e) 45 N
b) 12 N d) 40 N f) 56 N

PREGUNTAS

15.9 Usted y un amigo sostienen los dos extremos de un “Slinky” (juguete en forma de resorte de plástico o metal) estirados entre sí. ¿Cómo movería usted a su extremo del Slinky para crear *a*) ondas transversales) o *b*) ondas longitudinales?

15.10 Un cable de acero consiste en dos secciones con diferentes áreas de sección transversal, A_1 y A_2 . Una onda sinusoidal viajera se manda a lo largo de este cable desde su extremo delgado. ¿Qué pasa con la onda cuando se topa con la frontera A_1/A_2 ? ¿Cómo cambian la rapidez, frecuencia y longitud de onda de la onda?

15.11 Se presenta ruido debido a la superposición de un número muy grande de ondas sonoras de varias frecuencias (usualmente en un espectro continuo), amplitudes y fases. ¿Se puede originar interferencia por el ruido producido por dos fuentes?

15.12 Se podrá considerar que la dependencia de $1/R^2$ para la intensidad se deba al hecho de que la misma potencia se extiende por la superficie de una esfera cada vez más grande.

¿Qué pasa con la intensidad de una onda sonora dentro de un espacio cerrado, por ejemplo un pasillo largo?

15.13 Si dos ondas viajeras tienen la misma longitud de onda, frecuencia y amplitud y se suman de manera correcta, el resultado es una onda estacionaria. ¿Será posible combinar a dos ondas estacionarias de alguna manera para dar por resultado una onda estacionaria?

15.14 Una pelota de ping-pong está flotando en el centro de un lago, y olas empiezan a propagarse en la superficie. ¿Puede pensar en una situación en la que la pelota permanece estacionaria? ¿Puede pensar en una situación de una sola ola en el lago en la cual la pelota permanece estacionaria?

15.15 ¿Por qué disminuye la amplitud de ondas acuáticas circulares en la superficie de un estanque cuando se alejan de la fuente?

15.16 Considere una onda monocromática en una cuerda, con amplitud A y la longitud de onda λ , viajando en una misma dirección. Encuentre la relación entre la máxima rapidez de cualquier parte de la cuerda $v_{\text{máx}}$ y la rapidez de la onda v .

PROBLEMAS

Una • y dos •• indican un nivel creciente de dificultad de problemas.

Secciones 15.1 a 15.3

15.17 Uno de los factores principales que permiten que los seres humanos determinen si un sonido proviene del lado derecho o izquierdo es el hecho de que el sonido llegará a un oído antes que al otro. Ya que la rapidez del sonido en el aire es de 343 m/s y los oídos humanos están normalmente 20.0 cm aparte, ¿cuál es el tiempo de resolución máxima para que el oído humano distinga los sonidos provenientes de la izquierda y los sonidos provenientes de la derecha? ¿Por qué es imposible que un buzo diga de qué dirección viene el sonido de un bote de motor? La rapidez del sonido en el agua es de $1.50 \cdot 10^3$ m/s.

15.18 Caminando en las montañas, usted grita “¡hey!”, espera 2.00 s y vuelve a gritar. ¿Cuál es la distancia entre las ondas sonoras que usted causa? Si escucha el primer eco después de 5.00 s, ¿cuál es la distancia entre usted y el punto donde su voz se topa con una montaña?

15.19 El desplazamiento desde el equilibrio causado por una onda en una cuerda está dado por $y(x,t) = (-0.00200 \text{ m}) \sin [(40.0 \text{ m}^{-1})x - (800 \text{ s}^{-1})t]$. Para esta onda, ¿cuál es *a*) la amplitud, *b*) el número de onda en 1.00 m, *c*) el número de ciclos completos en 1.00 s, *d*) la longitud de onda y *e*) la rapidez?

•**15.20** Una onda viajera propagándose en una cuerda se describe por la siguiente ecuación:

$$y(x,t) = (5.00 \text{ mm}) \sin \left((157.08 \text{ m}^{-1})x - (314.16 \text{ s}^{-1})t + 0.7854 \right)$$

a) Determine la separación mínima, $\Delta x_{\text{mín}}$, entre dos puntos de una cuerda que oscilan en oposición perfecta de fases (que se mueven en direcciones opuestas *en todo momento*).

b) Determine la separación, Δx_{AB} , entre dos puntos *A* y *B* en la cuerda si el punto *B* oscila con un desfase de 0.7854 rad comparado con el punto *A*.

c) Encuentre el número de crestas de la onda que pasan a través del punto *A* en un intervalo de tiempo $\Delta t = 10.0$ s y el número de senos que pasan a través del punto *B* en el mismo intervalo.

d) ¿En qué punto a lo largo de su trayectoria deberá un impulsor lineal conectado con un extremo de la cuerda en $x = 0$ empezar su oscilación para generar esta onda viajera sinusoidal en la cuerda?

••**15.21** Considere un arreglo lineal de n masas, cada una igual a m , conectadas por $n + 1$ resortes, todos sin masa y con constante de resorte k , con los extremos externos del primero y último resortes fijados. Las masas se pueden mover sin fricción en la dimensión lineal del arreglo.

a) Escriba las ecuaciones de movimiento para las masas.

b) Las configuraciones de movimiento para las cuales todas las partes de un sistema oscilan con la misma frecuencia angular se llaman *modos normales* del sistema; las correspondientes frecuencias angulares son las *frecuencias angulares de modo normal* del sistema. Busque las frecuencias angulares de modo normal de este arreglo.

Sección 15.4

15.22 Demuestre que la función $D = A \ln(x + vt)$ es una solución de la ecuación de onda (ecuación 15.9).

15.23 Una onda viaja a lo largo de una cuerda en dirección x positiva con 30.0 m/s. La frecuencia de la onda es de 50.0 Hz. En $x = 0$ y $t = 0$ la velocidad de la onda es de 2.50 m/s y el desplazamiento vertical es $y = 4.00$ mm. Escriba la función $y(x,t)$ para la onda.

15.24 Una onda en una cuerda tiene una función de onda dada por $y(x,t) = (0.0200 \text{ m}) \sin\left[\left(6.35 \text{ m}^{-1}\right)x + \left(2.63 \text{ s}^{-1}\right)t\right]$.

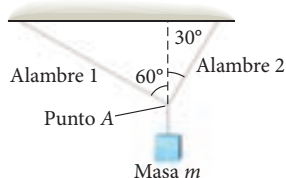
- a) ¿Cuál es la amplitud de la onda?
- b) ¿Cuál es el periodo de la onda?
- c) ¿Cuál es la longitud de la onda?
- d) ¿Cuál es la rapidez de la onda?
- e) ¿En qué dirección viaja la onda?

•15.25 Una onda sinusoidal propagándose en la dirección x positiva tiene una longitud de onda de 12 cm, una frecuencia de 10.0 Hz y una amplitud de 10.0 cm. La parte de la onda que está en el origen en $t = 0$ tiene un desplazamiento vertical de 5.00 cm. Para esta onda, determine

- a) el número de onda
- b) el periodo
- c) la frecuencia angular
- d) la rapidez
- e) el ángulo de fase y
- f) la ecuación de movimiento.

•15.26 Una masa m está suspendida de una cuerda conectada con el techo. Usted pulsa la cuerda justo arriba de la masa, y un pulso de onda corre arriba al techo, rebota del techo y regresa a la masa. Compare el tiempo de ida y vuelta para este pulso de onda con el de una onda similar en la misma cuerda si la masa sujeta se incrementa a $3.00m$. (Suponga que la cuerda no se estira en ninguno de los casos y que la contribución de la masa de la cuerda a la tensión es despreciable.)

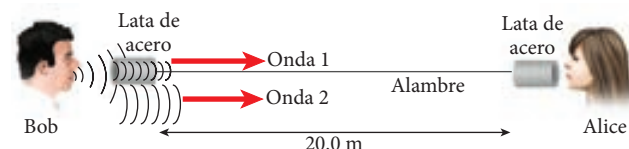
•15.27 El punto A en la figura está a 30.00 cm debajo del techo. Determine cuánto tiempo más tardará un pulso de onda para viajar a lo largo del alambre 1 que a lo largo del alambre 2.



•15.28 Una determinada cuerda de acero de guitarra eléctrica tiene una longitud de masa por unidad de longitud de 1.93 g/m.

- a) Si la tensión de esta cuerda es de 62.2 N, ¿cuál es la rapidez de onda de la cuerda?
- b) Para incrementar la rapidez de onda por 1.0%, ¿cuánto se deberá cambiar la tensión?

•15.29 Bob está hablando con Alice por medio de un teléfono de latas, que consiste en dos latas de acero conectadas por un alambre de acero tenso de 20.0 m (vea la figura). El alambre tiene una densidad lineal de 6.13 g/m, y la tensión del alambre es de 25.0 N. Las ondas sonoras salen de la boca de Bob, son recabadas por la lata de la izquierda y luego crean vibraciones en el alambre que viajan a la lata de Alice y son transformadas nuevamente en ondas sonoras en el aire. Alice escucha tanto las ondas sonoras que han viajado a través del alambre (onda 1) como las que han viajado a través del aire (onda 2) esquivando el alambre. ¿Le llegan al mismo tiempo estos dos tipos de ondas? Si no, ¿cuál de las ondas le llega antes y por cuánto tiempo? La rapidez del sonido en el aire es de 343 m/s.



••15.30 Un alambre de densidad lineal de masa uniforme está suspendido del techo. Tarda 1.00 s para que un pulso de onda recorra el largo del alambre. ¿Cuál es la longitud del alambre?

••15.31 a) Con base en la ecuación general de onda (ecuación 15.9), demuestre por medio de la derivación directa que el paquete de ondas gaussiano descrito por la ecuación $y(x,t) = (5.00m)e^{-0.1(x-5t)^2}$ realmente es una onda viajera (que satisface la ecuación diferencial de onda).

b) Si x es especificado en metros y t en segundos, determine la rapidez de esta onda. Trace en una sola gráfica esta onda como función de x en $t = 0, t = 1.00 \text{ s}, t = 2.00 \text{ s}$ y $t = 3.00 \text{ s}$.

c) De manera más general, compruebe que cualquier función $f(x,t)$ que depende de x y t mediante una variable combinada $x \pm vt$ es una solución de la ecuación de onda, independientemente de la forma específica de la función f .

Sección 15.5

•15.32 Suponga que la pendiente de una playa debajo del mar es de 12.0 cm de descenso por cada 1.0 m de distancia horizontal. Una onda se está moviendo hacia la orilla, reduciendo su velocidad cuando se acerca a aguas menos profundas. ¿Cuál es su aceleración cuando se encuentra a 10.0 m de la orilla?

•15.33 Un terremoto genera tres tipos de ondas: ondas superficiales (ondas L), que son las más lentas y débiles; ondas de corte (ondas S), que son ondas transversales y cargan la mayoría de la energía, y ondas de presión (ondas P), que son ondas longitudinales que se mueven más rápido. La rapidez de las ondas P es de aproximadamente 7.0 km/s, y la de las ondas S es de aproximadamente 4.0 km/s. Parece que los animales sienten las ondas P. Si un perro siente la llegada de ondas P y empieza a ladrar 30.0 segundos antes de que el terremoto sea sentido por los humanos, ¿cuál es la distancia aproximada del perro del epicentro del terremoto?

Sección 15.6

15.34 Una cuerda con una masa de 30.0 g y una longitud de 2.00 m es estirada bajo una tensión de 70 N. ¿Cuánta potencia se deberá aplicar a la cuerda para generar una onda viajera que tenga una frecuencia de 50.0 Hz y una amplitud de 4.00 cm?

15.35 Una cuerda con una densidad de masa lineal de 0.100 kg/m está bajo una tensión de 100. N. ¿Cuánta potencia se deberá aplicar a la cuerda para generar una onda sinusoidal de una amplitud de 2.00 cm y una frecuencia de 120. Hz?

•15.36 Una onda sinusoidal en una cuerda se describe por la ecuación $y = (0.100 \text{ m}) \sin(0.75x - 40t)$, donde x y y están en metros y t en segundos. Si la densidad lineal de masa de la cuerda es de 10 g/m, determine a) la constante de fase, b) la fase de la onda en $x = 2.00 \text{ cm}$ y $t = 0.100 \text{ s}$, c) la rapidez de la onda, d) la longitud de onda, e) la frecuencia y f) la potencia transmitidos por la onda.

Secciones 15.7 y 15.8

15.37 En un experimento acústico, una cuerda de piano con una masa de 5.0 g y una longitud de 70.0 cm se mantiene bajo tensión al tender la cuerda a través de una polea sin fricción y al suspender de ella un peso de 250. kg. El sistema completo se coloca en un ascensor.

a) ¿Cuál es la frecuencia fundamental de oscilación para la cuerda cuando el ascensor está en reposo?

b) ¿Con qué aceleración y en qué dirección (hacia arriba o hacia abajo) deberá moverse el ascensor para que la cuerda produzca la frecuencia correcta de 440. Hz, correspondiendo a la central?

15.38 Una cuerda tiene una longitud de 35.0 cm y una masa por unidad de longitud de $5.51 \cdot 10^{-4}$ kg/m. ¿Qué tensión se deberá aplicar a la cuerda para que vibre con la frecuencia fundamental de 660 Hz?

15.39 Una cuerda de 2.00 m de largo con una masa de 10.0 g está sujeta en ambos extremos. La tensión de la cuerda es de 150 N.

a) ¿Cuál es la rapidez de una onda en esta cuerda?

b) La cuerda se pulsa para que oscile. ¿Cuál es la longitud de onda y frecuencia de la onda resultante si produce una onda estacionaria con dos antinodos?

•**15.40** Escriba la ecuación para una onda estacionaria que tiene tres antinodos de amplitud de 2.00 cm en una cuerda de 3.00 m de largo que está sujeta en ambos extremos y vibra 15.0 veces por segundo. El tiempo $t = 0$ se elige como el instante cuando la cuerda está plana. Si se propagara un pulso de onda a lo largo de esta cuerda, ¿qué tan rápido lo haría?

•**15.41** Una cuerda de 3.00 m de largo, sujeta en ambos extremos, tiene una masa de 6.00 g. Si usted quisiera establecer una onda estacionaria en esta cuerda con una frecuencia de 300. Hz y tres antinodos, ¿a qué tensión deberá sujetar la cuerda?

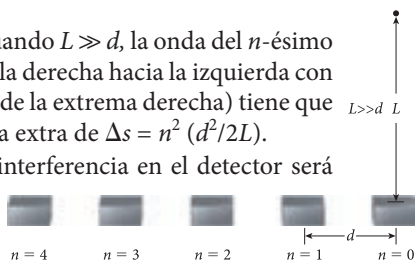
•**15.42** Un vaquero camina con un ritmo de aproximadamente dos pasos por segundo, sosteniendo un vaso de un diámetro de 10.0 cm que contiene leche. La leche se agita y sube cada vez más en el vaso hasta que empieza finalmente a rebosar. Determine la rapidez máxima de las ondas en la leche.

•**15.43** Estudiantes en un laboratorio producen ondas estacionarias en cuerdas estiradas conectadas a generadores de vibraciones. Una de estas ondas está descrita por la función de onda $y(x,t) = (2.00 \text{ cm}) \sin[(20.0 \text{ m}^{-1})x] \cos[(150 \text{ s}^{-1})t]$, donde y es el desplazamiento transversal de la cuerda, x es la posición a lo largo de la cuerda y t es el tiempo. Reescriba esta función de onda en la forma para una onda que se mueve hacia la derecha y una onda que se mueve hacia la izquierda: $y(x,t) = f(x - vt) + g(x + vt)$; es decir, busque las funciones f y g y la rapidez v .

•**15.44** Un arreglo de emisores de ondas, como se muestra en la figura, emite una onda de una longitud de onda λ que debe ser detectada a una distancia L directamente arriba del emisor de la extrema derecha. La distancia entre emisores de onda adyacentes es d .

a) Demuestre que cuando $L \gg d$, la onda del n -ésimo emisor (contando de la derecha hacia la izquierda con $n = 0$ como el emisor de la extrema derecha) tiene que recorrer una distancia extra de $\Delta s = n^2 (d^2/2L)$.

b) Si $\lambda = d^2/2L$, ¿la interferencia en el detector será constructiva o destructiva?



c) Si $\lambda = d^2/2L = 10^{-3}$ m y $L = 1.00 \cdot 10^3$ m, ¿cuál es d , la distancia entre emisores adyacentes?

••**15.45** Una pequeña pelota flota en el centro de una piscina circular que tiene un radio de 5.00 m. Se colocan tres generadores de ondas en la orilla de la piscina, separados por 120° . El primer generador de ondas trabaja con una frecuencia de 2.00 Hz. El segundo generador de ondas lo hace con una frecuencia de 3.00 Hz y el tercero con una frecuencia de 4.00 Hz. Si la rapidez de cada onda de agua es de 5.00 m/s y la amplitud de las ondas es la misma, trace la altura de la pelota como función del tiempo desde $t = 0$ hasta $t = 2.00$ s, suponiendo que la superficie del agua es de cero. Suponga que todos los generadores de ondas imparten un corrimiento de fase cero. ¿Cómo cambiaría su respuesta si uno de los generadores de olas fuera cambiado a una ubicación diferente en la orilla de la piscina?

••**15.46** Una cuerda con una densidad lineal de masa $\mu = 0.0250$ kg/m bajo una tensión de $T = 250$ N es orientada en la dirección x . Dos ondas transversales de igual amplitud con un ángulo de fase de cero (en $t = 0$), pero con diferentes frecuencias ($\omega = 3000$ rad/s y $\omega/3 = 1000$ rad/s) se crean en la cuerda por un oscilador ubicado en $x = 0$. Las ondas resultantes, que corren en la dirección x positiva, son reflejadas en un punto distante, así que existe un par de ondas similar que viaja en la dirección x negativa. Encuentre los valores de x en los que los primeros dos nodos en la onda estacionaria son producidas por estas cuatro ondas.

••**15.47** La ecuación para una onda estacionaria en una cuerda con una densidad de masa μ es $y(x,t) = 2A \cos(\omega t) \sin(\kappa x)$. Demuestre que la energía cinética media y la energía potencial a lo largo del tiempo para esta onda por unidad de longitud están dadas por $K_{\text{prom}}(x) = \mu \omega^2 A^2 \sin^2 \kappa x$ y $U_{\text{prom}}(x) = T(\kappa A)^2 (\cos^2 \kappa x)$.

Problemas adicionales

15.48 Una onda sinusoidal que se propaga en una cuerda se mueve en la dirección x positiva. La onda tiene una longitud de onda de 4 m, una frecuencia de 50.0 Hz, y una amplitud de 3.00 cm. ¿Cuál es la función de onda para esta onda?

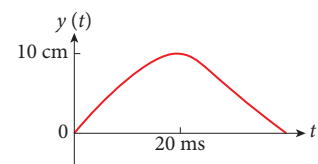
15.49 Una cuerda de guitarra con una masa de 10.0 g tiene una longitud de 1.00 m y está sujeta a la guitarra en dos puntos separados por 65.0 cm.

a) ¿Cuál es la frecuencia del primer armónico de esta cuerda cuando se sujeta a una tensión de 81.0 N?

b) Si la cuerda de guitarra es reemplazada por una cuerda más pesada que tiene una masa de 16.0 g y una longitud de 1.00 m, ¿cuál es la frecuencia del primer armónico de la cuerda de repuesto?

15.50 Escriba la ecuación para una onda sinusoidal que se propaga en la dirección x negativa con una rapidez de 120. m/s, si una partícula en el medio en el cual se mueve la onda se empieza a balancear en un rango de 6.00 cm en 4.00 s. Suponga que $t = 0$ es tomado como el instante cuando la partícula está en $y = 0$ y que la partícula se mueve en la dirección y positiva inmediatamente después de $t = 0$.

15.51 En la figura se muestra una gráfica del desplazamiento



to, y , debido a una onda sinusoidal que se propaga a lo largo de una cuerda como función del tiempo, t . ¿Cuál es *a*) el periodo, *b*) la rapidez máxima y *c*) la aceleración máxima de esta onda perpendicular a la dirección en que viaja la onda?

15.52 Un alambre de 50.0 cm de longitud con una masa de 10.0 g está bajo una tensión de 50.0 N. Ambos extremos del alambre están sostenidos rígidamente mientras se rasguea.

- a) ¿Cuál es la rapidez de las ondas en el alambre?
- b) ¿Cuál es la frecuencia fundamental de la onda estacionaria?
- c) ¿Cuál es la frecuencia del tercer armónico?

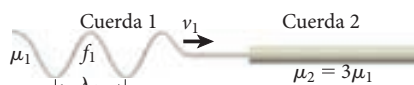
15.53 ¿Cuál es la rapidez de onda a lo largo de una alambre de latón con un radio de 0.500 mm estirado bajo una tensión de 125 N? La densidad del latón es de $8.60 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$.

15.54 Dos alambres de acero están estirados bajo la misma tensión. El primer alambre tiene un diámetro de 0.500 mm, y el segundo alambre tiene un diámetro de 1.00 mm. Si la rapidez de las ondas que viajan a lo largo del primer alambre es de 50.0 m/s, ¿cuál es la rapidez de las ondas que viajan a lo largo del segundo alambre?

15.55 La tecla Do central (tecla 52) de un piano corresponde a una frecuencia fundamental de aproximadamente 262 Hz, y la tecla del Do (tecla 64) corresponde a una frecuencia fundamental de 1 046.5 Hz. Si las cuerdas que se usan para ambas teclas son idénticas en densidad y longitud, determine el cociente de las tensiones en las dos cuerdas.

15.56 Una onda sinusoidal viaja a lo largo de una cuerda estirada. Un punto a lo largo de la cuerda tiene una velocidad máxima de 1.00 m/s y un desplazamiento máximo de 2.00 cm. ¿Cuál es la aceleración máxima en este punto?

•15.57 Como se muestra en la figura, una onda sinusoidal viaja hacia



la derecha con una rapidez de v_1 a lo largo de la cuerda, que tiene una densidad lineal de masa μ_1 . Esta onda tiene la frecuencia f_1 y longitud de onda λ_1 . Puesto que la cuerda 1 está sujeta a la cuerda 2 (que tiene una densidad lineal de masa $\mu_2 = 3\mu_1$), la primera onda producirá una nueva onda en la cuerda 2, la cual también viajará hacia la derecha. ¿Cuál es la frecuencia f_2 de la onda producida en la cuerda 2? ¿Cuál es la rapidez v_2 de la onda producida en la cuerda 2? ¿Cuál es la longitud de onda λ_2 de la onda que se produce en la cuerda 2? Escriba todas las respuestas en términos de f_1 , v_1 y λ_1 .

•15.58 La tensión en un cable de acero de 2.7 m de largo y 1.0 cm de diámetro ($\rho = 7\ 800 \text{ kg/m}^3$) es de 840 N. ¿Cuál es la frecuencia fundamental de vibración del cable?

•15.59 Una onda que se propaga en una cuerda tiene la ecuación de movimiento $y(x,t) = 0.02 \text{ sen}(5.00x - 8.00t)$.

- a) Calcule la longitud de onda y la frecuencia de la onda.
- b) Calcule su velocidad.
- c) Si la densidad lineal de masa de la cuerda es $\mu = 0.10 \text{ kg/m}$, ¿cuál es la tensión de la cuerda?

•15.60 Carlos chapotea de un lado al otro en su tina de baño y produce una onda estacionaria. ¿Cuál es la frecuencia de estas ondas si la tina de baño tiene una longitud de 150. cm y una anchura de 80.0 cm y contiene agua con una profundidad de 38.0 cm?

•15.61 Considere una cuerda de guitarra estirada 80.0 cm entre sus extremos sujetos. La cuerda está afinada para tocar Do central con una frecuencia de 256 Hz cuando oscila en su modo fundamental, es decir, con un antinodo entre los extremos. Si la cuerda se desplaza 2.00 mm (de manera transversal) en su punto medio y se suelta para producir esta nota, ¿cuáles son la rapidez de onda v y la rapidez máxima $V_{\text{máx}}$ del punto medio de la cuerda?

•15.62 En principio, la mayor tensión que puede ser sostenida por medio de una cuerda estirada con densidad lineal de masa μ , incluso en principio, está dada por $\tau = \mu c^2$, donde c es la rapidez de la luz en el vacío. (Éste es un valor enorme. Las tensiones de ruptura de todos los materiales ordinarios son aproximadamente 12 órdenes de magnitud menores que esto.)

- a) ¿Cuál es la rapidez de una onda viajera en una cuerda bajo esta tensión?
- b) Si una cuerda de guitarra de una longitud de 1.000 m, estirada entre extremos sujetos, estuviese hecha de este material hipotético, ¿cuál sería la frecuencia de su primer armónico?
- c) Si esta cuerda de guitarra fuese pulsada en su punto medio con un desplazamiento de 2.00 mm para producir la frecuencia fundamental, ¿cuál sería la rapidez máxima lograda por el punto medio de la cuerda?

•15.63 Una banda elástica con una masa de 0.21 g es estirada entre dos dedos, sujetándola a una tensión de 2.8 N. La longitud estirada total de la banda es de 21.3 cm. Un lado de la banda se pulsa, iniciando una vibración de 8.7 cm de la longitud estirada de la banda. ¿Cuál es la frecuencia más baja de vibración que puede ser establecida en esta parte de la banda elástica? Suponga que la banda se estira de manera uniforme.

15.64 Dos ondas que viajan en direcciones opuestas a lo largo de una cuerda fijada en ambos extremos crean una onda estacionaria descrita por $y(x,t) = 1.00 \cdot 10^2 \text{ sen}(25x) \cos(1\ 200t)$. La cuerda tiene una densidad lineal de masa de 0.01 kg/m, y la tensión de la cuerda es aplicada por una masa que cuelga de un extremo. Si la cuerda vibra en su tercer armónico, calcule *a*) la longitud de la cuerda, *b*) la velocidad de las ondas y *c*) la masa de la masa colgante.

15.65 Una onda transversal sinusoidal de una longitud de onda de 20.0 cm y una frecuencia de 500. Hz viaja a lo largo de una cuerda en la dirección z positiva. Las oscilaciones de onda toman lugar en el plano xz y tienen una amplitud de 3.00 cm. En el instante $t = 0$, el desplazamiento de la cuerda en $x = 0$ es $z = 3.00 \text{ cm}$.

- a) Se toma una fotografía de la onda en $t = 0$. Haga un trazo sencillo de la cuerda en este instante (incluidos los ejes).
- b) Determine la velocidad de la onda.
- c) Determine el número de onda de esta onda.
- d) Si la densidad lineal de masa de la cuerda es de 30.0 g/m, ¿cuál es la tensión de la cuerda?
- e) Determine la función $D(z,t)$ que describe el desplazamiento x , producido en la cuerda por esta onda.

•15.66 Un cable pesado de una masa total M y una longitud $L = 5.0 \text{ m}$ tiene un extremo sujeto a un soporte rígido y el otro extremo está suelto. Se inicia un pequeño desplazamiento transversal en la parte baja del cable. ¿Cuánto tiempo pasa para que el desplazamiento viaje hasta la parte superior del cable?

16

Sonido

LO QUE APRENDEREMOS	525
16.1 Ondas longitudinales de presión	525
Velocidad del sonido	526
Ejemplo 16.1 Vitores de fútbol	528
Reflexión del sonido	529
16.2 Intensidad de sonido	529
Intensidad relativa y rango dinámico	530
Problema resuelto 16.1 Niveles de sonido relativos en un concierto de rock	530
Límites del oído humano	532
Ejemplo 16.2 Rango de longitud de onda del oído humano	532
16.3 Interferencia del sonido	533
Pulsaciones	534
Cancelación activa de ruido	535
16.4 Efecto Doppler	536
El efecto Doppler en el espacio bidimensional y tridimensional	538
Aplicaciones del efecto Doppler	539
Ejemplo 16.3 Medición del flujo de sangre mediante el ultrasonido Doppler	539
El cono de Mach	540
Ejemplo 16.4 El Concorde	542
16.5 Resonancia y música	542
Tonos	542
Tubos semiabiertos y abiertos	543
Ejemplo 16.5 Un órgano tubular	544
LO QUE HEMOS APRENDIDO/ GUÍA DE ESTUDIO PARA EXAMEN	545
Práctica para resolución de problemas	546
Problema resuelto 16.2 Desplazamiento Doppler para un observador en movimiento	546
Problema resuelto 16.3 Onda estacionaria en un tubo	548
Problema resuelto 16.4 Desplazamiento Doppler de una sirena de ambulancia reflejada	549
Preguntas de opción múltiple	550
Preguntas	551
Problemas	551



FIGURA 16.1 Jerry García, de los Grateful Dead, en el proceso de producir ondas sonoras.

LO QUE APRENDEREMOS

- El sonido consiste en ondas longitudinales de presión y necesita un medio en el cual se pueda propagar.
- La rapidez del sonido es por lo general mayor en sólidos que en líquidos; y en líquidos es mayor que en los gases.
- La rapidez del sonido en el aire depende de la temperatura; es de aproximadamente 343 m/s a presión atmosférica normal y a una temperatura de 20 °C.
- La intensidad del sonido detectable por el oído humano abarca un rango largo y por lo general se expresa en una escala logarítmica en términos de decibeles (dB).
- Ondas de sonido de dos o más fuentes pueden interferir en el espacio y en el tiempo, lo que da como resultado interferencia destructiva y constructiva.
- La interferencia de ondas de sonido en el tiempo produce pulsaciones que ocurren con una frecuencia de pulsación específica.
- El efecto Doppler es el desplazamiento en la frecuencia observada de un sonido debido al hecho de que la fuente se mueve (se acerca o se aleja) en relación con el observador.
- Si una fuente de sonido se mueve con una rapidez mayor que la del sonido, se presenta una onda expansiva, o cono de Mach.
- Ondas estacionarias en tubos abiertos o cerrados pueden ser generadas solamente con longitudes de onda discretas.

El reconocimiento de sonidos es una de las formas más importantes por las que aprendemos acerca del mundo que nos rodea. Como veremos en este capítulo, el oído humano es muy sensible y puede distinguir un amplio rango de frecuencias y grados de intensidad. Sin embargo, aunque la interpretación del sonido probablemente se desarrolló en animales desde los tiempos más remotos, pues alertaba acerca de depredadores o proporcionaba ayuda en la caza de presas, el sonido también ha sido una fuente poderosa de rituales culturales y entretenimiento para los humanos (figura 16.1). La música ha sido parte de la vida humana desde que existe la sociedad.

El sonido es un tipo de onda, así que el estudio del sonido de este capítulo se basa directamente en los conceptos sobre ondas que se presentaron en el capítulo 15. Algunas características de ondas sonoras también pertenecen a las ondas luminosas y van a ser útiles cuando estudiemos estas ondas en capítulos posteriores. Este capítulo también examina fuentes de sonidos musicales y aplicaciones del sonido en una amplia gama de otras áreas, desde la medicina hasta la geografía.

16.1 Ondas longitudinales de presión

El **sonido** es una variación de presión que se propaga a través de algún medio. En el aire, la variación de presión causa movimientos anormales de moléculas del aire en el sentido de la propagación; por lo tanto, una onda sonora es longitudinal. Cuando oímos un sonido, nuestros tímpanos vibran por el aire a su lado. Si este aire tiene una variación de presión que se repite con cierta frecuencia, los tímpanos vibran con esta frecuencia.

El sonido requiere de un medio para su propagación. Si se saca el aire de un frasco de vidrio que contiene una campana que suena, el sonido cesa cuando el aire es evacuado del frasco, aun cuando el badajo claramente siga golpeando la campana. Las ondas sonoras provienen de una fuente o un emisor, y necesitan un medio en el cual puedan viajar. A pesar de escenas de películas que incluyen un gran rugido cuando pasa una nave espacial o cuando explota una estrella o planeta, el espacio interestelar es un lugar silencioso porque es un vacío.

La figura 16.2 muestra una onda de presión continua compuesta de variaciones alternantes de presión de aire; un exceso de presión (compresión) seguido por una reducción de presión (rarefacción). Graficar estas variaciones a lo largo de un eje x durante varias veces, como en la figura 16.2, nos permite deducir la rapidez de la onda.

Aunque el sonido se tiene que propagar a través de un medio, ese medio no tiene que ser el aire. Cuando estamos debajo del agua, todavía podemos oír sonidos, así que sabemos que el sonido también se propaga a través de líquidos. Además, posiblemente haya puesto su oreja a un riel del ferrocarril para obtener información anticipada sobre un tren que se acerca (a propósito, esto no es recomendable, pues el tren puede estar más cerca de lo que se piensa). De este modo sabemos que el sonido se propaga a través de sólidos. De hecho, el sonido se propaga más rápidamente y con menos pérdida a través de metales que a través del aire. Si esto no fuera así, poner una oreja en el riel del ferrocarril no tendría sentido.

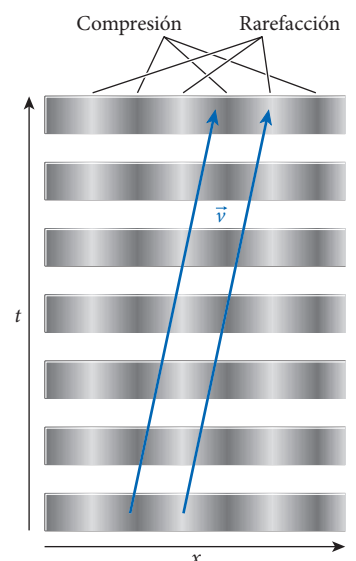


FIGURA 16.2 Propagación de una onda de presión longitudinal a lo largo de un eje x como función de tiempo.



FIGURA 16.3 Usted ve los fuegos artificiales antes de que se oigan los sonidos de los explosivos.

Velocidad del sonido

Cuando observamos los juegos pirotécnicos del 4 de julio, vemos las explosiones de los cohetes antes de que se oiga el sonido (figura 16.3). La razón es que la luz emitida por las explosiones llega a nuestros ojos casi al instante, porque la rapidez de la luz es de aproximadamente 300 000 km/s. Sin embargo, la rapidez del sonido es mucho más lenta, así que las ondas sonoras de la explosión nos llegan algún tiempo después de que las ondas luminosas hayan llegado.

¿Con qué rapidez se propaga el sonido? En otras palabras, ¿cuál es la rapidez del sonido? Para una onda en una cuerda, vimos en el capítulo 15 que la rapidez de la onda es $v = \sqrt{T/\mu}$, donde T es la tensión de la cuerda (una fuerza) y μ es la densidad lineal de la masa de la cuerda. A partir de esta ecuación se puede pensar que v sea la raíz cuadrada de la proporción de la fuerza restauradora a la respuesta inercial. Si la onda se propaga a través de un medio tridimensional en lugar de una cuerda unidimensional, la respuesta inercial es originada de la densidad del medio ρ . En el capítulo 13 analizamos la elasticidad de sólidos e introdujimos el módulo elástico conocido como módulo de Young, Y . Este módulo determina el cambio fraccional en longitud de una barra delgada como función de la fuerza por unidad de área aplicada a la barra. El análisis revela que el módulo de Young es el término de fuerza apropiado para una onda que se propaga a lo largo de una barra sólida delgada, así que obtenemos

$$v = \sqrt{\frac{Y}{\rho}} \tag{16.1}$$

para la rapidez del sonido en una barra sólida delgada.

La rapidez del sonido en fluidos —tanto líquidos como gases— está relacionada de manera semejante al módulo de compresibilidad, B , definido en el capítulo 13, para determinar el cambio de volumen de un material en respuesta a presión externa. Por lo tanto, la rapidez del sonido en un gas o líquido está dada por

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}}. \tag{16.2}$$

Aunque estos argumentos dimensionales demuestran que la rapidez del sonido es proporcional a la raíz cuadrada del módulo dividida entre la densidad apropiada, un análisis bien fundamentado, como el de la deducción siguiente deja ver que las constantes proporcionales tienen un valor de exactamente 1 en las ecuaciones 16.1 y 16.2.

DEDUCCIÓN 16.1

Rapidez del sonido

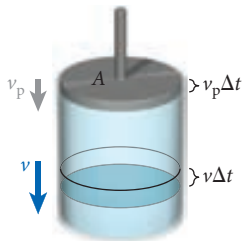


FIGURA 16.4 Pistón que comprime un fluido.

Suponga que un fluido está contenido en un cilindro con un pistón móvil en un extremo (figura 16.4). Si este pistón se mueve con la velocidad v_p en el fluido, comprimirá el elemento de fluido enfrente de él. Este elemento de fluido, a su vez, se moverá como resultado del cambio de presión; su borde delantero se moverá con la rapidez del sonido, v , el cual, por definición, es la rapidez de las ondas de presión en el medio.

Si se empuja el pistón al fluido con una fuerza F , se causa un cambio de presión, $p = F/A$ en el fluido (vea el capítulo 13), donde A es el área de sección transversal del cilindro y también del pistón. La fuerza ejercida sobre el elemento de fluido de masa m causa una aceleración dada por $\Delta v/\Delta t$:

$$F = m \frac{\Delta v}{\Delta t} = m \frac{v_p}{\Delta t} \Rightarrow p = \frac{F}{A} = \frac{m}{A} \frac{v_p}{\Delta t}.$$

Puesto que la masa es la densidad del fluido multiplicada por su volumen, $m = \rho V$, y el volumen del cilindro es el área de la base A multiplicada por la longitud l , podemos encontrar la masa del elemento de fluido:

$$m = \rho V = \rho A l \Rightarrow p = \frac{m}{A} \frac{v_p}{\Delta t} = \frac{\rho A l}{A} \frac{v_p}{\Delta t} = \frac{\rho l v_p}{\Delta t}.$$

Puesto que este elemento de fluido responde a la compresión moviéndose con la rapidez v durante el intervalo de tiempo Δt , la longitud del elemento de fluido que ha experimentado la onda de presión es $l = v\Delta t$, lo que finalmente da la diferencia de presión:

$$p = \frac{\rho l v_p}{\Delta t} = \frac{\rho(v\Delta t)v_p}{\Delta t} = \rho v v_p. \quad (i)$$

Según la definición del módulo volumétrico (vea el capítulo 13), $p = B\Delta V/V$. Podemos combinar esta expresión para la presión, y la que se obtuvo en la ecuación (i):

$$p = \rho v v_p = B \frac{\Delta V}{V}. \quad (ii)$$

Nuevamente, el volumen del fluido en movimiento V , que ha experimentado la onda de presión es proporcional a v , puesto que $V = Al = Av\Delta t$. Además, el cambio de volumen en el fluido causado por empujar el pistón en el cilindro es $\Delta V = Av_p\Delta t$. Por esto la proporción $\Delta V/V$ es equivalente a v_p/v , la proporción de la velocidad del pistón a la rapidez del sonido. Si sustituimos este resultado en la ecuación (ii) obtenemos

$$\begin{aligned} \rho v v_p &= B \frac{\Delta V}{V} = B \frac{v_p}{v} \Rightarrow \\ \rho v^2 &= B \Rightarrow \\ v &= \sqrt{\frac{B}{\rho}}. \end{aligned}$$

Como puede ver, la rapidez con la que el pistón es empujado al fluido se compensa. Por lo tanto, no importa cuál sea la rapidez de la excitación, el sonido siempre se propaga con la misma rapidez en el medio.

Las ecuaciones 16.1 y 16.2 establecen que la rapidez del sonido en un estado dado de la materia (gas, líquido o sólido) es inversamente proporcional a la raíz cuadrada de la densidad, lo que significa que en dos diferentes gases, la rapidez del sonido es mayor en el de la menor densidad. Sin embargo, los valores del módulo de Young para sólidos son mucho más grandes que los valores del módulo volumétrico para líquidos que son más grandes que para los gases. Esta diferencia es más importante que la dependencia de la densidad. De las ecuaciones 16.1 y 16.2 obtenemos que para las rapidezces del sonido en sólidos, líquidos y gases,

$$v_{\text{sólido}} > v_{\text{líquido}} > v_{\text{gas}}. \quad (16.3)$$

Valores representativos para la rapidez del sonido en diferentes materiales bajo condiciones estándares de presión (1 atm) y temperatura (20 °C) se encuentran en la tabla 16.1.

Lo que más nos interesa es la rapidez del sonido en el aire porque éste es el medio más importante para la propagación del sonido en la vida cotidiana. A una presión atmosférica normal y a 20 °C, esta rapidez de sonido es

$$v_{\text{aire}} = 343 \text{ m/s}. \quad (16.4)$$

El conocimiento de la rapidez del sonido en el aire explica la regla de 5 segundos para las tormentas eléctricas: si pasan 5 s o menos entre el instante que vemos un rayo (figura 16.5) y el instante que se oiga el trueno, el rayo está a una distancia de 1 mi o menos. Puesto que el sonido viaja aproximadamente a 340 m/s, viaja 1 700 m, o de manera aproximada 1 mi, en 5 s. La rapidez de la luz es aproximadamente 1 millón de veces mayor que la rapidez del sonido, así que la percepción visual del rayo ocurre esencialmente sin retraso. Los países que usan el sistema métrico tienen una regla de 3 segundos. Un retraso de 3 s entre el rayo y el trueno corresponde a 1 km de distancia del rayo (figura 16.6).

La rapidez del sonido en el aire depende (levemente) de la temperatura del aire T . La siguiente dependencia lineal se obtiene de manera experimental:

$$v(T) = (331 + 0.6T/^{\circ}\text{C}) \text{ m/s}. \quad (16.5)$$

16.1 Ejercicio en clase

Usted está en el centro de una sala de conciertos con una profundidad de 120.0 m. ¿Cuál es la diferencia de tiempo entre la llegada del sonido directamente de la orquesta en su posición y la llegada del sonido que llega del fondo de la sala de conciertos?

- a) 0.010 s d) 0.35 s
b) 0.056 s e) 0.77 s
c) 0.11 s



FIGURA 16.5 La regla de 5 segundos para rayos se debe a la diferencia en la rapidez entre luz y sonido.

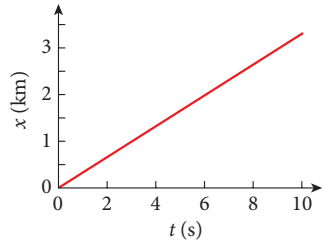


FIGURA 16.6 Distancia x a la fuente (rayo) del sonido como función del retraso de tiempo t en escuchar el sonido (trueno).

Tabla 16.1 Rapidez del sonido en algunas sustancias comunes

	Sustancia	Rapidez del sonido (m/s)
Gases	Criptón	220
	Dióxido de carbono	260
	Aire	343
	Helio	960
	Hidrógeno	1 280
Líquidos	Metanol	1 143
	Mercurio	1 451
	Agua	1 480
	Agua de mar	1 520
	Sólidos	Plomo
	Concreto	3 200
	Madera noble	4 000
	Acero	5 800
	Aluminio	6 400
	Diamante	12 000

EJEMPLO 16.1

Víttores de fútbol

El departamento de un estudiante se ubica exactamente a 3.75 km del estadio de fútbol. Él está viendo el juego en vivo en TV y ve cómo el equipo de casa anota un touchdown. De acuerdo con su reloj, pasan 11.2 s después de que oye el rugido de la multitud en la televisión hasta que lo escucha otra vez desde afuera.

PROBLEMA

¿Cuál es la temperatura a la hora del juego?

SOLUCIÓN

La señal de televisión se mueve con la rapidez de la luz y, por lo tanto, llega al televisor del estudiante esencialmente en el mismo instante que sucede en el estadio. De este modo el retraso en la llegada del rugido en el departamento del estudiante se puede atribuir por completo a la rapidez finita del sonido. Encontramos esta rapidez del sonido con base en los datos dados:

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{3\,750\text{ m}}{11.2\text{ s}} = 334.8\text{ m/s.}$$

Al usar la ecuación 16.5 encontramos la temperatura a la hora del juego:

$$T = \frac{v(T)/(m/s) - 331}{0.6} \text{ } ^\circ\text{C} = \frac{334.8 - 331}{0.6} \text{ } ^\circ\text{C} = \frac{3.8}{0.6} \text{ } ^\circ\text{C} = 6.4 \text{ } ^\circ\text{C}$$

EXPLICACIÓN

Hay que advertir lo siguiente: varias incertidumbres están inherentes en este resultado. Primero que nada, si rehiciéramos el cálculo para un retraso de tiempo de 11.1 s, encontraríamos que la temperatura es de 11.4 °C o 5 °C más alta de la que encontramos usando 11.2 s como retraso. En segundo lugar, si 0.1 s hace una diferencia tan grande en la temperatura determinada, tenemos que preguntar si la señal de televisión llega en realidad al departamento del estudiante en forma instantánea. La respuesta es no. Si el estudiante ve televisión satelital, tarda aproximadamente 0.2 s para la señal de llegar al satélite geostacionario y de regreso a la antena del estudiante. Además, breves retrasos intencionales se insertan con frecuencia en programas de televisión. De esta manera nuestro cálculo no es muy útil para objetivos prácticos.

Reflexión del sonido

Usted puede medir la distancia a un objeto grande distante mediante la medición del tiempo entre la producción de un sonido corto y fuerte y escuchar este sonido nuevamente después de que haya viajado hacia el objeto, se refleje del objeto y regrese a usted. Por ejemplo, si usted estuviese parado en el valle de Yosemite y gritara en la dirección de la cara plana de Half Dome a una distancia de 1.0 km, el sonido de su voz sería llevado a través del valle, se reflejaría de Half Dome y regresaría a usted, realizando un viaje redondo de 2.0 km. La rapidez del sonido de su voz es de 343 m/s, así que el retraso de tiempo entre el grito y escucharlo reflejado sería $t = (2\,000\text{ m})/(343\text{ m/s}) = 5.8\text{ s}$, un intervalo de tiempo que usted fácilmente podría medir con un reloj de pulsera.

Este principio se utiliza en la representación de imágenes por ultrasonido para propósitos diagnósticos en medicina. Las ondas de ultrasonido tienen una frecuencia mucho más alta de lo que un ser humano puede oír, entre 2 y 15 MHz. Esta frecuencia se elige para proporcionar imágenes detalladas y para penetrar profundamente en el tejido humano. Cuando las ondas de ultrasonido encuentran un cambio de densidad del tejido, algunas de ellas se reflejan. Midiendo el tiempo que las ondas de ultrasonido tardan en viajar desde el emisor hasta el receptor y registrando qué tanto de la emisión es reflejado así como la dirección de las ondas originales, se puede formar una imagen. El valor medio de la velocidad de ondas de ultrasonido que se utilizan para las imágenes de tejido humano es de 1 540 m/s. El tiempo para que estas ondas de ultrasonido recorran 2.5 cm y regresen es $t = (0.050\text{ m})/(1\,540\text{ m/s}) = 32\ \mu\text{s}$, y el tiempo para recorrer 10.0 cm y regresar es de $130\ \mu\text{s}$. Por lo tanto, el dispositivo de ultrasonido tiene que ser capaz de medir con precisión tiempos en el rango de 30 a $130\ \mu\text{s}$. Una imagen normal de un feto producida por medio de la representación de imágenes de ultrasonido se muestra en la figura 16.7.

Murciélagos y delfines navegan mediante el uso de la reflexión de sonido (figura 16.8). Ellos emiten ondas de sonido en un rango de frecuencia desde 14 000 Hz hasta más allá de 100 000 Hz en una dirección específica y determinan informaciones sobre su alrededor según el sonido reflejado. Este proceso de ecolocación permite que los murciélagos naveguen en la oscuridad.



FIGURA 16.7 Imagen de un feto producida por la reflexión de ondas de ultrasonido.



FIGURA 16.8 Murciélago que vuela en la oscuridad, dependiendo de la ecolocación para la navegación.

16.2 Intensidad de sonido

En el capítulo 15 se definió la intensidad de una onda como potencia por unidad de área. Vimos que para ondas esféricas la intensidad cae como la segunda potencia de la distancia a la fuente, $I \propto r^{-2}$, dando la proporción

$$\frac{I(r_1)}{I(r_2)} = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2. \quad (16.6)$$

Esta relación también es válida para las ondas sonoras. Puesto que la intensidad es la potencia por unidad de área, sus unidades físicas son watts por metro cuadrado (W/m^2).

Ondas sonoras que pueden ser detectadas por el oído humano tienen un rango de intensidad muy amplio, desde susurros tan bajos de 10^{-12} W/m^2 hasta la potencia de un motor de jet o una banda de rock a distancia cercana, que puede llegar a 1 W/m^2 . Las oscilaciones de presión para incluso el sonido más fuerte en el umbral de dolor de 10 W/m^2 son del orden de sólo décimas de micropascales (μPa). La presión atmosférica normal del aire, en comparación, es de 10^5 Pa . Por lo tanto, podemos ver que la presión del aire varía por sólo una parte en 10 mil millones, incluso para los sonidos más fuertes. Y la variación es varios órdenes de magnitud menos para los sonidos más bajos que se pueden oír. Esto nos podrá dar una nueva apreciación para las capacidades de nuestros oídos.

Puesto que los oídos humanos pueden registrar sonidos sobre muchos órdenes de magnitud de intensidad, se usa una escala logarítmica para medir las intensidades del sonido. La unidad de esta escala es el bel (B), nombrado por Alexander Graham Bell, pero se usa mucho más comúnmente el **decibel** (dB): $1\text{ dB} = 0.1\text{ bel}$. La letra griega β simboliza el nivel de sonido medido en esta escala de decibeles y está definido como

$$\beta = 10 \log \frac{I}{I_0}. \quad (16.7)$$

Aquí $I_0 = 10^{-12}\text{ W/m}^2$, lo que corresponde aproximadamente a la intensidad mínima que un oído humano puede oír. La notación “log” se refiere a este logaritmo base 10. (Vea el apéndice A para hacer una recapitulación sobre logaritmos.) Por ende, una intensidad de sonido 1 000 veces la intensidad de referencia, I_0 , da $\beta = 10 \log 1\,000\text{ dB} = 10 \cdot 3\text{ dB} = 30\text{ dB}$. Este nivel de sonido corresponde a un susurro no muy lejos de nuestro oído (tabla 16.2).

16.1 Oportunidad de autoexamen

Usted oye un sonido con un nivel de 80.0 dB y se ubica a 10.0 m de la fuente del sonido. ¿Cuál es la potencia emitida por la fuente de sonido?

Tabla 16.2 Niveles de sonidos comunes

Sonido	Nivel de sonido (dB)
El sonido más bajo que se pueda oír	0
Sonido de fondo en una biblioteca	30
Campo de golf	40-50
Tráfico de la calle	60-70
Tren en un cruce de ferrocarril	90
Club de baile	110
Martillo neumático	120
Jet despegando de un portaaviones	130-150

Intensidad relativa y rango dinámico

El nivel de sonido relativo $\Delta\beta$ es la diferencia entre dos niveles de sonido:

$$\begin{aligned}
 \Delta\beta &= \beta_2 - \beta_1 \\
 &= 10 \log \frac{I_2}{I_0} - 10 \log \frac{I_1}{I_0} \\
 &= 10(\log I_2 - \log I_0) - 10(\log I_1 - \log I_0) \\
 &= 10 \log I_2 - 10 \log I_1 \\
 \Delta\beta &= 10 \log \frac{I_2}{I_1}. \tag{16.8}
 \end{aligned}$$

El *rango dinámico* es una medida de los niveles de sonido relativos de los sonidos más fuertes y más bajos producidos por una fuente. El rango dinámico de un disco compacto es aproximadamente de 90 dB, mientras que el rango para los discos de vinil fue aproximadamente de 70 dB. (Discos de vinil, 8 tracks y audiocasetes son tecnologías viejas que podrá encontrar en la casa de sus padres o abuelos.) Los fabricantes indican el rango dinámico para todas las bocinas de gama alta, así como para los auriculares. En general, entre más alto es el rango dinámico, mejor será la calidad de sonido. Sin embargo, el precio normalmente aumenta con el rango dinámico.

PROBLEMA RESUELTO 16.1 Niveles de sonido relativos en un concierto de rock

Dos amigos asisten a un concierto de rock y llevan un sonómetro. Mediante este dispositivo uno de los amigos mide un nivel de sonido de $\beta_1 = 105.0$ dB, mientras que el otro, quien se encuentra sentado 4 filas (2.8 m) más cerca del escenario, mide $\beta_2 = 108.0$ dB.

PROBLEMA

¿A qué distancia se encuentran los dos amigos de las (altavoces) bocinas en el escenario?

SOLUCIÓN

PIENSE

Expresamos las intensidades en los dos asientos usando la ecuación 16.6 y los niveles relativos de sonido en los dos asientos usando la ecuación 16.8. Podemos combinar estas dos ecuaciones para obtener una expresión para niveles relativos de sonido en los dos asientos. Al conocer la distancia entre los dos asientos, podemos entonces calcular la distancia de los asientos a las (altavoces) bocinas en el escenario.

ESBOCE

La figura 16.9 muestra las posiciones relativas de los dos amigos.

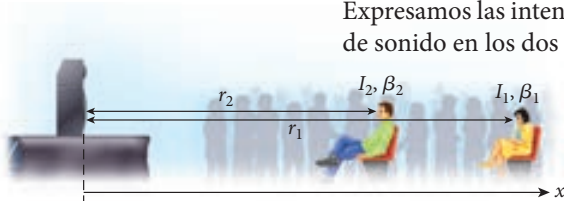


FIGURA 16.9 La distancia relativa r_1 y r_2 de los dos amigos desde las (altavoces) bocinas en un concierto.

INVESTIGUE

La distancia del primer amigo a las (altavoces) bocinas es r_1 , y la distancia del segundo amigo a las (altavoces) bocinas es r_2 . La intensidad del sonido en r_1 es I_1 , y la intensidad del sonido en r_2 es I_2 . El nivel de sonido en r_1 es β_1 , y el nivel de sonido en r_2 es β_2 . Podemos expresar las dos intensidades en términos de las dos distancias usando la ecuación 16.6:

$$\frac{I_1}{I_2} = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2. \quad (\text{i})$$

Luego podemos usar la ecuación 16.8 para relacionar los niveles de sonido en r_1 y r_2 a las intensidades del sonido:

$$\beta_2 - \beta_1 = 10 \log \frac{I_2}{I_1}. \quad (\text{ii})$$

La combinación de las ecuaciones (i) y (ii) nos da

$$\beta_2 - \beta_1 = \Delta\beta = 10 \log \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 = 20 \log \left(\frac{r_1}{r_2}\right). \quad (\text{iii})$$

El nivel relativo de sonido, $\Delta\beta$, está especificado en el problema y sabemos que

$$r_2 = r_1 - 2.8 \text{ m}.$$

Por lo tanto, podemos resolver para la distancia r_1 y luego obtener r_2 .

SIMPLIFIQUE

Si sustituimos la relación entre las dos distancias en la ecuación (iii) obtenemos

$$\begin{aligned} \Delta\beta &= 20 \log \left(\frac{r_1}{r_1 - 2.8 \text{ m}}\right) \Rightarrow \\ 10^{\Delta\beta/20} &= \frac{r_1}{r_1 - 2.8 \text{ m}} \Rightarrow \\ (r_1 - 2.8 \text{ m})10^{\Delta\beta/20} &= r_110^{\Delta\beta/20} - (2.8 \text{ m})10^{\Delta\beta/20} = r_1 \Rightarrow \\ r_1 &= \frac{(2.8 \text{ m})10^{\Delta\beta/20}}{10^{\Delta\beta/20} - 1}. \end{aligned}$$

CALCULE

Al sustituir los valores numéricos obtenemos la distancia del primer amigo a las (altavoces) bocinas:

$$r_1 = \frac{(2.8 \text{ m})10^{(108.0 \text{ dB} - 105.0 \text{ dB})/20}}{10^{(108.0 \text{ dB} - 105.0 \text{ dB})/20} - 1} = 9.58726 \text{ m}.$$

La distancia del segundo amigo es:

$$r_2 = (9.58726 \text{ m}) - (2.8 \text{ m}) = 6.78726 \text{ m}.$$

REDONDEE

Reportamos nuestros resultados con dos cifras significativas:

$$r_1 = 9.6 \text{ m} \quad \text{y} \quad r_2 = 6.8 \text{ m}.$$

VUELVA A REVISAR

Para volver a revisar, sustituimos nuestros resultados para las distancias de regreso a la ecuación (iii) para verificar que obtengamos la diferencia de los niveles de sonido especificados:

$$\Delta\beta = (108.0 \text{ dB}) - (105.0 \text{ dB}) = 3.0 \text{ dB} = 20 \log \left(\frac{9.6 \text{ m}}{6.8 \text{ m}}\right) = 3.0 \text{ dB}.$$

Por lo tanto, nuestra respuesta parece ser razonable, o por lo menos consistente con lo que se declaró originalmente en el problema.

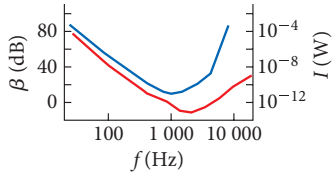


FIGURA 16.10 Dependencia del umbral del oído humano con respecto a la frecuencia. La curva roja representa un típico adolescente; la curva azul representa alguien de la edad de jubilación.

Límites del oído humano

Los oídos humanos pueden detectar ondas sonoras con frecuencias entre aproximadamente 20 y 20 000 Hz. (Los perros, por cierto, pueden detectar incluso frecuencias de sonido más altas.) Como se mencionó antes, el umbral del oído humano se utilizó como soporte para la escala de decibeles; sin embargo, la habilidad del oído humano de detectar sonidos depende mucho de la frecuencia. La figura 16.10 es una gráfica de esta dependencia del umbral del oído humano con respecto a la frecuencia del sonido. Además de la dependencia de la frecuencia, el umbral del oído también tiene una fuerte dependencia de la edad. La curva roja en la figura 16.10 representa los valores para un típico adolescente, y la curva azul aquellos para una persona de la edad de retiro. Los adolescentes no tienen ningún problema escuchando frecuencias de 10 000 Hz, pero la mayoría de los jubilados no las pueden oír para nada. Un ejemplo de uno de estos sonidos agudos es el zumbido de cigarras en verano, que muchas personas mayores ya no pueden percibir.

Los sonidos que mejor oímos tienen frecuencias alrededor de 1 000 Hz. Cuando escuchamos música, el espectro de sonido normalmente se extiende a través del rango completo del oído humano. Esto ocurre porque los instrumentos musicales producen una mezcla característica de las frecuencias básicas de las notas tocadas, así como varios armónicos con frecuencias mayores.

Si reproducimos música en un sistema estereofónico y bajamos el volumen, reducimos la intensidad del sonido en todos los rangos de frecuencia de manera aproximadamente uniforme. Dependiendo de qué tanto reducimos el volumen, se puede acercarse a intensidades de sonido en las frecuencias muy altas y muy bajas que son muy próximas o debajo de nuestro umbral de oído. Como resultado, la música suena plana. A fin de compensar este estiramiento percibido del espectro del sonido, muchos sistemas estereofónicos tienen un botón de “loudness” (intensidad subjetiva sonora), que artificialmente enriquece la salida de potencia de las frecuencias muy bajas y muy altas al resto del espectro, dándole a la música un sonido más lleno en bajos volúmenes.

Un nivel de sonido arriba de 130 dB causará dolor, y niveles de sonido arriba de 150 dB pueden fracturar un tímpano. Además, la exposición de largo plazo a niveles de sonido arriba de 120 dB causa la pérdida de sensibilidad del oído humano. Por esta razón es aconsejable evitar música muy fuerte que se toque por mucho tiempo. Además, en lugares donde ruidos muy fuertes son parte del ámbito de trabajo, por ejemplo, en la cubierta de un portaaviones (figura 16.11), es necesario llevar puestos protectores del oído para evitarle daños.



FIGURA 16.11 Un oficial de lanzamiento de la marina se agacha debajo del ala de un F/A-18F que es lanzado del USS John C. Stennis. Se necesitan protectores del oído en este ambiente de sonido de alta intensidad.

16.2 Ejercicio en clase

Un adolescente está usando un nuevo tono de llamada de su teléfono celular con una frecuencia de 17 kHz. El umbral de oído para un adolescente típico en esta frecuencia es de 30 dB, y el de un adulto podrá ser de 100 dB. Por lo tanto, el tono de llamada del celular del adolescente es audible sólo para adolescentes a distancias de varios metros. ¿A qué cercanía se tendrá que encontrar un adulto del teléfono celular para escucharlo sonar si el adolescente está a una distancia de 10.0 m?

- a) 0.32 cm d) 25 cm
- b) 4.5 cm e) 3.0 m
- c) 8.9 cm

EJEMPLO 16.2

Rango de longitud de onda del oído humano

El rango de frecuencias para sonidos que el oído humano puede detectar corresponde a un rango de longitudes de ondas.

PROBLEMA

¿Cuál es el rango de longitudes de onda para los sonidos a los cuales el oído humano es sensible?

SOLUCIÓN

El rango de frecuencias que el oído puede detectar es de 20-20 000 Hz. A temperatura ambiental, la velocidad del sonido es de 343 m/s. Longitud de onda, rapidez y frecuencia están relacionadas por

$$v = \lambda f \Rightarrow \lambda = \frac{v}{f}$$

Para la frecuencia más baja detectable podemos obtener

$$\lambda_{\text{máx}} = \frac{v}{f_{\text{mín}}} = \frac{343 \text{ m/s}}{20 \text{ Hz}} = 17 \text{ m.}$$

Puesto que la frecuencia más alta detectable es 1 000 veces la más baja, la longitud de onda más corta de sonido audible es 0.001 veces el valor que acabamos de calcular: $\lambda_{\text{mín}} = 0.017 \text{ m.}$

16.3 Interferencia del sonido

Como todas las ondas tridimensionales, las ondas sonoras de dos o más fuentes pueden interferir en espacio y tiempo. Vamos a considerar primero que nada la interferencia espacial de ondas sonoras emitidas por dos **fuentes coherentes**; es decir, dos fuentes que producen ondas sonoras que tienen la misma frecuencia y están en fase.

La figura 16.12 muestra dos altavoces que emiten fluctuaciones idénticas de presión sinusoidal en fase. Los arcos circulares representan los máximos de las ondas sonoras en algún instante dado en el tiempo. La línea horizontal a la derecha de cada altavoz soporta una curva sinusoidal para mostrar que ocurre un arco dondequiera que el seno tenga un máximo. La distancia entre arcos adyacentes emanando de una fuente es exactamente una longitud de onda λ . Puede ver con claridad que los arcos de los diferentes altavoces se cruzan. Ejemplos para estas intersecciones son los puntos A y C. Si cuenta los máximos, puede ver que tanto A como C están exactamente a 8λ del altavoz inferior, mientras que A está a 5λ del altavoz superior y C está a 6λ . Por lo tanto, la diferencia de longitud de trayectoria, $\Delta r = r_2 - r_1$, es un múltiplo (integral) entero de la longitud de onda. Esta relación es una condición general para la interferencia constructiva en un punto espacial dado:

$$\Delta r = n\lambda, \quad \text{para todos } n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (\text{interferencia constructiva}). \quad (16.9)$$

Aproximadamente a mitad del camino entre los puntos A y C en la figura 16.12 se encuentra el punto B. Igual que para los otros dos puntos, la distancia entre B y el altavoz inferior es de 8λ . Sin embargo, este punto está a 5.5λ del altavoz superior. Como resultado, en el punto B el máximo de la onda sonora del altavoz inferior cae en un mínimo de la onda sonora del altavoz superior, y se anulan. Esto significa que en este punto ocurre una interferencia destructiva. Probablemente ya se habrá dado cuenta de que la diferencia de longitud de trayectoria es un número impar de medias longitudes de ondas. Ésta es la condición general para la interferencia destructiva:

$$\Delta r = (n + \frac{1}{2})\lambda, \quad \text{para todos } n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (\text{interferencia destructiva}). \quad (16.10)$$

De hecho, todos los puntos de interferencia constructiva caen en líneas que se muestran en color verde en la figura 16.13. Estas líneas son aproximadamente líneas rectas a distancias suficientes de las fuentes, aunque en realidad son hipérbolas. Las líneas de interferencia destructiva se muestran en color rojo en la figura 16.13. Estas líneas de interferencia constructiva y destructiva permanecen constantes en tiempo porque la diferencia de longitud de trayectoria permanece

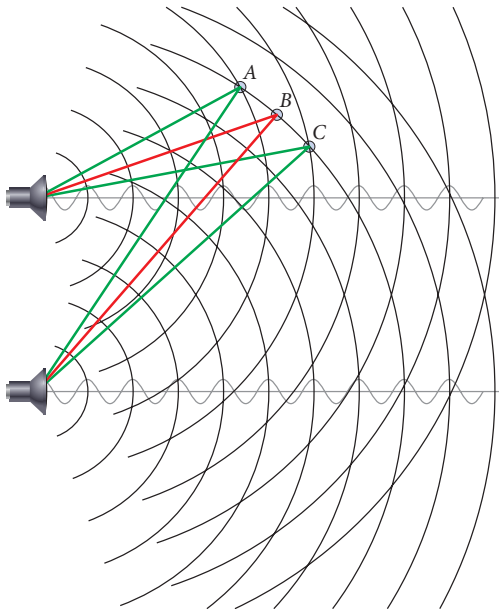


FIGURA 16.12 Interferencia de dos (juegos) conjuntos idénticos de ondas sonoras sinusoidales.

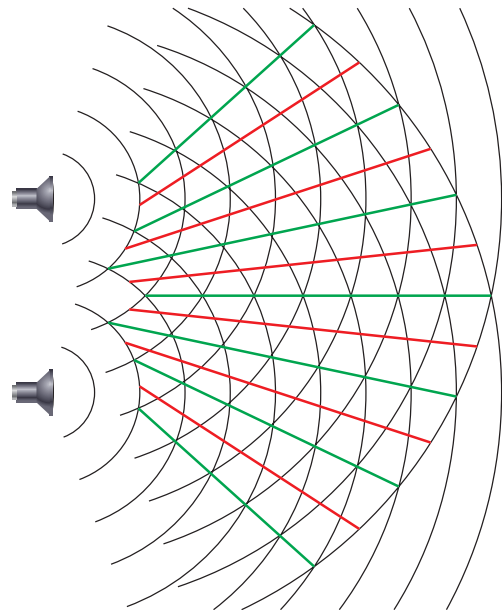


FIGURA 16.13 Interferencia de ondas sonoras sinusoidales idénticas de dos fuentes. Las líneas de interferencia constructivas aparecen en verde y las líneas de interferencia destructiva en rojo.

igual en cualquier punto fijado. Si sus oídos fueran posicionados en cualquiera de las líneas rojas, usted no escucharía nada del sonido emitido de ambos altavoces; las dos fuentes de sonido se anularían (suponiendo una situación ideal donde no hay reflexiones de sonido).

¿Por qué no detectamos estas zonas muertas debido a las líneas de interferencia destructiva en frente de nuestros altavoces estereofónicos cuando escuchamos música en casa? La respuesta es que estas líneas de interferencia dependen de la longitud de onda y por ende de la frecuencia. Sonidos de diferentes frecuencias se anulan y se suman en forma máxima a lo largo de diferentes líneas. Cualquier nota tocada por algún instrumento tiene una mezcla rica de distintas frecuencias; así que, aun cuando una frecuencia particular es anulada, todavía podemos oír todo o gran parte del resto. Por lo general no detectamos lo que falta. Además, todos los objetos en una habitación dispersan y reflejan el sonido emitido por (altavoces) bocinas estereofónicas hasta cierto grado, lo que hace la detección de una zona muerta aún más improbable. Sin embargo, para tonos puros sinusoidales, la existencia de zonas muertas la puede detectar fácilmente el oído.

Pulsaciones

También es posible tener interferencia de dos ondas en el tiempo. Para considerar este efecto, suponga que un observador esté ubicado en algún punto arbitrario x_0 en el espacio, y se emiten dos ondas sonoras con levemente distintas frecuencias y la misma amplitud:

$$y_1(x_0, t) = A \operatorname{sen}(\kappa_1 x_0 + \omega_1 t + \phi_1) = A \operatorname{sen}(\omega_1 t + \tilde{\phi}_1)$$

$$y_2(x_0, t) = A \operatorname{sen}(\kappa_2 x_0 + \omega_2 t + \phi_2) = A \operatorname{sen}(\omega_2 t + \tilde{\phi}_2).$$

Para obtener el lado derecho de cada ecuación utilizamos el hecho de que el producto del número de ondas y la posición es una constante para un punto dado en el espacio y luego simplemente sumamos esta constante al desfaseamiento, que en este caso es también una constante. Hemos escrito estas funciones de onda como ondas unidimensionales, pero el resultado es el mismo en tres dimensiones. Para el siguiente paso simplemente ponemos las dos constantes de fase $\tilde{\phi}_1$ y $\tilde{\phi}_2$, igual a cero porque sólo causan un desfaseamiento, pero no tienen ningún papel esencial adicional. Por lo tanto, las dos oscilaciones dependientes del tiempo que forman las ondas iniciales son

$$y_1(x_0, t) = A \operatorname{sen}(\omega_1 t)$$

$$y_2(x_0, t) = A \operatorname{sen}(\omega_2 t).$$

Si hacemos este experimento utilizando dos frecuencias angulares ω_1 y ω_2 , que se encuentran cerca una de la otra, podemos oír un sonido que oscila en volumen como función del tiempo. ¿Por qué ocurre esto?

A fin de contestar esta pregunta sumamos las dos ondas sinusoidales. Para sumar dos funciones sinusoidales usamos un teorema de suma para funciones trigonométricas:

$$\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta = 2 \cos\left[\frac{1}{2}(\alpha - \beta)\right] \operatorname{sen}\left[\frac{1}{2}(\alpha + \beta)\right].$$

De este modo obtenemos para las dos ondas sinusoidales

$$y(x_0, t) = y_1(x_0, t) + y_2(x_0, t)$$

$$= A \operatorname{sen}(\omega_1 t) + A \operatorname{sen}(\omega_2 t)$$

$$= 2A \cos\left[\frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)t\right] \operatorname{sen}\left[\frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)t\right].$$

Es más común escribir este resultado en términos de frecuencias en lugar de rapidez angular:

$$y(x_0, t) = 2A \cos\left[2\pi\frac{1}{2}(f_1 - f_2)t\right] \operatorname{sen}\left[2\pi\frac{1}{2}(f_1 + f_2)t\right]. \quad (16.11)$$

El término $\frac{1}{2}(f_1 + f_2)$ es simplemente el promedio de las dos frecuencias individuales:

$$\bar{f} = \frac{1}{2}(f_1 + f_2). \quad (16.12)$$

El factor $2A \cos(2\pi\frac{1}{2}(f_1 - f_2)t)$ en la ecuación 16.11 se puede tomar como una amplitud de variación lenta de una función de variación rápida $\operatorname{sen}(2\pi\frac{1}{2}(f_1 + f_2)t)$ cuando $|f_1 - f_2|$ es pequeño.

Cuando el término de coseno tiene un valor máximo o mínimo (+1 o -1), ocurre una **pulsación**: $f_1 - f_2$ es la frecuencia de pulsación:

$$f_b = |f_1 - f_2|. \quad (16.13)$$

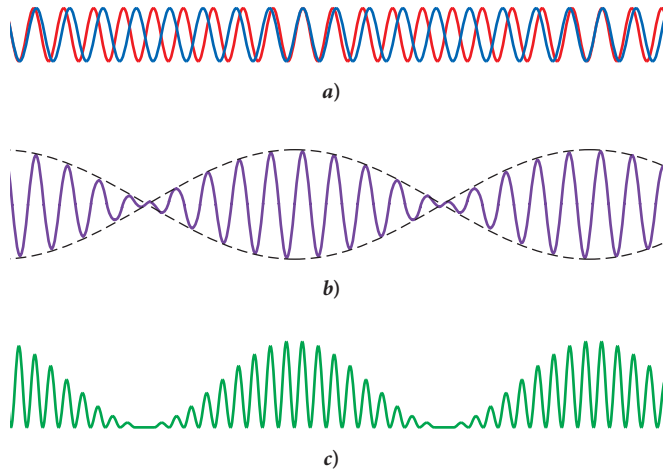


FIGURA 16.14 Pulsaciones de dos tonos sinusoidales. *a)* Las curvas sinusoidales azul y roja tienen frecuencias que difieren por 10%; *b)* suma de las dos curvas; *c)* cuadrado de la suma de las funciones.

Ahora surgen dos preguntas: primero, ¿qué pasó con el factor $\frac{1}{2}$ en la función de coseno de la ecuación 16.11?; y segundo, ¿por qué se define la frecuencia de la pulsación en términos de un valor absoluto? El uso del valor absoluto asegura que la frecuencia de pulsación sea positiva, independientemente de cuál de las dos frecuencias sea más grande. Para la función coseno, el uso del valor absoluto no tiene ninguna importancia, porque $\cos|\alpha| = \cos\alpha = \cos(-\alpha)$. Para la respuesta de por qué no hay un factor $\frac{1}{2}$, eche un vistazo a la figura 16.14: el inciso *a)* grafica dos tonos sinusoidales como función del tiempo; el inciso *b)* muestra la suma de las dos funciones, con la (cubierta) envolvente de línea interrumpida dada por $\pm 2A \cos(2\pi\frac{1}{2}(f_1 - f_2)t)$. Puede ver que la amplitud de la suma de las dos funciones llega a un máximo dos veces para una oscilación completa dada de la función coseno. Esto se hace quizá más aparente en la figura 16.14c), la gráfica del cuadrado de la función (ecuación 16.11), que es proporcional a la intensidad del sonido. Por lo tanto, la frecuencia de pulsación, la frecuencia en la que el volumen oscila hacia arriba y abajo, está correctamente definida como se muestra en la ecuación 16.13, omitiendo el factor $\frac{1}{2}$.

Por ejemplo, el golpe de dos barras de un xilófono, una que emite en la frecuencia correcta para la medio, 440 Hz, y otra que emite una frecuencia de 438 Hz, producirá dos oscilaciones de volumen discernibles por segundo. Esto se debe a que la frecuencia de pulsación es $f_b = |440 \text{ Hz} - 438 \text{ Hz}| = 2 \text{ Hz}$, y el periodo de oscilación del volumen es por lo tanto $T_b = 1/f_b = \frac{1}{2} \text{ s}$. Mediante este ejemplo se puede entender lo útil que las pulsaciones son al afinar un instrumento musical para distinguirlo de otro.

Cancelación activa de ruido

Todos sabemos que el ruido se puede amortiguar o atenuar y que algunos materiales lo hacen mejor que otros. Por ejemplo, si el ruido le molesta en la noche, usted podrá usar su almohada para cubrir sus oídos. Trabajadores de la construcción u otros trabajadores que tienen que pasar periodos largos en ambientes muy ruidosos usan auriculares de protección para los oídos. Estas protecciones de oídos reducen la amplitud de todos los sonidos.

Si usted desea reducir el ruido de fondo mientras está escuchando música, una técnica para lograr esto se basa en el principio de la **cancelación activa de ruido**, que depende de la interferencia de sonido. Una onda sonora sinusoidal externa llega a los auriculares y es grabada por un micrófono (figura 16.15). Un procesador invierte la fase de esta onda sonora y la emite con la misma frecuencia y amplitud, pero con fase opuesta. Las dos ondas sinusoidales se suman (principio de superposición), interfieren destructivamente y se anulan por completo. Al mismo tiempo (el altavoz) la bocina dentro de los auriculares emite la música que usted desea escuchar, y el resultado es una experiencia auditiva libre de ruidos de fondo.

En la práctica, el ruido de fondo nunca consiste en una onda sonora sinusoidal pura. En vez de esto, se mezclan muchos sonidos de diferentes frecuencias. En particular, la presencia de sonidos de alta frecuencia constituye un problema para la cancelación activa de ruidos. Sin embargo, este método funciona muy bien para sonidos periódicos de baja frecuencia, tales como el ruido de motores de aviones de pasajeros. Otra aplicación se encuentra en algunos automóviles de lujo, donde las técnicas de cancelación activa de ruidos reducen ruidos de viento y llantas.

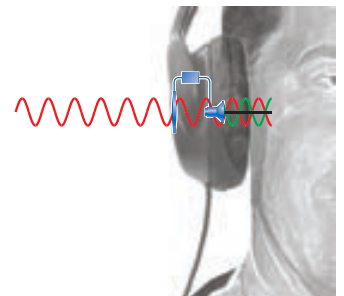


FIGURA 16.15 Cancelación activa de ruidos.

16.4 Efecto Doppler

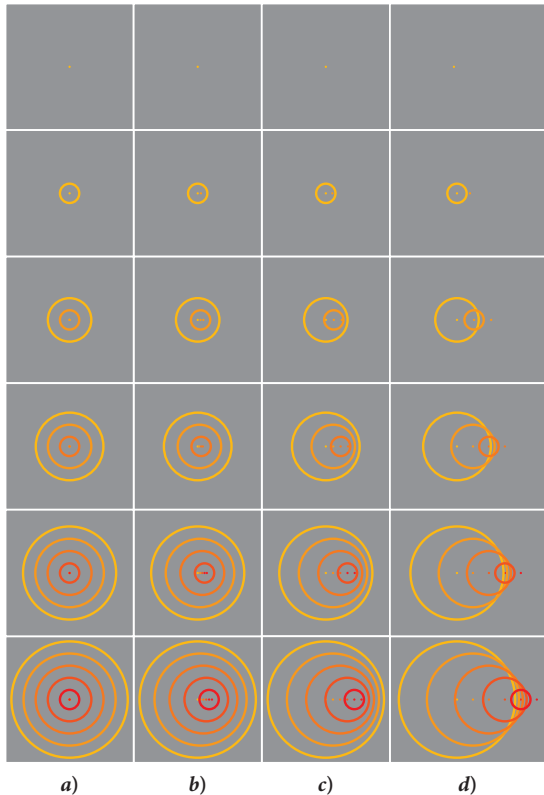


FIGURA 16.16 El efecto Doppler para ondas sonoras emitidas en seis puntos equidistantes en el tiempo: a) fuente estacionaria; b) fuente que se mueve hacia la derecha; c) fuente que se mueve más rápido hacia la derecha; d) fuente que se mueve hacia la derecha más rápidamente que la rapidez del sonido.

Todos hemos tenido la experiencia de un tren que se acerca a un cruce de ferrocarril. El tren suena su claxon de advertencia y luego, cuando pasa nuestra posición, el tono del sonido cambia de una frecuencia más alta a una más baja. Este cambio de frecuencia se llama **efecto Doppler**.

A fin de llegar a un entendimiento cualitativo del efecto Doppler, considere la figura 16.16. En el inciso a), la columna de la extrema izquierda, una fuente estacionaria de sonido emite ondas esféricas que se propagan hacia afuera. La evolución en el tiempo de estas ondas radiales se ilustra en seis puntos de distancias iguales en el tiempo, desde arriba hacia abajo. Los máximos de las cinco ondas sinusoidales radian hacia fuera como círculos, representados por colores en cada cuadro de amarillo a rojo.

Cuando se mueve la fuente, las mismas ondas sonoras son emitidas desde diferentes puntos en el espacio. Sin embargo, desde cada uno de estos puntos, los máximos nuevamente se van hacia fuera como círculos, como se muestra en los incisos b) y c) de la figura 16.16. La única diferencia entre estas dos columnas es la rapidez con la que se mueve la fuente de las ondas sonoras desde la izquierda hacia la derecha. En cada caso podemos ver una “compresión” (amontonamiento) de las ondas sonoras frente al emisor, en este contexto en su lado derecho. La compresión es mayor con una velocidad de fuente más alta y es la clave completa para entender el efecto Doppler. Un observador ubicado a la derecha de la fuente —es decir, con la fuente moviéndose hacia él— experimenta más frentes de ondas por unidad de tiempo y por ende oye una frecuencia más alta. Un observador ubicado a la izquierda de la fuente en movimiento, con la fuente alejándose de él experimenta menos frentes de ondas por unidad de tiempo y, por ende, oye una frecuencia reducida.

Cuantitativamente, la frecuencia observada, f_o , está dada por

$$f_o = f \left(\frac{v_{\text{sonido}}}{v_{\text{sonido}} \pm v_{\text{fuente}}} \right), \quad (16.14)$$

donde f es la frecuencia del sonido emitido por la fuente, y v_{sonido} y v_{fuente} son las rapidezces del sonido y de la fuente, respectivamente. El signo superior (+) se aplica cuando la fuente se aleja del observador, y el signo inferior (–) aplica cuando la fuente se acerca a él.

El efecto Doppler también ocurre si la fuente es estacionaria y el observador se mueve. En este caso, la frecuencia observada está dada por

$$f_o = f \left(\frac{v_{\text{sonido}} \mp v_{\text{observador}}}{v_{\text{sonido}}} \right) = f \left(1 \mp \frac{v_{\text{observador}}}{v_{\text{sonido}}} \right). \quad (16.15)$$

El signo superior (–) se aplica cuando el observador se aleja de la fuente, y el signo inferior (+) se aplica cuando el observador se acerca a la fuente.

En cada caso, el de la fuente en movimiento o el del observador en movimiento, la frecuencia observada es más baja que la frecuencia de la fuente cuando observador y fuente se están alejando entre sí, y es más alta que la frecuencia de fuente cuando se acercan entre sí.

DEDUCCIÓN 16.2

Desplazamiento Doppler

Vamos a empezar con un observador en reposo y una fuente de sonido que se mueve hacia el observador. Si la fuente de sonido está en reposo y emite un sonido con la frecuencia f , entonces la longitud de onda es $\lambda = v_{\text{sonido}}/f$, lo que también es la distancia entre dos sucesivas crestas de onda. Si la fuente de sonido se mueve hacia el observador con la rapidez v_{fuente} , entonces la distancia entre dos crestas sucesivas como son percibidas por el observador se reduce a

$$\lambda_o = \frac{v_{\text{sonido}} - v_{\text{fuente}}}{f}.$$

Utilizando la relación entre longitud de onda, frecuencia y rapidez (fija) del sonido $v_{\text{sonido}} = \lambda f$, encontramos la frecuencia del sonido detectada por el observador:

$$f_o = \frac{v_{\text{sonido}}}{\lambda_o} = f \left(\frac{v_{\text{sonido}}}{v_{\text{sonido}} - v_{\text{fuente}}} \right).$$

Este resultado comprueba la ecuación 16.14 con el signo de menos en el denominador. El signo de más es obtenido al invertir el signo del vector velocidad de la fuente.

Usted deberá intentar, como ejercicio, la derivación para el caso en el que el observador está en movimiento.

16.3 Ejercicio en clase

Considere el caso de un observador estacionario y una fuente moviéndose con rapidez constante (menos que la rapidez del sonido) y emitiendo un sonido con la frecuencia f . Si la fuente se mueve hacia el observador, la ecuación 16.14 pronostica una frecuencia observada mayor, f_+ . Si la fuente se aleja del observador, da por resultado una frecuencia observada más baja, f_- . Vamos a llamar la diferencia entre la frecuencia más alta y la frecuencia original Δ_+ y la diferencia entre la frecuencia original y la frecuencia más baja Δ_- : $\Delta_+ = f_+ - f$ y $\Delta_- = f - f_-$. ¿Cuál de las declaraciones sobre las diferencias de frecuencia es la correcta?

- a) $\Delta_+ > \Delta_-$ c) $\Delta_+ < \Delta_-$ e) Depende de la rapidez de la fuente, v .
- b) $\Delta_+ = \Delta_-$ d) Depende de la frecuencia original, f .

16.4 Ejercicio en clase

Ahora considere el caso de una fuente estacionaria emitiendo un sonido de la frecuencia f y un observador moviéndose con rapidez constante (menos que la rapidez del sonido). Si el observador se mueve hacia la fuente, la ecuación 16.15 pronostica una mayor frecuencia observada, f_+ . Si el observador se aleja de la fuente, resulta una frecuencia observada más baja, f_- . Vamos a llamar la diferencia entre la frecuencia más alta y la frecuencia original Δ_+ y la diferencia entre la frecuencia original y la frecuencia más baja Δ_- : $\Delta_+ = f_+ - f$ y $\Delta_- = f - f_-$. ¿Cuál de las declaraciones sobre las diferencias de frecuencia es la correcta?

- a) $\Delta_+ > \Delta_-$ c) $\Delta_+ < \Delta_-$ e) Depende de la velocidad de la fuente, v .
- b) $\Delta_+ = \Delta_-$ d) Depende de la frecuencia original, f .

Finalmente, ¿qué pasa si tanto la fuente como el observador se mueven? La respuesta es que las expresiones para el efecto Doppler para la fuente en movimiento y el observador en movimiento simplemente se combinan, y la frecuencia observada se da por

$$f_o = f \left(\frac{v_{\text{sonido}} \mp v_{\text{observador}}}{v_{\text{sonido}}} \right) \left(\frac{v_{\text{sonido}}}{v_{\text{sonido}} \pm v_{\text{fuente}}} \right) = f \left(\frac{v_{\text{sonido}} \mp v_{\text{observador}}}{v_{\text{sonido}} \pm v_{\text{fuente}}} \right). \quad (16.16)$$

Aquí los signos superiores en el numerador y el denominador se aplican cuando el observador o la fuente se alejan uno del otro, y los signos inferiores se aplican cuando observador y fuente se mueven uno hacia el otro.

16.6 Ejercicio en clase

Suponga que una fuente que emite un sonido con la frecuencia f se mueva hacia la derecha (en la dirección x positiva) con una rapidez de 30 m/s. Un observador se ubica a la derecha de la fuente y también se mueve hacia la derecha (en el sentido x positivo) con una rapidez de 50 m/s. ¿Cuál de las siguientes es la expresión correcta para la frecuencia observada, f_o ?

- a) $f_o = f \left(\frac{v_{\text{sonido}} - 50 \text{ m/s}}{v_{\text{sonido}} - 30 \text{ m/s}} \right)$ c) $f_o = f \left(\frac{v_{\text{sonido}} + 50 \text{ m/s}}{v_{\text{sonido}} - 30 \text{ m/s}} \right)$
- b) $f_o = f \left(\frac{v_{\text{sonido}} - 50 \text{ m/s}}{v_{\text{sonido}} + 30 \text{ m/s}} \right)$ d) $f_o = f \left(\frac{v_{\text{sonido}} + 50 \text{ m/s}}{v_{\text{sonido}} + 30 \text{ m/s}} \right)$

16.5 Ejercicio en clase

Suponga una fuente que emite un sonido con la frecuencia f moviéndose hacia la derecha (en la dirección x positiva) con una rapidez de 30 m/s. Un observador se ubica a la derecha de la fuente y también se mueve hacia la derecha (en el sentido x positivo) con una rapidez de 50 m/s. La frecuencia observada f_o , será _____ la de la frecuencia original, f .

- a) más baja que c) más alta que
b) igual que

El efecto Doppler en el espacio bidimensional y tridimensional

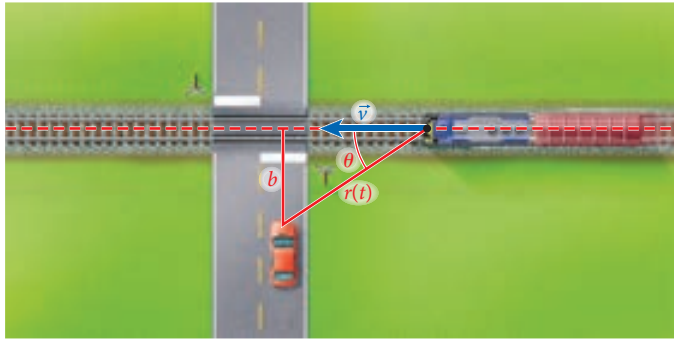


FIGURA 16.17 Efecto Doppler en un espacio bidimensional: un auto en un cruce de ferrocarril.

Hasta ahora, nuestra discusión del efecto Doppler ha supuesto que la fuente (o el observador) se mueve con rapidez constante en una línea recta que pasa directamente a través de la ubicación del observador (o de la fuente). Sin embargo, si usted está esperando en un cruce de ferrocarril, por ejemplo, un tren no pasa directamente a través de su ubicación, sino que tiene una distancia perpendicular (del acercamiento) a la posición más cercana b , como se ve en la figura 16.17. En esta situación, lo que usted oye no es un cambio instantáneo de la frecuencia más alta del tren en acercamiento a la frecuencia más baja del tren que (retrocede) se aleja, lo que la ecuación 16.14 implica, sino en su lugar usted escucha un cambio gradual y fluido de la frecuencia más alta a la más baja.

Para obtener una expresión cuantitativa del efecto Doppler para este caso, vamos a suponer que $t = 0$ sea el instante cuando el tren está más cerca del auto; es decir, cuando cruza la carretera. Para $t < 0$, el tren se mueve entonces hacia el observador, y para $t > 0$, se aleja del observador. El origen del sistema coordenado espacial se elige como la ubicación del observador, o sea el conductor del auto. Entonces la distancia del tren al origen está dada por $r(t) = \sqrt{b^2 + v^2 t^2}$, donde v es la rapidez (constante) del tren (vea la figura 16.17). El ángulo θ entre el vector de rapidez del tren y la dirección de la que se emite el sonido en relación con el auto está dado por

$$\cos\theta(t) = \frac{vt}{r(t)} = \frac{vt}{\sqrt{b^2 + v^2 t^2}}.$$

La velocidad de la fuente del sonido como se observa en el auto, como función del tiempo, es la proyección del vector de rapidez del tren a la dirección radial:

$$v_{\text{fuente}}(t) = v \cos\theta(t) = \frac{v^2 t}{\sqrt{b^2 + v^2 t^2}}.$$

Ahora podemos sustituir para v_{fuente} en la ecuación 16.14 y obtenemos

$$f_o(t) = f \frac{v_{\text{sonido}}}{v_{\text{sonido}} + v_{\text{fuente}}(t)} = f \frac{v_{\text{sonido}}}{v_{\text{sonido}} + \frac{v^2 t}{\sqrt{b^2 + v^2 t^2}}}. \quad (16.17)$$

16.2 Oportunidad de autoexamen

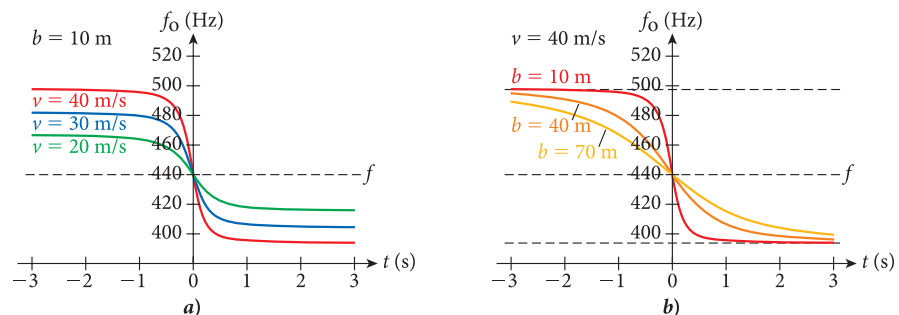
Demuestre que la derivada en el tiempo de la función que determina la frecuencia observada (ecuación 16.17) en $t = 0$ está dada por

$$\left. \frac{df_o}{dt} \right|_{t=0} = -\frac{fv^2}{bv_{\text{sonido}}}.$$

En la ecuación 16.17, la velocidad de la fuente es negativa para $t < 0$, correspondiente a una fuente en acercamiento, mientras que la velocidad de la fuente es positiva para $t > 0$, correspondiente a una fuente en alejamiento.

La fórmula de la ecuación 16.17 podrá parecer complicada, pero en realidad es una función de variación suave, como se muestra en la figura 16.18. Suponga que el tren en movimiento emite un sonido de frecuencia $f = 440$ Hz y que la rapidez del sonido sea de 343 m/s. La figura 16.18a) muestra tres gráficas de la frecuencia observada por un observador estacionario en un auto a 10 m del cruce de ferrocarril cuando pasa un tren que se mueve a 20, 30 y 40 m/s. La figura 16.18b) muestra gráficas de las frecuencias observadas por tres observadores estacionarios en autos estacionados en distancias de 10, 40 y 70 m del cruce de ferrocarril cuando el tren pasa con una rapidez de 40 m/s.

FIGURA 16.18 Dependencia con el tiempo de la frecuencia observada por un observador estacionario: a) rapidez de fuente de 20 m/s, 30 m/s y 40 m/s, y distancia (del acercamiento) de la posición más cercana de 10 m; b) rapidez de fuente de 40 m/s y distancias (del acercamiento) de la posición más cercana de 10 m, 40 m y 70 m.



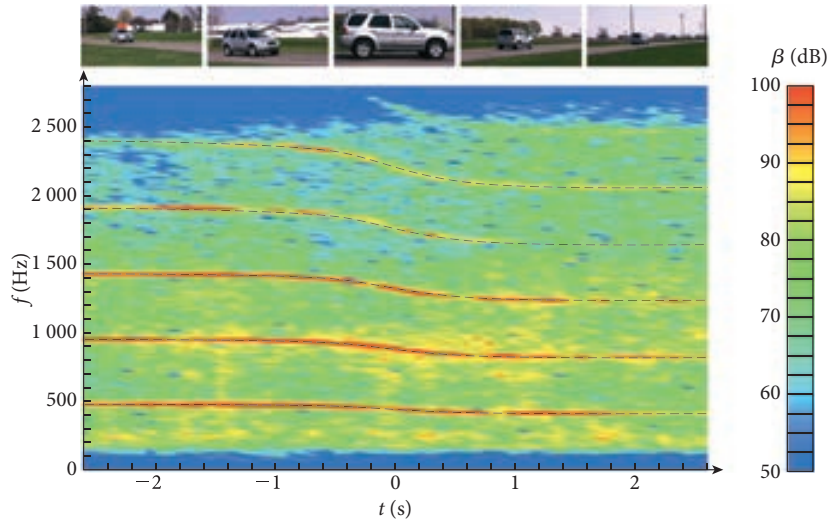


FIGURA 16.19 Demostración del efecto Doppler.

Estas tres curvas convergen hacia las frecuencias asintóticas de $f = 498$ Hz para el tren que se acerca y $f = 394$ Hz para el tren que se aleja, que son los valores pronosticados por la ecuación 16.14. Sin embargo, entre más cerca se encuentra el observador del cruce del ferrocarril, más repentina se volverá la transición de la frecuencia de la más alta a la más baja.

Es bastante fácil montar una demostración del efecto Doppler. Simplemente maneje con rapidez constante a lo largo de una carretera tocando su claxon, mientras que un amigo filma un video de usted. Luego puede analizar el video por medio de un analizador de frecuencia para ver cómo las frecuencias del claxon del auto cambian cuando usted pasa frente a la cámara. En la figura 16.19, el auto pasó a lo largo de una carretera con una rapidez de 26.5 m/s y pasó frente a la cámara (una distancia) en la posición más cercana a 14.0 m. Las seis frecuencias dominantes del claxon del auto, dadas por $f = n(441 \text{ Hz})$, $n = 1, 2, \dots, 6$, son claramente visibles en esta figura como las bandas angostas rojas que representan valores de decibeles altos, y usted puede ver el cambio de frecuencia conforme pasa el auto. Las líneas interrumpidas (superimpuestas) sobrepuestas de color gris son los resultados del cálculo usando la ecuación 16.17 con una distancia (del acercamiento) de la posición más cercana $b = 14.0$ m y una rapidez de fuente $v_{\text{fuente}} = 26.5$ m/s. Usted puede ver que están en completo acuerdo con las mediciones experimentales.

Aplicaciones del efecto Doppler

En la sección 16.1 examinamos la aplicación de ondas de ultrasonido para imágenes de tejido humano. El efecto Doppler para ondas de ultrasonido se puede usar para medir la rapidez de la sangre que fluye en una arteria, lo cual puede ser un instrumento de diagnóstico importante para enfermedades cardíacas. Un ejemplo de la medición del flujo de sangre en la arteria carótida se muestra en la figura 16.20. Este tipo de medición se realiza mediante la transmisión de ondas de ultrasonido hacia el flujo de sangre. Las ondas de ultrasonido se reflejan en las células de la sangre en movimiento de regreso al dispositivo de ultrasonido donde son detectadas.

16.3 Oportunidad de autoexamen

Derive una fórmula similar a la ecuación 16.17 para un observador que se mueve en una línea recta y pasa una fuente estacionaria (a una distancia) en la posición más cercana que no sea cero.

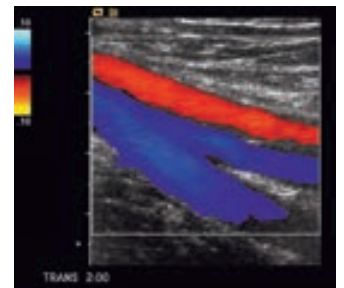


FIGURA 16.20 Imagen Doppler de ultrasonido de sangre que fluye en la arteria carótida. Los colores rojo y azul indican la rapidez del flujo de la sangre.

EJEMPLO 16.3

Medición del flujo de sangre mediante el ultrasonido Doppler

PROBLEMA

¿Cuál es el típico cambio de frecuencia para ondas de ultrasonido que se reflejan en la sangre que fluye en una arteria?

SOLUCIÓN

Las ondas de ultrasonido tienen una frecuencia típica de $f = 2.0$ MHz. En una arteria, la sangre fluye con una rapidez de $v_{\text{sangre}} = 1.0$ m/s. La rapidez de las ondas de ultrasonido en el tejido humano es $v_{\text{sonido}} = 1540$ m/s.

(continúa)

(continuación)

Las células de la sangre se pueden concebir como observadores en movimiento para las ondas de ultrasonido. De este modo, si una célula de sangre se está moviendo hacia la fuente del ultrasonido, la frecuencia observada por la célula de la sangre f_1 está dada por la ecuación 16.15 con un signo de más

$$f_1 = f \left(1 + \frac{v_{\text{sangre}}}{v_{\text{sonido}}} \right). \quad (\text{i})$$

Las ondas de ultrasonido reflejadas con la frecuencia f_1 constituyen una fuente en movimiento. El dispositivo estacionario de ultrasonido Doppler observará entonces las ondas de ultrasonido Doppler con una frecuencia f_2 dada por la ecuación 16.14 con un signo de menos

$$f_2 = f_1 \left(\frac{v_{\text{sonido}}}{v_{\text{sonido}} - v_{\text{sangre}}} \right). \quad (\text{ii})$$

Por tal motivo, la frecuencia observada por el dispositivo de ultrasonido Doppler se obtiene por la combinación de las ecuaciones (i) y (ii)

$$f_2 = f \left(1 + \frac{v_{\text{sangre}}}{v_{\text{sonido}}} \right) \left(\frac{v_{\text{sonido}}}{v_{\text{sonido}} - v_{\text{sangre}}} \right).$$

Observe que esta ecuación es simplemente un caso especial de la ecuación 16.16, la expresión para el efecto Doppler con una fuente en movimiento y un observador en movimiento, aquí la rapidez del observador y la de la fuente son las de la célula de la sangre. Si (insertamos) sustituimos los (números) valores, obtenemos

$$f_2 = (2.0 \text{ MHz}) \left(1 + \frac{1.0 \text{ m/s}}{1540 \text{ m/s}} \right) \left(\frac{1540 \text{ m/s}}{1540 \text{ m/s} - 1.0 \text{ m/s}} \right) = 2.0026 \text{ MHz}.$$

La diferencia de frecuencia Δf , es entonces

$$\Delta f = f_2 - f = 2.6 \text{ kHz}.$$

Este cambio de frecuencia es el máximo observado cuando la sangre está fluyendo como resultado de un pulso del corazón. Entre pulsos del corazón la sangre desacelera y casi para. La combinación de las ondas originales de ultrasonido con la frecuencia f y las ondas de ultrasonido reflejadas con la frecuencia f_2 nos da una frecuencia de pulsación $f_{\text{pulsación}} = f_2 - f$, que varía desde 2.6 kHz a cero conforme pulsa el corazón. Estas frecuencias pueden ser percibidas por el oído humano, lo que significa que la frecuencia de pulsación simplemente se puede amplificar y escuchar como un monitor de pulsos. Este efecto Doppler de ultrasonido es la base de las exploraciones de corazón en fetos.

Observe que en este ejemplo se supone que la sangre está fluyendo directamente hacia el dispositivo de ultrasonido Doppler. En general existe un ángulo entre la dirección de las ondas de ultrasonido transmitidas y la dirección del flujo de la sangre, que reduce el cambio de frecuencia. Los dispositivos de ultrasonido Doppler toman este ángulo en cuenta, usando informaciones sobre la orientación de la arteria.

El radar Doppler que escucha mencionar en reportes de clima en la televisión usa el efecto Doppler para ondas electromagnéticas. Gotas de lluvia en movimiento cambian las ondas de radar reflejadas a diferentes frecuencias y, por lo tanto, son detectadas por el radar Doppler. (Sin embargo, el cambio Doppler para ondas electromagnéticas como el radar lo rige una fórmula diferente de la que se usa para el sonido.) El radar Doppler también se usa para detectar la rotación (y posibles tornados) en una tormenta eléctrica, buscando regiones con movimientos tanto acercándose como alejándose del observador. Otro uso común del efecto Doppler son los detectores de rapidez por radar que emplean las fuerzas policíacas en todo el mundo. Y técnicas similares son utilizadas por astrónomos para medir (cambios) el corrimiento al rojo de galaxias.

El cono de Mach

Aún nos queda examinar la figura 16.16d). En esta columna, la rapidez de la fuente excede la rapidez del sonido. Como puede ver, en este caso el origen de una cresta de onda subsiguiente se encuentra fuera del círculo formado por la cresta de onda previa.

La figura 16.21a) muestra las crestas de ondas sucesivas emitidas por una fuente cuya rapidez es mayor que la rapidez del sonido, llamada **fente supersónica**. Usted puede ver que todos estos círculos tienen una tangente común que hace un ángulo θ_M , llamado **ángulo de Mach**, con la dirección del vector velocidad (en este caso, la horizontal). Esta acumulación de frentes de ondas produce una onda grande, abrupta y de forma cónica llamada **onda expansiva** o **cono de Mach**. El ángulo de Mach del cono está dado por

$$\theta_M = \text{sen}^{-1} \left(\frac{v_{\text{sonido}}}{v_{\text{fuente}}} \right). \quad (16.18)$$

Esta fórmula es válida solamente para rapidezces de fuente que exceden la rapidez del sonido, y en el límite donde la rapidez de la fuente es igual a la rapidez del sonido, θ_M se acerca a los 90° . Entre más grande sea la rapidez de la fuente, más pequeño será el ángulo de Mach.

DEDUCCIÓN 16.3

Ángulo de Mach

La derivación de la ecuación 16.18 es bastante sencilla si examinamos la figura 16.21b), que muestra el círculo de la cresta de onda que fue formada en algún tiempo inicial $t = 0$, pero que ahora, algún tiempo después, es Δt . El radio de este círculo en el momento Δt es $v_{\text{sonido}} \Delta t$ y está indicado por la línea recta azul. Observe que el radio hace un ángulo de 90° con la línea de la tangente, indicado en negro. Sin embargo, durante el mismo tiempo, Δt , la fuente se ha movido una distancia $v_{\text{fuente}} \Delta t$, que está indicada por la línea roja en la figura. Las líneas de color rojo, azul y negro en la figura forman un triángulo rectángulo. Luego, por definición de la función sinusoidal, el seno del ángulo de Mach, θ_M , es

$$\text{sen } \theta_M = \frac{v_{\text{sonido}} \Delta t}{v_{\text{fuente}} \Delta t}.$$

Al anular el factor común Δt y tomando el seno inverso en ambos lados de esta ecuación nos da la ecuación 16.18, como se quería.

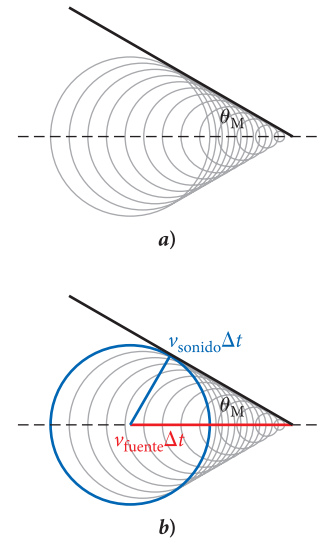


FIGURA 16.21 a) El cono de Mach u onda expansiva. b) Geometría para la deducción 16.3.

Es interesante que las ondas expansivas puedan ser detectadas en todo tipo de sistemas físicos involucrados en todo tipo de ondas. Por ejemplo, olas superficiales en aguas de poca profundidad tienen rapidezces de onda relativamente bajas, como hemos discutido en el capítulo 15. Por lo tanto, lanchas motoras pueden crear olas expansivas con relativa facilidad, moviéndose a través de la superficie del agua con alta rapidez. A partir de estas olas frontales usted puede determinar la rapidez de las olas superficiales en un lago, si conoce la rapidez de la lancha.

La rapidez del sonido en núcleos atómicos es aproximadamente un tercio de la rapidez de la luz. Puesto que aceleradores de partículas pueden colisionar núcleos con rapidezces muy cercanas a la rapidez de la luz, ondas expansivas se deberán crear incluso en este ambiente. Algunas simulaciones por computadora han demostrado que este efecto está presente en colisiones de núcleos atómicos con energías muy altas, pero la evidencia experimental definitiva ha sido muy difícil de obtener. Varios laboratorios de física nuclear alrededor del mundo están activamente investigando este fenómeno.

Finalmente parecería improbable que ondas expansivas que involucran a la luz puedan ser observadas, ya que la rapidez de la luz en el vacío es la máxima rapidez posible en la naturaleza y, por lo tanto, la rapidez de la fuente no puede exceder la rapidez de la luz en el vacío. Cuando el físico ruso Pavel Cherenkov (también a veces se escribe Čerenkov) propuso en la década de 1960 que este efecto ocurrió, fue desmentido como algo improbable o imposible. Sin embargo, la llamada **radiación Cherenkov** (figura 16.22) se puede emitir cuando una fuente tal como un protón de alta energía moviéndose con una rapidez cerca de la rapidez de la luz entra en un medio, como el agua, donde la rapidez de la luz es significativamente más baja. Luego la fuente se mueve más rápido que la rapidez de la luz en este medio, y se puede formar un cono de Mach. Detectores de partículas modernos hacen uso de esta radiación Cherenkov; la medición del ángulo de emisión permite el cálculo de la rapidez de la partícula que emitió la radiación.

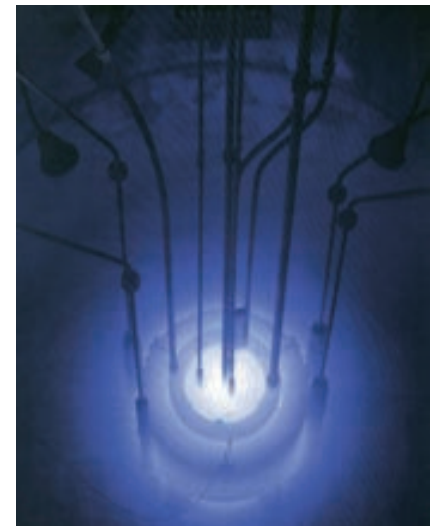


FIGURA 16.22 Radiación Cherenkov (resplandor azulado) desde el núcleo de un reactor nuclear.



FIGURA 16.23 Despegue del jet comercial supersónico Concorde. El servicio comercial regular del Concorde empezó en 1976 y terminó en 2003.

16.7 Ejercicio en clase

¿Cuál es la máxima rapidez de navegación del Concorde a 60 000 pies de altura?

- a) 665 mph d) 2 130 mph
 b) 834 mph e) 3 450 mph
 c) 1 350 mph

EJEMPLO 16.4 El Concorde

La rapidez de un avión supersónico frecuentemente se indica como un número Mach, M . Una rapidez Mach 1 ($M = 1$) significa que el avión esté viajando con la rapidez del sonido. Una rapidez Mach 2 ($M = 2$) significa que el avión esté viajando al doble de la rapidez del sonido. El jet supersónico Concorde (figura 16.23) navegaba a 60 000 pies, donde la rapidez del sonido es de 295 m/s (661 mph). La máxima rapidez de navegación del Concorde fue de Mach 2.04 ($M = 2.04$).

PROBLEMA

A esta rapidez, ¿cuál era el ángulo del cono de Mach producido por el Concorde?

SOLUCIÓN

El ángulo del cono de Mach está dado por la ecuación 16.18:

$$\theta_M = \text{sen}^{-1} \left(\frac{v_{\text{sonido}}}{v_{\text{fuente}}} \right).$$

La rapidez de la fuente en este caso es la del Concorde que está viajando con una rapidez de

$$v_{\text{fuente}} = Mv_{\text{sonido}} = 2.04v_{\text{sonido}}.$$

De este modo, podemos escribir el ángulo de Mach como

$$\theta_M = \text{sen}^{-1} \left(\frac{v_{\text{sonido}}}{Mv_{\text{sonido}}} \right) = \text{sen}^{-1} \left(\frac{1}{M} \right).$$

Para el Concorde tenemos entonces

$$\theta_M = \text{sen}^{-1} \left(\frac{1}{2.04} \right) = 0.512 \text{ rad} = 29.4^\circ.$$

16.5 Resonancia y música

Básicamente todos los instrumentos musicales cuentan con la excitación de resonancias para generar ondas sonoras de frecuencias discretas, reproducibles y predeterminadas. Ninguna discusión del sonido posiblemente podría ser completa sin una discusión de los tonos musicales.

Tonos

¿Qué frecuencias corresponden a qué tonos musicales? La respuesta a esta pregunta no es sencilla y ha cambiado con el paso del tiempo. La actual escala tonal se remonta a 1722, el año de publicación de la obra de Johann Sebastian Bach, *Das wohltemperierte Klavier* (*El teclado bien temperado*). Vamos a revisar estos valores aceptados.

Los tonos asociados con las teclas blancas del piano se llaman la, si, do, re, mi, fa y sol. El do más cercano al extremo izquierdo del teclado se denomina do1. La nota debajo de él, curiosamente, es si0. De esta manera la secuencia de tonos para las teclas blancas, de izquierda a derecha, en un piano es la0, si0, do1, re1, mi1, fa1, sol1, la1, si1, do2, re2, ... la7, si7, do8. La escala está sustentada con el la medio (la4) con precisamente 440 Hz. El la siguiente más alto (la5) es una octava más alto, lo que significa que tiene exactamente dos veces la frecuencia, u 880 Hz.

Entre estos las se encuentran 11 semitonos: la sostenido/si bemol, si, do, do sostenido/re bemol, re, re sostenido/mi bemol, mi, fa, fa sostenido/sol bemol, sol y sol sostenido/la bemol. Ya desde la obra de J. S. Bach, estos 11 semitonos dividen la octava en exactamente 12 intervalos iguales, los cuales difieren todos por el mismo factor que da el número 2 cuando se multiplica por sí mismo 12 veces. Este factor es: $2^{1/12} = 1.0595$. Las frecuencias de todos los tonos se pueden encontrar por medio de la multiplicación sucesiva por este factor. Por ejemplo, re (re 5) es 5 pasos arriba de la medio: $(1.0595^5)(440 \text{ Hz}) = 587.4 \text{ Hz}$. Frecuencias de notas en otras octavas se encuentran mediante la multiplicación o división por un factor de 2. Por ejemplo, el re más alto (re6) tiene una frecuencia de $2(587.4 \text{ Hz}) = 1 174.9 \text{ Hz}$.

Tabla 16.3 Rangos (rangos) de frecuencia para clasificaciones de cantantes humanos

Clasificación	Nota más baja	Nota más alta
Bajo	Mi2 (82 Hz)	Sol4 (392 Hz)
Barítono	La2 (110 Hz)	La4 (440 Hz)
Tenor	Re3 (147 Hz)	Si4 (494 Hz)
Contralto	Sol3 (196 Hz)	Fa5 (698 Hz)
Soprano	Do4 (262 Hz)	Do6 (1 046 Hz)

Las voces humanas se clasifican con base en los rangos medios que se muestran en la tabla 16.3. Por lo tanto, básicamente todas las canciones cantadas por seres humanos demuestran un rango de frecuencias de un orden de magnitud, entre 100 y 1 000 Hz. Ninguna voz humana y prácticamente ningún instrumento musical genera un tono puro de frecuencia sencilla. Para los instrumentos de cuerda, el cuerpo hueco de madera del instrumento, que sirve para amplificar el sonido de las cuerdas, influye en este componente.

Los teléfonos de *touch-tone* (llamada por tono) que han reemplazado casi por completo a los teléfonos de disco en Estados Unidos, cuentan con sonidos de frecuencias preasignadas. Para cada tecla que se presiona en el teléfono, se generan dos tonos relativamente puros. La figura 16.24 muestra la disposición de estos tonos. Cada tecla en una hilera dada activa el tono que se encuentra a su derecha, y cada tecla en una columna activa el tono que se encuentra debajo de ella. Si se presiona la tecla 2, por ejemplo, se producen las frecuencias de 697 Hz y de 1 336 Hz.

**FIGURA 16.24** Las frecuencias generadas por las teclas de un teléfono de *touch-tone*.

Tubos semiabiertos y abiertos

Hemos hablado de ondas estacionarias en cuerdas en el capítulo 15. Estas ondas forman la base para los sonidos producidos por todos los instrumentos de cuerda. Es importante recordar que ondas estacionarias se pueden excitar en cuerdas sólo con frecuencias de resonancia discretas. La mayoría de los instrumentos de percusión, como los tambores, también funcionan con el principio de excitar resonancias discretas. Sin embargo, las formas de ondas producidas por estos instrumentos son normalmente bidimensionales y son mucho más complicadas que las que se producen en cuerdas.

Los instrumentos de viento utilizan tubos semiabiertos o abiertos para generar sonidos. Un tubo *semiabierto* es un tubo que está abierto sólo en un extremo y cerrado en el otro (por ejemplo, un clarinete o una trompeta); un tubo abierto tiene aberturas en ambos extremos (por ejemplo, una flauta). Usted sabe que puede generar un sonido soplando aire a través de la boquilla de una botella, como se muestra en la figura 16.25. Quizá recuerda que el tono del sonido es más alto si la botella está más llena. También, una botella vacía de un litro produce un sonido más bajo que una botella vacía de medio litro, como la que se usa en la figura 16.25. Una botella sólo es una aproximación (debido a su forma no cilíndrica) de un tubo semiabierto. Las moléculas de aire en el fondo de este tipo de tubo están en contacto con la pared y por lo tanto no vibran. Por ende, el extremo cerrado del tubo establece un nodo en la onda sonora. El otro extremo del tubo está abierto, y las moléculas de aire pueden vibrar libremente. Soplar aire a través del extremo del tubo crea una onda sonora resonante que tiene un antinodo en el extremo abierto del tubo y un nodo en el extremo cerrado.

La figura 16.26a) muestra algunas de las ondas estacionarias posibles en un tubo semiabierto. En el tubo superior está la onda estacionaria con la longitud de onda más larga, para el cual el primer antinodo coincide con la longitud del tubo. Puesto que la distancia entre un nodo y el primer antinodo es una cuarta parte de la longitud de onda, esta condición de resonancia corresponde a $L = \frac{1}{4}\lambda$, donde L es la longitud del tubo. Los tubos medianos e inferiores en la figura 16.26a) tienen ondas estacionarias con longitudes de onda posibles más pequeñas, para lo cual el segundo o tercer antinodo cae en (aberturas) el extremo abierto de los tubos, $L = \frac{3}{4}\lambda$ y $L = \frac{5}{4}\lambda$, respectivamente. En general, la condición para una onda estacionaria resonante en un tubo semiabierto es por lo tanto

$$L = \frac{2n-1}{4}\lambda, \text{ para } n=1,2,3,\dots$$

**FIGURA 16.25** Excitación de un sonido resonante de una aproximación de un tubo semiabierto.

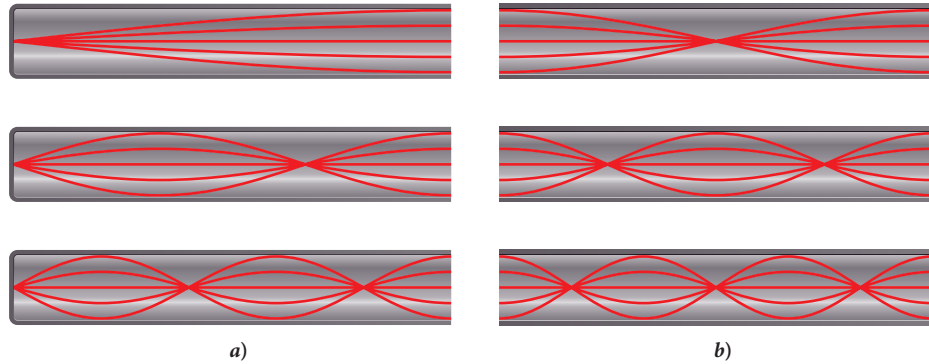


FIGURA 16.26 a) Ondas estacionarias en un tubo semiabierto; b) ondas estacionarias en un tubo abierto. Las líneas rojas representan la amplitud de sonido en varios momentos.

Al resolver esta ecuación para las posibles longitudes de onda resulta en

$$\lambda_n = \frac{4L}{2n-1}, \text{ para } n=1,2,3,\dots \quad (16.19)$$

16.4 Oportunidad de autoexamen

Estime la frecuencia fundamental del sonido resonante inducido por soplar en el extremo abierto de una botella de medio litro, como se ilustra en la figura 16.25.

Al usar $v = \lambda f$, obtenemos las frecuencias posibles:

$$f_n = (2n-1)\frac{v}{4L}, \text{ para } n=1,2,3,\dots, \quad (16.20)$$

donde n corresponde al número de nodos.

La figura 16.26b) muestra las posibles ondas estacionarias en un tubo abierto. En este caso hay antinodos en ambos extremos del tubo, y la condición para una onda estacionaria resonante es

$$L = \frac{n}{2}\lambda, \quad n=1,2,3,\dots$$

Esta relación produce longitudes de ondas y frecuencias de

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}, \quad n=1,2,3,\dots \quad (16.21)$$

$$f_n = n\frac{v}{2L}, \quad n=1,2,3,\dots \quad (16.22)$$

donde nuevamente n es el número de nodos.

Tanto para tubos semiabiertos como abiertos, la frecuencia fundamental se obtiene mediante $n = 1$. Para un tubo semiabierto, el primer armónico ($n = 2$) es tres veces más alto que la frecuencia fundamental. Sin embargo, para un tubo abierto el primer armónico ($n = 2$) es dos veces más alto que la frecuencia fundamental, o una octava más alto.

16.8 Ejercicio en clase

La botella de medio litro de la figura 16.25 contiene aire encima del líquido. ¿Cómo cambiaría la frecuencia si el aire en la botella fuese reemplazado por gas criptón? (Pista: La tabla 16.1 puede ayudar.)

- a) Sería más bajo.
- b) Quedaría igual.
- c) Sería más alto.

EJEMPLO 16.5

Un órgano tubular

Los órganos de iglesia funcionan con base en el principio de crear ondas estacionarias en tubos. Si ha estado en una vieja catedral, muy probablemente habrá visto una colección impresionante de tubos de órgano (figura 16.27).

PROBLEMA

Si quisiera construir un órgano cuyas frecuencias fundamentales cubrieran el rango de frecuencias de un piano, de la0 a do8, ¿cuál es el rango de longitudes de los tubos que tendría que usar?



FIGURA 16.27 Tubos de un órgano de iglesia.

SOLUCIÓN

Las frecuencias para la0 y do8 son $f_{la0} = 27.5$ Hz, $f_{do8} = 4186$ Hz. De acuerdo con las ecuaciones 16.20 y 16.22, las frecuencias fundamentales para un tubo semiabierto y un tubo abierto son

$$f_{1,\text{semiabierto}} = \frac{v}{4L} \quad \text{y} \quad f_{1,\text{abierto}} = \frac{v}{2L}.$$

Esto significa que los tubos abiertos tienen que ser dos veces más largos que los correspondientes tubos semiabiertos para la misma frecuencia. Las longitudes de los tubos semiabiertos que se necesitan para las frecuencias más altas y más bajas son

$$L_{\text{semiabierto,do8}} = \frac{v}{4f_{\text{do8}}} = \frac{343 \text{ m/s}}{16744 \text{ Hz}} = 0.0205 \text{ m}$$

$$L_{\text{semiabierto,la0}} = \frac{v}{4f_{\text{la0}}} = \frac{343 \text{ m/s}}{110 \text{ Hz}} = 3.118 \text{ m}.$$

COMENTARIO

Los tubos de órganos reales en efecto pueden tener una longitud de hasta 10 pies. La parte que produce la onda estacionaria puede ser tan corta como 0.5 pulgadas; sin embargo, la base de un tubo es de aproximadamente 0.5 pies de largo, así que los tubos más cortos que normalmente se observan en un órgano de iglesia tienen por lo menos esta longitud.

LO QUE HEMOS APRENDIDO | GUÍA DE ESTUDIO PARA EXAMEN

- El sonido es una onda de presión longitudinal que requiere un medio en el que se puede propagar.
- La rapidez del sonido en el aire con presión y temperatura normal (1 atm, 20 °C) es de 343 m/s.
- En general, la rapidez del sonido en un sólido está dada por $v = \sqrt{Y/\rho}$, y la rapidez en un líquido o gas está dada por $v = \sqrt{B/\rho}$.
- Una escala logarítmica se usa para medir intensidades de sonido. La unidad de esta escala es el decibel (dB). El nivel de sonido, β , en esta escala de decibeles está definido como $\beta = 10 \log \frac{I}{I_0}$, donde I es la intensidad de las ondas sonoras e $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$, que corresponde aproximadamente a la mínima intensidad que un oído humano puede oír.
- Ondas sonoras emitidas por dos fuentes coherentes interfieren en forma constructiva si la diferencia de longitud de trayectoria es $\Delta r = n\lambda$; para todos los $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ e interfieren en forma destructiva si la diferencia de trayectoria es $\Delta r = (n + \frac{1}{2})\lambda$; para todos los $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$.
- Dos ondas sinusoidales con amplitudes iguales y levemente diferentes frecuencias producen pulsaciones con una frecuencia de pulsación de $f_b = |f_1 - f_2|$.
- Como resultado del efecto Doppler, la frecuencia del sonido de una fuente en movimiento percibida por un observador estacionario es $f_o = f \left(\frac{v_{\text{sonido}}}{v_{\text{sonido}} \pm v_{\text{fuente}}} \right)$, donde f es la frecuencia del sonido emitido por la fuente y v_{sonido} y v_{fuente} son las rapidezces del sonido y de la fuente, respectivamente. El signo superior (+) se aplica cuando la fuente se aleja del observador, y el signo inferior (-) se aplica cuando la fuente se mueve hacia el observador.
- La fuente del sonido puede ser estacionaria mientras se mueva el observador. En este caso la frecuencia observada del sonido está dada por $f_o = f \left(\frac{v_{\text{sonido}} \mp v_{\text{observador}}}{v_{\text{sonido}}} \right) = f \left(1 \mp \frac{v_{\text{observador}}}{v_{\text{sonido}}} \right)$. Aquí el signo superior (-) se aplica cuando el observador se aleja de la fuente, y el signo inferior (+) se aplica cuando el observador se mueve hacia la fuente.
- El ángulo de Mach de la onda expansiva formada por una fuente de sonido que se mueve con rapidez supersónica es $\theta_M = \sin^{-1} \left(\frac{v_{\text{sonido}}}{v_{\text{fuente}}} \right)$.
- La relación entre la longitud de un tubo semiabierto y las longitudes de ondas de posibles ondas estacionarias que están dentro es $L = \frac{2n-1}{4} \lambda$, para $n = 1, 2, \dots$; para tubos abiertos, la relación es $L = \frac{n}{2} \lambda$ para $n = 1, 2, \dots$.

TÉRMINOS CLAVE

sonido, p. 525
decibel, p. 529
fuentes coherentes, p. 533

pulsación, p. 534
cancelación activa de
ruido, p. 535

efecto Doppler, p. 536
fuente supersónica, p. 541
ángulo de Mach, p. 541

onda expansiva (o cono
de Mach), p. 541

NUEVOS SÍMBOLOS Y ECUACIONES

v_{sonido} , rapidez del sonido

$\beta = 10 \log \frac{I}{I_0}$, nivel de sonido en decibeles

$f_b = |f_1 - f_2|$, frecuencia de pulsación

v_{fuente} , rapidez con la que se mueve la fuente de sonido

$v_{\text{observador}}$, rapidez con la que se mueve el observador

f_o , frecuencia de sonido detectada por el observador

$\theta_M = \sin^{-1} \left(\frac{v_{\text{sonido}}}{v_{\text{fuente}}} \right)$, ángulo de Mach de la onda expansiva

RESPUESTAS A LAS OPORTUNIDADES DE AUTOEXAMEN

$$16.1 \quad \beta = 10 \log \frac{I}{I_0} \Rightarrow I = I_0 (10^{\beta/10})$$

$$P = IA = I (4\pi r^2) = I_0 (10^{\beta/10}) (4\pi r^2)$$

$$P = 4\pi (10^{-12} \text{ W/m}^2) 10^{(80 \text{ dB})/10} (10.0 \text{ m})^2 = 0.126 \text{ W}.$$

$$16.2 \quad f_o(t) = f \frac{v_{\text{sonido}}}{v_{\text{sonido}} + \frac{v^2 t}{\sqrt{b^2 + v^2 t^2}}}$$

$$\frac{df_o(t)}{dt} = -f v_{\text{sonido}} \frac{\left(-\frac{t^2 v^4}{(b^2 + v^2 t^2)^{3/2}} + \frac{v^2}{\sqrt{b^2 + v^2 t^2}} \right)}{\left(v_{\text{sonido}} + \frac{v^2 t^2}{\sqrt{b^2 + v^2 t^2}} \right)^2}$$

$$\left. \frac{df_o(t)}{dt} \right|_{t=0} = -f v_{\text{sonido}} \frac{\left(\frac{v^2}{\sqrt{b^2}} \right)}{(v_{\text{sonido}})^2} = -f \frac{v^2}{b v_{\text{sonido}}}.$$

$$16.3 \quad v_{\text{observador}}(t) = \frac{v^2 t}{\sqrt{b^2 + v^2 t^2}}$$

$$f_o(t) = f \frac{v_{\text{sonido}} \mp v_{\text{observador}}(t)}{v_{\text{sonido}}}$$

$$f_o(t) = f \frac{v_{\text{sonido}} - \frac{v^2 t}{\sqrt{b^2 + v^2 t^2}}}{v_{\text{sonido}}}.$$

$$16.4 \quad f_n = (2n-1) \frac{v}{4L}$$

$$f_1 = \frac{v}{4L} = \frac{343 \text{ m/s}}{4(0.215 \text{ m})} = 399 \text{ Hz}$$

400 Hz estimada.

PRÁCTICA PARA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Lineamientos de problemas resueltos

1. Asegúrese de estar familiarizado con las propiedades de logaritmos para resolver problemas que involucran la intensidad del sonido. En particular, recuerde que $\log(A/B) = \log A - \log B$ y que $\log x^n = n \log x$.

2. Situaciones que involucran el efecto Doppler pueden ser delicadas. A veces se requiere romper la trayectoria del sonido en segmentos y tratar cada segmento por separado, dependiendo de si ocurre un movimiento de la fuente o un movimiento del observador. A menudo un bosquejo es útil para identificar qué expresión para el efecto Doppler pertenece a qué parte de la situación.

3. No necesita memorizar fórmulas para las frecuencias armónicas de tubos abiertos o tubos semiabiertos. En vez de eso, recuerde que el extremo cerrado de un tubo es la ubicación de un nodo y el extremo abierto de un tubo es la ubicación de un antinodo. Entonces podrá reconstruir las ondas estacionarias a partir de este punto.

PROBLEMA RESUELTO 16.2

Desplazamiento Doppler para un observador en movimiento

PROBLEMA

Una persona en un auto estacionado suena su claxon. La frecuencia del sonido del claxon es de 290.0 Hz. El conductor de un auto que se aproxima mide la frecuencia del sonido que proviene del auto estacionado que es de 316.0 Hz. ¿Cuál es la rapidez del auto que se aproxima?

SOLUCIÓN**PIENSE**

La frecuencia del sonido medido en el auto que se aproxima ha sufrido un desplazamiento Doppler. Al conocer la frecuencia emitida, f , la frecuencia observada, f_o , y la rapidez del sonido, v_{sonido} , podemos calcular la rapidez del auto que se aproxima.

ESBOCE

La figura 16.28 muestra el vehículo con el observador que se mueve hacia el vehículo estacionario que emite el sonido.

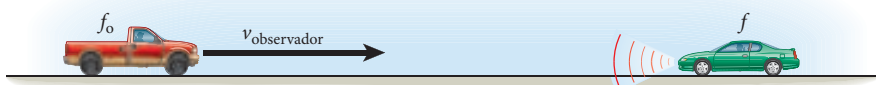


FIGURA 16.28 Un vehículo aproximándose a otro que está sonando su claxon.

INVESTIGUE

La frecuencia medida por un observador en movimiento, f_o , que resulta de un sonido de la frecuencia f que es emitido por una fuente estacionaria está dada por

$$f_o = f \left(1 + \frac{v_{\text{observador}}}{v_{\text{sonido}}} \right), \quad (i)$$

donde $v_{\text{observador}}$ es la rapidez con la que el observador se aproxima a la fuente que emite el sonido, y v_{sonido} es la rapidez del sonido en el aire.

SIMPLIFIQUE

Podemos reordenar la ecuación (i) para obtener

$$\frac{f_o}{f} - 1 = \frac{v_{\text{observador}}}{v_{\text{sonido}}}.$$

Mediante esta ecuación podemos despejar la rapidez del observador en movimiento:

$$v_{\text{observador}} = v_{\text{sonido}} \left(\frac{f_o}{f} - 1 \right).$$

CALCULE

Si sustituimos los valores numéricos, obtenemos

$$v_{\text{observador}} = (343 \text{ m/s}) \left(\frac{316.0 \text{ Hz}}{290.0 \text{ Hz}} - 1 \right) = 30.7517 \text{ m/s}.$$

REDONDEE

Reportamos nuestro resultado con tres cifras significativas:

$$v_{\text{observador}} = 30.8 \text{ m/s}.$$

VUELVA A REVISAR

Una primera verificación útil es aquella que demuestre que las unidades funcionan correctamente. Unidades de metros por segundo, que hemos obtenido para nuestra respuesta, ciertamente son apropiadas para una rapidez. Ahora podemos verificar el orden de magnitud. Una rapidez de 30.8 m/s (68.9 mph) es razonable para un automóvil.

PROBLEMA RESUELTO 16.3 Onda estacionaria en un tubo

PROBLEMA

Una onda sonora estacionaria en un tubo con una longitud de 0.410 m (figura 16.29) que contiene aire con presión y temperatura normales. ¿Cuál es la frecuencia de este sonido?



FIGURA 16.29 Una onda sonora estacionaria en un tubo.

SOLUCIÓN

PIENSE

Primero reconocemos que la onda sonora estacionaria ilustrada en la figura 16.29 corresponde a una onda sonora estacionaria en un tubo que está cerrado en el extremo izquierdo y abierto en el extremo derecho. De este modo estamos tratando con una onda estacionaria en un tubo semiabierto. Cuatro nodos son visibles. Al combinar estas observaciones y al conocer la rapidez del sonido podemos calcular la frecuencia de la onda estacionaria.

ESBOCE

La onda estacionaria con el tubo incluido y los nodos marcados se muestra en la figura 16.30.

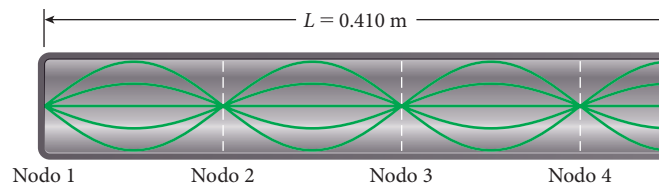


FIGURA 16.30 Una onda sonora estacionaria con cuatro nodos en un tubo semiabierto.

INVESTIGUE

La frecuencia de esta onda estacionaria en un tubo semiabierto está dada por

$$f_n = (2n - 1) \frac{v}{4L}, \quad (i)$$

donde $n = 4$ es el número de nodos. La rapidez del sonido en el aire es $v = 343$ m/s, y la longitud del tubo es $L = 0.410$ m.

SIMPLIFIQUE

Para $n = 4$ podemos escribir la ecuación (i) para la frecuencia de la onda estacionaria como

$$f_4 = (2(4) - 1) \frac{v}{4L} = \frac{7v}{4L}.$$

CALCULE

Al colocar los valores numéricos obtenemos

$$f = \frac{7(343 \text{ m/s})}{4(0.410 \text{ m})} = 1\,464.02 \text{ Hz}.$$

REDONDEE

Reportamos nuestro resultado con tres cifras significativas:

$$f = 1\,460 \text{ Hz}.$$

VUELVA A REVISAR

La frecuencia está dentro del rango del oído humano y apenas arriba del rango de frecuencias producidas por la voz humana. Por lo tanto, nuestra respuesta parece razonable.

PROBLEMA RESUELTO 16.4**Desplazamiento Doppler de una sirena de ambulancia reflejada****PROBLEMA**

Una ambulancia ha recogido un alpinista lastimado y se está alejando directamente de la pared del cañón (donde se lastimó el alpinista) con una rapidez de 31.3 m/s (70 mph). La sirena de la ambulancia tiene una frecuencia de 400.0 Hz. Después de que la ambulancia apaga su sirena, el alpinista lesionado puede escuchar el sonido reflejado de la pared del cañón durante unos segundos. La velocidad del sonido en el aire es $v_{\text{sonido}} = 343$ m/s. ¿Cuál es la frecuencia del sonido de la sirena de la ambulancia reflejado como la escucha el alpinista lastimado en la ambulancia?

SOLUCIÓN**PIENSE**

La ambulancia se puede considerar como una fuente en movimiento con una rapidez $v_{\text{ambulancia}}$ emitiendo un sonido con la frecuencia f . La frecuencia, f_1 , de la sirena en la pared fija del cañón se puede calcular usando la velocidad del sonido v_{sonido} . La pared del cañón refleja el sonido de la sirena de regreso a la ambulancia en movimiento. El alpinista en la ambulancia puede considerarse como un observador en movimiento del sonido reflejado de la sirena. La combinación de los dos desplazamientos Doppler nos da la frecuencia f_2 de la sirena reflejada como se escucha en la ambulancia en movimiento.

ESBOCE

La figura 16.31 muestra a la ambulancia que se aleja de la pared del cañón con una rapidez de $v_{\text{ambulancia}}$ mientras emite el sonido de su sirena con una frecuencia f .

INVESTIGUE

La frecuencia, f_1 , del sonido medido por un observador estacionario parado junto a la pared del cañón que resulta del sonido de la frecuencia f emitido por la sirena de la ambulancia moviéndose con una velocidad $v_{\text{ambulancia}}$ se define por la ecuación 16.14:

$$f_1 = f \left(\frac{v_{\text{sonido}}}{v_{\text{sonido}} + v_{\text{ambulancia}}} \right), \quad (i)$$

donde el signo de más es aplicable porque la ambulancia se está alejando del observador estacionario. El sonido es reflejado por la pared del cañón hasta la ambulancia en movimiento. Ahora el alpinista lesionado en la ambulancia es un observador en movimiento. Podemos calcular la frecuencia observada por el alpinista, f_2 , usando la ecuación 16.15:

$$f_2 = f_1 \left(1 - \frac{v_{\text{ambulancia}}}{v_{\text{sonido}}} \right), \quad (ii)$$

donde se usa el signo de menos porque el observador se está alejando de la fuente.

SIMPLIFIQUE

Podemos combinar las ecuaciones (i) y (ii) para obtener

$$f_2 = f \left(\frac{v_{\text{sonido}}}{v_{\text{sonido}} + v_{\text{ambulancia}}} \right) \left(1 - \frac{v_{\text{ambulancia}}}{v_{\text{sonido}}} \right).$$

Usted puede ver que este resultado es un caso especial de la ecuación 16.16, donde las rapidez del observador y la fuente son la rapidez de la ambulancia, y tanto el observador como la fuente se están alejando uno del otro.

CALCULE

Al colocar los valores numéricos obtenemos

$$f_2 = (400 \text{ Hz}) \left(\frac{343 \text{ m/s}}{343 \text{ m/s} + 31.3 \text{ m/s}} \right) \left(1 - \frac{31.3 \text{ m/s}}{343 \text{ m/s}} \right) = 333.1018 \text{ Hz}.$$

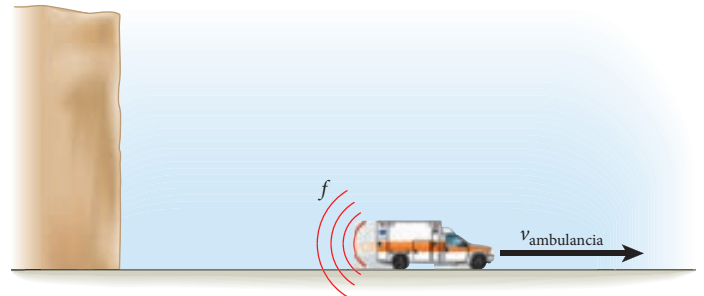


FIGURA 16.31 Una ambulancia se aleja de una pared del cañón con la sirena funcionando.

(continúa)

(continuación)

REDONDEE

Reportamos el resultado con tres cifras significativas:

$$f_2 = 333 \text{ Hz.}$$

VUELVA A REVISAR

La frecuencia del sonido reflejado observado por el alpinista lesionado es aproximadamente 20% más baja que la frecuencia original de la sirena de la ambulancia. La rapidez de la ambulancia es aproximadamente 10% de la rapidez del sonido. Los dos desplazamientos Doppler, uno para el sonido emitido por la ambulancia en movimiento y otro para el sonido reflejado observado en la ambulancia en movimiento deberán desplazar cada uno la frecuencia por aproximadamente 10%, así que la frecuencia observada parece ser razonable.

PREGUNTAS DE OPCIÓN MÚLTIPLE

16.1 Usted está parado en la acera esperando para cruzar la calle. De repente escucha el sonido del claxon de un auto que se acerca con rapidez constante. Usted escucha una frecuencia de 80 Hz. Después de que pasa el auto, escucha una frecuencia de 72 Hz. ¿Con qué rapidez se estaba moviendo el auto?

- a) 17 m/s c) 19 m/s
b) 18 m/s d) 20 m/s

16.2 Un nivel de sonido de 50 decibeles es

- a) 2.5 veces más intenso que un sonido de 20 decibeles.
b) 6.25 veces más intenso que un sonido de 20 decibeles.
c) 10 veces más intenso que un sonido de 20 decibeles.
d) 100 veces más intenso que un sonido de 20 decibeles.
e) 1 000 veces más intenso que un sonido de 20 decibeles.

16.3 Una patrulla de policía se está moviendo hacia usted, acelerando constantemente, con la sirena sonando. Conforme se acerca, el sonido que usted escucha

- a) mantiene la misma frecuencia. c) aumenta la frecuencia.
b) baja de frecuencia. d) se necesita más información.

16.4 Usted está creando una onda sonora al sacudir un remo en un medio líquido. ¿Cómo podrá aumentar la rapidez de la onda sonora resultante?

- a) Usted sacude el remo más duro para darle al medio más energía cinética.
b) Usted hace vibrar el remo más rápidamente para aumentar la frecuencia de la onda.
c) Usted crea una resonancia con una onda de mayor movimiento en el aire.
d) Todas estas cosas funcionarán.
e) Ninguna de estas cosas funcionará.
f) Sólo a) y b) funcionarán.
g) Sólo a) y c) funcionarán.
h) Sólo b) y c) funcionarán.

16.5 Parado en la acera, usted escucha el claxon de un auto que pasa. Cuando el auto termina de pasar, la frecuencia del sonido cambia de alta a baja de manera continua; es decir, no

hay cambio abrupto en la frecuencia percibida. Esto ocurre porque

- a) el tono del sonido del claxon cambia en forma continua;
b) la intensidad del sonido observado cambia en forma continua;
c) usted no está parado directamente en la trayectoria del auto en movimiento;
d) todas las razones mencionadas antes son ciertas.

16.6 Un sonómetro ubicado a 3 m de un altavoz registra un nivel de sonido de 80 dB. Si el volumen del altavoz en este momento se baja de tal modo que la potencia se reduce por un factor de 25, ¿qué medirá el sonómetro?

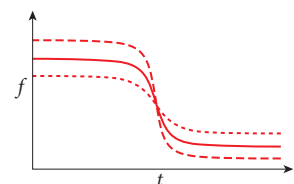
- a) 3.2 dB c) 32 dB e) 66 dB
b) 11 dB d) 55 dB

16.7 ¿Qué tiene el mayor efecto sobre la rapidez del sonido en el aire?

- a) La temperatura del aire. d) La presión de la atmósfera.
b) La frecuencia del sonido.
c) La longitud de onda del sonido.

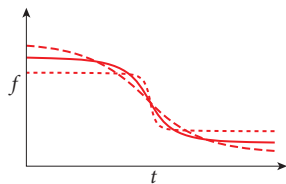
16.8 Una conductora está sentada en su auto en un cruce de ferrocarril. Tres trenes pasan con diferentes rapidezces (constantes), cada uno emitiendo el mismo sonido. Aburrida, la conductora graba los sonidos. Más tarde, en su casa, grafica la frecuencia como función del tiempo en su computadora, con el resultado de la gráfica que se muestra en la figura. ¿Cuál de los tres trenes tuvo la rapidez más alta?

- a) El que está representado por la línea sólida.
b) El que está representado por la línea interrumpida.
c) El que está representado por la línea punteada.
d) No se puede determinar.



16.9 Tres miembros de la facultad de Física están sentados en tres autos diferentes en un cruce de ferrocarril. Tres trenes pasan con distintas rapidezces (constantes), cada uno emitiendo

el mismo sonido. Cada miembro de la facultad utiliza un teléfono celular para grabar el sonido de un tren diferente. Al día siguiente, durante una reunión de docentes, ellos grafican la frecuencia como función de tiempo en una computadora, con el resultado de la gráfica que se muestra en la figura. ¿Cuál de los tres trenes tuvo la rapidez más alta?



a) El que está representado por la línea sólida.

PREGUNTAS

16.11 Una forma (algo riesgosa) de decir si se acerca un tren que no se puede ver ni oír es colocar su oreja en un riel. Explique por qué funciona esto.

16.12 Una demostración clásica de la física de los sonidos es la colocación de un despertador en una campana de vacío. La demostración empieza con aire en la campana de vacío con presión atmosférica normal. Luego la campana se evacua a presiones cada vez más bajas. Describa el resultado esperado.

16.13 Usted está sentado cerca de la parte trasera de un avión bimotor comercial que tiene los motores montados en el fuselaje cerca de la cola. La rapidez de la rotación nominal para el turboventilador en cada motor es de 5 200 revoluciones por minuto, lo que es también la frecuencia del sonido dominante emitido por la máquina. ¿Qué pista auditiva podría sugerir que los motores no están perfectamente sincronizados y que el turboventilador en uno de ellos está rotando aproximadamente 1% más rápido que en el otro? ¿Cómo podría medir este efecto si tuviera solamente su reloj de pulsera (podría medir los intervalos de tiempo sólo en segundos)? Para escuchar este efecto, vaya a http://qbx6.ltu.edu/s_schneider/physlets/main/beats.shtml. Esta simulación funciona mejor con frecuencias naturales enteras, así que redondee sus frecuencias.

16.14 Usted determina la dirección de donde proviene un sonido juzgando subconscientemente la diferencia de tiempo que tarda en llegar al oído derecho e izquierdo. Un sonido directamente frente a (o atrás de) usted llega a ambos oídos al mismo tiempo; un sonido desde su izquierda llega a su oído izquierdo antes que a su oído derecho. ¿Qué pasa con esta habilidad para determinar la ubicación de un sonido si usted está bajo el agua? ¿Parecerá que los sonidos estén ubicados más en frente o más al lado de donde se encuentren realmente?

PROBLEMAS

Una • y dos •• indican un nivel creciente de dificultad del problema.

Sección 16.1

16.21 Parado en la acera, usted se da cuenta que se encuentra a mitad del camino entre una torre de reloj y un edificio grande. Cuando el reloj marca la hora, usted escucha un eco de la campana 0.500 s después de escucharla directamente de la torre. ¿Qué distancia hay entre la torre de reloj y el edificio?

b) El que está representado por la línea interrumpida.

c) El que está representado por la línea punteada.

d) No se puede determinar.

16.10 En la pregunta 16.9, ¿cuál de los docentes estuvo más cerca de los rieles del ferrocarril?

a) El que grabó el sonido representado por la línea sólida.

b) El que grabó el sonido representado por la línea interrumpida.

c) El que grabó el sonido representado por la línea punteada.

d) No se puede determinar.

16.15 En un día de mucho viento, un niño parado afuera escucha la campana de la escuela. Si el viento sopla hacia el niño desde la dirección de la escuela, ¿alterará la frecuencia, la longitud de onda o la velocidad del sonido que escucha el niño?

16.16 Una sirena de la policía contiene por lo menos dos frecuencias que producen un sonido oscilante (pulsaciones). Explique cómo cambia el sonido de la sirena cuando una patrulla de policía se acerca, se pasa y se aleja de un peatón.

16.17 La Luna no tiene atmósfera. ¿Es posible generar ondas sonoras en ella?

16.18 Cuando dos tonos puros con frecuencias parecidas se combinan para producir pulsaciones, el resultado es un tren de paquetes de ondas. Esto quiere decir que las ondas sinusoidales de igual amplitud A , moviéndose en la misma dirección, tienen los números de onda κ y $\kappa + \Delta\kappa$ y las frecuencias angulares ω y $\omega + \Delta\omega$, respectivamente. Suponga que Δx sea la longitud del paquete de ondas, o sea la distancia entre dos nodos de la cubierta de las funciones de senos combinados. ¿Cuál es el valor del producto $\Delta x \Delta \kappa$?

16.19 Cuando camina por la calle, un auto convertible (descapotable) pasa al otro lado de la calle. Usted escucha cómo las bocinas (altavoces) de bajos profundos emiten un ritmo atractivo pero irritantemente fuerte. Estime la intensidad del sonido que percibe, y luego calcule la intensidad mínima a la que se sujetan los pobres oídos del conductor y pasajero del convertible (descapotable).

16.20 Si usted sopla aire a través de la boca de una botella de refresco vacía, escucha un sonido. ¿Por qué será que si pone agua en la botella, el tono aumenta?

16.22 Dos granjeros están parados en lados opuestos de un campo vacío muy grande que tiene 510 m de ancho. Uno de los granjeros grita unas instrucciones y pasan 1.5 segundos hasta que el sonido llega al otro granjero. ¿Cuál es la temperatura del aire?

16.23 La densidad de una muestra de aire es de 1.205 kg/m^3 , y el módulo de compresibilidad es de $1.42 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$.

a) Encuentre la rapidez del sonido en la muestra de aire.

b) Encuentre la temperatura de la muestra de aire.

•16.24 Usted tira una piedra en un pozo que tiene 9.50 m de profundidad. ¿Cuánto tiempo pasa hasta que escucha el ruido del agua? La rapidez del sonido en el aire es de 343 m/s.

16.25 La radiación electromagnética (luz) consiste en ondas. Hace más de un siglo, los científicos pensaban que la luz, igual que otras ondas, requería un medio (llamado el *éter*) para soportar su transmisión. El vidrio, que tiene una densidad de masa típica de $\rho = 2\,500\text{ kg/m}^3$, también soporta la transmisión de la luz. ¿Cuál tendría que ser el módulo de elasticidad del vidrio para soportar la transmisión de ondas de luz con una rapidez de $v = 2.0 \cdot 10^8\text{ m/s}$? Compare esto con el verdadero módulo de elasticidad del vidrio común, que es de $5 \cdot 10^{10}\text{ N/m}^2$.

Sección 16.2

16.26 Compare la intensidad del sonido en el umbral de dolor, que es de 120 dB con la del nivel de susurro, 20 dB.

16.27 El nivel de sonido en decibeles se expresa normalmente como $\beta = 10 \log(I/I_0)$, pero puesto que el sonido es una onda de presión, el nivel de sonido se puede expresar en términos de una diferencia de presión. La intensidad depende de la amplitud al cuadrado, así que la expresión es $\beta = 20 \log(P/P_0)$, donde P_0 es la diferencia de presión más pequeña apreciable por el oído: $P_0 = 2.00 \cdot 10^{-5}\text{ Pa}$. Un concierto de rock de mucho ruido tiene un nivel de sonido de 110. dB. Encuentre la amplitud de la onda de presión generada por ese concierto.

16.28 En un juego de fútbol de campeonato intercolegial, la intensidad del grito de una sola persona en las gradas del centro del campo es de aproximadamente 50 dB. ¿Cuál sería el nivel de intensidad en el centro del campo si los 10 000 fanáticos en el juego gritaran aproximadamente desde la misma distancia desde este punto central?

•16.29 Dos personas están platicando a una distancia de 3.0 m de donde está usted, y usted está midiendo la intensidad del sonido como $1.1 \cdot 10^{-7}\text{ W/m}^2$. Otro estudiante se encuentra a una distancia de 4.0 m de los que hablan. ¿Qué intensidad de sonido mide el otro estudiante?

•16.30 Un niño entusiasmado en un campamento pega un grito. Su padre, a 1.2 m de distancia, lo escucha como un sonido de 90.0 dB. Un alpinista está sentado a 850 m del niño, en lo alto de una montaña cercana. ¿Qué tan fuerte le parecerá el grito al alpinista?

•16.31 Aunque sean agradables, los conciertos de rock pueden dañar el oído de la gente. En la primera fila de un concierto de rock, a 5.00 m del sistema de sonido, la intensidad de sonido es de 145.0 dB. ¿Qué tan lejos debería usted sentarse para que la intensidad de sonido baje al nivel seguro recomendado de 90.0 dB?

Sección 16.3

16.32 Dos fuentes, A y B, emiten un sonido de una determinada longitud de onda. El sonido emitido de ambas fuentes se detecta en un punto alejado de ellas. El sonido de la fuente A está a una distancia d del punto de observación, mientras que el sonido de la fuente B tiene que recorrer una distancia de 3λ . ¿Cuál es el valor más grande de la longitud de onda, en términos de d , para que se detecte la máxima intensidad de sonido

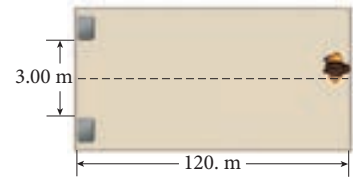
en el punto de observación? Si $d = 10.0\text{ m}$ y la rapidez del sonido es de 340 m/s, ¿cuál es la frecuencia del sonido emitido?

16.33 Una estudiante universitaria está en un concierto y realmente quiere escuchar la música, así que se sienta entre dos bocinas en fase que se encuentran a una distancia de 50.0 m. Las bocinas emiten un sonido con una frecuencia de 490 Hz. En el punto medio entre las bocinas habrá interferencia constructiva, y la música estará en su punto más fuerte. ¿A qué distancia más cercana al punto medio podría también sentarse para experimentar el sonido más fuerte?

16.34 La cuerda de un violín produce 2 pulsos por segundo cuando suena junto con un diapasón con la frecuencia de 400 Hz. La frecuencia de los pulsos aumenta cuando se tensa la cuerda.

- a) ¿Cuál era la frecuencia del violín al principio?
- b) ¿Qué se deberá hacer para afinar el violín?

•16.35 Usted está parado junto a una pared al lado opuesto de dos bocinas que están separadas por 3.00 m, tal como lo muestra la figura. Las

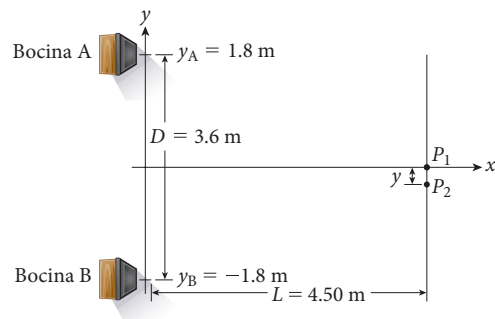


dos bocinas empiezan a emitir un tono de 343 Hz en fase. ¿En qué parte a lo largo de la pared se debería parar para que el sonido de las bocinas sea lo más suave posible? Sea específico: ¿a qué distancia de un punto central entre las bocinas estará usted? La pared opuesta está a 120. m de la pared con las bocinas. (Suponga que las paredes sean buenas absorbedoras y por lo tanto la contribución de reflexiones del sonido percibido sea insignificante.)

•16.36 Usted está tocando una nota que tiene una frecuencia fundamental de 400. Hz en la cuerda de una guitarra de una longitud de 50.0 cm. Al mismo tiempo, su amigo toca una nota fundamental en un tubo de órgano abierto, y se escuchan 4 pulsos por segundo. La masa por unidad de longitud de la cuerda es de 2.00 g/m. Suponga que la velocidad del sonido sea de 343 m/s.

- a) ¿Cuáles son las posibles frecuencias del tubo abierto del órgano?
- b) Cuando se tensa la cuerda de la guitarra, se reduce la frecuencia de pulsos. Encuentre la tensión original de la cuerda.
- c) ¿Cuál es la longitud del tubo del órgano?

•16.37 Dos bocinas de 100.0 W, A y B, están separadas por una distancia $D = 3.6\text{ m}$. Las bocinas emiten ondas sonoras en fase con una frecuencia $f = 10\,000.0\text{ Hz}$. El punto P_1



se ubica en $x_1 = 4.50$ m y $y_1 = 0$ m; el punto P_2 se ubica en $x_2 = 4.50$ m y $y_2 = -\Delta y$. Despreciando la bocina B, ¿cuál es la intensidad I_{A1} (en W/m^2), del sonido en el punto P_1 debido a la bocina A? Suponga que el sonido de la bocina es emitido de manera uniforme en todas las direcciones. ¿Cuál es la intensidad en términos de decibeles (nivel de sonido β_{A1})? Cuando se encienden ambas bocinas, hay un máximo en sus intensidades combinadas en P_1 . Cuando nos movemos hacia P_2 , esta intensidad alcanza un mínimo único y luego se vuelve a maximizar en P_2 . ¿A qué distancia se encuentra P_2 de P_1 ?; o sea, ¿qué es Δy ? Usted puede suponer que $L \gg \Delta y$ y que $D \gg \Delta y$, lo que le permite simplificar el álgebra usando $\sqrt{a \pm b} \approx a^{1/2} \pm \frac{b}{2a^{1/2}}$ cuando $a \gg b$.

Sección 16.4

16.38 Un policía con un muy buen oído y un buen entendimiento del efecto Doppler está parado al borde de una autopista apoyando a un equipo que trabaja en una zona de 40 mph. Él observa un auto que se acerca tocando su claxon. Cuando el auto se aproxima, el policía escucha el sonido del claxon con un claro tono B4 (494 Hz). En el instante que pasa el auto, el policía escucha el sonido como un claro tono A4 (440 Hz). Él sube inmediatamente a su moto, para el auto y le levanta al automovilista una infracción por exceso de velocidad. Explique su razonamiento.

16.39 Un meteorito impacta en la superficie del mar con una rapidez de 8 800 m/s. ¿Cuáles son los ángulos de la onda de choque que produce a) en el aire justo antes de impactar en la superficie del océano y b) en el océano justo después de entrar? Suponga que la rapidez del sonido en aire y agua sea de 343 m/s y 1 560 m/s, respectivamente.

16.40 El silbato de un tren emite un sonido con una frecuencia $f = 3\,000$ Hz cuando permanece estacionado. Usted está parado cerca de los rieles cuando pasa el tren con una rapidez $v = 30.0$ m/s. ¿Cuál es la magnitud del cambio de la frecuencia ($|\Delta f|$) del silbato cuando pasa el tren? (Suponga que la rapidez del sonido sea $v = 343$ m/s.)

•16.41 Usted maneja en una carretera con una velocidad de 30.0 m/s cuando escucha una sirena. Usted mira en el espejo y ve cómo se acerca una patrulla de policía desde atrás con una rapidez constante. La frecuencia de la sirena que usted escucha es de 1 300 Hz. Inmediatamente después de que pasa la patrulla, la frecuencia de la sirena que usted escucha es de 1 280 Hz.

a) ¿Con qué rapidez se movía la patrulla?
 b) Usted está tan nervioso después de que pasa la patrulla que se arrima al lado de la carretera y para su auto. Luego escucha otra sirena, esta vez de una ambulancia que se acerca desde atrás. La frecuencia de la sirena que escucha es de 1 400 Hz. Cuando pasa, la frecuencia es 1 200 Hz. ¿Cuál es la frecuencia real de la sirena de la ambulancia?

•16.42 Un murciélago que vuela hacia una pared con una rapidez de 7.0 m/s emite una onda de ultrasonido con una frecuencia de 30.0 kHz. ¿Qué frecuencia tiene la onda reflejada cuando alcanza al murciélago en vuelo?

•16.43 Un avión vuela a Mach 1.30, y su onda de choque llega a un hombre 50.0 s después de que el avión pasa directamente encima.

a) ¿Cuál es el ángulo de Mach?
 b) ¿Cuál es la altitud del avión?

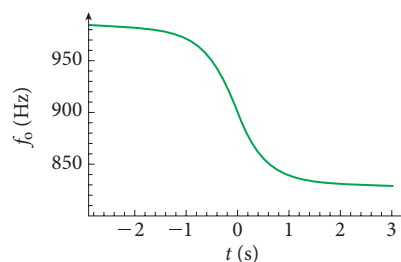
•16.44 Usted viaja en un auto hacia una colina con una rapidez de 40.0 mph. El claxon del auto emite ondas sonoras de una frecuencia de 250 Hz, que se mueven con una rapidez de 340 m/s.

a) Determine la frecuencia con la que las ondas sonoras reflejadas impactan en la colina.

b) ¿Cuál es la frecuencia de las ondas sonoras reflejadas que usted escucha?

c) ¿Cuál es la frecuencia de pulsos producida por los sonidos directos y reflejados en sus oídos?

•16.45 Un auto está estacionado en un cruce de ferrocarril. Un tren pasa, y el conductor graba la dependencia del tiempo de la frecuencia del sonido emitido por el tren, como se muestra en la figura.



a) ¿Cuál es la frecuencia que escucha alguien que viaja en el tren?
 b) ¿A qué rapidez se mueve el tren?

c) ¿A qué distancia de los rieles se encuentra el conductor del auto? $\left(\text{Pista: } \left. \frac{df_0}{dt} \right|_{t=0} = -\frac{fv^2}{bv_{\text{sonido}}} \right)$

••16.46 Muchos poblados tienen sirenas de tornado, que son sirenas grandes elevadas para avisar a los habitantes sobre tornados inminentes. En un pequeño poblado, una sirena está elevada a 100. m arriba del suelo. Un auto se aleja a 100. km/h directamente de esta sirena mientras emite un sonido de 440. Hz. ¿Cuál es la frecuencia del sonido que escucha el conductor como función de la distancia de la sirena en la que empieza? Grafique esta frecuencia como función de la posición del auto hasta 1 000. m. Explique esta gráfica en términos del efecto Doppler.

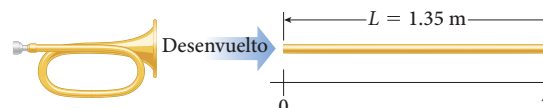
Sección 16.5

16.47 Una onda estacionaria en un tubo con ambos extremos abiertos tiene una frecuencia de 440 Hz. El próximo armónico más alto tiene una frecuencia de 660 Hz.

a) Determine la frecuencia fundamental.

b) ¿Qué longitud tiene el tubo?

16.48 Un clarín puede ser representado por un tubo cilíndrico con una longitud $L = 1.35$ m. Puesto que los extremos están abiertos, las ondas estacionarias que se producen en el clarín



tienen antinodos en los extremos abiertos, donde las moléculas de aire tienen más movimiento de ida y vuelta. Calcule las tres longitudes de ondas más largas de las ondas estacionarias dentro del clarín. También calcule las tres frecuencias más bajas y las tres longitudes de onda más largas del sonido que se produce en el aire alrededor del clarín.

16.49 Una soprano canta la nota do6 (1 046 Hz) a través de la boca de una botella de refresco. Para producir una frecuencia fundamental en la botella de refresco igual a esta nota, describa qué tanto la parte superior del líquido debe estar debajo de la parte superior de la botella.

16.50 Una barra delgada de aluminio con una longitud $L = 2.00$ m está sujeta en su centro. La rapidez del sonido en el aluminio es de 5 000. m/s. Encuentre la frecuencia de resonancia más baja para vibraciones en esta barra.

• **16.51** Encuentre la frecuencia de resonancia del canal auditivo. Trátele como un tubo semiabierto con un diámetro de 8.0 mm y una longitud de 25 mm. Suponga que la temperatura dentro del canal auditivo sea la de la temperatura corporal (37 °C).

• **16.52** Se construye un tubo semiabierto para producir una frecuencia fundamental de 262 Hz cuando la temperatura del aire es de 22 °C. Se utiliza en un edificio con exceso de temperatura cuando la temperatura es de 35 °C. Despreciando la expansión térmica en el tubo, ¿qué frecuencia se escuchará?

Problemas adicionales

16.53 El claxon de un auto emite un sonido con una frecuencia de 400.0 Hz. El auto se mueve con una velocidad de 20.0 m/s hacia un peatón estacionario cuando el conductor toca el claxon. ¿Qué frecuencia escucha el peatón?

16.54 Un observador está parado entre dos fuentes de sonido. La fuente A se aleja del observador, y la fuente B se mueve hacia él. Ambas fuentes emiten un sonido de la misma frecuencia. Si ambas fuentes se mueven con una velocidad $v_{\text{sonido}}/2$, ¿cuál es la proporción de las frecuencias detectadas por el observador?

16.55 Un caza F16 despegó de la cubierta de un portaaviones. Un buzo a 1.00 km del buque está flotando en el agua con una oreja debajo de la superficie y la otra arriba de ella. ¿Cuánto tiempo pasa entre el momento cuando escuchó inicialmente los motores del caza en un oído y el momento que los escucha inicialmente en el otro?

16.56 Un tren tiene un claxon que produce un sonido con una frecuencia de 311 Hz. Suponga que usted está parado junto a la vía férrea cuando el tren, con el claxon sonando, se acerca con una rapidez de 22.3 m/s. ¿Cuánto cambiará la frecuencia del sonido que usted escucha cuando el tren pase?

16.57 Usted se ha enfrascado en construir un móvil de campanillas de 5 tubos. Las notas que ha seleccionado para sus tubos abiertos se presentan en la tabla.

Nota	Frecuencia (Hz)	Longitud (m)
Sol4	392	
La4	440	
Si4	494	
Fa5	698	
Do6	1 046	

Calcule la longitud para cada uno de los cinco tubos a fin de lograr la frecuencia deseada, y complete la tabla.

16.58 Dos trenes están viajando uno hacia el otro en aire inmóvil a 25.0 m/s con respecto al suelo. Un tren toca un silbato a 300 Hz. La rapidez del sonido es de 343 m/s.

a) ¿Qué frecuencia escucha un hombre parado en el suelo de frente al tren que toca el silbato?

b) ¿Qué frecuencia escucha un hombre en el otro tren?

• **16.59** A una distancia de 20.0 m de una fuente de sonido, la intensidad del sonido es de 60.0 dB. ¿Cuál es la intensidad (en dB) en un punto a 2.00 m de la fuente? Suponga que el sonido esté radiando de manera uniforme en todas las direcciones desde la fuente.

• **16.60** Dos vehículos equipados con bocinas que producen un tono de frecuencia de 1 000 Hz se mueven directamente uno hacia el otro. El vehículo A se mueve a 10.00 m/s, y el vehículo B se mueve a 20.00 m/s. Suponga que la rapidez del sonido en el aire sea de 343.0 m/s. Encuentre las frecuencias que escucha el conductor de cada vehículo.

• **16.61** Usted está parado entre dos bocinas que están separadas por 80.0 m. Ambas bocinas están tocando un tono puro de 286 Hz. Usted empieza a correr directamente hacia una de las bocinas y mide una frecuencia de pulsos de 10.0 Hz. ¿Qué tan rápido está usted corriendo?

• **16.62** En un experimento de interferencia de sonido, se colocan dos bocinas idénticas a una distancia de 4.00 m, de cara a una dirección perpendicular a la línea que los conecta. Un micrófono sujeto a un desvío de rieles capta el sonido de las bocinas a una distancia de 400. m, como se muestra en la figura. Las dos bocinas son accionadas en fase por el mismo generador de señales con una frecuencia de 3 400. Hz. Suponga que la rapidez del sonido en el aire sea de 340. m/s.

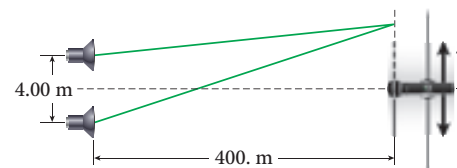
a) ¿En qué punto(s) del riel se deberá colocar el micrófono para que el sonido que llega a él tenga la máxima intensidad?

b) ¿En qué punto(s) del riel se deberá colocar el micrófono para que el sonido que llega a él sea de cero?

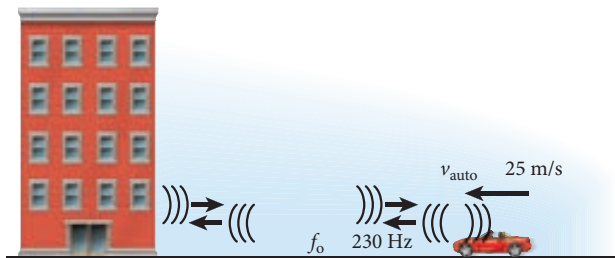
c) ¿Cuál es la separación entre dos puntos de máxima intensidad?

d) ¿Cuál es la separación entre dos puntos de intensidad cero?

e) ¿Cómo cambiarían las cosas si las dos bocinas produjeran sonidos de la misma frecuencia, pero de diferentes intensidades?



•16.63 Un auto que viaja a 25 m/s toca su claxon cuando se acerca directamente al lado de un edificio grande. El claxon produce una nota larga y sostenida de frecuencia $f_0 = 230$ Hz. El sonido rebota en el edificio al conductor del auto. La onda sonora de la nota original y la que se refleja del edificio se combinan para crear una frecuencia de pulsos. ¿Cuál es la frecuencia de pulsos que escucha el conductor (lo que le indica que más vale pisar el freno)?



•16.64 Dos tubos idénticos semiabiertos tienen cada uno una frecuencia fundamental de 500. Hz. ¿Qué cambio en porcentaje en la longitud de uno de los tubos causará una frecuencia de pulsos de 10.0 Hz cuando se tocan en forma simultánea?

•16.65 Una fuente de sonido que viaja hacia la derecha con una rapidez de 10.00 m/s emite una onda sonora con una frecuencia de 100.0 Hz. La onda sonora rebota de un reflector que viaja hacia la izquierda con una rapidez de 5.00 m/s. ¿Cuál es la frecuencia de la onda sonora reflejada que detecta un observador en la fuente?

•16.66 En una película de suspenso, dos submarinos, X y Y, se acercan uno al otro, viajando a 10.0 m/s y 15.0 m/s, respectivamente. El submarino X manda sonidos agudos al submarino Y, que transmite una onda de sonar a la frecuencia de 2 000.0 Hz. Suponga que el sonido viaja a 1500.0 m/s debajo del agua.

a) Determine la frecuencia de la onda de sonar detectada por el submarino Y.

b) ¿Cuál es la frecuencia detectada por el submarino X para la onda de sonar reflejada del submarino Y?

c) Suponga que los submarinos apenas se esquivan y se empiezan a alejar uno del otro. ¿Qué frecuencia detecta el submarino Y de los sonidos agudos enviados por X? ¿Cuánto es el desplazamiento Doppler?

••16.67 Considere una onda sonora (es decir, una onda de desplazamiento longitudinal) en un medio elástico con el módulo de Young Y (sólido) o el módulo de compresibilidad B (fluido) y la densidad imperturbada ρ_0 . Suponga que esta onda esté descrita por la función de onda $\delta x(x,t)$, donde δx denota el desplazamiento de un punto en medio desde su posición de equilibrio, x es la posición a lo largo de la ruta de la onda y t es el tiempo. La onda también se puede considerar como una onda de presión, descrita por la función de onda $\delta p(x,t)$, donde δp denota el cambio de presión en el medio desde su valor de equilibrio.

a) Encuentre la relación entre $\delta p(x,t)$ y $\delta x(x,t)$, en general.

b) Si la onda de desplazamiento es una función sinusoidal pura con la amplitud A , el número de onda κ , y la frecuencia angular ω , dada por $\delta x(x,t) = A \cos(\kappa x - \omega t)$, ¿cuál es la correspondiente función de onda de presión $\delta p(x,t)$? ¿Cuál es la amplitud de la onda de presión?

••16.68 Considere la onda sonora del problema 16.67.

a) Encuentre la intensidad, I , de la onda general en términos de las funciones de onda $\delta x(x,t)$ y $\delta p(x,t)$.

b) Encuentre la intensidad de la onda sinusoidal del inciso c) en términos de desplazamiento y amplitud de la onda de presión.

•16.69 Con los resultados de los problemas 16.67 y 16.68, determine el desplazamiento y la amplitud de la onda de presión correspondientes a un tono puro de la frecuencia $f = 1.000$ kHz en el aire (densidad = 1.20 kg/m^3 , rapidez del sonido = $343. \text{ m/s}$) en el umbral del oído ($\beta = 0.00 \text{ dB}$) y en el umbral de dolor ($\beta = 120 \text{ dB}$).

17

Temperatura

LO QUE APRENDEREMOS	557
17.1 Definición de temperatura	557
Escala de temperatura	558
17.2 Rangos de temperatura	559
Ejemplo 17.1 Temperatura ambiente	561
Investigación en la frontera de las bajas temperaturas	561
Investigación en la frontera de las altas temperaturas	562
17.3 Medición de la temperatura	563
17.4 Expansión térmica	563
Expansión lineal	564
Ejemplo 17.2 Expansión térmica del puente Mackinac	564
Problema resuelto 17.1 Tira bimetálica	565
Expansión superficial	567
Problema resuelto 17.2 Expansión de una placa con un agujero	567
Expansión volumétrica	569
Ejemplo 17.3 Expansión térmica de la gasolina	570
17.5 Temperatura superficial de la Tierra	571
Ejemplo 17.4 Subida del nivel del mar debido a la expansión térmica del agua	572
17.6 Temperatura del universo	573
LO QUE HEMOS APRENDIDO/ GUÍA DE ESTUDIO PARA EXAMEN	574
Práctica para resolución de problemas	575
Problema resuelto 17.3 Expansión lineal de una barra de acero y una barra de latón	575
Preguntas de opción múltiple	576
Preguntas	576
Problemas	577



FIGURA 17.1 El cúmulo estelar conocido como las Pléyades o las Siete Hermanas.

LO QUE APRENDEREMOS

- La temperatura se mide usando varias y diferentes propiedades de ciertos materiales.
- La escala de temperatura Fahrenheit establece la temperatura del punto de congelación del agua en 32 °F y el punto de ebullición del agua en 212 °F.
- La escala de temperatura Celsius establece la temperatura del punto de congelación del agua en 0 °C y el punto de ebullición del agua en 100 °C.
- La escala de temperatura Kelvin se define en términos de una temperatura del cero absoluto o la menor temperatura a la cual cualquier objeto podría existir. En la escala de temperaturas Kelvin, el punto de congelación del agua es de 273.15 K y el punto de ebullición del agua es de 373.15 K.
- Calentar una barra larga y delgada de metal causa que su longitud se incremente linealmente con la temperatura, medida en K.
- Calentar un líquido por lo general causa que su volumen se incremente linealmente con la temperatura, medida en K.
- La temperatura superficial promedio de la Tierra era de 14.4 °C en 2005 y se incrementó en 1 °C en los 155 años anteriores.
- El análisis de la radiación cósmica de fondo en microondas muestra que la temperatura del universo es de 2.725 K.

El cúmulo estelar de las Pléyades, mostrado en la figura 17.1, puede verse a simple vista y ya era conocido por los antiguos griegos. Lo que ellos no sabían es que estas estrellas muestran algunas de las mayores temperaturas que ocurren en la naturaleza. La temperatura superficial de estas estrellas varía de 4 000 a 10 000 °C, dependiendo del tamaño y otros factores. Sin embargo, las temperaturas interiores pueden alcanzar más de 10 millones de °C, suficientemente calientes como para vaporizar cualquier sustancia. En el otro extremo del rango de temperaturas, el espacio mismo, lejos de cualquier estrella, registra una temperatura de unos -270 °C.

Este capítulo comienza nuestro estudio de la termodinámica, incluyendo los conceptos de temperatura, calor y entropía. En el sentido más amplio, la termodinámica es el estudio de la energía y la transferencia de la energía: cómo se almacena la energía, cómo se transforma de un tipo en otro y cómo se puede hacer que esté disponible para hacer trabajo. Examinaremos la energía a un nivel atómico y molecular, lo mismo que el nivel macroscópico de los motores y las máquinas.

Este capítulo le da un vistazo a la temperatura: cómo se define y se mide y cómo los cambios en la temperatura pueden afectar a los objetos. Consideraremos varias escalas con las cuales cuantificar la temperatura, lo mismo que los rangos de temperaturas observados en la naturaleza y el laboratorio.

En términos prácticos, es casi imposible describir la temperatura sin también discutir acerca del calor, el cual es sujeto del capítulo 18. Asegúrese de tener presente las diferencias entre estos conceptos cuando estudie los siguientes capítulos.

17.1 Definición de temperatura

La temperatura es un concepto que todos entendemos a partir de la experiencia. Escuchamos los pronósticos del clima que nos dicen que hoy la temperatura será de 72 °F. Escuchamos a los doctores que la temperatura de nuestro cuerpo es de 98.6 °F. Cuando tocamos un objeto, podemos decir si está caliente o frío. Si ponemos un objeto caliente en contacto con uno frío, el objeto caliente se enfriará y el objeto frío se calentará. Si medimos las temperaturas de estos dos objetos después de que ha pasado algún tiempo, éstas serán iguales. Los dos objetos estarán entonces en **equilibrio térmico**.

El **calor** es la transferencia de un tipo de energía. Esta energía, llamada en ocasiones **energía térmica**, se encuentra en la forma de movimiento aleatorio de los átomos y moléculas que componen a la materia estudiada. El capítulo 18 cuantificará el concepto de calor como energía térmica que se transfiere debido a una diferencia de temperatura.

La **temperatura** de un objeto está relacionada con la tendencia de un objeto a transferir calor desde o hacia sus alrededores. El calor se transferirá de un objeto a sus alrededores si la temperatura del objeto es mayor que la de sus alrededores. El calor se transferirá al objeto si su temperatura es menor que sus alrededores. Note que el frío es simplemente la ausencia de calor; no hay nada como la transferencia de “frialdad” entre un objeto y sus alrededores. Si un objeto se siente frío al tacto, es simplemente una consecuencia de que el calor se está transfiriendo de sus dedos al

objeto. (Ésta es la definición macroscópica de la temperatura, veremos en el capítulo 19 que en un nivel microscópico, la temperatura es proporcional a la energía cinética del movimiento aleatorio de las partículas.)

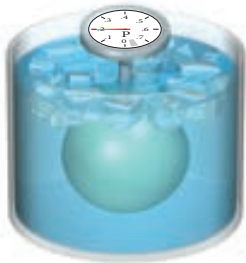
Medir la temperatura depende del hecho de que si dos objetos están en equilibrio térmico con un tercer objeto, están en equilibrio térmico uno con el otro. Este tercer objeto podría ser un **termómetro**, el cual mide la temperatura. Esta idea, a menudo llamada la **ley cero de la termodinámica**, define el concepto de temperatura y subyace a la habilidad de medir la temperatura. Esto es, con objeto de encontrar si dos objetos tienen la misma temperatura, usted no necesita ponerlos en contacto térmico y monitorear si la energía térmica se transfiere (lo cual podría ser difícil o incluso imposible en algunos casos). En lugar de esto, puede usar un termómetro y medir la temperatura de cada objeto por separado; si sus lecturas son las mismas, usted sabe que los objetos tienen la misma temperatura.

Las mediciones de la temperatura pueden tomarse usando cualquiera de varias escalas comunes. Examinemos éstas.

Escalas de temperatura

Escala Fahrenheit

Se han propuesto y usado varios sistemas para cuantificar la temperatura; los más ampliamente usados son las escalas Fahrenheit, Celsius y Kelvin. La **escala de temperatura Fahrenheit** fue propuesta en 1724 por Gabriel Fahrenheit, científico nacido en Alemania que vivía en Amsterdam. Fahrenheit también inventó el termómetro de expansión de mercurio. La escala Fahrenheit ha pasado a través de varias iteraciones. Fahrenheit finalmente definió la unidad de la escala Fahrenheit ($^{\circ}\text{F}$), al fijar 0°F para la temperatura de un baño de agua con sal, 32°F para el punto de congelación del agua y 96°F para la temperatura del cuerpo humano, medida bajo el brazo. Más tarde, otros científicos definieron el punto de ebullición del agua como de 212°F . Esta escala de temperatura se usa ampliamente en Estados Unidos.



Agua con hielo
 0°C

a)



Agua hirviendo
 100°C

b)

FIGURA 17.2 Una esfera de aluminio hueca se embona con un manómetro y se llena con nitrógeno gaseoso. a) El recipiente se mantiene a 0°C , colocándolo en agua con hielo. b) El recipiente se mantiene a 100°C , colocándolo en agua hirviendo.

Escala Celsius

Anders Celsius, astrónomo sueco, propuso la **escala de temperatura Celsius**, a menudo llamada la **escala centígrada**, en 1742. Varias iteraciones de esta escala dieron por resultado la unidad de la escala Celsius ($^{\circ}\text{C}$) determinada al establecer el punto de congelamiento del agua en 0°C y el punto de ebullición del agua en 100°C (a presión atmosférica normal). Esta escala de temperatura se usa en todo el mundo, excepto en Estados Unidos.

Escala Kelvin

En 1848, William Thomson (Lord Kelvin), físico inglés, propuso otra escala de temperatura, la cual se llama ahora la **escala de temperatura Kelvin**. Esta escala está basada en la existencia del **cero absoluto**, la temperatura mínima posible.

Se estudió el comportamiento de la presión de los gases a un volumen fijo como función de la temperatura, y el comportamiento observado se extrapoló a presión cero para establecer esta temperatura de cero absoluto. Para ver cómo funciona esto, suponga que tiene un volumen fijo de nitrógeno gaseoso en un recipiente de aluminio esférico hueco conectado a un manómetro (figura 17.2). Hay suficiente nitrógeno gaseoso en el recipiente de manera que cuando el recipiente se sumerge en un baño de agua con hielo, el manómetro marca 0.200 atm . Entonces ponemos el recipiente en agua hirviendo. El manómetro marca ahora 0.273 atm . Por lo tanto, la presión se ha incrementado mientras el volumen ha permanecido constante. Suponga que repetimos el procedimiento con distintas presiones iniciales. La figura 17.3 resume estos resultados, con las cuatro líneas sólidas representando las diferentes presiones iniciales. Usted puede ver que la presión del gas baja conforme la temperatura decrece. A la inversa, bajar la presión de un gas debe bajar su temperatura. Teóricamente, la menor temperatura de un gas puede determinarse extrapolando el comportamiento medido hasta que la presión se hace cero. Las líneas punteadas en la figura 17.3 muestran las extrapolaciones.

Las relaciones entre presión, volumen y temperatura de un gas es el tema central del capítulo 19. Sin embargo, por lo pronto, usted sólo necesita entender la siguiente observación: los datos de los cuatro conjuntos de observaciones comenzando a diferentes presiones iniciales se extrapolan a la misma temperatura a la presión cero. Esta temperatura se llama **cero absoluto** y corresponde a -273.15°C . Cuando los investigadores intentan disminuir la temperatura del nitrógeno gaseoso

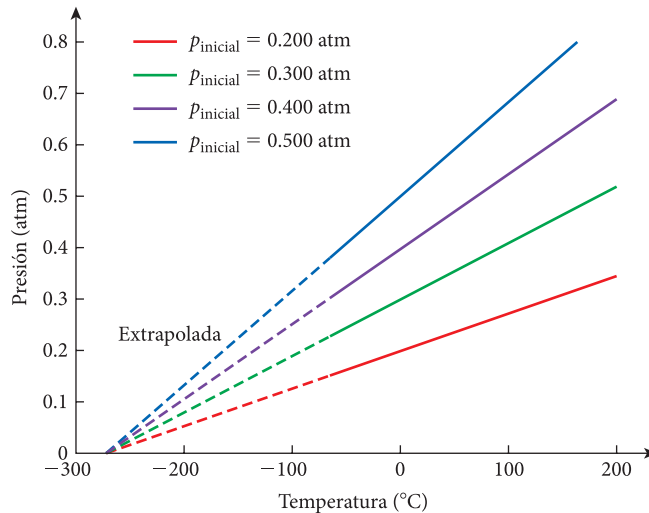


FIGURA 17.3 Líneas sólidas: presiones de un gas medidas a volumen fijo y diferentes temperaturas. Cada línea representa un experimento comenzando a distintas presiones iniciales. Líneas punteadas: extrapolación de la presión de nitrógeno gaseoso en un volumen fijo conforme disminuye la temperatura.

real a temperaturas muy bajas, la relación lineal se interrumpe debido a que el nitrógeno gaseoso se licua, trayendo consigo las interacciones entre las moléculas de nitrógeno. Además, los diferentes gases muestran un comportamiento un poco diferente a temperaturas muy bajas. Sin embargo, para presiones bajas y temperaturas relativamente altas, este resultado general se mantiene.

El cero absoluto es la menor temperatura a la cual la materia podría existir en teoría. (Experimentalmente, es imposible alcanzar el cero absoluto, de la misma forma en que es imposible construir una máquina de movimiento perpetuo.) Veremos en el capítulo 19 que la temperatura corresponde al movimiento a escala atómica y molecular, así es que hacer que un objeto alcance el cero absoluto implicaría que todo el movimiento de los átomos y moléculas del objeto cesara. Sin embargo, se requiere algún movimiento de este tipo según la mecánica cuántica. Ésta se llama en ocasiones la **tercera ley de la termodinámica** y significa que nunca se puede lograr en realidad el cero absoluto.

Kelvin usó el tamaño del grado Celsius ($^{\circ}\text{C}$) como el tamaño de la unidad de su escala de temperatura, llamado ahora el **kelvin** (K). En la escala Kelvin, el punto de congelación del agua es de 273.15 K y el punto de ebullición del agua es de 373.15 K. Esta escala de temperatura se usa en muchos cálculos científicos, como veremos en los próximos capítulos. Debido a estas consideraciones, el kelvin es la unidad normal para la temperatura en el SI. Para conseguir una mayor consistencia, los científicos han propuesto definir al kelvin en términos de otras constantes fundamentales, en lugar de en términos de las propiedades del agua. Está programado que estas nuevas definiciones tengan efecto para el año 2011.

17.2 Rangos de temperatura

Las mediciones de temperatura abarcan un amplio rango (mostrado en la figura 17.4, usando una escala logarítmica), desde las mayores temperaturas medidas ($2 \cdot 10^{12}$ K), observadas en las colisiones de iones pesados relativistas (RHIC), a las menores temperaturas medidas ($1 \cdot 10^{-10}$ K), observadas en sistemas de espín en los átomos de rodio. Se estima que la temperatura en el centro del Sol es de $15 \cdot 10^6$ K, y se ha medido en la superficie del Sol como de 5 780 K. La menor temperatura medida del aire en la superficie terrestre es de 183.9 K (-89.2°C) en la Antártida; la mayor temperatura medida del aire en la superficie terrestre es de 330.8 K (57.7°C) en el desierto de Sahara en Libia. Usted puede ver en la figura 17.4 que el rango de temperatura observada en la superficie terrestre cubre sólo una pequeña fracción del rango de temperaturas observadas. La radiación cósmica de fondo en microondas dejada atrás por el Big Bang de hace 13.7 mil millones de años tiene una temperatura de 2.73 K (la cual es la temperatura del espacio intergaláctico “vacío”), una observación que se explicará con más detalle en capítulos posteriores. En la figura 17.4, usted puede ver que las temperaturas logradas en las colisiones de iones pesados relativistas son 300 millones de veces mayores que la temperatura superficial del Sol y que las temperaturas de los átomos medidas en las trampas de iones son más de mil millones de veces inferiores que la temperatura del espacio intergaláctico.

17.1 Ejercicio en clase

¿Cuál de las siguientes temperaturas es la más fría?

- a) 10°C c) 10 K
b) 10°F

17.2 Ejercicio en clase

¿Cuál de las siguientes temperaturas es la más caliente?

- a) 300°C c) 300 K
b) 300°F

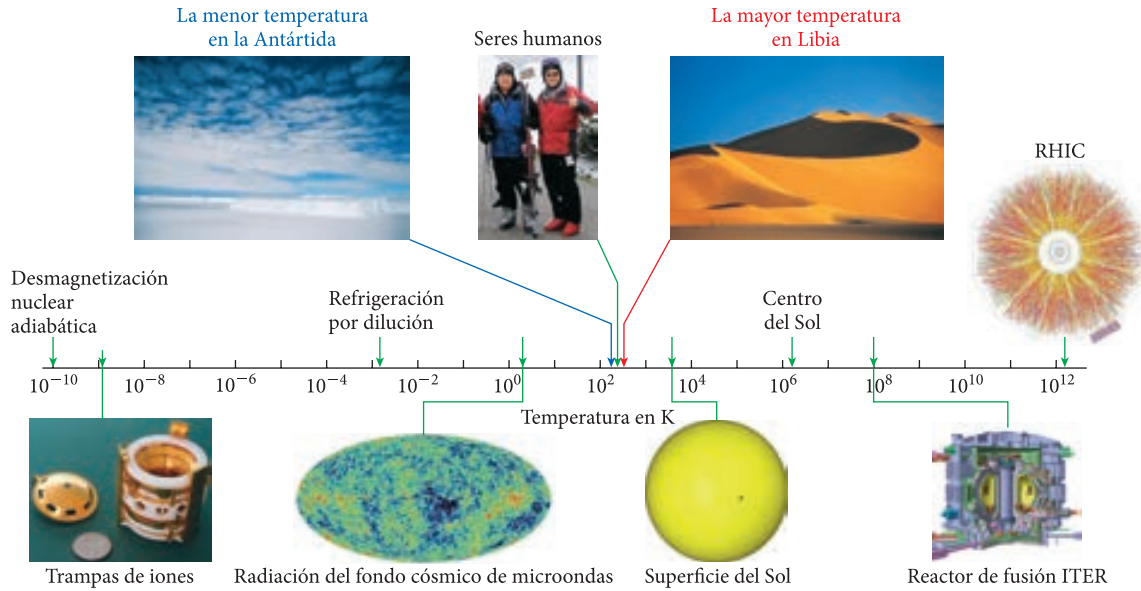


FIGURA 17.4 Rango de las temperaturas observadas, graficadas en una escala logarítmica.

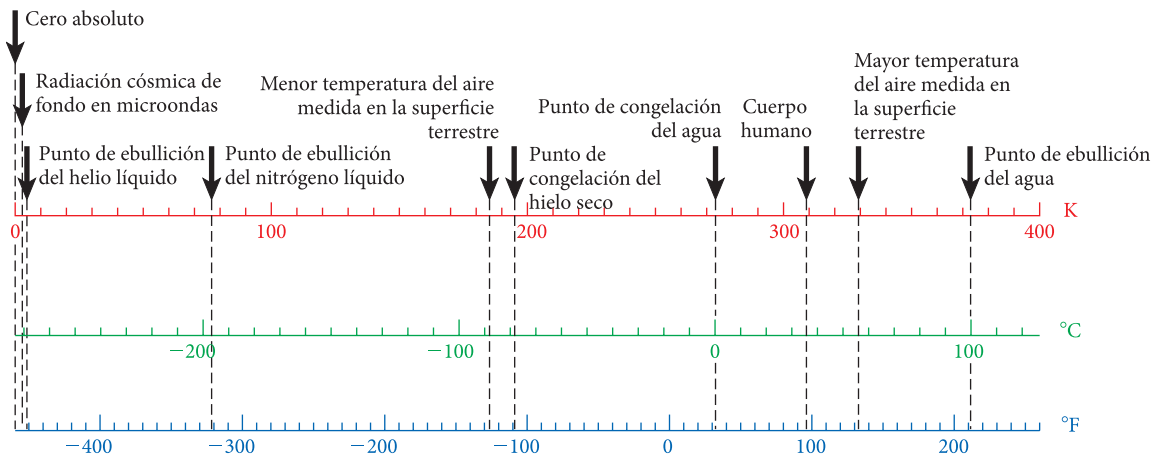


FIGURA 17.5 Temperaturas representativas, expresadas en tres escalas de temperatura comunes.

La figura 17.5 muestra algunas temperaturas representativas sobre el cero absoluto y bajo 400 K, expresados en las escalas Fahrenheit, Celsius y Kelvin. El rango de temperaturas se muestra en una escala lineal.

En las siguientes fórmulas de conversión entre las diversas escalas de temperatura, la temperatura Fahrenheit es T_F , medida en °F; la temperatura Celsius es T_C , medida en °C, y la temperatura Kelvin es T_K , medida en K.

Fahrenheit a Celsius:

$$T_C = \frac{5}{9}(T_F - 32 \text{ °F}). \tag{17.1}$$

Celsius a Fahrenheit:

$$T_F = \frac{9}{5}T_C + 32 \text{ °C}. \tag{17.2}$$

Celsius a Kelvin:

$$T_K = T_C + 273.15 \text{ °C}. \tag{17.3}$$

Kelvin a Celsius:

$$T_C = T_K - 273.15 \text{ K}. \tag{17.4}$$

17.1 Oportunidad de autoexamen

¿A qué temperatura tienen el mismo valor numérico las escalas Fahrenheit y Celsius?

La temperatura media del cuerpo humano tomada oralmente es de $36.8\text{ }^{\circ}\text{C}$, la cual corresponde a $98.2\text{ }^{\circ}\text{F}$. La temperatura oral media comúnmente citada es de $98.6\text{ }^{\circ}\text{F}$ y corresponde a la medición del siglo XIX de $37\text{ }^{\circ}\text{C}$. Esta temperatura se resalta en el termómetro oral de mercurio en la figura 17.6. La diferencia entre $98.6\text{ }^{\circ}\text{F}$ y $98.2\text{ }^{\circ}\text{F}$ corresponde así al error debido a redondear las mediciones en la escala Celsius de las temperaturas del cuerpo humano con dos dígitos. La tabla 17.1 lista las temperaturas del cuerpo humano y otras temperaturas representativas, expresadas en tres escalas de temperatura.



FIGURA 17.6 Un termómetro oral, de expansión de mercurio.

EJEMPLO 17.1 Temperatura ambiente

A menudo se menciona la temperatura ambiente como de $72.0\text{ }^{\circ}\text{F}$.

PROBLEMA

¿Cuál es la temperatura ambiente en las escalas Celsius y Kelvin?

SOLUCIÓN

Usando la ecuación 17.1, podemos convertir la temperatura ambiente de grados Fahrenheit a grados Celsius:

$$T_{\text{C}} = \frac{5}{9}(72\text{ }^{\circ}\text{F} - 32\text{ }^{\circ}\text{F}) = 22.2\text{ }^{\circ}\text{C}.$$

Usando la ecuación 17.3, podemos expresar la temperatura ambiente en kelvin como

$$T_{\text{K}} = 22\text{ }^{\circ}\text{C} + 273.15\text{ }^{\circ}\text{C} = 295\text{ K}.$$

Investigación en la frontera de las bajas temperaturas

¿Cómo se logran temperaturas muy bajas en el laboratorio? Los investigadores comienzan por tomar ventaja de los gases relacionadas como su presión, volumen y temperatura (de nuevo, el capítulo 19 se adentrará en estas propiedades con mucha mayor profundidad). Además, los cambios de fase (discutidos en el capítulo 18) de líquido a gas y de nuevo a líquido son cruciales para producir temperaturas bajas en el laboratorio. Por lo pronto, todo lo que necesita saber

Tabla 17.1 Varias temperaturas, expresadas en las tres escalas de temperatura más comúnmente usadas

	Fahrenheit ($^{\circ}\text{F}$)	Celsius ($^{\circ}\text{C}$)	Kelvin (K)
Cero absoluto	-459.67	-273.15	0
Punto de congelación del agua	32	0	273.15
Punto de ebullición del agua	212	100	373.15
Temperatura típica del cuerpo humano	98.2	36.8	310
Mínima temperatura del aire medida	-129	-89.2	184
Máxima temperatura del aire medida	136	57.8	331
Menor temperatura jamás medida en el laboratorio	-459.67	-273.15	$1.0 \cdot 10^{-10}$
Mayor temperatura jamás medida en el laboratorio	$3.6 \cdot 10^{12}$	$2 \cdot 10^{12}$	$2 \cdot 10^{12}$
Radiación del fondo cósmico de microondas	-454.76	-270.42	2.73
Punto de ebullición del nitrógeno líquido	-321	-196	77.3
Punto de ebullición del helio líquido	-452	-269	4.2
Temperatura en la superficie del Sol	11 000	6 000	6 300
Temperatura en el centro del Sol	$27 \cdot 10^6$	$15 \cdot 10^6$	$15 \cdot 10^6$
Temperatura promedio en la superficie terrestre	59	15	288
Temperatura en el centro de la Tierra	12 000	6 700	7 000



a)



b)

FIGURA 17.7 a) Un refrigerador de dilución comercial. b) Interior de un refrigerador de dilución con el recipiente de $^3\text{He}/^4\text{He}$ (mezclador) y el recipiente de extracción de ^3He (alambique).



FIGURA 17.8 Dispositivo de enfriamiento por láser para enfriar átomos de sodio atrapados.

es que cuando un líquido se evapora, la energía requerida para cambiar el líquido a gas es tomada del líquido; por lo tanto, el líquido se enfría. Por ejemplo, el aire se licua mediante un proceso de múltiples etapas en el cual el aire se comprime y se enfría removiendo el calor producido por la etapa de compresión. Entonces, el hecho de que distintos gases tienen diferentes temperaturas a las cuales se licuan permite separar al nitrógeno líquido y el oxígeno líquido. A presión atmosférica normal, el nitrógeno líquido tiene un punto de ebullición de 77 K, en tanto que el oxígeno líquido tiene un punto de ebullición de 90 K. El nitrógeno líquido tiene muchas aplicaciones, entre las cuales se encuentran las importantes demostraciones en el salón de clases.

Temperaturas incluso menores se logran usando el proceso de compresión, con el nitrógeno líquido extrayendo el calor conforme se comprime el helio. El helio líquido hierve a 4.2 K. Comenzando con helio líquido y reduciendo la presión de manera que se evapore, los investigadores pueden enfriar el líquido restante hasta más o menos 1.2 K. Para el isótopo helio-3 (^3He), se puede alcanzar una temperatura tan baja como 0.3 K con la técnica de enfriamiento por evaporación.

Para alcanzar temperaturas aún menores, los investigadores usan un aparato llamado *refrigerador de dilución* (vea la figura 17.7). Un refrigerador de dilución usa dos isótopos de helio: ^3He (dos protones y un neutrón) y ^4He (dos protones y dos neutrones). Cuando la temperatura de una mezcla de ^3He líquido y ^4He líquido se reduce a menos que 0.7 K, los dos gases se separan en una fase deficiente en ^3He y en una fase deficiente en ^4He . Se requiere energía para mover los átomos de ^3He hacia la fase deficiente en ^3He . Si se puede forzar a los átomos a cruzar la frontera entre las dos fases, la mezcla se puede enfriar de manera semejante al enfriamiento evaporativo. Un refrigerador de dilución puede enfriar hasta temperaturas alrededor de 10 mK y los mejores modelos comerciales pueden alcanzar 2 mK.

Temperaturas incluso menores se pueden lograr con un gas de átomos confinados en una trampa. Para alcanzar estas temperaturas, los investigadores usan técnicas tales como enfriamiento con láser. El enfriamiento con láser saca ventaja de la estructura electrónica de ciertos átomos. Las transiciones entre los niveles de energía electrónicos específicos en un átomo pueden hacer que se emitan fotones con una longitud de onda cercana a la luz visible. También puede ocurrir el proceso inverso, en el cual los átomos absorben fotones. Para enfriar átomos usando el enfriamiento por láser, los investigadores usan un láser que emite luz con una longitud de onda muy específica, que es mayor que la longitud de onda de la luz emitida durante una transición atómica. De esta forma, cualquier átomo que se mueve acercándose al láser experimenta una longitud de onda ligeramente menor debido al efecto Doppler (vea el capítulo 16), en tanto que cualquier átomo que se mueve alejándose del láser experimenta una longitud de onda mayor. Los átomos que se mueven hacia el láser absorben fotones, pero los átomos que se mueven alejándose del láser no son afectados. Los átomos que absorben fotones los reemiten en direcciones aleatorias, enfriando efectivamente a los átomos. Se han logrado temperaturas que se aproximan a los 10^{-9} K usando este método (figura 17.8). Se le otorgó el Premio Nobel de Física 1997 a Steven Chu, Claude Cohen-Tannoudji y William D. Phillips por su trabajo con el enfriamiento con láser.

Las temperaturas más frías logradas en el laboratorio se han conseguido usando una técnica llamada *desmagnetización nuclear adiabática*. La muestra, típicamente una pieza de rodio metálico, se enfría primero usando un refrigerador de dilución. Entonces, se aplica un fuerte campo magnético. Se produce una pequeña cantidad de calor en el rodio metálico, el cual es removido por el refrigerador de dilución. Entonces, el campo magnético se apaga lentamente. Conforme se reduce el campo magnético, el rodio metálico se enfría aún más, alcanzando temperaturas tan bajas como 10^{-10} K.

Investigación en la frontera de las altas temperaturas

¿Cómo se logran altas temperaturas en el laboratorio? Los métodos más comunes son quemando combustibles o creando explosiones. Por ejemplo, la parte amarilla de la llama de una vela tiene una temperatura de 1 470 K.

El reactor de fusión ITER, que será construido para 2016 en Cadarache, Francia (figura 17.9) está diseñado para fusionar los isótopos de hidrógeno, deuterio (^2H) y tritio (^3H) para producir helio (^4He) más un neutrón, liberando energía. Este proceso de fusión nuclear es semejante al proceso que usa el Sol para fusionar el hidrógeno en helio y por consiguiente producir energía. En el Sol, la enorme fuerza gravitatoria comprime y calienta los núcleos de hidrógeno para producir fusión. En el ITER, el confinamiento magnético se usará para sujetar al hidrógeno ionizado en

la forma de plasma. Un *plasma* es un estado de la materia en el cual los electrones y los núcleos se mueven por separado. Un plasma no puede contenerse en un recipiente físico, porque está tan caliente que cualquier contacto con éste vaporizaría al recipiente. En el reactor de fusión, el plasma se calienta haciendo fluir una corriente a través de éste. Adicionalmente, se comprime el plasma y se calienta aún más por el campo magnético aplicado. A altas temperaturas, hasta $9.9 \cdot 10^7$ K, y altas densidades, ITER producirá energía útil a partir de la fusión de hidrógeno en helio.

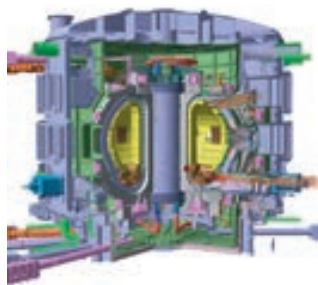


FIGURA 17.9 Dibujo en sección del núcleo central de ITER, el reactor de fusión de plasma que será construido en Francia para el año 2016. Con el propósito de comparar el tamaño, se muestra una persona parada en la base.

Es posible conseguir temperaturas incluso más altas en los aceleradores de partículas. Las mayores temperaturas se han alcanzado haciendo colisionar núcleos de oro acelerados en el Colisionador de Iones Pesados en el Laboratorio Nacional de Brookhaven y el Gran Colisionador de Hadrones en el laboratorio europeo CERN. Cuando colisionan dos núcleos de oro, se crea un sistema muy caliente con una temperatura de $2 \cdot 10^{12}$ K; este sistema es también muy pequeño ($\sim 10^{-14}$ m) y existe por periodos muy cortos ($\sim 10^{-22}$ s).

17.3 Medición de la temperatura

¿Cómo se miden las temperaturas? Un dispositivo que mide la temperatura se llama *termómetro*. Cualquier termómetro que puede calibrarse directamente usando una propiedad física se llama *termómetro primario*. Un termómetro primario no necesita calibración con temperaturas estándar externas. Un ejemplo de un termómetro primario es uno basado en la velocidad del sonido en un gas. Un *termómetro secundario* es aquel que requiere una calibración externa con referencias de temperatura estándar. A menudo, los termómetros secundarios son más sensibles que los termómetros primarios.

Un termómetro común es el termómetro de expansión de mercurio, el cual es un termómetro secundario. Este tipo de termómetro saca provecho de la expansión térmica del mercurio (discutida en la sección 17.4). Otros tipos de termómetros incluyen los termómetros bimetalícos, termopares, quimoluminiscencia y termistores. También es posible medir la temperatura de un sistema estudiando la distribución de las velocidades de las moléculas dentro del material constituyente.

Para medir la temperatura de un objeto o un sistema usando un termómetro, éste debe colocarse en contacto térmico con el objeto o el sistema. (El *contacto térmico* es el contacto físico que permite una transferencia de calor relativamente rápida.) El calor se transferirá entonces desde o hacia el objeto o sistema hacia o desde el termómetro, hasta que tengan la misma temperatura. Un buen termómetro debería requerir tan poca energía térmica como fuese posible para alcanzar el equilibrio térmico, de tal manera que no se cambie significativamente la temperatura del objeto. Un termómetro también debería calibrarse con facilidad, de tal suerte que cualquiera que esté tomando las mediciones obtenga la misma temperatura.

Calibrar un termómetro requiere condiciones reproducibles. Es difícil reproducir el punto de congelación del agua exactamente, así que los científicos usan una condición llamada el *punto triple del agua*. El hielo sólido, el agua líquida y el vapor de agua gaseoso pueden coexistir sólo en una temperatura y presión. Por acuerdo internacional, la temperatura del punto triple del agua ha sido asignado a una temperatura de 273.16 K (y una presión de 611.73 Pa) para la calibración de los termómetros.

17.4 Expansión térmica

La mayoría está familiarizada de alguna forma con la **expansión térmica** (también llamada **dilatación térmica**). Quizás usted sepa que puede aflojar la tapa metálica de un frasco calentando la tapa. Usted puede haber visto que los tramos de un puente tienen espacios en la calzada para permitir la expansión de las secciones del puente en tiempos calurosos. O puede haber observado que las líneas de transmisión de energía se pandean en tiempos calurosos.

La expansión térmica de los líquidos y los sólidos puede ponerse en uso práctico. Las tiras bimetálicas, las cuales se usan a menudo en los termostatos de las habitaciones, termómetros para carne y dispositivos de protección térmica en el equipo eléctrico, sacan provecho de la expansión térmica

17.2 Oportunidad de autoexamen

Usted tiene un termómetro sin calibrar, el cual está indicado para usarse para medir la temperatura del aire. ¿Cómo calibraría el termómetro?

Tabla 17.2 Los coeficientes de expansión lineal de algunos materiales comunes

Material	$\alpha(10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1})$
Aluminio	22
Latón	19
Concreto	15
Cobre	17
Diamante	1
Oro	14
Plomo	29
Vidrio plano	9
Hule	77
Acero	13
Tungsteno	4.5

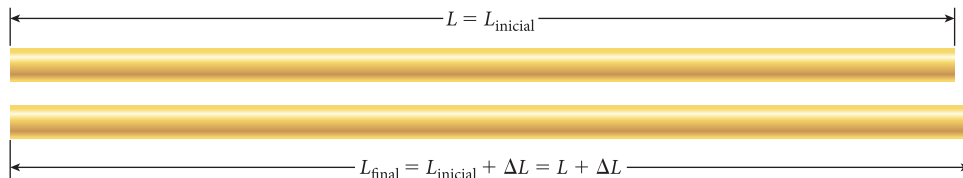


FIGURA 17.10 La expansión térmica de una barra con una longitud inicial L . (La barra expandida térmicamente en la parte inferior se ha desplazado de tal manera que los bordes de la izquierda coincidan.)

lineal. (Una tira bimetalica consiste en dos tiras largas y delgadas de metales diferentes, las cuales están soldadas una con la otra.) Un termómetro de mercurio usa la expansión volumétrica para proporcionar mediciones precisas de la temperatura. La expansión térmica también puede ocurrir como una expansión lineal, expansión superficial o expansión volumétrica; las tres clasificaciones describen el mismo fenómeno.

Expansión lineal

Consideremos una barra metálica con una longitud L (figura 17.10). Si elevamos la temperatura de la barra por $\Delta T = T_{\text{final}} - T_{\text{inicial}}$, la longitud de la barra se incrementa por la cantidad $\Delta L = L_{\text{final}} - L_{\text{inicial}}$, dado por

$$\Delta L = \alpha L \Delta T, \tag{17.5}$$

donde α es el **coeficiente de expansión lineal** del metal del cual está construida la barra y la diferencia de temperatura se expresa en grados Celsius o en kelvins. El coeficiente de expansión lineal (también llamado coeficiente de dilatación lineal) es una constante para un material dado dentro de los rangos de temperatura normales. Algunos coeficientes de expansión lineal típicos se listan en la tabla 17.2.

EJEMPLO 17.2

Expansión térmica del puente Mackinac

El tramo principal del puente Mackinac (figura 17.11) tiene una longitud de 1 158 m. El puente está construido de acero. Suponga que la menor temperatura posible experimentada por el puente es de $-50 \text{ }^\circ\text{C}$ y la mayor temperatura posible es de $50 \text{ }^\circ\text{C}$.

PROBLEMA

¿Cuánto espacio debe estar disponible para la expansión térmica del tramo central del puente Mackinac?

SOLUCIÓN

El coeficiente de expansión lineal del acero es $\alpha = 13 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$. De esta manera, la expansión lineal total del tramo central del puente que debe permitirse para dar holgura está dado por

$$\Delta L = \alpha L \Delta T = (13 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1})(1158 \text{ m})[50 \text{ }^\circ\text{C} - (-50 \text{ }^\circ\text{C})] = 1.5 \text{ m}.$$

EXPLICACIÓN

Un cambio de longitud de 1.5 m es bastante grande. ¿Cómo se puede acomodar este cambio de longitud en la práctica? (Obviamente, no podemos dejar espacios en la superficie de la calle.)

La respuesta yace en las juntas de expansión, las cuales son conectores metálicos entre los segmentos cuyas partes se pueden mover una con relación a la otra. Un tipo popular de junta de expansión es la junta con forma de dedos (vea la figura 17.12). El puente de Mackinac tiene dos grandes juntas de dedos en las torres para acomodar la expansión de las partes suspendidas de la calzada y once juntas de dedo más pequeñas y cinco juntas de deslizamiento a través del tramo principal del puente.



FIGURA 17.11 El puente Mackinac a través de los estrechos de Mackinac en Michigan es el tercer puente más largo de suspensión en Estados Unidos.

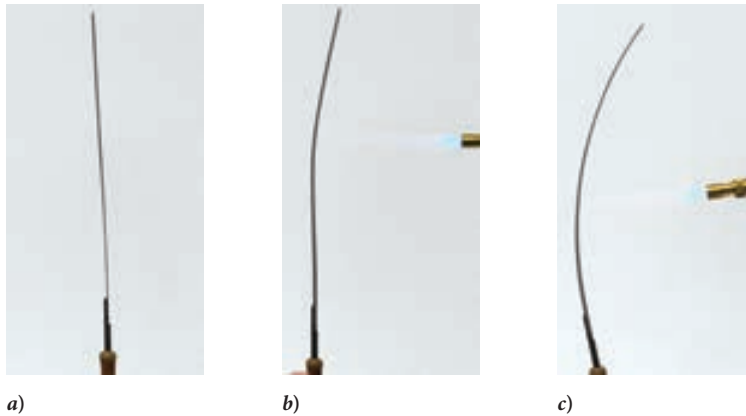


FIGURA 17.12 Juntas de dedo entre los segmentos de la calle: a) abiertas y b) cerradas.

Usted puede ver en la tabla 17.2 que los diversos materiales, tales como el latón y el acero, tienen diferentes coeficientes de expansión lineal. Esto les hace útiles en las tiras bimetalicas. El siguiente problema resuelto considera el resultado de calentar una tira bimetalica.

PROBLEMA RESUELTO 17.1 Tira bimetalica

Una tira bimetalica recta consiste en una tira de acero y una tira de latón, cada una de 1.25 cm de ancho y 30.5 cm de longitud, soldadas una con la otra [vea la figura 17.13a)]. Cada tira tiene un espesor $t = 0.500$ mm. La tira bimetalica se calienta uniformemente a lo largo de su longitud, como se muestra en la figura 17.13c). (No importa si la llama está a la derecha; el calentamiento es uniforme por toda la tira. Si la llama estuviese a la izquierda, ¿la tira se doblaría en la misma dirección!) La tira se curva de tal forma que su radio de curvatura es $R = 36.9$ cm.



17.3 Ejercicio en clase

Una sección de concreto de un puente tiene una longitud de 10.0 m a 10.0 °C. ¿Cuánto se incrementa la longitud de la sección de concreto si la temperatura aumenta a 40.0 °C?

- a) 0.025 cm d) 0.22 cm
b) 0.051 cm e) 0.45 cm
c) 0.075 cm

FIGURA 17.13 Una tira bimetalica. a) La tira bimetalica a temperatura ambiente. b) La tira bimetalica conforme comienza a ser calentada por un soplete de gas (en el borde derecho del cuadro). c) La tira bimetalica calentada a una temperatura uniforme por toda su longitud.

PROBLEMA

¿Cuál es la temperatura de la tira bimetalica después de calentarse?

SOLUCIÓN

PIENSE

La tira bimetalica está construida de dos materiales, acero y latón, los cuales tienen distintos coeficientes de expansión lineal, listados en la tabla 17.2. Conforme la temperatura de la tira bimetalica se incrementa, el latón se expande más que el acero, así es que la tira se curva hacia el lado del acero. Cuando la tira bimetalica se calienta uniformemente, tanto la tira de acero como la de latón yacen a lo largo del arco de una circunferencia, con la tira de latón en la cara exterior y la tira de acero en la cara interior. Los extremos de la tira bimetalica subtenden el mismo ángulo, medido desde el centro de la circunferencia. La longitud del arco de cada tira metálica entonces es igual a la longitud de la tira bimetalica a la temperatura ambiente más la longitud debida a la expansión térmica lineal. Igualar el ángulo subtendido por la tira de acero con el ángulo subtendido por la tira de latón permitirá que se calcule la temperatura.

ESBOCE

La figura 17.14 muestra la tira bimetalica después de haber sido calentada. El ángulo subtendido por los dos extremos de la tira es θ , y el radio de la tira interior es r_1 . Una porción de la circunferencia con radio $r_1 = 36.9$ cm se superpone en la tira curva.

INVESTIGUE

La longitud del arco, s_1 , de la tira de acero calentado es $s_1 = r_1\theta$, donde r_1 es el radio de la circunferencia a lo largo de la cual yace la tira de acero y θ es el ángulo subtendido por la tira de acero. También, la longitud del arco, s_2 , de la tira de latón es $s_2 = r_2\theta$,

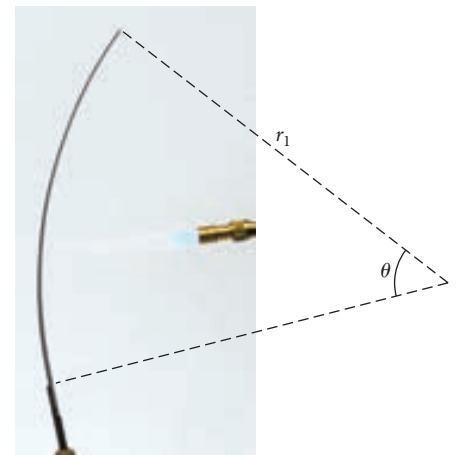


FIGURA 17.14 La tira bimetalica después de ser calentada que muestra el ángulo subtendido por los dos extremos de la tira.

(continúa)

(continuación)

donde r_2 es el radio de la circunferencia a lo largo de la cual yace la tira de latón y θ es el mismo ángulo que el que subtende la tira de acero. Los dos radios difieren por el espesor, t , de la tira de acero:

$$r_2 = r_1 + t \Leftrightarrow t = r_2 - r_1. \quad (\text{i})$$

Podemos igualar las expresiones que son iguales al ángulo subtendido por las dos tiras:

$$\theta = \frac{s_1}{r_1} = \frac{s_2}{r_2}. \quad (\text{ii})$$

La longitud del arco, s_1 , de la tira de acero después de calentarse está dada por

$$s_1 = s + \Delta s_1 = s + \alpha_1 s \Delta T = s(1 + \alpha_1 \Delta T),$$

donde s es la longitud original de la tira bimetalica. El factor α_1 es el coeficiente de expansión lineal del acero en la tabla 17.2 y ΔT es la diferencia de temperatura entre la temperatura ambiente y la temperatura final de la tira bimetalica. De manera correspondiente, el arco de longitud, s_2 , de la tira de latón después de calentarse está dada por

$$s_2 = s + \Delta s_2 = s + \alpha_2 s \Delta T = s(1 + \alpha_2 \Delta T),$$

donde α_2 es el coeficiente de expansión lineal del latón dado en la tabla 17.2.

SIMPLIFIQUE

Podemos sustituir las expresiones para las longitudes de los arcos de las dos tiras después de calentarse, s_1 y s_2 , en la ecuación (ii) para obtener

$$\frac{s(1 + \alpha_1 \Delta T)}{r_1} = \frac{s(1 + \alpha_2 \Delta T)}{r_2}.$$

Al dividir ambos lados de la ecuación entre el factor común s y multiplicando por $r_1 r_2$ nos da

$$r_2 + r_2 \alpha_1 \Delta T = r_1 + r_1 \alpha_2 \Delta T.$$

Podemos reordenar esta ecuación y recolectar los términos comunes para obtener

$$r_2 - r_1 = r_1 \alpha_2 \Delta T - r_2 \alpha_1 \Delta T.$$

Al resolver esta ecuación para la diferencia de temperaturas brinda

$$\Delta T = \frac{r_2 - r_1}{r_1 \alpha_2 - r_2 \alpha_1}.$$

Usar la relación entre los dos radios de la ecuación (i) conduce a

$$\Delta T = \frac{t}{r_1(\alpha_2 - \alpha_1) - t\alpha_1}. \quad (\text{iii})$$

CALCULE

De la tabla 17.2, el coeficiente de expansión lineal del acero es $\alpha_1 = 13 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$, y el coeficiente de expansión lineal para el latón es $\alpha_2 = 19 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$. Al sustituir los valores numéricos nos da

$$\Delta T = \frac{0.500 \cdot 10^{-3} \text{ m}}{(0.369 \text{ m})(19 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1} - 13 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}) - (0.500 \cdot 10^{-3} \text{ m})(13 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1})} = 226.5 \text{ }^\circ\text{C}.$$

REDONDEE

Tomando la temperatura como $20 \text{ }^\circ\text{C}$ y reportando nuestro resultado con dos cifras significativas nos da la temperatura de la tira bimetalica después de calentarse:

$$T = 20 \text{ }^\circ\text{C} + \Delta T = 250 \text{ }^\circ\text{C}.$$

VUELVA A REVISAR

Primero, verificamos que la magnitud de la temperatura calculada es razonable. Nuestra respuesta de $250 \text{ }^\circ\text{C}$ está bastante por debajo de los puntos de fusión del latón ($900 \text{ }^\circ\text{C}$) y del acero ($1450 \text{ }^\circ\text{C}$), lo cual es importante debido a que la figura 17.13c muestra que la tira no se funde. Nuestra respuesta también se encuentra significativamente sobre la temperatura ambiente, lo cual es importante debido a que la figura 17.13a muestra que la tira bimetalica está derecha a la temperatura ambiente.

También podemos verificar que las tiras de acero y latón subtenden el mismo ángulo. El ángulo subtendido por la tira de acero es

$$\theta_1 = \frac{s_1}{r_1} = \frac{30.5 \text{ cm} + (30.5 \text{ cm})(13 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1})(226.5 \text{ }^\circ\text{C})}{36.9 \text{ cm}} = 0.829 \text{ rads} \equiv 47.5^\circ.$$

El ángulo subtendido por la tira de latón es

$$\theta_2 = \frac{s_2}{r_2} = \frac{30.5 \text{ cm} + (30.5 \text{ cm})(19 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1})(226.5 \text{ }^\circ\text{C})}{36.9 \text{ cm} + 0.05 \text{ cm}} = 0.829 \text{ rads} \equiv 47.5^\circ.$$

Note que, debido a que el espesor de las tiras es pequeño comparado con el radio de la circunferencia, podemos escribir la ecuación (iii) como

$$\Delta T \approx \frac{t}{r_1(\alpha_2 - \alpha_1)} = \frac{0.500 \cdot 10^{-3} \text{ m}}{(0.369 \text{ m})(19 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1} - 13 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1})} = 226 \text{ }^\circ\text{C},$$

la cual está de acuerdo dentro del error de redondeo con nuestro resultado calculado. De esta forma, nuestra respuesta parece razonable.

17.4 Ejercicio en clase

Suponga que la tira bimetalica en la figura 17.13 estuviese hecha de aluminio en el lado derecho y cobre en el lado izquierdo. ¿Hacia qué lado se doblaría la tira si se calentara en la misma forma que la mostrada en la figura? (Consulte la tabla 17.2 para los coeficientes de expansión lineal de los dos metales.)

- Se doblaría hacia la derecha.
- Se quedaría recta.
- Se doblaría hacia la izquierda.

Expansión superficial

El efecto de un cambio en la temperatura sobre un área de un objeto es análogo a usar una copiadora para ampliar o reducir una fotografía. Cada dimensión del objeto cambiará linealmente con el cambio de temperatura. Cuantitativamente, para un objeto cuadrado con lado L (figura 17.15), el área está dada por $A = L^2$. Sacando la diferencial de ambos lados de esta ecuación, obtenemos $dA = 2LdL$. Si hacemos la aproximación de que $\Delta A = dA$ y $\Delta L = dL$, podemos escribir $\Delta A = 2L\Delta L$. Al usar la ecuación 17.5, obtenemos entonces

$$\Delta A = 2L(\alpha L \Delta T) = 2\alpha A \Delta T. \quad (17.6)$$

A pesar de que se usó un cuadrado para derivar la ecuación 17.6, se sostiene para un cambio de cualquier forma.

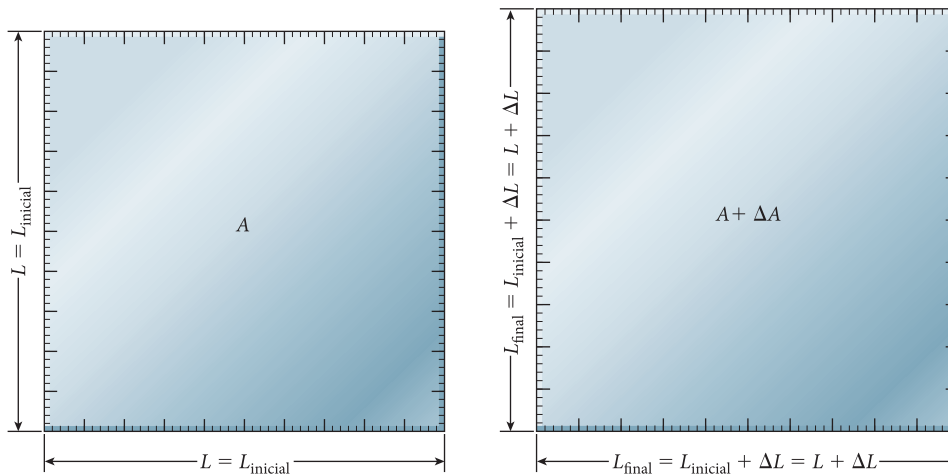


FIGURA 17.15 Expansión térmica de una placa cuadrada con lado L .

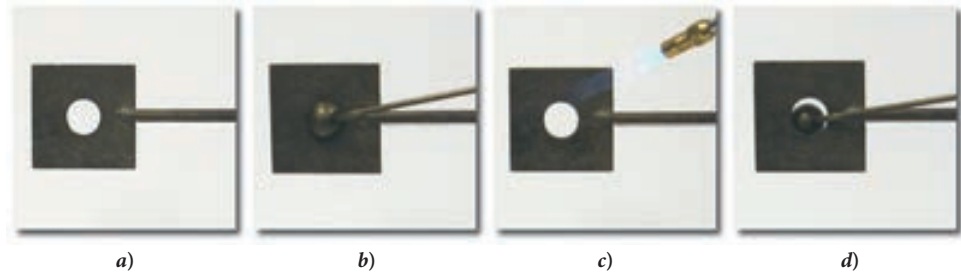
PROBLEMA RESUELTO 17.2 Expansión de una placa con un agujero

Una placa de latón tiene un agujero [figura 17.16a)] con un diámetro $d = 2.54 \text{ cm}$. El agujero es demasiado pequeño como para que una esfera de latón pase a través de éste [figura 17.6b)]. Sin embargo, cuando la placa se calienta de $20.0 \text{ }^\circ\text{C}$ a $220.0 \text{ }^\circ\text{C}$, la esfera de latón pasa a través del agujero en la placa.

(continúa)

FIGURA 17.16 *a)* La placa antes de calentarse. *b)* Una esfera de latón no pasará a través del agujero en la placa sin calentar. *c)* Se calienta la placa. *d)* La misma esfera de latón pasa a través del agujero en la placa de latón calentada.

(continuación)



PROBLEMA

¿Cuánto se incrementa el área del agujero en la placa de latón como resultado del calentamiento?

SOLUCIÓN

PIENSE

El área de la placa de latón se incrementa conforme la temperatura de la placa aumenta. Correspondientemente, el área del agujero en la placa también se incrementa. Podemos calcular el incremento en el área del agujero usando la ecuación 17.6.

ESBOCE

La figura 17.17*a)* muestra la placa de latón antes de calentarse y la figura 17.17*b)* muestra la placa después de calentarse.

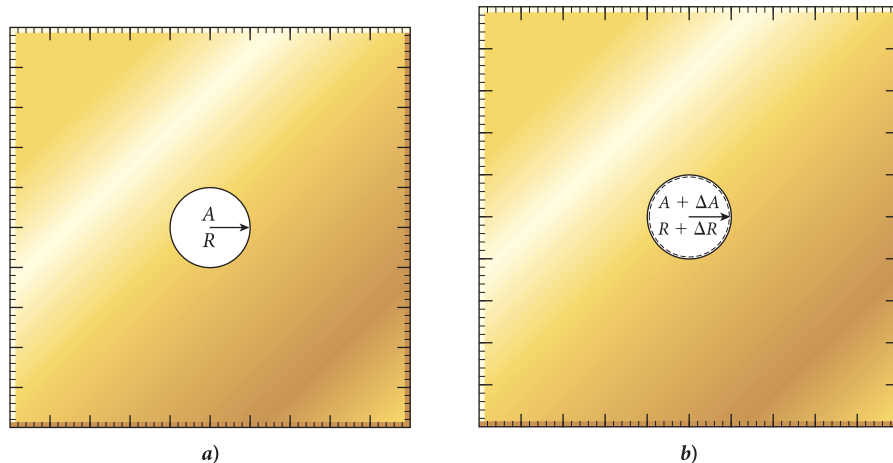


FIGURA 17.17 La expansión térmica de una placa con un agujero: *a)* antes de calentarse; *b)* después de calentarse.

INVESTIGUE

La superficie de la placa aumenta conforme la temperatura se incrementa, como lo dice la ecuación 17.6. El área del agujero se incrementará de manera proporcional. Este incremento en el área del agujero puede parecer sorprendente. Sin embargo, usted mismo puede convencerse que el área del agujero se incrementará cuando la placa experimenta expansión térmica mirando la figura 17.17. La placa con un agujero a $T = 20^\circ\text{C}$ se muestra en el inciso *a)*. La misma placa a una escala 5% mayor en todas sus dimensiones se muestra en el inciso *b)*. El círculo punteado en el agujero de la placa en *b)* es del mismo tamaño que el agujero en la placa original. Claramente, el agujero en *b)* es mayor que el agujero en *a)*. El área del agujero a $T = 20.0^\circ\text{C}$ es $A = \pi R^2$. La ecuación 17.6 brinda el cambio en el área del agujero:

$$\Delta A = 2\alpha A \Delta T,$$

donde α es el coeficiente de expansión lineal para el latón y ΔT es el cambio en la temperatura de la placa de latón.

SIMPLIFIQUE

Al usar $A = \pi R^2$ en la ecuación 17.6, tenemos el cambio en el área del agujero

$$\Delta A = 2\alpha(\pi R^2)\Delta T.$$

Al recordar que $R = d/2$, obtenemos

$$\Delta A = 2\alpha\pi\left(\frac{1}{2}d\right)^2 \Delta T = \frac{\pi\alpha d^2 \Delta T}{2}.$$

CALCULE

De la tabla 17.2, el coeficiente de expansión lineal del latón es $\alpha = 19 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$. De esta manera, el cambio en el área del agujero es

$$\Delta A = \frac{\pi(19 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1})(0.0254 \text{ m})^2(220.0 \text{ }^\circ\text{C} - 20.0 \text{ }^\circ\text{C})}{2} = 3.85098 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2.$$

REDONDEE

Reportamos nuestro resultado con dos cifras significativas:

$$\Delta A = 3.9 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2.$$

VUELVA A REVISAR

De la experiencia diaria con objetos que se calientan o enfrían, sabemos que los cambios relativos en el área no son muy grandes. Dado que el área original del agujero es $A = \pi d^2/4 = \pi(0.0254 \text{ m})^2/4 = 5.07 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$, obtenemos para el cambio fraccional $\Delta A/A = (3.9 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2)/(5.07 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2) = 7.7 \cdot 10^{-3}$, o menos que 0.8%. Así, la magnitud de nuestra respuesta parece estar alineada con la intuición física.

El cambio en el radio del agujero conforme la temperatura se incrementa está dado por

$$\Delta R = \alpha R \Delta T = (19 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1})\left(\frac{0.0254 \text{ m}}{2}\right)(200 \text{ }^\circ\text{C}) = 4.83 \cdot 10^{-5} \text{ m}.$$

Para ese cambio en el radio, el incremento en el área del agujero es

$$\Delta A = \Delta(\pi R^2) = 2\pi R \Delta R = 2\pi\left(\frac{0.0254 \text{ m}}{2}\right)(4.8 \cdot 10^{-5} \text{ m}) = 3.85 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2,$$

lo cual coincide con el error de redondeo de nuestro resultado. Así, nuestra solución parece razonable.

Expansión volumétrica

Ahora, consideremos el cambio en el volumen de un objeto con un cambio en la temperatura. Para un cubo con arista L , el volumen está dado por $V = L^3$. Sacando la derivada de ambos lados de esta ecuación, obtenemos $dV = 3L^2 dL$. Haciendo la aproximación que $\Delta V = dV$ y $\Delta L = dL$, podemos escribir $\Delta V = 3L^2 \Delta L$. Entonces, usando la ecuación 17.5, obtenemos

$$\Delta V = 3L^2(\alpha L \Delta T) = 3\alpha V \Delta T. \quad (17.7)$$

Debido a que el cambio en volumen con el cambio en la temperatura a menudo es de interés, es conveniente definir el **coeficiente de expansión volumétrica** (también llamado **coeficiente de dilatación volumétrica**):

$$\beta = 3\alpha. \quad (17.8)$$

De esta forma, podemos reescribir la ecuación 17.7 como

$$\Delta V = \beta V \Delta T. \quad (17.9)$$

A pesar de que se usó el cubo para derivar la ecuación 17.9, se puede aplicar generalmente a un cambio en el volumen de cualquier otra forma. Algunos coeficientes de expansión volumétrica típicos se listan en la tabla 17.3.

La ecuación 17.9 se aplica a la expansión térmica de la mayoría de los sólidos y líquidos. Sin embargo, no describe la expansión térmica del agua. Entre $0 \text{ }^\circ\text{C}$ y alrededor de $4 \text{ }^\circ\text{C}$, el agua se

Tabla 17.3 Coeficientes de expansión volumétrica para algunos líquidos comunes

Material	$\beta(10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1})$
Mercurio	181
Gasolina	950
Keroseno	990
Alcohol etílico	1 120
Agua ($1 \text{ }^\circ\text{C}$)	-47.8
Agua ($4 \text{ }^\circ\text{C}$)	0
Agua ($7 \text{ }^\circ\text{C}$)	45.3
Agua ($10 \text{ }^\circ\text{C}$)	87.5
Agua ($15 \text{ }^\circ\text{C}$)	151
Agua ($20 \text{ }^\circ\text{C}$)	207

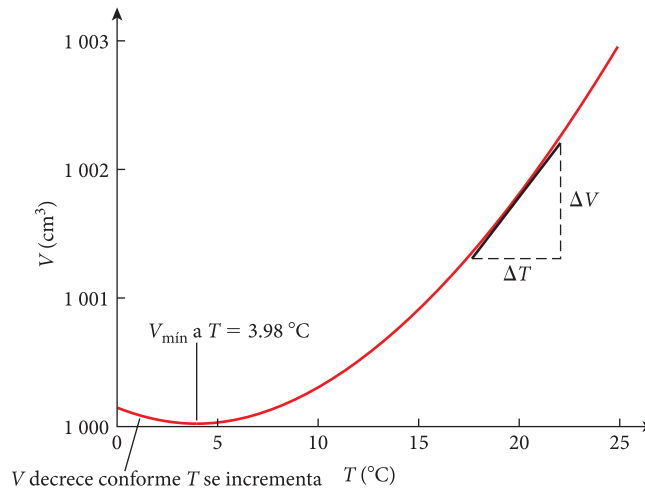


FIGURA 17.18 La dependencia del volumen de 1 kg de agua con la temperatura.

contrae conforme la temperatura crece (figura 17.18). El agua con una temperatura sobre los 4°C es más densa que el agua con una temperatura justo por debajo de los 4°C . Esta propiedad del agua tiene un efecto impresionante en la forma que los lagos se congelan en el invierno. Conforme la temperatura del aire baja entre el cálido verano y el frío invierno, el agua en el lago se enfría desde abajo de la superficie. El agua más fría y más densa se hunde al fondo del lago. Sin embargo, conforme la temperatura en la superficie del agua cae por debajo de los 4°C , este movimiento descendente cesa y el agua más fría permanece en la superficie del lago, con el agua más densa y tibia debajo. La capa superior a la larga se enfría hasta los 0°C y entonces se congela. El hielo es menos denso que el agua, así que el hielo flota sobre el agua. Esta capa de hielo recién formada actúa como un aislante, el cual reduce la rapidez de congelación del resto del agua en el lago. Si el agua tuviese las mismas propiedades de expansión térmica que otros materiales comunes, en lugar de congelarse de arriba abajo, el lago se congelaría del fondo hacia arriba, con el agua más tibia permaneciendo en la superficie del lago y el agua más fría hundiéndose hasta el fondo. Esto significaría que los lagos se congelarían del todo más a menudo y cualquier forma de vida en éstos que no pudiese existir en el hielo no sobreviviría al invierno.

Además, usted puede ver en la figura 17.18 que el volumen de una determinada cantidad de agua nunca depende linealmente de la temperatura. Sin embargo, la dependencia lineal del volumen de agua con la temperatura puede aproximarse considerando un pequeño intervalo de temperatura. La pendiente de la curva volumen/temperatura es $\Delta V/\Delta T$, así es que podemos extraer un coeficiente de expansión volumétrica efectivo para cambios de temperatura pequeños. Por ejemplo, el coeficiente de expansión volumétrica para el agua a seis distintas temperaturas se muestra en la tabla 17.3; note que a 1°C , $\beta = -47.8 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$, lo cual significa que el volumen del agua decrecerá conforme la temperatura aumenta.

17.5 Ejercicio en clase

Usted tiene un cubo metálico, el cual calienta. Después de calentarlo, el área de una de las superficies del cubo se ha incrementado por 0.02%. ¿Qué afirmación acerca del volumen del cubo después de calentado es correcta?

- Ha decrecido por 0.02%.
- Ha crecido por 0.02%.
- Ha crecido por 0.01%.
- Ha crecido por 0.03%.
- No se da suficiente información para determinar el cambio de volumen.

EJEMPLO 17.3

Expansión térmica de la gasolina

Usted mete su coche a la estación de servicio en un caluroso día de verano, cuando la temperatura del aire es de 40°C . Llena su tanque vacío de 55 L con gasolina que proviene del tanque de almacenamiento subterráneo a 12°C . Después de pagar la gasolina, decide caminar al restaurante de al lado y comer su almuerzo. Dos horas más tarde, regresa a su coche y descubre que la gasolina se ha derramado de su tanque al suelo.

PROBLEMA

¿Cuánta gasolina se ha derramado?

SOLUCIÓN

Sabemos lo siguiente: la temperatura de la gasolina que usted puso en su tanque comienza a los 12°C . La gasolina se calienta hasta llegar a la temperatura exterior de 40°C . El coeficiente de expansión volumétrica de la gasolina es de $950 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$.

Mientras usted se ausentaba, la temperatura de la gasolina cambió de 12 °C a 40 °C. Usando la ecuación 17.9, podemos encontrar el cambio en el volumen de la gasolina cuando aumenta la temperatura:

$$\Delta V = \beta V \Delta T = (950 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1})(55 \text{ L})(40 \text{ } ^\circ\text{C} - 12 \text{ } ^\circ\text{C}) = 1.5 \text{ L.}$$

De esta manera, el volumen de la gasolina se incrementó en 1.5 litros cuando la temperatura de la gasolina subió de 12 °C a 40 °C. El tanque de gasolina estaba lleno cuando la temperatura de la gasolina era de 12 °C, así es que este exceso se derramó del tanque al suelo.

17.5 Temperatura superficial de la Tierra

El reporte de las temperaturas superficiales diarias es parte de todos los reportes del clima en los periódicos y las noticias de la TV y la radio. Es claro que comúnmente hace más frío en la noche que durante el día, más frío en invierno que en verano y es más caluroso cerca del Ecuador que cerca de los polos. Un tema actual de intensa discusión es si la temperatura de la Tierra está subiendo. Una respuesta concluyente a esta pregunta requiere datos que brinden los promedios apropiados. El primer promedio que resulta útil es a lo largo del tiempo. La figura 17.19 es una gráfica de la temperatura superficial de la Tierra, promediada en el tiempo en el curso de un mes (junio de 1992).

Los valores promediados en el tiempo de la temperatura sobre la superficie entera de la Tierra se obtienen tomando la temperatura sistemáticamente por toda la superficie terrestre, incluidos los océanos. Estas mediciones se corrigen entonces por cualesquiera sesgos sistemáticos, tales como el hecho de que muchas estaciones de medición de la temperatura están ubicadas en zonas pobladas y muchas áreas escasamente pobladas tienen pocas mediciones de temperatura. Una vez que se han tomado en cuenta todas las correcciones, el resultado es la temperatura superficial promedio de la Tierra en un año determinado. La temperatura superficial promedio de la Tierra actual es aproximadamente de 287.5 K (14.4 °C). En la figura 17.20, esta temperatura global promedio se grafica para los años entre 1880 y 2005. Usted puede ver que desde más o menos 1900, la temperatura parece estar aumentando con el tiempo, lo que indica un calentamiento global. La línea horizontal azul en la gráfica representa la temperatura global promedio para todo el siglo xx, 13.9 °C.

Varios modelos predicen que la temperatura superficial global promedio de la Tierra continuará aumentando. A pesar de que la magnitud del incremento en la temperatura global promedio en el curso de los últimos 155 años es de alrededor de 1 °C, lo cual no parece ser un aumento muy grande, combinado con incrementos futuros predichos, es suficiente para causar efectos observables, tales como la subida de los niveles del agua oceánica, la desaparición de la cubierta de hielo ártica en los veranos, cambios de clima y un incremento en la severidad de las tormentas y las sequías por todo el mundo.

La figura 17.21 muestra un registro de la diferencia entre la temperatura superficial anual promedio en la Antártida y la temperatura superficial anual promedio en los últimos 420 000 años, la cual se determinó a partir de núcleos de hielo. Note que las temperaturas del pasado se evaluaron de las mediciones del dióxido de carbono en los núcleos de hielo, que sus valores dependen hasta cierto punto del modelo y que las diferencias de temperaturas resultantes podían ser signifi-

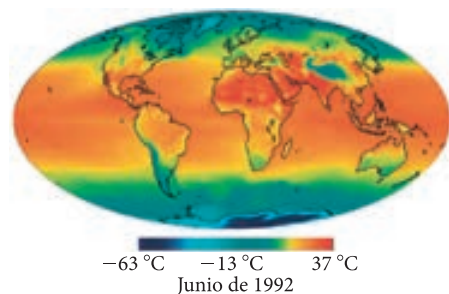


FIGURA 17.19 Temperatura superficial de la Tierra promediada en el tiempo en junio de 1992. Los colores representan un rango de temperaturas de -63 °C a +37 °C.

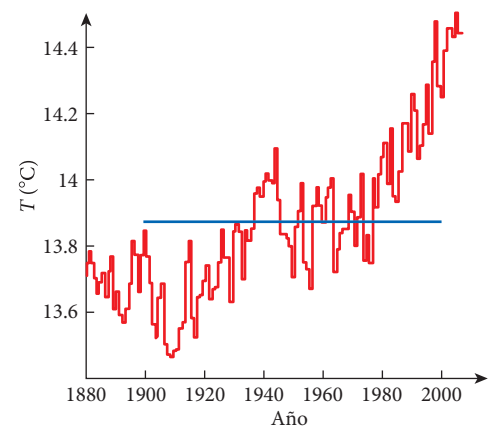


FIGURA 17.20 Temperatura superficial global promedio anual desde 1880 hasta 2005, medida por termómetros en la tierra y en el océano (histograma rojo). La línea horizontal azul representa la temperatura global promedio para el siglo xx, 13.9 °C.

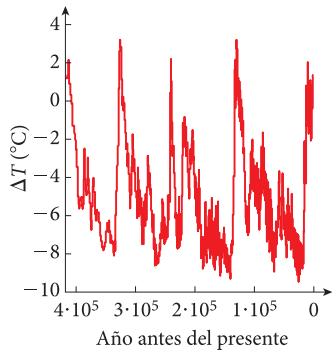


FIGURA 17.21 Temperatura superficial anual promedio de la Antártida en el pasado, extraída de los contenidos de dióxido de carbono en los núcleos de hielo, en relación con el valor actual.

17.3 Oportunidad de autoexamen

Identifique los años que corresponden a los periodos glaciares e interglaciares en la figura 17.21.

cativamente mayores que las correspondientes a las diferencias de temperatura globales. Varios periodos diferentes son aparentes en la figura 17.21. Un intervalo de tiempo cuando la diferencia de la temperatura es alrededor de $-7\text{ }^\circ\text{C}$ corresponde a un periodo en el cual las capas de hielo cubrieron partes de Norteamérica y Europa y el llamado *periodo glaciario*. El último periodo glaciario terminó hace unos 10 000 años. Los periodos más calurosos entre los periodos glaciares, llamados *periodos interglaciares*, corresponden a diferencias de temperatura alrededor de cero. En la figura 17.21 son visibles cuatro periodos glaciares, remontándose hasta 400 000 años. Se han hecho intentos de relacionar estas diferencias de temperatura con diferencias en el calor recibido del Sol debidas a las variaciones de la órbita terrestre y la orientación de su eje de rotación, conocida como la Hipótesis de Milankovitch. Sin embargo, estas variaciones no pueden dar cuenta de todas las diferencias de temperatura observadas.

El caluroso periodo interglaciario actual comenzó hace unos 10 000 años y parece un poco más fresco que los periodos interglaciares. Los periodos interglaciares previos han durado desde 10 000 hasta 25 000 años. Sin embargo, las actividades humanas, tales como la quema de los combustibles fósiles y el efecto invernadero resultante (más de esto en el capítulo 18), están influyendo en la temperatura global promedio. Los modelos predicen que el efecto de estas actividades será el calentar la Tierra, al menos durante los próximos varios cientos de años.

Un efecto del calentamiento en la superficie terrestre, es la subida en el nivel del mar. El nivel del mar ha subido 120 m desde el pico del último periodo glaciario, hace unos 20 000 años, como resultado del derretimiento de los glaciares que cubrían grandes áreas de la tierra. El derretimiento de grandes cantidades de hielo que reposa sobre el suelo sólido es la mayor contribución potencial para una subida ulterior en el nivel del mar. Por ejemplo, si todo el hielo en la Antártida se derritiera, el nivel del mar subiría 61 m. Si todo el hielo en Groenlandia se derritiera, la subida en el nivel del mar sería de 7 m. Sin embargo, tomaría varios siglos para que estos grandes depósitos de hielo se derritiesen por completo, incluso si las predicciones pesimistas de los modelos climáticos son correctas. La subida del nivel del mar debida a la expansión térmica es pequeña comparada con la debida al derretimiento de los grandes glaciares. La tasa actual de la subida en el nivel del mar es de 2.8 mm/año, medidas por el satélite *TOPEX/Poseidón*.

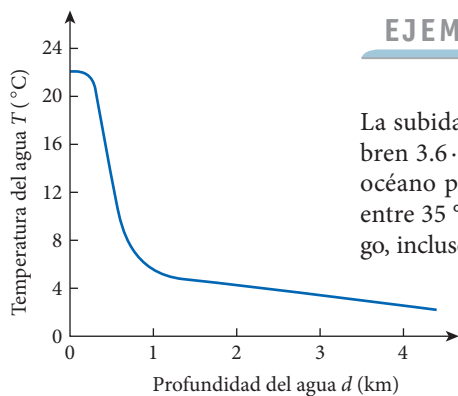


FIGURA 17.22 Temperatura promedio del océano como función de la profundidad bajo la superficie.

EJEMPLO 17.4

Subida del nivel del mar debido a la expansión térmica del agua

La subida en el nivel de los océanos de la Tierra es de preocupación actual. Los océanos cubren $3.6 \cdot 10^8\text{ km}^2$, un poco más de 70% del área superficial de la Tierra. La profundidad del océano promedio es de 3 700 m. La temperatura superficial del océano varía ampliamente, entre $35\text{ }^\circ\text{C}$ en verano en el golfo Pérsico y $-2\text{ }^\circ\text{C}$ en las regiones árticas y antárticas. Sin embargo, incluso si la temperatura superficial del océano supera los $20\text{ }^\circ\text{C}$, la temperatura del agua cae rápidamente como función de la profundidad y alcanza $4\text{ }^\circ\text{C}$ a una profundidad de 1 000 m (figura 17.22). La temperatura promedio global de toda el agua del mar es aproximadamente de $3\text{ }^\circ\text{C}$. La tabla 17.3 lista un coeficiente de expansión de cero para el agua a una temperatura de $4\text{ }^\circ\text{C}$. De esta manera, es seguro suponer que el volumen del agua oceánica cambia muy poco a una profundidad mayor a 1 000 m. Para los 1 000 m de la parte superior del agua oceánica, supongamos que la temperatura promedio global es de $10.0\text{ }^\circ\text{C}$ y calculemos el efecto de la expansión térmica.

PROBLEMA

¿Cuánto cambiaría el nivel del mar, sólo como resultado de la expansión térmica del agua, si la temperatura del agua de todos los océanos se incrementara por $\Delta T = 1.0\text{ }^\circ\text{C}$?

SOLUCIÓN

El coeficiente de expansión térmica del agua a $10.0\text{ }^\circ\text{C}$ es $\beta = 87.5 \cdot 10^{-6}\text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ (de la tabla 17.3), y el cambio en el volumen de los océanos está dado por la ecuación 17.9, $\Delta V = \beta V \Delta T$, o

$$\frac{\Delta V}{V} = \beta \Delta T. \tag{i}$$

Podemos expresar el área superficial total de los océanos como $A = (0.7)4\pi R^2$, donde R es el radio de la Tierra y el factor 0.7 refleja el hecho de que más o menos 70% de la superficie de esta esfera está cubierta de agua. Suponemos que el área superficial de los océanos se incrementa

sólo en una minúscula proporción por el agua que se está moviendo hacia arriba en las costas y despreciamos el cambio en el área superficial debido a este efecto. Entonces, esencialmente todo el cambio en el volumen de los océanos dará por resultado el cambio en la profundidad y podemos escribir

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta d \cdot A}{d \cdot A} = \frac{\Delta d}{d}. \quad (\text{ii})$$

Al combinar las ecuaciones (i) y (ii), obtenemos una expresión para el cambio en la profundidad:

$$\frac{\Delta d}{d} = \beta \Delta T \Rightarrow \Delta d = \beta d \Delta T.$$

Al sustituir los valores numéricos, $d = 1\,000\text{ m}$, $\Delta T = 1.0\text{ }^\circ\text{C}$ y $\beta = 87.5 \cdot 10^{-6}\text{ }^\circ\text{C}^{-1}$, obtenemos

$$\Delta d = (1\,000\text{ m})(87.5 \cdot 10^{-6}\text{ }^\circ\text{C}^{-1})(1.0\text{ }^\circ\text{C}) = 9\text{ cm}.$$

Así, por cada incremento de la temperatura promedio del océano de $1\text{ }^\circ\text{C}$, el nivel del mar subirá 9 cm (casi 4 pulgadas). Esta subida es menor que la subida anticipada, debido al derretimiento de la cubierta de hielo en Groenlandia o la Antártida, pero contribuirá al problema de la inundación de las costas.

17.6 Temperatura del universo

En 1965, cuando estaban trabajando en un radio telescopio primitivo, Arno Penzias y Robert Wilson descubrieron la **radiación del fondo cósmico de microondas**. Ellos detectaron “ruido” o “estática”, que parecía venir de todas las direcciones del cielo. Penzias y Wilson encontraron lo que estaba produciendo este ruido (lo cual les mereció el Premio Nobel de 1978): era radiación electromagnética que quedó del Big Bang, el cual ocurrió hace 13.7 mil millones de años. Es asombroso darse cuenta de que un “eco” del Big Bang todavía reverbera en el espacio intergaláctico “vacío” después de tan largo tiempo. La longitud de onda de la radiación cósmica de fondo es semejante a la longitud de onda de la radiación electromagnética usada en un horno de microondas. Un análisis de la distribución de longitudes de onda de esta radiación condujo a la deducción de que la temperatura de fondo del universo es de 2.725 K. George Gamov ya había predicho la temperatura de la radiación cósmica de fondo en 2.7 K en 1948, cuando todavía no estaba claro que el Big Bang fuese un hecho científico establecido.

En 2001, el satélite *Wilkinson Microwave Anisotropy Probe* (WMAP) midió las variaciones en la temperatura de fondo del universo. Esta misión siguió al exitoso satélite *Cosmic Background Explorer* (COBE), lanzado en 1989, el cual dio por resultado que se le otorgara el Premio Nobel de 2006 a los físicos John Mather y George Smoot. Las misiones COBE y WMAP encontraron que la radiación cósmica de fondo en microondas era muy uniforme en todas las direcciones, pero pequeñas diferencias en la temperatura estaban superpuestas en el fondo uniforme. Los resultados de la WMAP para la temperatura de fondo en todas las direcciones se muestran en la figura 17.23. Los efectos de la Vía Láctea se han sustraído. Usted puede ver que la variación en la temperatura de fondo del universo es muy pequeña, dado que $\pm 200\text{ }\mu\text{K}/2.725\text{ K} = \pm 7.3 \cdot 10^{-5}$. A partir de la interpretación de estos resultados y otras observaciones, los científicos dedujeron que la edad del universo es de 13.7 mil millones de años, con un margen de error menor de menos de 1%. Adi-

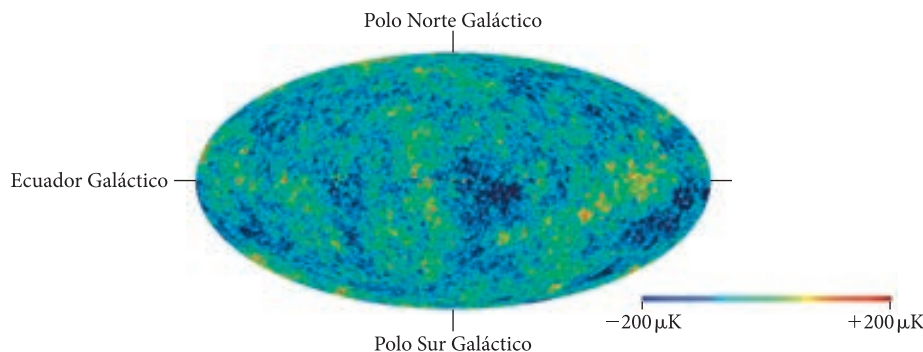


FIGURA 17.23 La temperatura de la radiación cósmica de fondo en microondas en todas partes del universo. Los colores representan un rango de temperaturas de $200\text{ }\mu\text{K}$ por debajo a $200\text{ }\mu\text{K}$ por encima de la temperatura promedio de la radiación cósmica de fondo en microondas, la cual tiene una temperatura promedio de 2.725 K.

cionalmente, los científicos fueron capaces de deducir que el universo está compuesto de 4% de materia ordinaria, 23% de materia oscura y 73% de energía oscura. La materia oscura es materia que ejerce un tirón gravitatorio observable, pero parece ser invisible, como se discute en el capítulo 12. La energía oscura parece estar causando que la expansión del universo se acelere. Tanto la materia oscura como la energía oscura se encuentran bajo intensa investigación actualmente y la comprensión de éstas debería mejorar en la próxima década.

LO QUE HEMOS APRENDIDO | GUÍA DE ESTUDIO PARA EXAMEN

- Las tres escalas de temperatura comúnmente usadas son: Fahrenheit, Celsius y Kelvin.
- La escala Fahrenheit se usa sólo en Estados Unidos y determina el punto de congelación del agua en 32 °F y el punto de ebullición del agua en 212 °F.
- La escala Celsius define el punto de congelación del agua en 0 °C y el punto de ebullición del agua en 100 °C.
- La escala Kelvin define 0 K como el cero absoluto y el punto de congelación del agua como 273.15 K. El tamaño del kelvin y el grado Celsius es el mismo.
- La conversión de °F a °C está dada por $T_C = \frac{5}{9}(T_F - 32 \text{ °F})$.
- La conversión de °C a °F está dada por $T_F = \frac{9}{5}T_C + 32 \text{ °C}$.
- La conversión de °C a K está dada por $T_K = T_C + 273.15 \text{ °C}$.
- La conversión de K a °C está dada por $T_C = T_K - 273.15 \text{ K}$.
- El cambio en la longitud, ΔL , de un objeto de longitud L conforme cambia la temperatura por ΔT está dada por $\Delta L = \alpha L \Delta T$, donde α es el coeficiente de expansión lineal.
- El cambio en volumen, ΔV , de un objeto con volumen V conforme cambia la temperatura por ΔT está dado por $\Delta V = \beta V \Delta T$, donde β es el coeficiente de expansión volumétrica.

TÉRMINOS CLAVE

equilibrio térmico, p. 557
calor, p. 557
energía térmica, p. 557
temperatura, p. 557
termómetro, p. 558
ley cero de la termodinámica, p. 558

escala de temperatura Fahrenheit, p. 558
escala de temperatura Celsius, p. 558
escala de temperatura Kelvin, p. 558
cero absoluto, p. 558

tercera ley de la termodinámica, p. 559
kelvin, p. 559
expansión térmica, p. 563
coeficiente de expansión lineal, p. 564

coeficiente de expansión volumétrica, p. 569
radiación del fondo cósmico de microondas, p. 573

NUEVOS SÍMBOLOS

T , temperatura

α , coeficiente de expansión lineal

β , coeficiente de expansión volumétrica

RESPUESTAS A LAS OPORTUNIDADES DE AUTOEXAMEN

17.1 Haga $T = T_F = T_C$, y resuelva T :

$$T = \frac{9}{5}T + 32$$

$$-\frac{4}{5}T = 32$$

$$T = -40 \text{ °C o °F.}$$

17.2 Use una mezcla de hielo y agua, la cual se encuentra a 0 °C y agua hirviendo, la cual está a 100 °C. Tome las mediciones y marque las posiciones correspondientes sobre el termómetro sin calibrar.

17.3 Los periodos glaciares están en años atrás:

12 000 a 120 000

150 000 a 230 000

250 000 a 310 000

330 000 a 400 000.

Los periodos interglaciares están en años atrás:

0 a 12 000

110 000 a 130 000

230 000 a 250 000

310 000 a 330 000

400 000 a 410 000.

PRÁCTICA PARA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Lineamientos de problemas resueltos

1. Sea consistente en el uso de las temperaturas Celsius, Kelvin o Fahrenheit. Para calcular un cambio de temperatura, un grado Celsius es igual a un kelvin. Sin embargo, si necesita encontrar un valor de temperatura, recuerde qué escala de temperatura se le pide.

2. La expansión térmica tiene un efecto semejante a ampliar una fotografía: todas las partes de la fotografía se expanden en la misma proporción. Recuerde que un agujero en un objeto se expande con el incremento de temperatura de la misma forma que el mismo objeto lo hace. En ocasiones usted puede simplificar un problema que involucra la expansión volumétrica a una dimensión y entonces usar coeficientes de expansión lineal. Esté alerta para este tipo de situaciones.

PROBLEMA RESUELTO 17.3

Expansión lineal de una barra de acero y una barra de latón

A 20.0 °C, una barra de acero tiene una longitud de 3.0000 m y una barra de latón tiene una longitud de 2.9970 m.

PROBLEMA

¿A qué temperatura tendrán ambas barras la misma longitud?

SOLUCIÓN

PIENSE

El coeficiente de expansión lineal del acero es menor al coeficiente de expansión del latón. De esta forma, conforme se calientan las dos barras, la barra de latón se expandirá más. Para obtener la temperatura en la cual ambas barras tienen la misma longitud, igualamos las expresiones para las longitudes finales de las barras, dados en términos de las longitudes iniciales, los coeficientes de expansión y el incremento de temperaturas.

ESBOCE

La figura 17.24 muestra a las dos barras antes y después de calentarse.

La longitud de la barra de acero antes de calentarse es L_s , su cambio de longitud es ΔL_s , y el coeficiente de expansión lineal del acero es $\alpha_s = 13 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$. La longitud de la barra de latón antes de calentarse es L_b , su cambio de longitud es ΔL_b , y el coeficiente de expansión lineal del latón es $\alpha_b = 19 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$. El cambio de temperatura es ΔT .

INVESTIGUE

El cambio en la longitud de la barra de acero está dada por

$$\Delta L_s = \alpha_s L_s \Delta T.$$

El cambio en la longitud de la barra de latón está dada por

$$\Delta L_b = \alpha_b L_b \Delta T.$$

Cuando las dos barras tienen la misma longitud,

$$L_s + \Delta L_s = L_b + \Delta L_b.$$

SIMPLIFIQUE

Podemos combinar las tres ecuaciones anteriores para obtener

$$L_s + \alpha_s L_s \Delta T = L_b + \alpha_b L_b \Delta T.$$

Reacomodando y resolviendo para la diferencia de temperatura, tenemos

$$\alpha_s L_s \Delta T - \alpha_b L_b \Delta T = L_b - L_s \Rightarrow$$

$$\Delta T = \frac{L_b - L_s}{\alpha_s L_s - \alpha_b L_b}.$$

CALCULE

Al sustituir los valores numéricos nos da

$$\Delta T = \frac{(2.9970 \text{ m}) - (3.0000 \text{ m})}{(13 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1})(3.0000 \text{ m}) - (19 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1})(2.9970 \text{ m})} = 167.1961 \text{ }^\circ\text{C}.$$

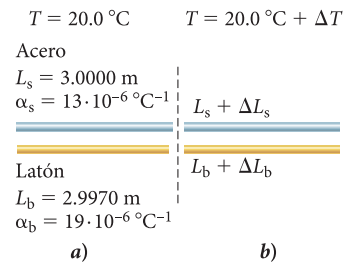


FIGURA 17.24 Una barra de acero y una barra de latón: a) antes de calentarse; b) después de calentarse.

(continúa)

(continuación)

REDONDEE

Reportamos nuestro resultado con tres cifras significativas:

$$T = 20.0 \text{ }^\circ\text{C} + 167.1961 \text{ }^\circ\text{C} = 187 \text{ }^\circ\text{C}.$$

VUELVA A REVISAR

Para verificar nuestro resultado, calculamos la longitud final de ambas barras. Para la barra de acero tenemos

$$L_s(1 + \alpha_s \Delta T) = (3.0000 \text{ m}) \left[1 + (13 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1})(167.1961 \text{ }^\circ\text{C}) \right] = 3.00652 \text{ m}.$$

Para la barra de latón tenemos

$$L_b(1 + \alpha_b \Delta T) = (2.9970 \text{ m}) \left[1 + (19 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1})(167.1961 \text{ }^\circ\text{C}) \right] = 3.00652 \text{ m}.$$

De esta manera, nuestra respuesta parece razonable.

PREGUNTAS DE OPCIÓN MÚLTIPLE

17.1 Dos termómetros de expansión de mercurio tienen recipientes idénticos y tubos cilíndricos hechos del mismo vidrio, pero de diferentes diámetros. ¿Cuál de los dos termómetros puede graduarse para una mejor resolución?

- a) El termómetro con el tubo de menor diámetro tendrá la mejor resolución.
- b) El termómetro con el tubo de mayor diámetro tendrá la mejor resolución.
- c) El diámetro del tubo es irrelevante; es sólo el coeficiente de expansión térmica lo que importa.
- d) No hay suficiente información para decidir.

17.2 Para una demostración en clase, su instructor de física calienta uniformemente una tira bimetálica que sostiene horizontalmente. Como resultado, la tira bimetálica se dobla hacia arriba. Esto le dice que el coeficiente de expansión térmica lineal para el metal T, en la parte superior es _____ que la del metal B, en la parte inferior.

- a) menor a
- b) mayor a
- c) igual a

17.3 Dos objetos sólidos, A y B, se encuentran en contacto. ¿En qué caso habrá transferencia de energía térmica desde A hacia B?

- a) A está a 20 °C, y B está a 27 °C.
- b) A está a 15 °C, y B está a 15 °C.
- c) A está a 0 °C, y B está a -10 °C.

17.4 ¿Cuál de las siguientes tiras bimetálicas exhibirá la mayor sensibilidad a los cambios de temperatura? Esto es, ¿cuál de ellas se doblará más conforme se incrementa la temperatura?

- a) Cobre y acero.
- b) Acero y aluminio.
- c) Cobre y aluminio.
- d) Aluminio y latón.
- e) Cobre y latón.

PREGUNTAS

17.10 Una forma común de abrir una tapa apretada en un frasco de vidrio es colocarla bajo agua caliente. La expansión térmica de la tapa metálica es mayor que la del frasco de vidrio; de esta manera, el espacio entre los dos se expande y es más fácil abrir el frasco. ¿Servirá esto para la tapa metálica de un recipiente del mismo tipo de metal?

17.5 La temperatura de fondo del universo es

- a) 6 000 K.
- b) 288 K.
- c) 3 K.
- d) 2.73 K.
- e) 0 K.

17.6 ¿Qué temperatura del aire se siente más fría?

- a) -40 °C.
- b) -40 °F.
- c) 233 K.
- d) Las tres son iguales.

17.7 ¿A qué temperatura tienen las escalas Celsius y Fahrenheit el mismo valor numérico?

- a) -40 grados.
- b) 0 grados.
- c) 40 grados.
- d) 100 grados.

17.8 La ciudad de Yellowknife en los Territorios Noroeste de Canadá se encuentra en las orillas del Gran Lago de los Esclavos. La temperatura alta promedio en julio es de 21 °C y la temperatura baja promedio en enero es de -31 °C. El Gran Lago de los Esclavos tiene un volumen de 2 090 km³ y es el lago más profundo de Norteamérica, con una profundidad de 614 m. ¿Cuál es la temperatura del agua en el fondo del Gran Lago de los Esclavos en enero?

- a) -31 °C.
- b) -10 °C.
- c) 0 °C.
- d) 4 °C.
- e) 32 °C.

17.9 ¿Cuál objeto tiene la mayor temperatura después de quedarse afuera durante una noche de invierno entera: ¿la manija metálica de una puerta o una alfombra?

- a) La manija metálica de una puerta tiene la mayor temperatura.
- b) La alfombra tiene la mayor temperatura.
- c) Ambas tienen la misma temperatura.
- d) Depende de la temperatura exterior.

17.11 ¿Sería posible tener una escala de temperaturas de tal manera que cuanto más caliente estuviese el objeto o sistema, tanto menor (menos positivo o más negativo) fuese su temperatura?

17.12 La corona solar tiene una temperatura de unos $1 \cdot 10^6$ K. Sin embargo, una nave espacial volando en la corona no se quemaría. ¿Por qué sucede esto?

17.13 Explique por qué podría ser difícil soldar aluminio al acero o soldar dos distintos metales cualesquiera uno con el otro.

17.14 Dos objetos sólidos están hechos de diferentes metales. Sus volúmenes y coeficientes de expansión volumétrica son V_1 y V_2 y β_1 y β_2 , respectivamente. Se observa que durante un cambio de temperatura ΔT , el volumen de cada objeto cambia en la misma cantidad. Si $V_1 = 2V_2$ ¿cuál es la razón de los coeficientes de expansión volumétrica?

17.15 Algunos libros de texto usan la unidad K^{-1} en lugar de $^{\circ}C^{-1}$ para los valores del coeficiente de expansión lineal; vea la tabla 17.2. ¿Cómo diferirían los valores numéricos de los coeficientes si se expresaran en K^{-1} ?

17.16 Usted se encuentra afuera en un día caluroso, con la temperatura del aire en T_o . Su bebida deportiva se encuentra a una temperatura T_d en una botella de plástico sellada. Quedan unos cuantos cubos de hielo en su bebida deportiva, los cuales están a T_i , pero se están derritiendo rápidamente.

a) Escriba una desigualdad que describa la relación entre estas tres temperaturas.

b) Dé valores razonables para las tres temperaturas en grados Celsius.

17.17 La escala de temperatura Rankine es una escala de temperatura absoluta que usa los grados Fahrenheit, esto es, las temperaturas se miden en grados Fahrenheit, comenzando con el cero absoluto. Encuentre las relaciones entre los valores de temperatura en la escala Rankine y aquéllos en las escalas Fahrenheit, Kelvin y Celsius.

17.18 La ley cero de la termodinámica forma la base para la definición de la temperatura con respecto a la energía térmica.

Pero el concepto de temperatura se usa en otras áreas de la física. En un sistema con niveles de energía, tales como los electrones en un átomo o los protones en un campo magnético, la población de un nivel con energía E es proporcional al factor $e^{-E/k_B T}$, donde T es la temperatura absoluta del sistema y $k_B = 1.381 \cdot 10^{-23}$ J/K es la constante de Boltzmann. En sistemas con dos niveles, con los niveles de energía que difieren en ΔE , la razón de las poblaciones de niveles de alta energía a baja energía es $p_{alta}/p_{baja} = e^{-\Delta E/k_B T}$. Semejantes sistemas tienen una temperatura infinita o incluso una temperatura absoluta negativa. Explique el significado de tales temperaturas.

17.19 Suponga que una tira bimetalica se construye de dos tiras de metales con coeficientes de expansión lineal α_1 y α_2 , donde $\alpha_1 > \alpha_2$.

a) Si la temperatura de la tira bimetalica se reduce en ΔT , ¿para qué lado se doblará la tira (en la dirección hecha del metal 1 o en la dirección hecha del metal 2)? Explique brevemente.

b) Si la temperatura se incrementa en ΔT , ¿para qué lado se doblará la tira?

17.20 Para el almacenamiento de alimentos, ¿cuál es la ventaja de colocar una tapa metálica en un frasco de vidrio? (Pista: ¿Por qué ayuda a usted dejar correr el agua caliente por la tapa metálica durante un minuto para abrir dicho frasco?)

17.21 Un cilindro sólido y un cascarón cilíndrico, de radio y longitud idénticos y del mismo material, experimentan el mismo incremento de temperatura ΔT . ¿Cuál de los dos se expandirá para tener un radio exterior mayor?

PROBLEMAS

Una • y dos •• indican un grado creciente de dificultad del problema.

Secciones 17.1 y 17.2

17.22 Expresar cada una de las siguientes temperaturas en grados Celsius y en kelvins.

- a) $-19^{\circ}F$ b) $98.6^{\circ}F$ c) $52^{\circ}F$

17.23 Un termómetro se calibra en grados Celsius y otro en grados Fahrenheit. ¿A qué temperatura es la lectura en el termómetro calibrado en grados Celsius igual a tres veces la lectura del otro termómetro?

17.24 Durante el verano de 2007 se registraron temperaturas tan altas de hasta $47^{\circ}C$ en el sur de Europa. La temperatura más alta registrada en Estados Unidos fue de $134^{\circ}F$ (en el valle de la Muerte, California, en 1913). ¿Cuál es la diferencia entre estas dos temperaturas, en grados Celsius?

17.25 La menor temperatura del aire registrada en la Tierra es de $-129^{\circ}F$, en la Antártida. Convierta esta temperatura a la escala Celsius.

17.26 ¿Qué temperatura del aire se sentirá el doble de caliente que $0^{\circ}F$?

17.27 Un trozo de hielo seco (dióxido de carbono sólido) que reposa en el salón de clases tiene una temperatura de aproximadamente $-79^{\circ}C$.

a) ¿Cuál es esta temperatura en kelvins?

b) ¿Cuál es esta temperatura en grados Fahrenheit?

17.28 En 1742, el astrónomo sueco Anders Celsius propuso una escala de temperatura en la cual el agua hierve a 0.00 grados y se congela a 100 . grados. En 1745, después de la muerte de Celsius, Carolus Linnaeus (otro científico sueco) invirtió estos estándares, produciendo la escala que es la más comúnmente usada en la actualidad. Encuentre la temperatura ambiente ($77.0^{\circ}F$) en la escala de temperatura original Celsius.

17.29 ¿A qué temperatura tienen las escalas Kelvin y Fahrenheit el mismo valor numérico?

Sección 17.4

17.30 ¿Cómo se compara la densidad del cobre que se encuentra justo sobre su temperatura de fusión de 1356 K con la del cobre a temperatura ambiente?

17.31 La densidad del acero es de 7800.0 kg/m³ a $20.0^{\circ}C$. Encuentre la densidad a $100.0^{\circ}C$.

17.32 Dos cubos con aristas de 100.0 mm de longitud encajan en un espacio de 201.0 mm de ancho, como se ve en la figura. Un cubo está hecho de aluminio y el otro de latón. ¿Qué aumento de temperatura se requiere para que los cubos llenen completamente el espacio?



17.33 Un anillo del pistón de latón se debe encajar en un pistón, calentando primero al anillo y después deslizándolo sobre el pistón. El anillo del pistón tiene un diámetro interior de 10.00 cm y un diámetro exterior de 10.20 cm. El pistón tiene un diámetro exterior de 10.10 cm y un surco para el anillo del pistón tiene un diámetro exterior de 10.00 cm. ¿A qué temperatura se debe calentar el anillo del pistón de tal manera que se deslice sobre el pistón?

17.34 Una esfera de aluminio con radio de 10.0 cm se calienta desde 100.0 °F hasta 200.0 °F. Encuentre *a*) el cambio de volumen y *b*) el cambio de radio.

17.35 Los rieles de acero para un ferrocarril se tienden en una región sujeta a extremos de temperatura. La distancia de una junta a la otra es de 5.2000 m y el área de la sección transversal de los rieles es de 60. cm². Si los rieles se tocan entre sí sin pandearse a la temperatura máxima, 50. °C, ¿cuánto espacio habrá entre los rieles a -10. °C?

17.36 A pesar de que el acero tiene un coeficiente de expansión lineal relativamente bajo ($\alpha_{\text{acero}} = 13 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$), la expansión de los rieles de acero potencialmente puede crear problemas significativos en los días de verano muy calurosos. A fin de acomodar para la expansión térmica, se deja un espacio entre las secciones consecutivas de la vía. Si cada sección tiene una longitud de 25.0 m a 20.0 °C y el espacio entre las secciones es de 10.0 mm de ancho, ¿cuál es la mayor temperatura que los carriles pueden soportar antes de que la expansión cree fuerzas de compresión entre las secciones?

17.37 Un dispositivo médico usado para manejar muestras de tejido tiene dos tornillos metálicos, uno de 20.0 cm de longitud y hecho de latón ($\alpha_b = 18.9 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$) y el otro de 30.0 cm de longitud y hecho de aluminio ($\alpha_a = 23.0 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$). Existe un espacio de 1.00 mm entre los extremos de los tornillos a 22.0 °C. ¿A qué temperatura se tocarán los dos tornillos?

17.38 Usted está diseñando un termómetro de mercurio de precisión, basado en la expansión térmica del mercurio ($\beta = 1.8 \cdot 10^{-4} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$), el cual causa que el mercurio se expanda hacia arriba en un delgado tubo capilar conforme se incrementa la temperatura. La ecuación para el cambio en el volumen del mercurio como función de la temperatura es $\Delta V = \beta V_0 \Delta T$, donde V_0 es el volumen inicial del mercurio y ΔV es el cambio de volumen debido a un cambio de temperatura ΔT . En respuesta al cambio de temperatura de 1.0 °C, la columna de mercurio en su termómetro de precisión deberá moverse una distancia $D = 1.0$ cm por un tubo capilar de radio $r = 0.10$ mm. Determine el volumen inicial del mercurio que permita este cambio. Entonces, encuentre el radio del bulbo esférico que contenga este volumen de mercurio.

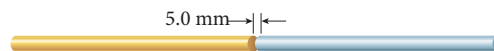
17.39 En un caluroso día de verano, una piscina cúbica se llena hasta 1.0 cm del borde superior con agua a 21 °C. Cuando el agua se calienta a 37 °C, el agua se desborda. ¿Cuál es la profundidad de la piscina?

17.40 Una barra de acero con longitud de 1.0 m se suelda al extremo de una barra de aluminio con longitud de 2.0 m (las longitudes se midieron a 22 °C). La barra combinada se calienta a 200. °C. ¿Cuál es el cambio en la longitud de la barra combinada a 200. °C?

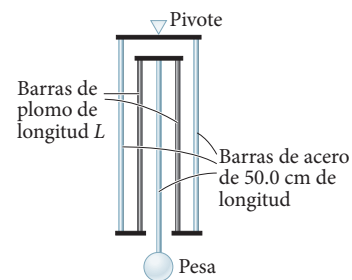
17.41 Un reloj basado en un péndulo simple se sitúa a la temperatura en Anchorage, Alaska. El péndulo consiste en una masa de 1.00 kg que cuelga de una barra delgada de latón que tiene una longitud de 2.000 m. El reloj se calibra perfectamente durante un día de verano con una temperatura promedio de 25.0 °C. Durante el invierno, cuando la temperatura promedio en el transcurso de un periodo de 24 horas es de -20 °C, encuentre el tiempo transcurrido para este periodo según el reloj de péndulo simple.

17.42 En una planta de fabricación de termómetros, un tipo de termómetro de mercurio se construye a temperatura ambiente (20 °C) para medir temperaturas en el rango de 20 a 70 °C, con un recipiente esférico de 1 cm³ en el fondo y un tubo capilar de expansión con un diámetro interior de 0.5 mm. El espesor de la pared del recipiente es despreciable y la marca de los 20 °C se encuentra en la unión entre el recipiente esférico y el tubo. Los tubos y los recipientes están hechos de sílice fundido, una forma *vítrea* transparente de SiO₂, la cual tiene un coeficiente de expansión térmica muy bajo ($\alpha = 0.4 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$). Por error, el material usado para un lote de termómetros fue el *cuarzo*, una forma *cristalina* transparente de SiO₂, con un coeficiente de expansión térmica mucho mayor ($\alpha = 12.3 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$). ¿Tendrá el fabricante que descartar el lote, o funcionarán bien los termómetros, dentro de la incertidumbre de 5% en la lectura de la temperatura? El coeficiente de expansión volumétrica del mercurio es $\beta = 181 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$.

17.43 Los extremos de dos barras mostradas en la figura se encuentran separadas por 5.0 mm a 25 °C. La barra a mano izquierda es de latón y tiene una longitud de 1.0 m; la barra a mano derecha es de acero y tiene una longitud de 1.0 m. Suponiendo que los extremos exteriores de las barras se apoyan firmemente contra soportes rígidos, ¿a qué temperatura se tocarán apenas los extremos de las barras que se enfrentan?



17.44 La figura muestra un péndulo que compensa la temperatura en el cual barras de plomo y de acero están dispuestas de tal forma que la longitud del péndulo no resulta afectada por los cambios en la temperatura. Determine la longitud, L , de las dos barras de plomo.



17.45 Considere una tira bimetalica que consiste en una tira superior de latón con un espesor de 0.50 mm soldada a una tira inferior de acero de 0.50 mm de espesor. Cuando la temperatura de la tira bimetalica se incrementa por 20. K, la punta que no está sujeta se desvía por 3.0 mm de su posición recta original, como se muestra en la figura. ¿Cuál es la longitud de la tira en su posición original?

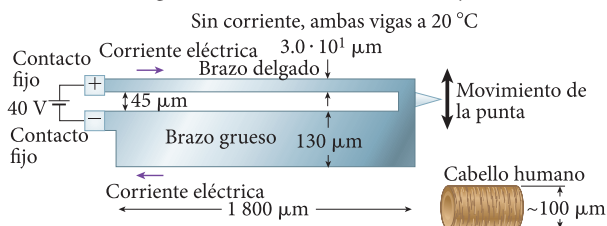


•17.46 La expansión térmica parece ser un efecto pequeño, pero puede generar fuerzas tremendas a menudo destructivas. Por ejemplo, el acero tiene un coeficiente de expansión lineal de $\alpha = 1.2 \cdot 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ y el módulo de compresibilidad $B = 160 \text{ GPa}$. Calcule la presión generada en el acero por un incremento de $1.0 \text{ }^\circ\text{C}$ en la temperatura.

•17.47 A temperatura ambiente, una herradura de hierro, cuando se sumerge en un tanque cilíndrico de agua (radio de 10.0 cm) hace que el nivel del agua suba 0.25 cm sobre el nivel que tiene sin la herradura en el tanque. Cuando se calienta en la fragua del herrero desde la temperatura ambiente hasta una temperatura de $7.00 \cdot 10^2 \text{ K}$, se le forja con su forma final y entonces se le sumerge de nuevo en el agua, ¿cuánto sube el agua sobre el nivel de “no herradura” (ignore el agua que se evapora cuando la herradura entra al agua)? *Nota:* El coeficiente de expansión lineal del hierro es más o menos el del acero: $11 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$.

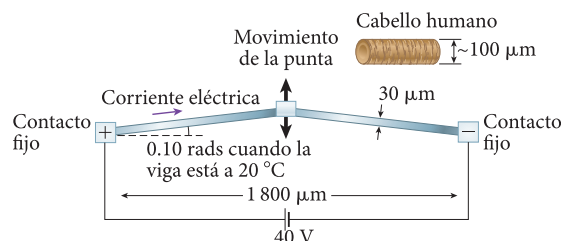
•17.48 Un reloj tiene un péndulo de aluminio con un periodo de 1.000 s a $20.0 \text{ }^\circ\text{C}$. Suponga que el reloj se mueve a un lugar donde la temperatura promedio es de $30.0 \text{ }^\circ\text{C}$. Determine a) el nuevo periodo del péndulo de reloj y b) cuánto tiempo perderá o ganará el reloj en una semana.

•17.49 Usando técnicas semejantes a las que se desarrollaron para la electrónica de semiconductores miniaturizados, los científicos y los ingenieros están creando los Sistemas Micro-Electro-Mecánicos (MEMS). Un ejemplo es un actuador electro-térmico que está impulsado al calentar sus diferentes partes usando una corriente eléctrica. El dispositivo se usa para posicionar las fibras ópticas con un diámetro de $125 \text{ }\mu\text{m}$ con una resolución submicrónica y consiste en brazos de silicio delgado y grueso, conectados en la forma de una U, como se muestra en la figura. Los brazos no están sujetos al sustrato



bajo el dispositivo, sino que están libres de moverse, en tanto que los contactos eléctricos (marcados + y - en la figura) están sujetos al sustrato e incapaces de moverse. El brazo delgado tiene una anchura de $3.0 \cdot 10^1 \text{ }\mu\text{m}$ y el brazo grueso tiene una anchura de $130 \text{ }\mu\text{m}$. Ambos brazos tienen una longitud de $1 800 \text{ }\mu\text{m}$. Una corriente eléctrica fluye a través de los brazos, haciendo que éstos se calienten. A pesar de que la misma corriente pasa a través de ambos brazos, el brazo delgado tiene una resistencia eléctrica mayor que el brazo ancho y, por lo tanto, disipa más energía eléctrica y se torna sustancialmente más caliente. Cuando se hace circular la corriente a través de las vigas, la viga delgada alcanza una temperatura de $4.0 \cdot 10^2 \text{ }^\circ\text{C}$, y la viga gruesa alcanza una temperatura de $2.0 \cdot 10^2 \text{ }^\circ\text{C}$. Suponga que la temperatura en cada viga es constante por la longitud entera de dicha viga (estrictamente hablando, éste no es el caso) y que las dos vigas permanecen paralelas y se doblan sólo en el plano del papel a temperaturas mayores. ¿Cuánto y en qué dirección se moverá la punta? El coeficiente de expansión lineal del silicio es de $3.2 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$.

•17.50 Otro dispositivo de MEMS usado con el mismo propósito que el del problema 17.49, tiene un diseño diferente. Este actuador electro-térmico consiste en una viga de silicio delgada en forma de V, como se muestra en la figura. La viga no está sujeta al sustrato bajo el dispositivo, sino que se encuentra libre de moverse, en tanto que los contactos eléctricos (marcados + y - en la figura) están sujetos al sustrato y no pueden moverse. La viga abarca el espacio entre los contactos eléctricos que tiene una anchura de $1 800 \text{ }\mu\text{m}$ y las dos mitades se inclinan hacia arriba a partir de la horizontal por 0.10 rad . La corriente eléctrica fluye a través de la viga, haciendo que ésta se caliente. Cuando se hace fluir la corriente a través de la viga, ésta alcanza una temperatura de $500. \text{ }^\circ\text{C}$. Suponga que la temperatura es constante por la longitud entera de dicha viga (estrictamente hablando, éste no es el caso). ¿Cuánto y en qué dirección se moverá la punta? El coeficiente de expansión lineal del silicio es de $3.2 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$.



•17.51 El volumen de 1.00 kg de agua líquida en el rango de temperaturas de $0.00 \text{ }^\circ\text{C}$ a $50.0 \text{ }^\circ\text{C}$ se ajusta razonablemente a la función polinómica $V = 1.00016 - (4.52 \cdot 10^{-5})T + (5.68 \cdot 10^{-6})T^2$, donde el volumen se mide en metros cúbicos y T es la temperatura en grados Celsius.

a) Use esta información para calcular el coeficiente de expansión volumétrica para el agua líquida como función de la temperatura.

b) Evalúe su expresión a $20.0 \text{ }^\circ\text{C}$ y compare el valor con la listada en la tabla 17.3.

••17.52 a) Suponga que una tira bimetalica se construye de tiras de cobre y acero con un espesor de 1.0 mm y una longitud de 25 mm y la temperatura de la tira se reduce por 5.0 K . Determine el radio de curvatura de la tira enfriada (el radio de curvatura de la interfaz entre las dos tiras).

b) Si la tira tiene una longitud de 25 mm , ¿qué tan lejos se encuentra la desviación máxima de la tira a partir de la orientación recta?

Problemas adicionales

17.53 Un cubo de cobre con una arista de longitud de 40.0 cm se calienta desde $20. \text{ }^\circ\text{C}$ hasta $120 \text{ }^\circ\text{C}$. ¿Cuál es el cambio en el volumen del cubo? El coeficiente de expansión lineal del cobre es de $17 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$.

17.54 Cuando un tubo metálico con una longitud de 50.0 m se calienta desde $10.0 \text{ }^\circ\text{C}$ hasta $40.0 \text{ }^\circ\text{C}$, se alarga por 2.85 cm .

a) Determine el coeficiente de expansión lineal.

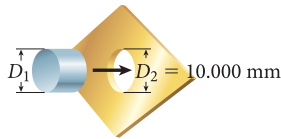
b) ¿De qué tipo de metal está hecho el tubo?

17.55 En una fresca mañana, con una temperatura de $15.0 \text{ }^\circ\text{C}$, un pintor llena un recipiente de aluminio de 5.00 galones hasta el borde con trementina. Cuando la temperatura alcanza los $27.0 \text{ }^\circ\text{C}$, ¿qué cantidad de fluido se derrama del recipiente?

El coeficiente de expansión volumétrica de esta marca de trementina es de $9.00 \cdot 10^{-4} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$.

17.56 Un edificio con una infraestructura de acero tiene una altura de $6.00 \cdot 10^2 \text{ m}$ en un día cuando la temperatura es de $0.00 \text{ }^\circ\text{C}$. ¿Cuánto más alto es el edificio en un día en que la temperatura es de $45.0 \text{ }^\circ\text{C}$? El coeficiente de expansión lineal del acero es de $1.30 \cdot 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$.

17.57 Con objeto de crear un ajuste apretado entre dos partes metálicas, en ocasiones los maquinistas hacen la parte interior mayor que el agujero en el que ajustarán y entonces, ya sea que enfríen la parte interior o bien calienten la parte exterior hasta que ajusten una con la otra. Suponga que una barra de aluminio con un diámetro D_1 (a $2.0 \cdot 10^1 \text{ }^\circ\text{C}$) debe encajar en un agujero en una placa de latón con un diámetro $D_2 = 10.000 \text{ mm}$ (a $2.0 \cdot 10^1 \text{ }^\circ\text{C}$). Los maquinistas pueden enfriar la barra a 77.0 K , sumergiéndola en nitrógeno líquido. ¿Cuál es el máximo diámetro posible que puede tener la barra a $2.0 \cdot 10^1 \text{ }^\circ\text{C}$ y que apenas encaje en el agujero si la barra se enfría a 77.0 K y la placa de latón se conserva a $2.0 \cdot 10^1 \text{ }^\circ\text{C}$? Los coeficientes de expansión lineal del aluminio y del latón son $22 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ y $19 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$, respectivamente.



17.58 Un vehículo militar carga gasolina en Estados Unidos, en preparación para embarcarse al extranjero. Su tanque de combustible tiene una capacidad de 213 L. Cuando carga combustible, la temperatura es de $57 \text{ }^\circ\text{F}$. En su destino, podría requerirse que funcione a temperaturas hasta de $120 \text{ }^\circ\text{F}$. ¿Cuál es el máximo volumen de gasolina que debe ponerse en el tanque?

17.59 Un termómetro de mercurio contiene 8.0 mL de mercurio. Si el tubo capilar del termómetro tiene un área de sección transversal de 1.0 mm^2 , ¿cuál debe ser el espaciado entre las marcas de $^\circ\text{C}$?

17.60 Un recipiente de 14 galones se llena con gasolina. Desprecie el cambio en el volumen del recipiente y encuentre cuántos galones se pierden si la temperatura se incrementa en $27 \text{ }^\circ\text{F}$. El coeficiente de expansión volumétrica de la gasolina es de $9.6 \cdot 10^{-4} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$.

17.61 Una autopista de losas de concreto se debe construir en el desierto de Libia, donde la máxima temperatura del aire registrada es de $57.8 \text{ }^\circ\text{C}$. La temperatura es de $20.0 \text{ }^\circ\text{C}$ durante la construcción de la autopista. Las losas se miden en 12.0 m de longitud a dicha temperatura. ¿Cuán anchas deben ser las rendijas de expansión entre las losas (a $20.0 \text{ }^\circ\text{C}$) para evitar el pandeo a la máxima temperatura?

17.62 Una vasija de aluminio con una capacidad en volumen de $500. \text{ cm}^3$ se llena con agua hasta el borde a $20. \text{ }^\circ\text{C}$. La vasija y su contenido se calientan hasta $50. \text{ }^\circ\text{C}$. Durante el proceso de calentamiento, ¿se derramará el agua por los bordes, habrá más espacio para agregar agua o permanecerá el mismo nivel del agua? Calcule el volumen de agua que se derramará o que podría agregarse, en su caso.

17.63 ¿Cuánto debe cambiar la temperatura de una masa dada de keroseno para que su volumen se incremente en 1.0% ?

17.64 Una hoja de plástico de epoxia tiene agujeros uniformes con radio de 1.99 cm . Se quiere que los agujeros permitan que unas bolas de rodamiento con un radio externo de

2.00 cm pasen apenas a través de éstos. ¿Sobre qué aumento de temperatura debe calentarse la hoja de plástico de epoxia de tal forma que las bolas de rodamiento pasen a través de los agujeros? El coeficiente de expansión lineal del plástico de epoxia es como de $1.3 \cdot 10^{-4} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$.

•**17.65** Un disco de latón uniforme de radio R y masa M con un momento de inercia I en torno de su eje cilíndrico se encuentra a una temperatura $T = 20. \text{ }^\circ\text{C}$. Determine el cambio fraccional de su momento de inercia si se calienta a una temperatura de $100. \text{ }^\circ\text{C}$.

•**17.66** Una bola de latón con un diámetro de 25.01 mm reposa a temperatura ambiente sobre un agujero con un diámetro de 25.00 mm practicado en una placa de aluminio. La bola y la placa se calientan uniformemente en un horno, de tal forma que ambas están a la misma temperatura en todo momento. ¿A qué temperatura caerá la bola a través de la placa?

•**17.67** En un juego de basquetbol improvisado, su amigo se agrietó un diente en una colisión con otro jugador mientras intentaba encestar. Para corregir este problema, el dentista colocó una banda de acero con un diámetro interno inicial de 4.4 mm y un área de sección transversal con ancho de 3.5 mm y espesor de 0.45 mm sobre el diente. Antes de colocar la banda sobre el diente, calentó la banda a $70. \text{ }^\circ\text{C}$. ¿Cuál será la tensión en la banda una vez que se enfríe a la temperatura de la boca de su amigo ($37 \text{ }^\circ\text{C}$)?

•**17.68** Su profesor de física asignó un proyecto de construcción de un termómetro. Le dio a usted un tubo de vidrio con un diámetro interior de 1.00 mm y un receptáculo en un extremo. También le dio 8.63 cm^3 de mercurio para verterlo en el tubo, el cual llenó el receptáculo y parte del tubo. Usted debe agregar marcas que indiquen los grados Celsius sobre el tubo de vidrio. ¿A qué incrementos deben ponerse las marcas? Usted sabe que el coeficiente de expansión volumétrica del mercurio es de $1.82 \cdot 10^{-4} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$.

•**17.69** Usted está construyendo un dispositivo para ambientes ultrafríos. Debido que el dispositivo se usará en ambientes donde la temperatura cambiará por $200. \text{ }^\circ\text{C}$ en 3.00 s , debe tener la habilidad de soportar el choque térmico (cambios rápidos de temperatura). El volumen del dispositivo es de $5.00 \times 10^{-5} \text{ m}^3$ y si el volumen cambia por $1.00 \times 10^{-7} \text{ m}^3$ en un intervalo de tiempo de 5.00 s , el dispositivo se quebrará y quedará inútil. ¿Cuál es el máximo coeficiente de expansión volumétrica que puede tener el material que use para construir el dispositivo?

•**17.70** Una barra de acero con una longitud de 1.0000 m y un área de sección transversal de $5.00 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$ se coloca de manera ajustada contra dos puntos extremos inmóviles. La barra se coloca inicialmente cuando la temperatura es de $0 \text{ }^\circ\text{C}$. Encuentre el esfuerzo en la barra cuando la temperatura sube a $40. \text{ }^\circ\text{C}$.

•**17.71** Puede pensarse que un clarín de latón es un tubo con una abertura en ambos extremos (la física real se complica por la interacción de boca del clarín y la boquilla y el pabellón acampanado). La longitud global del clarín si se estira es de 183.0 cm (a $20.0 \text{ }^\circ\text{C}$). Un clarín se toca en un caluroso día de verano ($41.0 \text{ }^\circ\text{C}$). Encuentre la frecuencia fundamental si

- sólo se considera el cambio en la temperatura del aire;
- sólo se considera cambio en la longitud del clarín, y
- se consideran ambos efectos en los incisos a) y b).

El calor y la primera ley de la termodinámica

18



FIGURA 18.1 Una tormenta.

LO QUE APRENDEREMOS	582
18.1 Definición de calor	582
18.2 Equivalente mecánico del calor	583
Ejemplo 18.1 Contenido energético de una barrita de dulce	584
18.3 Calor y trabajo	584
18.4 Primera ley de la termodinámica	586
Ejemplo 18.2 Levantador de pesas	586
Ejemplo 18.3 Un camión que se desliza hasta detenerse	587
18.5 La primera ley para procesos especiales	588
Procesos adiabáticos	588
Procesos a volumen constante	588
Procesos en trayectoria cerrada	588
Expansión libre	589
Procesos a presión constante	589
Procesos a temperatura constante	589
18.6 Calores específicos de sólidos y fluidos	589
Ejemplo 18.4 Energía requerida para calentar agua	590
Calorimetría	591
Problema resuelto 18.1 Agua y plomo	591
18.7 Calor latente y transiciones de fase	592
Ejemplo 18.5 Calentamiento del hielo en agua y del agua en vapor	594
Ejemplo 18.6 Trabajo efectuado al vaporizar el agua	595
18.8 Modos de la transferencia de energía térmica	596
Conducción	596
Ejemplo 18.7 Aislante del techo	597
Problema resuelto 18.2 Costo de calentar una casa en invierno	597
Convección	599
Problema resuelto 18.3 Corriente del Golfo	600
Radiación	602
Ejemplo 18.8 La Tierra como un cuerpo negro	603
El calentamiento global	603
El calor en las computadoras	605
LO QUE HEMOS APRENDIDO/ GUÍA DE ESTUDIO PARA EXAMEN	605
Práctica para resolución de problemas	606
Problema resuelto 18.4 Flujo de la energía térmica a través de una barra de cobre/aluminio	607
Preguntas de opción múltiple	608
Preguntas	609
Problemas	610

LO QUE APRENDEREMOS

- El calor es energía térmica que se transfiere entre un sistema y su ambiente o entre dos sistemas, como resultado de una diferencia de temperatura entre éstos.
- La primera ley de la termodinámica afirma que el cambio en la energía interna de un sistema cerrado es igual a la energía térmica absorbida por el sistema menos el trabajo efectuado por el sistema.
- Agregar energía térmica a un objeto aumenta su temperatura. Este aumento de temperatura es proporcional a la capacidad calorífica, C , del objeto.
- La energía térmica agregada a un objeto de masa m es igual al producto del calor específico del objeto, c , y m , y el aumento de la temperatura del objeto.
- Si se agrega energía térmica a un objeto sólido, su temperatura aumenta hasta que alcanza el punto de fusión. Si se continúa agregando energía térmica, la temperatura del objeto permanece constante hasta que el objeto se funde por completo en un líquido. El calor requerido para fundir un objeto a su punto de fusión, dividido entre su masa, es el calor latente de fusión.
- Si se agrega energía térmica a un líquido, su temperatura aumenta hasta que alcanza el punto de ebullición. Si se continúa agregando energía térmica, la temperatura del líquido permanece constante hasta que todo el líquido se vaporiza a un gas. El calor requerido para vaporizar un líquido a su punto de ebullición, dividido entre su masa, es el calor latente de vaporización.
- Los tres modos principales de transferencia de energía térmica son conducción, convección y radiación.

El clima terrestre está impulsado por la energía térmica en la atmósfera. Las regiones ecuatoriales reciben más radiación solar que las regiones polares; así es que el aire caliente se mueve del norte y del sur del Ecuador hacia los polos para distribuir la energía térmica más uniformemente. Esta transferencia de energía térmica, llamada *convección*, establece corrientes de viento en torno del globo, llevando nubes y lluvia lo mismo que aire. En casos extremos, el aire caliente ascendente y el aire frío descendente forman tormentas impresionantes como la tempestad de truenos mostrada en la figura 18.1. Las tormentas circulares —tornados y huracanes— también están impulsadas por la colisión violenta del aire caliente con el aire más frío.

Este capítulo examina la naturaleza del calor y los mecanismos de la transferencia de energía térmica. El calor es una forma de energía que se transfiere hacia dentro o hacia fuera del sistema. De esta manera, el calor es gobernado por una forma más general de la ley de la conservación de energía, conocida como la primera ley de la termodinámica. Nos enfocaremos en dicha ley en este capítulo, junto con algunas de sus aplicaciones a los procesos termodinámicos y los cambios en el calor y la temperatura.

El calor es esencial para los procesos de la vida; no podría existir la vida en la Tierra sin el calor del Sol o del interior de la Tierra. Sin embargo, el calor también causa problemas con la operación de circuitos eléctricos, motores y otros dispositivos mecánicos. Cada rama de la ciencia y la ingeniería también deben tratar con el calor en una forma u otra y, es por ello que, los conceptos en este capítulo son importantes para todas las áreas de la investigación, el diseño y el desarrollo.

18.1 Definición de calor

El calor es una de las formas más comunes de energía en el universo y todos la experimentamos cada día. Con todo, las personas tienen conceptos erróneos acerca del calor que a menudo causan confusión. Por ejemplo, un objeto ardiente como la llama de una vela no “tiene” calor que emite cuando se torna suficientemente caliente. En lugar de esto, la llama de la vela transmite energía, en la forma de calor, al aire en derredor de ésta. Para aclarar estas ideas, necesitamos comenzar con definiciones claras y precisas del calor y las unidades usadas para medirlo.

Si usted vierte agua fría en un vaso y pone el vaso en la mesa de la cocina, el agua se calentará lentamente hasta que alcance la temperatura del aire en el cuarto. De manera semejante, si usted vierte agua caliente en un vaso y lo coloca en la mesa de la cocina, el agua se enfriará lentamente hasta que alcance la temperatura del aire en el cuarto. El calentamiento o el enfriamiento tienen lugar con rapidez al principio y luego en forma más lenta, conforme el agua se acerca al equilibrio térmico con el aire en la cocina. En el equilibrio térmico, el agua, el vidrio y el aire en el cuarto se encuentran todos a la misma temperatura.

El agua en el vaso es un **sistema** con temperatura T_s y el aire en la cocina es un **ambiente** con temperatura T_e . Si $T_s \neq T_e$, entonces la temperatura del sistema cambia hasta que es igual a la temperatura del ambiente. Un sistema puede ser simple o complejo; es justamente cualquier objeto o

colección de objetos que deseamos examinar. La diferencia entre el ambiente y el sistema es que el ambiente es grande comparado con el sistema. La temperatura del sistema afecta al ambiente, pero supondremos que el ambiente es tan grande que cualesquiera cambios en la temperatura son imperceptibles.

El cambio en la temperatura del sistema se debe a la transferencia de energía entre el sistema y su ambiente. Este tipo de energía es la **energía térmica**, una energía interna relacionada con el movimiento de los átomos, moléculas y electrones que constituyen al sistema o al ambiente. La energía térmica en el proceso de transferirse de un cuerpo a otro se llama **calor** y se simboliza con Q . Si la energía térmica se transfiere hacia dentro del sistema, entonces $Q > 0$ [figura 18.2a)]. Esto es, el sistema gana energía térmica cuando recibe calor de su ambiente. Si la energía térmica se transfiere desde el sistema hacia el ambiente, entonces $Q < 0$ [figura 18.2c)]. Si el sistema y su ambiente tienen la misma temperatura [figura 18.2b)], entonces $Q = 0$. El flujo de energía térmica hace que el sistema gane o pierda energía térmica.

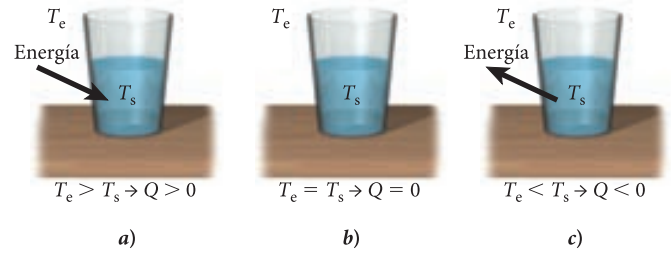


FIGURA 18.2 a) Un sistema empotrado en un ambiente que tiene una temperatura mayor. b) Un sistema empotrado en un ambiente que tiene la misma temperatura. c) Un sistema empotrado en un ambiente que tiene una temperatura menor.

Definición

El calor, Q , es la energía transferida entre un sistema y su ambiente (o entre dos sistemas) debido a una diferencia de temperatura entre éstos. Cuando la energía fluye dentro del sistema, $Q > 0$; cuando la energía fluye fuera del sistema, $Q < 0$.

18.2 Equivalente mecánico del calor

Recuerde del capítulo 5 que la energía también puede transferirse entre un sistema y su ambiente como trabajo efectuado por una fuerza que actúa sobre el sistema o por el sistema. El concepto de calor y trabajo, discutido en la sección 18.3, puede definirse en términos de la transferencia de energía hacia o desde un sistema. Podemos referirnos a la energía interna del sistema, pero no al calor contenido en el sistema. Si observamos el agua caliente en un vaso, no sabemos si la energía térmica se transfirió al agua o se efectuó un trabajo sobre el agua.

El calor es energía transferida y puede cuantificarse usando la unidad de energía del SI, el joule (J). Originalmente, el calor se medía en términos de su habilidad para elevar la temperatura del agua. La **caloría** (cal) se definió como la cantidad de calor requerida para elevar la temperatura de 1 gramo de agua por 1 °C. Otra medida común del calor, usada aún en Estados Unidos, es la unidad térmica británica (BTU), definida como la cantidad de calor requerida para elevar la temperatura de 1 libra de agua por 1 °F. Sin embargo, el cambio en la temperatura del agua como función de la cantidad de energía térmica transferida a ésta depende de la temperatura original del agua. Las definiciones reproducibles de la caloría y la unidad térmica británica requerían que las mediciones se efectuaran a temperatura inicial específica.

En un experimento clásico realizado en 1843, el físico inglés James Prescott Joule mostró que la energía mecánica de un objeto podría convertirse en energía térmica. El aparato que Joule usó consistía en una gran masa soportada por una cuerda que pasaba por una polea y enrollada en torno de un eje (figura 18.3). Conforme la masa descendía, la cuerda al desenrollarse hacía dar vueltas a un par de paletas grandes en un recipiente con agua. Joule mostró que el aumento en la temperatura del agua estaba directamente relacionado con el trabajo mecánico efectuado por el objeto que caía. De esta manera, Joule demostró que podría convertirse en energía térmica y encontró una relación entre la caloría y el joule (la unidad de energía llamada así en su honor).

La definición moderna de la caloría está basada en el joule. La caloría se define como exactamente 4.186 J, sin ninguna referencia al cambio en la temperatura del agua. Los siguientes son algunos factores de conversión para las unidades de energía:

$$\begin{aligned} 1 \text{ cal} &= 4.186 \text{ J} \\ 1 \text{ BTU} &= 1\,055 \text{ J} \\ 1 \text{ kW h} &= 3.60 \cdot 10^6 \text{ J} \\ 1 \text{ kW h} &= 3\,412 \text{ BTU.} \end{aligned} \quad (18.1)$$

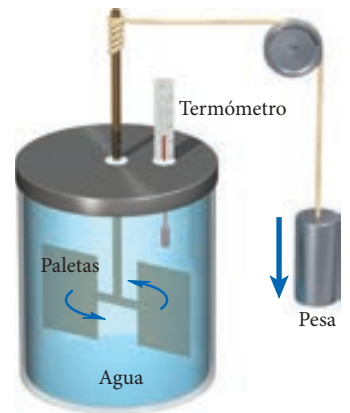


FIGURA 18.3 Aparato para el experimento de Joule, que sirve para demostrar el equivalente mecánico del calor.

El contenido energético de la comida se expresa normalmente en términos de calorías. Una caloría de la comida, a menudo llamada una *Caloría*, o una *kilocaloría*, no es igual a la caloría recién definida; una caloría de la comida es equivalente a 1 000 cal. El costo de energía eléctrica se manifiesta en kilowatt-hora (kWh).

EJEMPLO 18.1 Contenido energético de una barra de dulce

PROBLEMA

La etiqueta de una barra de dulce establece que tiene 275 calorías. ¿Cuál es el contenido energético de esta barra de dulce en joules?

SOLUCIÓN

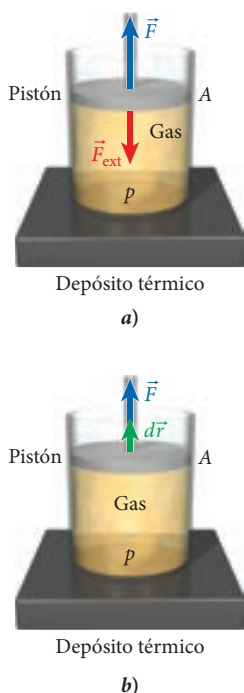
Las calorías de la comida son kilocalorías y $1 \text{ kcal} = 4\,186 \text{ J}$. La barra de dulce tiene 275 kcal o

$$275 \text{ kcal} \left(\frac{4\,186 \text{ J}}{1 \text{ kcal}} \right) = 1.15 \cdot 10^6 \text{ J}.$$

DISCUSIÓN

Observe que esta energía es suficiente para elevar un camión pequeño con un peso de 22.2 kN (una masa de 5 000 lb) una distancia de 52 m. Una persona de 73 kg (160 lb) tendría que caminar una hora a 1.6 m/s (3.5 mph) para quemar las calorías que vienen de consumir esta barra de dulce.

18.3 Calor y trabajo



Miremos cómo la energía puede transferirse como calor o trabajo entre un sistema y su ambiente. Consideraremos un sistema que consiste de un cilindro lleno de gas con un pistón (figura 18.4). El gas en el cilindro puede describirse por una temperatura T , una presión p y un volumen V . Suponemos que la pared lateral del cilindro no permite que el calor lo penetre. El gas está en contacto térmico con un depósito térmico infinito, que es un objeto tan grande que su temperatura no cambia incluso cuando experimenta un flujo de energía térmica hacia dentro o hacia fuera de ésta. (Los depósitos térmicos reales incluyen el océano, la atmósfera y la Tierra misma.) Este depósito también tiene una temperatura T . En la figura 18.4a), una fuerza externa, \vec{F}_{ext} , empuja sobre el pistón. El gas entonces empuja hacia atrás con una fuerza, \vec{F} , dada por la presión del gas, p , por el área, A , del pistón: $F = pA$ (vea el capítulo 13).

Para describir el comportamiento de este sistema, consideramos el cambio a partir del estado inicial especificado por la presión p_i , volumen V_i y temperatura T_i y un estado final especificado por p_f , volumen V_f y temperatura T_f . Imagine que los cambios se realizan lentamente, de manera que permanece cerca del equilibrio, permitiendo mediciones de p , V y T . La progresión del estado inicial al estado final es un **proceso termodinámico**. Durante este proceso, la energía térmica puede transferirse hacia dentro del sistema (calor positivo) o puede transferirse hacia fuera del sistema (calor negativo).

Cuando la fuerza externa se retira [figura 18.4b)], el gas en el cilindro empuja al pistón hacia fuera una distancia dr . El trabajo efectuado por el sistema en este proceso es

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = (pA)(dr) = p(A dr) = p dV,$$

donde $dV = A dr$ es el cambio en el volumen del sistema. De esta manera, el trabajo efectuado por el sistema al pasar de la configuración inicial a la configuración final está dado por

$$W = \int dW = \int_{V_i}^{V_f} p dV. \tag{18.2}$$

Observe que durante este cambio en el volumen, la presión también puede cambiar. Para evaluar esta integral, necesitamos conocer la relación entre la presión y el volumen para este proceso. Por ejemplo, si la presión permanece constante, obtenemos

$$W = \int_{V_i}^{V_f} p dV = p \int_{V_i}^{V_f} dV = p(V_f - V_i) \quad (\text{para una presión constante}). \tag{18.3}$$

FIGURA 18.4 Un cilindro lleno de gas con un pistón. El gas está en contacto térmico con un depósito térmico infinito. a) Una fuerza externa empuja sobre el pistón, creando una presión en el gas. b) La fuerza externa se retira, permitiendo que el gas empuje al pistón hacia fuera.

La ecuación 18.3 indica que, a presión constante, un cambio negativo en el volumen (compresión) corresponde a un trabajo negativo efectuado por el sistema.

La figura 18.5 muestra gráficas de presión contra volumen, llamadas en ocasiones **diagramas pV** . Las tres partes de la figura muestran diferentes trayectorias, o formas de cambiar la presión y el volumen de un sistema desde una condición inicial hasta una condición final. La figura 18.5a) ilustra un proceso que comienza en un punto inicial i y procede a un punto final f de tal manera que la presión disminuye conforme el volumen aumenta. El trabajo efectuado por los sistemas está dado por la ecuación 18.2. La integral puede representarse como el área bajo la curva, mostrada con un sombreado verde en la figura 18.5a). En este caso, el trabajo efectuado por el sistema es positivo porque el volumen del sistema aumenta (expansión).

La figura 18.5b) ilustra un proceso que comienza en un punto inicial i y procede a un punto final f a través de un punto intermedio m . El primer paso involucra un aumento en el volumen en tanto se conserva la presión constante. Una forma de completar este paso es incrementar la temperatura del sistema conforme el volumen aumenta, manteniendo una presión constante. El segundo paso consiste en disminuir la presión mientras se mantiene el volumen constante. Una forma de lograr esta tarea es disminuir la temperatura quitando energía térmica del sistema. De nuevo, el trabajo efectuado por el sistema puede representarse por el área bajo la curva, mostrada con sombreado verde en la figura 18.5b). El trabajo efectuado por el sistema es positivo porque el volumen del sistema aumenta. Sin embargo, el trabajo realizado por el sistema se origina sólo en el primer paso. En el segundo paso, el sistema no hace trabajo porque el volumen no cambia.

La figura 18.5c) ilustra otro proceso que comienza en un punto inicial i y procede a un punto final f a través de un punto intermedio m . El primer paso involucra disminuir la presión del sistema mientras se mantiene el volumen constante. El segundo paso consiste en aumentar el volumen mientras se mantiene la presión constante. De nuevo, el trabajo efectuado por el sistema puede representarse por el área bajo la curva, mostrada con sombreado verde en la figura 18.5c). El trabajo hecho por el sistema es otra vez positivo debido a que el volumen del sistema aumenta. Sin embargo, el trabajo efectuado por el sistema se origina sólo en el segundo paso. En el primer paso, el sistema no hace ningún trabajo debido a que el volumen no cambia. El trabajo neto efectuado en este proceso es menor que el trabajo realizado por el proceso en la figura 18.5b), ya que el área verde es menor. La energía térmica absorbida también debe ser menor, debido a que los estados inicial y final son los mismos en estos dos procesos, así que el cambio en la energía interna es el mismo. (Esta conexión entre el trabajo, el calor y el cambio en la energía interna se discute con más detalle en la sección 18.4.)

De esta manera, el trabajo efectuado por un sistema y la energía térmica transferida al sistema dependen de la forma en que el sistema se mueve de un punto inicial a un punto final en un diagrama pV . Nos referimos a este tipo de procesos como **procesos dependientes de la trayectoria**.

Los diagramas pV en la figura 18.6 invierten los procesos mostrados en la figura 18.5 al comenzar en los puntos finales de la figura 18.5 y procediendo a lo largo de la misma trayectoria a los puntos iniciales. En cada uno de dichos casos, el área bajo la curva representa el negativo del trabajo efectuado por el sistema al moverse de un punto inicial i a un punto final f . En los tres casos, el trabajo efectuado por el sistema es negativo debido a que el volumen del sistema disminuye.

Suponga que un proceso comienza en algún punto sobre el diagrama pV , sigue alguna trayectoria y regresa al punto original. Una trayectoria que regresa a su punto inicial se llama **trayectoria cerrada**. Dos ejemplos de trayectorias cerradas se ilustran en la figura 18.7. En la figura 18.7a), un proceso comienza en un punto inicial i y procede a un punto intermedio m_1 ; el volumen aumenta mientras se mantiene la presión constante. De m_1 , la trayectoria va al punto intermedio m_2 ; el volumen se mantiene constante mientras la presión disminuye. Desde el pun-

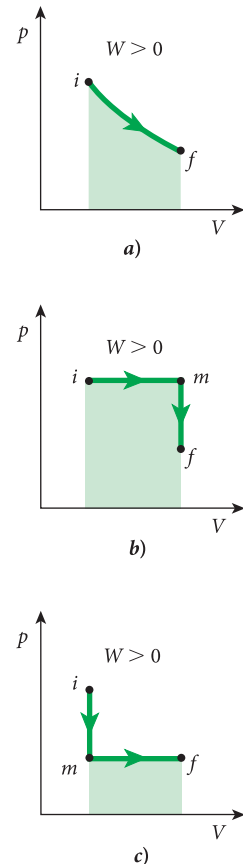


FIGURA 18.5 Las trayectorias de tres diferentes procesos en diagramas pV . a) Un proceso en el cual la presión disminuye conforme el volumen aumenta. b) Un proceso en el cual el primer paso consiste en aumentar el volumen mientras se mantiene la presión constante y el segundo paso consiste en disminuir la presión mientras se mantiene el volumen constante. c) Otro proceso en dos pasos, en el cual el primer paso consiste en mantener el volumen constante y disminuir la presión, y el segundo paso consiste en mantener la presión constante mientras se aumenta el volumen. En los tres casos, el área verde bajo la curva representa el trabajo efectuado durante el proceso.

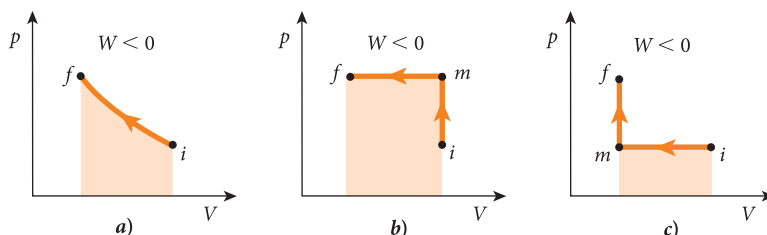
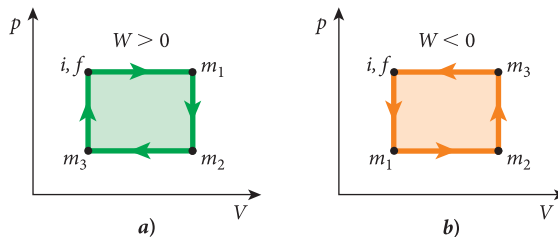


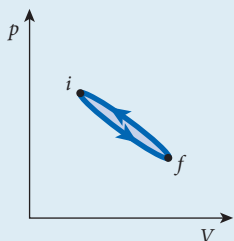
FIGURA 18.6 Las trayectorias de tres procesos en diagramas pV . Éstos son los procesos inversos de los mostrados en la figura 18.5.

FIGURA 18.7 Dos procesos de trayectoria cerrada en diagramas pV .



18.1 Oportunidad de autoexamen

Considere el proceso mostrado en el diagrama pV . La trayectoria pasa del punto i al punto f y de regreso al punto i . ¿El trabajo efectuado por el sistema es negativo, cero o positivo?



to m_2 , la trayectoria va al punto intermedio m_3 , con la presión constante y el volumen decreciendo. Finalmente, el proceso se mueve desde el punto m_3 al punto final, f , el cual es el mismo que el punto inicial, i . El área bajo la trayectoria de i a m_1 representa el trabajo positivo efectuado por el sistema (el volumen aumenta), en tanto que el área bajo la trayectoria de m_2 a m_3 representa trabajo negativo efectuado sobre el sistema (el volumen disminuye). La adición del trabajo positivo y negativo produce trabajo neto positivo efectuado por el sistema, como se representa por el área del rectángulo verde en la figura 18.7a). En este caso, el calor es positivo.

La figura 18.7b) muestra la misma trayectoria sobre el diagrama pV que en la figura 18.7a), pero el proceso ocurre en la dirección opuesta. El área bajo la trayectoria desde el punto intermedio m_1 al punto intermedio m_2 corresponde al trabajo positivo efectuado por el sistema. El área bajo la trayectoria desde el punto intermedio m_3 al punto final f corresponde al trabajo negativo efectuado sobre el sistema. El trabajo neto efectuado por el sistema en este caso es negativo, y su magnitud está representada por el área del rectángulo anaranjado en la figura 18.7b). En este caso, el calor es negativo.

La cantidad de trabajo efectuada por el sistema y la energía térmica absorbida por el sistema dependen de la trayectoria tomada sobre el diagrama pV , lo mismo que de la dirección en la cual se toma la trayectoria.

18.4 Primera ley de la termodinámica

Un **sistema cerrado** es un sistema hacia dentro o hacia fuera del cual la energía térmica puede transferirse, pero de la cual ningún componente puede escapar, y a la cual no se agregan componentes adicionales. El combinar varios de los conceptos cubiertos anteriormente en este capítulo nos permite expresar el cambio en la energía interna de un sistema cerrado en términos del calor y el trabajo como

$$\Delta E_{\text{int}} = E_{\text{int},f} - E_{\text{int},i} = Q - W. \quad (18.4)$$

Esta ecuación se conoce como la **primera ley de la termodinámica**. Puede enunciarse como sigue:

El cambio en la energía interna de un sistema cerrado es igual al calor adquirido por el sistema menos el trabajo efectuado por el sistema.

En otras palabras, la energía se conserva. El calor y el trabajo pueden transformarse en energía interna, pero ninguna energía se pierde. Observe que aquí el trabajo lo efectúa el sistema; no es efectuado sobre el sistema. Esencialmente, la primera ley de la termodinámica extiende la conservación de energía (encontrada por vez primera en el capítulo 6) más allá de la energía mecánica para incluir el calor lo mismo que el trabajo. (En otros contextos, tales como en las reacciones químicas, el trabajo se define como el trabajo efectuado sobre el sistema, lo cual conduce a una convención diferente para el trabajo. La convención del signo puede asignarse en cualquier forma, en tanto sea consistente.) Observe también que el cambio en la energía interna es independiente de la trayectoria, mientras que los cambios en el calor y el trabajo son dependientes de la trayectoria.

EJEMPLO 18.2

Levantador de pesas

PROBLEMA

Un levantador de pesas en una arrancada levanta una pesa con masa $m = 180.0$ kg y la mueve una distancia $h = 1.25$ m verticalmente, como se ilustra en la figura 18.8. Si consideramos al levantador de pesas como un sistema termodinámico, ¿cuánto calor debe emitir si su energía interna disminuye en 4 000.0 J?



FIGURA 18.8 Un levantador de pesas compete en los Juegos Olímpicos de 2008.

SOLUCIÓN

Comenzamos con la primera ley de la termodinámica (ecuación 18.4):

$$\Delta E_{\text{int}} = Q - W.$$

El trabajo es el trabajo mecánico efectuado sobre la pesa por el levantador de pesas:

$$W = mgh.$$

El calor entonces está dado por

$$\begin{aligned} Q &= \Delta E_{\text{int}} + W = \Delta E_{\text{int}} + mgh = -4\,000\text{ J} + (180.0\text{ kg})(9.81\text{ m/s}^2)(1.25\text{ m}) \\ &= -1\,790\text{ J} = -0.428\text{ kcal.} \end{aligned}$$

El levantador de pesas no puede convertir energía interna en trabajo útil sin emitir calor. Note que la disminución en la energía interna del levantador de pesas es menor al de una caloría de la comida: $(4\,000\text{ J})/(4\,186\text{ J/kcal}) = 0.956\text{ kcal}$. La producción de calor es sólo de 0.428 kcal. Esta pequeña cantidad de energía interna y calor asociado con el gran esfuerzo requerido para levantar el peso es análogo a la cantidad de ejercicio que se requiere para quemar las calorías en una barra de dulce (vea el ejemplo 18.1).

EJEMPLO 18.3**Un camión que se desliza hasta detenerse****PROBLEMA**

Los frenos de un camión en movimiento con una masa $m = 3\,000.0\text{ kg}$ se bloquean. El camión se desliza hasta detenerse en una carretera horizontal por una distancia $L = 83.2\text{ m}$. El coeficiente de fricción cinética entre los neumáticos del camión y la superficie de la carretera es $\mu_k = 0.600$. ¿Qué ocurre con la energía interna del camión?

SOLUCIÓN

La primera ley de la termodinámica (ecuación 18.4) relaciona la energía interna, el calor y el trabajo efectuado sobre el sistema:

$$\Delta E_{\text{int}} = Q - W.$$

En este caso, no se transfiere energía térmica hacia o desde el camión debido a que el proceso de deslizarse hasta detenerse es suficientemente rápido, de tal manera que no hay tiempo para transferir energía térmica en cantidades apreciables. De esta forma, $Q = 0$. El trabajo es efectuado por la fuerza de la fricción cinética, F_f , para frenar y detener al camión. La magnitud del trabajo efectuado sobre el camión es (vea el capítulo 5)

$$W = F_f L = \mu_k mgL,$$

donde mg es la fuerza normal ejercida sobre la carretera por el camión. Debido a que el trabajo es efectuado sobre el camión, es negativo, y tenemos

$$\Delta E_{\text{int}} = 0 - (-\mu_k mgL) = \mu_k mgL.$$

Al sustituir los valores numéricos nos da

$$\Delta E_{\text{int}} = (0.600)(3\,000.0\text{ kg})(9.81\text{ m/s}^2)(83.2\text{ m}) = 1.47\text{ MJ}.$$

Este incremento en la energía interna puede calentar los neumáticos del camión. El capítulo 6 discute la conservación de la energía para fuerzas conservativas y no conservativas. Aquí vemos que la energía se conserva porque el trabajo mecánico puede convertirse en energía interna.

DISCUSIÓN

Observe que hemos supuesto que el camión es un sistema cerrado. Sin embargo, cuando el camión comienza a deslizarse, los neumáticos pueden dejar marcas de frenado, quitando materia y energía del sistema. La suposición de que ninguna energía térmica se transfiere hacia o desde el

(continúa)

(continuación)

camión en este proceso tampoco es exactamente válida. Además, la energía interna de la superficie de la carretera también se incrementará como resultado de la fricción entre los neumáticos y la carretera, tomando algo de la energía total disponible. Así, los 1.47 MJ agregados a la energía interna del camión deberán considerarse como un límite superior. Sin embargo, la lección básica de este ejemplo es que la energía mecánica perdida debido a la acción de las fuerzas no conservativas se transforma a la energía interna de partes o todo el sistema y la energía total se conserva.

18.5 La primera ley para procesos especiales

La primera ley de la termodinámica —esto es, la conservación básica de la energía— se cumple para todos los tipos de procesos en un sistema cerrado, pero la energía puede transformarse de energía térmica transportada en ciertas formas especiales en las cuales sólo una o unas cuantas variables caracterizan el estado del cambio del sistema. Algunos procesos especiales, los cuales ocurren a menudo en situaciones físicas, se pueden describir usando la primera ley de la termodinámica. Estos procesos especiales son también normalmente aquellos en los que podemos calcular los valores numéricos para el calor y el trabajo. Por esta razón, se discutirán varias veces en los siguientes capítulos. Tenga presente que estos procesos son simplificaciones o idealizaciones, pero éstas frecuentemente se aproximan a las situaciones del mundo real bastante bien.

Procesos adiabáticos

Un **proceso adiabático** es aquel en el cual no fluye el calor cuando el estado del sistema cambia. Esto puede suceder, por ejemplo, si un proceso ocurre rápidamente y no hay suficiente tiempo para que se intercambie el calor. Los procesos adiabáticos son comunes debido a que muchos procesos físicos ocurren suficientemente rápido para que no tenga lugar la transferencia de energía. Para los procesos adiabáticos, $Q = 0$ en la ecuación 18.4, así

$$\Delta E_{\text{int}} = -W \quad (\text{para un proceso adiabático}). \quad (18.5)$$

Otra situación en la cual puede ocurrir un proceso adiabático es si el sistema está aislado térmicamente de su ambiente mientras ocurren los cambios de presión y de volumen. Un ejemplo es comprimir un gas en un recipiente aislado o bombear aire en el neumático de una bicicleta usando una bomba de neumático manual. El cambio en la energía interna del gas se debe solamente al trabajo efectuado sobre el gas.

Procesos a volumen constante

Los procesos que ocurren a volumen constante se llaman **procesos isocóricos**. Para un proceso en el cual el volumen se mantiene constante, el sistema no puede hacer trabajo, así $W = 0$ en la ecuación 18.4, que da

$$\Delta E_{\text{int}} = Q \quad (\text{para un proceso a volumen constante}). \quad (18.6)$$

Un ejemplo de un proceso a volumen constante es calentar un gas en un recipiente rígido, cerrado, que está en contacto con otros cuerpos. No puede hacerse ningún trabajo debido a que el volumen del gas no puede cambiar. El cambio en la energía interna del gas ocurre debido a que el calor fluye hacia o desde el gas como resultado del contacto entre el recipiente y otros cuerpos. Cocinar comida en una olla de presión es un proceso isocórico.

Procesos en trayectoria cerrada

En un **proceso en trayectoria cerrada**, el sistema regresa al mismo estado en el cual comenzó. Independientemente de cómo alcanzó el sistema este punto, la energía interna debe ser la misma que en el comienzo, así es que $\Delta E_{\text{int}} = 0$ en la ecuación 18.4. Esto brinda

$$Q = W \quad (\text{para un proceso en trayectoria cerrada}). \quad (18.7)$$

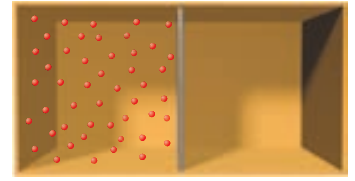
De esta manera, el trabajo neto efectuado por un sistema durante un proceso en una trayectoria cerrada es igual a la energía térmica transferida al sistema. Tales procesos cíclicos forman la base de muchos tipos de máquinas térmicas (discutidas en el capítulo 20).

Expansión libre

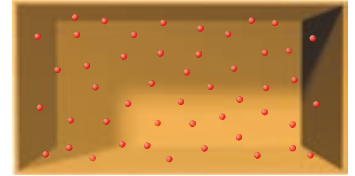
Si un recipiente aislado térmicamente (así que $Q = 0$) para un gas aumenta súbitamente de tamaño, el gas se expandirá para llenar al nuevo volumen. Durante esta **expansión libre**, el sistema no hace trabajo y no se absorbe calor. Esto es $W = 0$ y $Q = 0$, y la ecuación 18.4 se vuelve

$$\Delta E_{\text{int}} = 0 \quad (\text{para la expansión libre de un gas}). \quad (18.8)$$

Para ilustrar esta situación considere una caja con una barrera en el centro (figura 18.9). Un gas se encuentra confinado en la mitad izquierda de la caja. Cuando la barrera entre las dos mitades se retira, el gas llena el nuevo volumen. Sin embargo, el gas no realiza ningún trabajo. Esta última afirmación requiere una explicación: en su expansión libre, el gas no mueve un pistón u otro dispositivo material; así pues, no hace trabajo sobre nada. Durante la expansión, las partículas de gas se mueven libremente hasta que se encuentran con las paredes del recipiente expandido. El gas no se encuentra en equilibrio mientras se está expandiendo. Para este sistema, podemos graficar el estado inicial y el estado final sobre el diagrama pV , pero no el estado intermedio.



a)



b)

FIGURA 18.9 a) Un gas se encuentra confinado en la mitad del volumen de una caja. b) La barrera que separaba a las dos mitades se retira y el gas se expande para llenar el volumen.

Procesos a presión constante

Los procesos a presión constante se llaman **procesos isobáricos**. Tales procesos son comunes en el estudio de la capacidad calorífica específica de los gases. En un proceso isobárico, el volumen puede cambiar, permitiendo al sistema efectuar un trabajo. Dado que la presión se mantiene constante, $W = p(V_f - V_i) = p\Delta V$, de acuerdo con la ecuación 18.3. De esta manera, la ecuación 18.4 puede escribirse como sigue:

$$\Delta E_{\text{int}} = Q - p\Delta V \quad (\text{para un proceso a presión constante}). \quad (18.9)$$

Un ejemplo de un proceso isobárico es el calentamiento lento de un cilindro adaptado con un pistón sin fricción, el cual puede moverse para mantener la presión constante. La trayectoria de un proceso isobárico en un diagrama pV es una línea recta horizontal. Si el sistema se mueve en la dirección del volumen positivo, el sistema se está expandiendo. Si el sistema se mueve en la dirección del volumen negativo, el sistema se está contrayendo. Cocinar la comida en una cacerola abierta es otro ejemplo de un proceso isobárico.

Procesos a temperatura constante

Los procesos a temperatura constante se llaman **procesos isotérmicos**. La temperatura del sistema se mantiene constante a través del contacto con un depósito térmico externo. Los procesos isotérmicos tienen lugar suficientemente lentos como para que el calor pueda intercambiarse con el depósito externo para mantener la temperatura constante. Por ejemplo, el calor puede fluir de un depósito caliente al sistema, permitiendo al sistema hacer trabajo. La trayectoria de un proceso isotérmico en un diagrama pV se llama una **isoterma**. Como veremos en el capítulo 19, el producto de la presión y el volumen es constante para un gas ideal al experimentar un proceso isotérmico, brindándole a la isoterma la forma de una hipérbola. Además, como veremos en el capítulo 20, los procesos isotérmicos juegan una parte importante en el análisis de dispositivos que producen trabajo útil a partir de fuentes de calor.

18.6 Calores específicos de sólidos y fluidos

Suponga que un bloque de aluminio se encuentra a temperatura ambiente. Si se transfiere calor, Q , al bloque, la temperatura del bloque aumenta proporcionalmente a la cantidad de calor. La constante de proporcionalidad entre la diferencia de temperatura y el calor es la **capacidad calorífica**, C , de un objeto. Así,

$$Q = C\Delta T, \quad (18.10)$$

donde ΔT es el cambio en la temperatura.

El término *capacidad calorífica* no implica que un objeto tenga cierta cantidad de calor. Más bien, dice cuánto calor se requiere para aumentar la temperatura del objeto en una cantidad dada. Las unidades del SI para la capacidad calorífica son joules por kelvin (J/K).

El cambio de temperatura de un objeto debido al calor puede describirse como **calor específico**, c , la cual se define como la capacidad calorífica por unidad de masa, m :

$$c = \frac{C}{m}. \quad (18.11)$$

Tabla 18.1 Calores específicos para sustancias seleccionadas

Material	Calor específico, c	
	$\text{kJ}/(\text{kg K})$	$\text{cal}/(\text{g K})$
Plomo	0.129	0.0308
Cobre	0.386	0.0922
Acero	0.448	0.107
Aluminio	0.900	0.215
Vidrio	0.840	0.20
Hielo	2.06	0.500
Agua	4.19	1.00
Vapor	2.01	0.48

Con esta definición, la relación entre el cambio de la temperatura y el calor puede escribirse como

$$Q = cm\Delta T. \quad (18.12)$$

Las unidades para calor específico son $\text{J}/(\text{kg K})$. En las aplicaciones prácticas, el calor específico se encuentra a menudo en $\text{cal}/(\text{g K})$. Las unidades $\text{J}/(\text{kg K})$ y $\text{J}/(\text{kg } ^\circ\text{C})$ pueden usarse indistintamente para el calor específico, dado que se define en términos de ΔT . Los calores específicos de varios materiales se ofrecen en la tabla 18.1.

Observe que el calor específico y la capacidad calorífica se miden normalmente en dos formas. Para la mayoría de las sustancias se miden bajo presión constante (como en la tabla 18.1) y se denotan por c_p y C_p . Sin embargo, para los fluidos (gases y líquidos), el calor específico y la capacidad calorífica pueden también medirse a volumen constante y denotarse con c_v y C_v . En general, las mediciones bajo presión constante producen valores mayores, debido a que se debe realizar trabajo mecánico en el proceso y la diferencia es particularmente grande para los gases. Discutiremos esto con mayor detalle en el capítulo 19.

El calor específico o capacidad calorífica específica de una sustancia también puede definirse en términos del número de moles de un material, en lugar de su masa. Este tipo de calor específico se llama el *calor específico molar* y también se discute en el capítulo 19.

El efecto de las diferencias en los calores específicos de las sustancias puede observarse fácilmente a la orilla del mar, donde el Sol transfiere la energía a la tierra y al agua aproximadamente por igual durante el día. El calor específico de la tierra es como cinco veces menor que el calor específico del agua. De esta forma, la tierra se calienta más rápidamente que el agua y calienta al aire sobre ésta más de lo que el agua calienta al aire sobre ésta. La diferencia de temperatura crea una brisa hacia la tierra durante el día. El alto calor específico del agua ayuda a moderar el clima en torno de los océanos y los lagos grandes.

EJEMPLO 18.4**Energía requerida para calentar agua****PROBLEMA**

Usted tiene 2.00 L de agua a la temperatura de $20.0\text{ }^\circ\text{C}$. ¿Cuánta energía se requiere para elevar la temperatura del agua a $95.0\text{ }^\circ\text{C}$? Suponiendo que usted usa electricidad para calentar el agua, ¿cuánto costará a 10.0 centavos por kilowatt-hora?

SOLUCIÓN

La masa de 1.00 L de agua es de 1.00 kg. De la tabla 18.1, $c_{\text{agua}} = 4.19\text{ kJ}/(\text{kg K})$. Por lo tanto, la energía requerida para calentar 2.00 kg de agua de $20.0\text{ }^\circ\text{C}$ a $95.0\text{ }^\circ\text{C}$ es

$$\begin{aligned} Q &= c_{\text{agua}} m_{\text{agua}} \Delta T = [4.19\text{ kJ}/(\text{kg K})](2.00\text{ kg})(95.0\text{ }^\circ\text{C} - 20.0\text{ }^\circ\text{C}) \\ &= 629\,000\text{ J.} \end{aligned}$$

Usando el factor de conversión para convertir joules a kilowatt-horas (ecuación 18.1), calculamos el costo de calentar el agua como

$$\text{Costo} = (629\,000\text{ J}) \left(\frac{10.0\text{ centavos}}{1\text{ kW h}} \right) \left(\frac{1\text{ kW h}}{3.60 \cdot 10^6\text{ J}} \right) = 1.75\text{ centavos.}$$

Calorimetría

Un **calorímetro** es un dispositivo usado para estudiar los cambios de energía interna midiendo las transferencias de energía térmica. La transferencia de energía térmica y el cambio en la energía interna pueden ser el resultado de una reacción química, un cambio físico o diferencias en la temperatura y calor específico. Un calorímetro simple consiste en un recipiente aislado y un termómetro. Para mediciones simples, un vaso de espuma de estireno y un termómetro de alcohol común bastarán. Supondremos que no se pierde o gana calor en el calorímetro o el termómetro.

Cuando dos materiales con distintas temperaturas y calores específicos se colocan en un calorímetro, el calor fluirá de la sustancia más caliente a la más fría hasta que las temperaturas de las dos sustancias sean las mismas. Ningún calor fluirá hacia dentro o hacia fuera del calorímetro. El calor perdido por la sustancia más caliente será igual al calor ganado por la sustancia más fría.

Una sustancia tal como el agua, con un calor específico alto, $c = 4.19\text{ kJ}/(\text{kg K})$, requiere más calor para elevar su temperatura por la misma cantidad que lo que requiere una sustancia con un calor específico bajo, como el acero, con $c = 0.488\text{ kJ}/(\text{kg K})$. El problema resuelto 18.1 ilustra el concepto de calorimetría.

18.1 Ejercicio en clase

¿Cuánta energía es necesaria para elevar la temperatura de un bloque de cobre con una masa de 3.00 kg de 25.0 a 125 °C?

- a) 116 kJ d) 576 kJ
b) 278 kJ e) 761 kJ
c) 421 kJ

PROBLEMA RESUELTO 18.1 Agua y plomo

PROBLEMA

Un herrero vierte 3.00 kg de perdigones de plomo (el cual es el material usado para llenar los cartuchos de una escopeta) a una temperatura de 94.7 °C en 1.00 kg de agua a 27.5 °C en un recipiente aislado, el cual actúa como calorímetro. ¿Cuál es la temperatura final de la mezcla?

SOLUCIÓN

PIENSE

Los perdigones de plomo cederán calor y el agua absorberá calor hasta que ambos estén a la misma temperatura. (Algo que puede no ocurrírsele a usted es que los perdigones de plomo tienen una temperatura de fusión, pero es significativamente mayor a 94.7 °C; de tal manera que no tenga que tratar con un cambio de fase en esta situación. El agua seguirá líquida y los perdigones de plomo seguirán sólidos. La sección 18.7 se ocupa de estas situaciones que implican cambios de fase.)

ESBOCE

La figura 18.10 muestra la situación de este problema antes y después de que los perdigones se agreguen al agua.

INVESTIGUE

El calor perdido por los perdigones de plomo, Q_{plomo} , al ambiente está dado por $Q_{\text{plomo}} = m_{\text{plomo}}c_{\text{plomo}}(T - T_{\text{plomo}})$, donde c_{plomo} es el calor específico del plomo, m_{plomo} es la masa de los perdigones de plomo, T_{plomo} es la temperatura original de los perdigones de plomo y T es la temperatura final de equilibrio.

El calor ganado por el agua, Q_{agua} , está dado por $Q_{\text{agua}} = m_{\text{agua}}c_{\text{agua}}(T - T_{\text{agua}})$, donde c_{agua} es el calor específico del agua, m_{agua} es la masa del agua y T_{agua} es la temperatura original del agua.

La suma del calor perdido por los perdigones de plomo y el calor ganado por el agua es cero, debido a que el proceso tuvo lugar en un recipiente aislado y debido a que la energía total se conserva, una consecuencia de la primera ley de la termodinámica. Así que podemos escribir

$$Q_{\text{plomo}} + Q_{\text{agua}} = 0 = m_{\text{plomo}}c_{\text{plomo}}(T - T_{\text{plomo}}) + m_{\text{agua}}c_{\text{agua}}(T - T_{\text{agua}}).$$

(continúa)

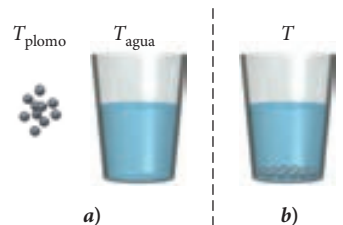


FIGURA 18.10 Perdigones de plomo y agua a) antes y b) después de que los perdigones de plomo se agregan al agua.

(continuación)

SIMPLIFIQUE

Multiplicamos ambos lados y reordenamos, de tal manera que todos los términos que contienen la temperatura desconocida se encuentren en el lado izquierdo de la ecuación:

$$m_{\text{plomo}}c_{\text{plomo}}T_{\text{plomo}} + m_{\text{agua}}c_{\text{agua}}T_{\text{agua}} = m_{\text{agua}}c_{\text{agua}}T + m_{\text{plomo}}c_{\text{plomo}}T.$$

Podemos resolver esta ecuación para T dividiendo ambos lados entre $m_{\text{plomo}}c_{\text{plomo}} + m_{\text{agua}}c_{\text{agua}}$:

$$T = \frac{m_{\text{plomo}}c_{\text{plomo}}T_{\text{plomo}} + m_{\text{agua}}c_{\text{agua}}T_{\text{agua}}}{m_{\text{plomo}}c_{\text{plomo}} + m_{\text{agua}}c_{\text{agua}}}.$$

CALCULE

Al sustituir los valores numéricos nos da

$$\begin{aligned} T &= \frac{(3.00 \text{ kg})[0.129 \text{ kJ}/(\text{kg K})](94.7^\circ\text{C}) + (1.00 \text{ kg})[4.19 \text{ kJ}/(\text{kg K})](27.5^\circ\text{C})}{(3.00 \text{ kg})[0.129 \text{ kJ}/(\text{kg K})] + (1.00 \text{ kg})[4.19 \text{ kJ}/(\text{kg K})]} \\ &= 33.182^\circ\text{C}. \end{aligned}$$

REDONDEE

Reportamos nuestro resultado con tres cifras significativas:

$$T = 33.2^\circ\text{C}.$$

VUELVA A REVISAR

La temperatura final de la mezcla de perdigones de plomo y agua es solamente 5.7°C superior a la temperatura original del agua. Las masas de los perdigones de plomo y el agua difieren por un factor de 3, pero el calor específico del plomo es mucho menor que el calor específico del agua. De esta forma, es razonable que el calor tuviese un gran cambio en la temperatura y el agua tuviese un pequeño cambio de temperatura. Para verificar, calculamos el calor perdido por el plomo,

$$\begin{aligned} Q_{\text{plomo}} &= m_{\text{plomo}}c_{\text{plomo}}(T - T_{\text{plomo}}) = (3.00 \text{ kg})[0.129 \text{ kJ}/(\text{kg K})](33.2^\circ\text{C} - 94.7^\circ\text{C}) \\ &= -23.8 \text{ kJ}, \end{aligned}$$

y comparamos el resultado con el calor ganado por el agua,

$$\begin{aligned} Q_{\text{agua}} &= m_{\text{agua}}c_{\text{agua}}(T - T_{\text{agua}}) = (1.00 \text{ kg})[4.19 \text{ kJ}/(\text{kg K})](33.2^\circ\text{C} - 27.5^\circ\text{C}) \\ &= 23.9 \text{ kJ}. \end{aligned}$$

Estos resultados suman 0 dentro del error de redondeo, como se requería.

18.7 Calor latente y transiciones de fase

Como se hizo notar en el capítulo 13, los tres **estados de la materia** comunes (en ocasiones también llamados **fases**) son sólido, líquido y gas. Hemos estado considerando objetos para los cuales el cambio de temperatura es proporcional a la cantidad de calor que se agrega. Esta relación lineal entre el calor y la temperatura es, estrictamente hablando, una aproximación, pero tiene una gran precisión para los sólidos y los líquidos. Para un gas, agregar calor subirá la temperatura, pero también puede cambiar la presión o el volumen, dependiendo de si el gas está contenido y cómo. Las sustancias pueden tener diferentes calores específicos, dependiendo de si se encuentran en estado sólido, líquido o gaseoso.

Si se agrega suficiente calor a un sólido, se funde en un líquido. Si se agrega suficiente calor a un líquido, se vaporiza en un gas. Éstos son ejemplos de **cambios de fase**, o **transiciones de fase** (figura 18.11). Durante un cambio de fase, la temperatura de un objeto permanece constante. El calor que se requiere para fundir un sólido, dividido entre su masa, se llama **calor latente de fusión**, $L_{\text{fusión}}$. La fusión cambia una sustancia de un sólido a un líquido. El calor que se requiere para vaporizar un líquido, dividido entre la masa, se llama **calor latente de vaporización**, $L_{\text{vaporización}}$. La vaporización cambia una sustancia de líquido a gas.

La temperatura a la cual el sólido se funde a un líquido es el punto de fusión, $T_{\text{fusión}}$. La temperatura a la cual el líquido se vaporiza a un gas es el punto de ebullición, $T_{\text{ebullición}}$. La relación

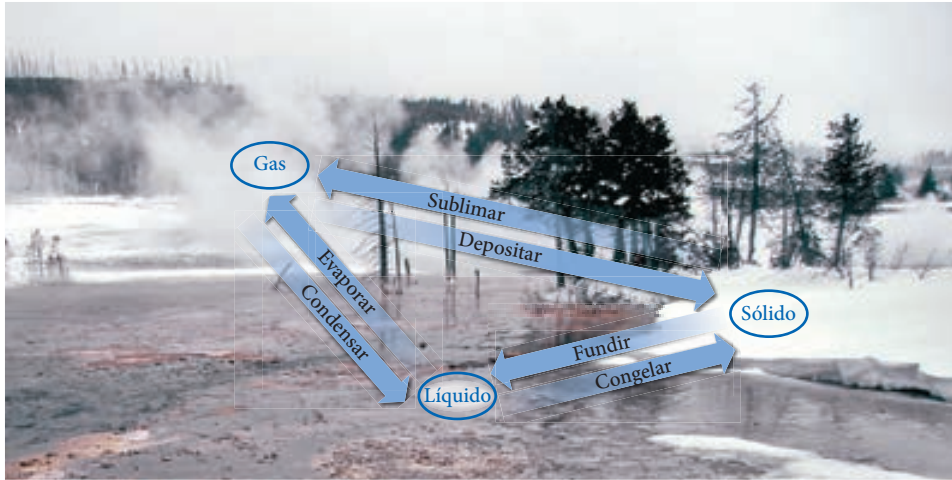


FIGURA 18.11 Cambios de fase que involucran los tres estados del agua, los cuales están presentes simultáneamente en esta fotografía tomada en el Parque Nacional de Yellowstone.

entre la masa de un objeto a su punto de fusión y el calor necesario para cambiar al objeto de un sólido a un líquido está dada por

$$Q = mL_{\text{fusión}} \quad (\text{para } T = T_{\text{fusión}}). \tag{18.13}$$

De forma similar, la relación entre un objeto y su punto de ebullición y el calor necesario para cambiar el objeto de un líquido a un gas está dada por

$$Q = mL_{\text{vaporización}} \quad (\text{para } T = T_{\text{ebullición}}). \tag{18.14}$$

Las unidades del SI para los calores latentes de fusión y vaporización son joules por kilogramo (J/kg); a menudo se usan unidades de calorías por gramo (cal/g). El calor latente de fusión para una sustancia dada es diferente del calor latente de vaporización para la misma sustancia. Los valores representativos para el punto de fusión, el calor latente de fusión, el punto de ebullición y el calor latente de vaporización se enlistan en la tabla 18.2.

También es posible para una sustancia cambiar directamente de un sólido a un gas. Este proceso se llama **sublimación**. Por ejemplo, la sublimación ocurre cuando el hielo seco, el cual es dióxido de carbono sólido (congelado), cambia directamente a dióxido de carbono gaseoso sin pasar a través del estado líquido. Cuando un cometa se acerca al Sol, parte del dióxido de carbono congelado se sublima, ayudando a producir la cola visible del cometa.

Si continuamos calentando el gas, se ionizará, lo cual significa que parte de los electrones en los átomos del gas, o todos ellos, se remueven. Un gas ionizado y sus electrones libres forman un estado de la materia llamado **plasma**. Los plasmas son muy comunes en el universo; de hecho, tanto como 99% de la masa del Sistema Solar existe en la forma de plasma. La polvorienta nube de gas conocida como la Nebulosa Omega/Cisne (M17), mostrada en la figura 18.12, también es un plasma.



FIGURA 18.12 La imagen de la Nebulosa Omega/Cisne (M17), tomada por el Telescopio Espacial Hubble, muestra una inmensa región de gas ionizado por la radiación de estrellas jóvenes.

Tabla 18.2 Algunos puntos de fusión, puntos de ebullición, calores latentes de fusión y calores latentes de vaporización representativos

Material	Punto de fusión (K)	Calor latente de fusión, $L_{\text{fusión}}$ (kJ/kg)	(cal/g)	Punto de ebullición (K)	Calor latente de vaporización, $L_{\text{vaporización}}$ (kJ/kg)	(cal/g)
Hidrógeno	13.8	58.6	14.0	20.3	452	108
Alcohol etílico	156	104	24.9	351	858	205
Mercurio	234	11.3	2.70	630	293	70.0
Agua	273	334	79.7	373	2 260	539
Aluminio	932	396	94.5	2 740	10 500	2 500
Cobre	1 359	205	49.0	2 840	4 730	1 130

Como se menciona en el capítulo 13, hay otros estados de la materia además de sólido, líquido, gas y plasma. Por ejemplo, la materia en el estado granular tiene propiedades específicas que la diferencian de los cuatro principales estados de la materia. La materia también puede existir como un condensado de Bose-Einstein, en el cual los átomos individuales se tornan indistinguibles, bajo condiciones muy específicas a muy bajas temperaturas. Se les otorgó el premio Nobel de Física de 2001 a los físicos estadounidenses Eric Cornell y Carl Wieman, junto con el físico alemán Wolfgang Ketterle, por sus estudios del condensado de Bose-Einstein.

Enfriar un objeto significa reducir la energía interna del mismo. Conforme la energía térmica se remueve de una sustancia en el estado gaseoso, la temperatura del gas decrece, en relación con el calor específico del gas, hasta que el gas comienza a condensarse en un líquido. Este cambio tiene lugar a una temperatura llamada *punto de condensación*, la cual es la misma temperatura que el punto de ebullición de la sustancia. Para convertir todo el gas a líquido se requiere la remoción de una cantidad de calor correspondiente al calor latente de vaporización por la masa del gas. Si la energía térmica continúa retirándose, la temperatura del líquido se reducirá, determinada por el calor específico del líquido, hasta que la temperatura alcanza el punto de congelación, la cual es la misma que la temperatura de fusión de la sustancia. Para convertir todo el líquido a un sólido se requiere remover una cantidad de calor correspondiente al calor latente de fusión por la masa. Si entonces el calor continúa removiéndose del sólido, su temperatura decrecerá en relación con el calor específico del sólido.

18.2 Ejercicio en clase

¿Cuánta energía se necesita para fundir un bloque de cobre con una masa de 3.00 kg que se encuentra inicialmente a la temperatura de 1 359 K?

- a) 101 kJ d) 615 kJ
b) 221 kJ e) 792 kJ
c) 390 kJ

EJEMPLO 18.5

Calentamiento del hielo en agua y del agua en vapor

PROBLEMA

¿Cuánto calor, Q , se requiere para convertir 0.500 kg de hielo (agua congelada) a una temperatura de $-30\text{ }^\circ\text{C}$ en vapor a $140\text{ }^\circ\text{C}$?

SOLUCIÓN

Resolvamos este problema por pasos, con cada paso correspondiente, ya sea a una elevación en la temperatura, o bien a un cambio de fase. Primero calculamos cuánto calor se requiere para elevar el hielo de $-30\text{ }^\circ\text{C}$ a $0\text{ }^\circ\text{C}$. El calor específico del hielo es de $2.06\text{ kJ}/(\text{kg K})$, así que el calor requerido es

$$Q_1 = cm\Delta T = [2.06\text{ kJ}/(\text{kg K})](0.500\text{ kg})(30\text{ K}) = 30.9\text{ kJ}.$$

Continuamos agregando calor al hielo hasta que se funda. La temperatura permanece en $0\text{ }^\circ\text{C}$ hasta que todo el hielo se funde. El calor latente de fusión del hielo es de $334\text{ kJ}/\text{kg}$, así que el calor requerido para fundir todo el hielo es

$$Q_2 = mL_{\text{fusión}} = (334\text{ kJ}/\text{kg})(0.500\text{ kg}) = 167\text{ kJ}.$$

Una vez que todo el hielo se funda en agua, continuamos agregando calor hasta que el agua alcanza el punto de ebullición, a $100\text{ }^\circ\text{C}$. El calor requerido para este paso es

$$Q_3 = cm\Delta T = [4.19\text{ kJ}/(\text{kg K})](0.500\text{ kg})(100\text{ K}) = 209.5\text{ kJ}.$$

Continuamos agregando calor al agua hasta que se vaporiza. El calor requerido para la vaporización es

$$Q_4 = mL_{\text{vaporización}} = (2\,260\text{ kJ}/\text{kg})(0.500\text{ kg}) = 1\,130\text{ kJ}.$$

Ahora calentamos el vapor y elevamos su temperatura desde $100\text{ }^\circ\text{C}$ hasta $140\text{ }^\circ\text{C}$. El calor necesario para este paso es

$$Q_5 = cm\Delta T = [2.01\text{ kJ}/(\text{kg K})](0.500\text{ kg})(40\text{ K}) = 40.2\text{ kJ}.$$

De esta manera, el calor total requerido es

$$\begin{aligned} Q &= Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 + Q_5 \\ &= 30.9\text{ kJ} + 167\text{ kJ} + 209.5\text{ kJ} + 1\,130\text{ kJ} + 40.2\text{ kJ} = 1\,580\text{ kJ}. \end{aligned}$$

La figura 18.13 muestra una gráfica de la temperatura del agua como función del calor agregado. En la región *a*), la temperatura del hielo se incrementa de $-30\text{ }^\circ\text{C}$ a $0\text{ }^\circ\text{C}$. En la región *b*), el

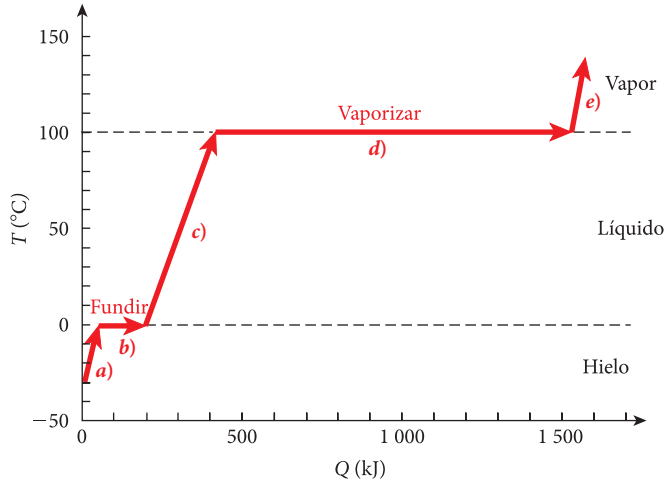


FIGURA 18.13 Gráfica de la temperatura contra calor agregado para cambiar 0.500 kg de hielo, comenzando a la temperatura de $-30\text{ }^{\circ}\text{C}$, en vapor a $140\text{ }^{\circ}\text{C}$.

hielo se funde en agua mientras la temperatura permanece en $0\text{ }^{\circ}\text{C}$. En la región *c*), el agua se calienta de 0 a $100\text{ }^{\circ}\text{C}$. En la región *d*), el agua hierve y cambia a vapor mientras la temperatura permanece en $100\text{ }^{\circ}\text{C}$. En la región *e*), la temperatura del vapor se incrementa de 100 a $140\text{ }^{\circ}\text{C}$.

Observe que casi dos terceras partes del calor total de este proceso entero de calentar la muestra desde $-30\text{ }^{\circ}\text{C}$ hasta $140\text{ }^{\circ}\text{C}$ se dedican a convertir el agua líquida a vapor en el proceso de vaporización.

18.3 Ejercicio en clase

Usted tiene un bloque de hielo con masa m a una temperatura de $-3\text{ }^{\circ}\text{C}$ en un recipiente aislado térmicamente y agrega la misma masa m de agua líquida a temperatura de $6\text{ }^{\circ}\text{C}$ y deja que la mezcla alcance el equilibrio. ¿Cuál es la temperatura de la mezcla?

- a) $-3\text{ }^{\circ}\text{C}$ d) $+4.5\text{ }^{\circ}\text{C}$
 b) $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ e) $+6\text{ }^{\circ}\text{C}$
 c) $+3\text{ }^{\circ}\text{C}$

EJEMPLO 18.6

Trabajo efectuado al vaporizar el agua

Suponga que 10.0 g de agua a una temperatura de $100.0\text{ }^{\circ}\text{C}$ se encuentra en un cilindro aislado equipado con un pistón para mantener una presión constante de $p = 101.3\text{ kPa}$. Se agrega suficiente calor al agua para vaporizarla a una temperatura de $100.0\text{ }^{\circ}\text{C}$. El volumen de agua es $V_{\text{agua}} = 10.0\text{ cm}^3$ y el volumen del vapor es $V_{\text{vapor}} = 16\,900\text{ cm}^3$.

PROBLEMA

¿Cuál es el trabajo realizado por el agua conforme se vaporiza? ¿Cuál es el cambio en la energía interna del agua?

SOLUCIÓN

Este proceso se lleva a cabo a presión constante. El trabajo realizado por el agua vaporizándose está dado por la ecuación 18.3:

$$W = \int_{V_i}^{V_f} p dV = p \int_{V_i}^{V_f} dV = p(V_{\text{vapor}} - V_{\text{agua}}).$$

Al sustituir los valores numéricos nos da el trabajo realizado por el agua conforme se incrementa su volumen a presión constante:

$$W = (101.3 \cdot 10^3 \text{ Pa}) (16\,900 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3 - 10.0 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3) = 1\,710 \text{ J}.$$

El cambio en la energía interna del agua está dado por la primera ley de la termodinámica (ecuación 18.4)

$$\Delta E_{\text{int}} = Q - W.$$

(continúa)

(continuación)

En este caso, la energía térmica transferida es el calor requerido para vaporizar al agua. De la tabla 18.2, el calor latente de vaporización del agua es $L_{\text{vaporización}} = 2\,260\text{ kJ/kg}$. De esta manera, la energía térmica transferida al agua es

$$Q = mL_{\text{vaporización}} = (10.0 \cdot 10^{-3}\text{ kg})(2.260 \cdot 10^6\text{ J/kg}) = 22\,600\text{ J}.$$

El cambio en la energía térmica del agua es entonces

$$\Delta E_{\text{int}} = 22\,600\text{ J} - 1\,710\text{ J} = 20\,900\text{ J}.$$

La mayor parte de la energía agregada permanece en el agua como energía interna aumentada. Esta energía interna está relacionada al cambio de fase del agua al vapor. La energía se usa para superar las fuerzas atractivas entre las moléculas en el estado líquido para convertirlas al estado gaseoso.

18.8 Modos de la transferencia de energía térmica



FIGURA 18.14 Una fogata de campamento ilustra los tres modos principales de transferencia de energía térmica: conducción, convección y radiación.

Los tres modos principales de transferencia de energía térmica son conducción, convección y radiación. Los tres se ilustran en la fogata de campamento mostrada en la figura 18.14. La **radiación** es la transferencia de energía térmica mediante ondas electromagnéticas. Usted puede sentir el calor que radia una fogata cuando se sienta cerca de ésta. La **convección** involucra el movimiento físico de una sustancia (tal como el agua o el aire) desde el contacto térmico con un sistema hasta el contacto térmico con otro sistema. La sustancia que se mueve lleva energía interna consigo. Usted puede ver la energía térmica que sube en la forma de llamas y el aire caliente sobre las llamas en la fogata. La **conducción** involucra la transferencia de energía térmica dentro de un objeto (tal como la transferencia de energía térmica a lo largo del atizador, cuya punta está caliente) o la transferencia de calor entre dos (o más) objetos en contacto térmico. El calor se conduce a través de una sustancia por la vibración de los átomos y moléculas y por el movimiento de los electrones. El agua y la comida en las ollas en la fogata se calientan por conducción. Las ollas mismas se calientan por convección y radiación.

Conducción

Considere una barra de material con un área de sección transversal A y una longitud L [figura 18.15a)]. Esta barra se pone en contacto físico con un depósito térmico a una temperatura más caliente, T_h , y un depósito térmico a temperatura más fría, T_c , lo cual significa que $T_h > T_c$ [figura 18.15b)]. El calor fluye entonces del depósito con mayor temperatura al depósito con menor temperatura. Se ha encontrado que la energía térmica transferida por unidad de tiempo, P_{cond} , por la barra que conecta a los dos depósitos de calor está dada por

$$P_{\text{cond}} = \frac{Q}{t} = kA \frac{T_h - T_c}{L}, \quad (18.15)$$

donde k es la **conductividad térmica** del material de la barra. Las unidades del SI para la conductividad térmica son $\text{W}/(\text{m K})$. Algunos valores típicos de la conductividad térmica se listan en la tabla 18.3.

Podemos reacomodar la ecuación 18.15:

$$P_{\text{cond}} = \frac{Q}{t} = A \frac{T_h - T_c}{L/k} = A \frac{T_h - T_c}{R}, \quad (18.16)$$

donde la **resistencia térmica**, R , de la barra se define como

$$R = \frac{L}{k}. \quad (18.17)$$

Las unidades del SI para R son $\text{m}^2\text{ K/W}$. Un valor superior para R significa una tasa menor de transferencia de energía térmica. Un buen aislante tiene un valor de R grande. En Estados Unidos, la resistencia térmica a menudo se especifica como un factor R , el cual tiene las unidades $\text{ft}^2\text{ }^\circ\text{F h/BTU}$. Un material aislante común comercializado con un factor R de $R-30$ se muestra en la figura 18.16. Para convertir los valores R de $\text{ft}^2\text{ }^\circ\text{F h/BTU}$ a $\text{m}^2\text{ K/W}$, divida el factor R entre 5.678.

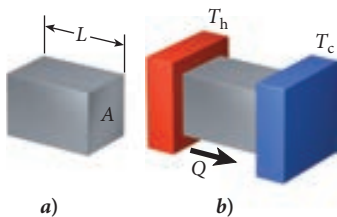


FIGURA 18.15 a) Una barra con un área de sección transversal A y longitud L . b) La barra se coloca entre dos depósitos térmicos con temperaturas T_h y T_c .



a)



b)

FIGURA 18.16 a) Un material aislante común con un factor R de R-30. b) El aislante se instala en un desván.

Tabla 18.3 Algunas conductividades térmicas representativas

Material	$k[W/(m K)]$
Cobre	386
Aluminio	220
Concreto	0.8
Vidrio	0.8
Hule	0.16
Madera	0.16

EJEMPLO 18.7 Aislante del techo

Suponga que usted aísla sobre el cielo raso de un cuarto con un material aislante que tiene un factor R de R-30. El cuarto mide 5.00 m por 5.00 m. La temperatura dentro del cuarto es de 21.0 °C y la temperatura por encima del aislante es de 40.0 °C.

PROBLEMA

¿Cuánto calor entra al cuarto a través del cielo raso en un día si el cuarto se mantiene a una temperatura de 21.0 °C?

SOLUCIÓN

Resolvemos la ecuación 18.16 para el calor:

$$Q = At \frac{T_h - T_c}{R}$$

Al sustituir los valores numéricos, obtenemos (1 día tiene 86 400 s):

$$Q = (5.00 \text{ m} \cdot 5.00 \text{ m})(86\,400 \text{ s}) \frac{313 \text{ K} - 294 \text{ K}}{(30/5.678) \text{ m}^2 \text{ K/W}} = 7.77 \cdot 10^6 \text{ J.}$$

18.2 Oportunidad de autoexamen

Muestre que el factor de conversión para cambiar de $\text{ft}^2 \text{ }^\circ\text{F h/BTU}$ a $\text{m}^2 \text{ K/W}$ es 5.678.

PROBLEMA RESUELTO 18.2 Costo de calentar una casa en invierno

Usted construye una casa pequeña con cuatro cuartos [figura 18.17a)]. Cada cuarto mide 10.0 ft por 10.0 ft y el cielo raso se encuentra a 8.0 ft de altura. Las paredes exteriores están aisladas con un material con un factor R de R-19 y el piso y el techo están aislados con un material con un factor R de R-30. Durante el invierno, la temperatura media dentro de la casa es de 20.0 °C y la temperatura media fuera de ella es de 0.00 °C. Usted calienta la casa durante 6 meses en invierno usando electricidad que cuesta 9.5 centavos por kilowatt-hora.

PROBLEMA

¿Cuánto paga usted para calentar su casa durante el invierno?

(continúa)

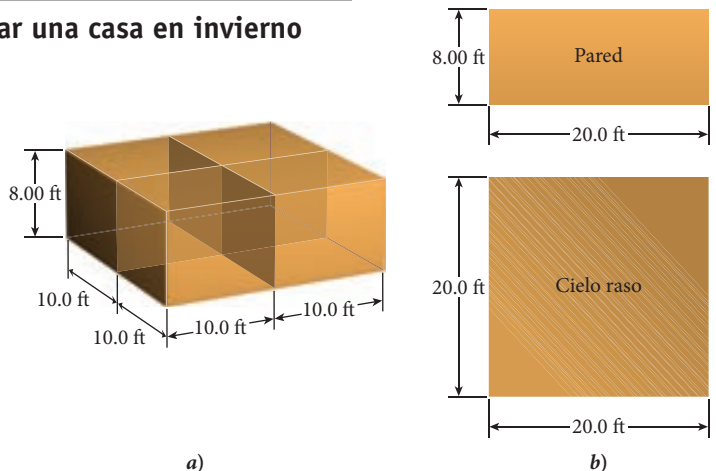


FIGURA 18.17 a) Una casa de cuatro cuartos aislada. b) Una pared y el cielo raso de la casa.

(continuación)

SOLUCIÓN**PIENSE**

Mediante la ecuación 18.16 podemos calcular la pérdida de calor total durante 6 meses a través de las paredes (R-19), el piso y el cielo (R-30). Entonces, podemos calcular cuánto costará agregar esta cantidad de calor a la casa.

ESBOCE

Las dimensiones de una pared y el cielo raso se muestran en la figura 18.17b).

INVESTIGUE

Cada una de las cuatro paredes exteriores, como se muestra en la figura 18.17b), tiene un área A_{pared} . El cielo raso tiene un área de A_{cielo} , mostrada en la figura 18.17b). El piso y el cielo tienen la misma área. La resistencia térmica de las paredes está dada por R-19; la resistencia térmica del piso y el techo está dada por R-30. De esta manera, la resistencia térmica de las paredes en unidades del SI es

$$R_{\text{pared}} = \frac{19}{5.678} \text{ m}^2 \text{ K/W} = 3.346 \text{ m}^2 \text{ K/W},$$

y la resistencia térmica del piso y el techo es

$$R_{\text{cielo}} = \frac{30}{5.678} \text{ m}^2 \text{ K/W} = 5.283 \text{ m}^2 \text{ K/W}.$$

SIMPLIFIQUE

Podemos calcular la pérdida de calor por unidad de tiempo mediante la ecuación 18.16, tomando el área total de las paredes por cuatro veces el área de una pared y el área total del piso y el cielo raso como dos veces el área del cielo raso:

$$\frac{Q}{t} = 4A_{\text{pared}} \left(\frac{T_h - T_c}{R_{\text{pared}}} \right) + 2A_{\text{cielo}} \left(\frac{T_h - T_c}{R_{\text{cielo}}} \right) = 2(T_h - T_c) \left(\frac{2A_{\text{pared}}}{R_{\text{pared}}} + \frac{A_{\text{cielo}}}{R_{\text{cielo}}} \right).$$

CALCULE

El área de cada pared exterior es $A_{\text{pared}} = (8.00 \text{ ft})(20.0 \text{ ft}) = 160.0 \text{ ft}^2 = 14.864 \text{ m}^2$. El área del cielo raso es $A_{\text{cielo}} = (20.0 \text{ ft})(20.0 \text{ ft}) = 400.0 \text{ ft}^2 = 37.161 \text{ m}^2$. El número de segundos en 6 meses es

$$t = (6 \text{ meses})(30 \text{ días/mes})(24 \text{ h/día})(3600 \text{ s/h}) = 1.5552 \cdot 10^7 \text{ s}.$$

La cantidad de calor perdida en 6 meses es entonces

$$\begin{aligned} Q &= 2t(T_h - T_c) \left(\frac{2A_{\text{pared}}}{R_{\text{pared}}} + \frac{A_{\text{cielo}}}{R_{\text{cielo}}} \right) \\ &= 2(1.5552 \cdot 10^7 \text{ s})(293 \text{ K} - 273 \text{ K}) \left(\frac{2(14.864 \text{ m}^2)}{3.346 \text{ m}^2 \text{ K/W}} + \frac{37.161 \text{ m}^2}{5.283 \text{ m}^2 \text{ K/W}} \right) \\ &= 9.9027 \cdot 10^9 \text{ J}. \end{aligned}$$

Al calcular el costo total por 6 meses de electricidad para calentamiento, tenemos

$$\text{Costo} = \left(\frac{\$0.095}{1 \text{ kW h}} \right) \left(\frac{1 \text{ kW h}}{3.60 \cdot 10^6 \text{ J}} \right) (9.9027 \cdot 10^9 \text{ J}) = \$261.32125.$$

REDONDEE

Dado que los datos de entrada se dieron con dos cifras significativas, reportamos nuestro resultado con dos cifras significativas también:

$$\text{Costo} = \$260.$$

(Sin embargo, redondear la cantidad en una cuenta no es aceptable para la compañía que brinda el servicio y usted tendría que pagar \$261.32.)

VUELVA A REVISAR

Para verificar, usemos los valores R en la forma en que un contratista en Estados Unidos podría hacerlo. El área total de las paredes es de $4(160 \text{ ft}^2)$ y el área total del piso y el cielo es de $2(400 \text{ ft}^2)$. La pérdida de calor por hora a través de las paredes es

$$\frac{Q}{t} = 4(160 \text{ ft}^2) \frac{20\left(\frac{9}{5}\right)^\circ\text{F}}{19 \text{ ft}^2 \text{ }^\circ\text{F h/BTU}} = 1\,213 \text{ BTU/h.}$$

El calor perdido a través del cielo y el piso es

$$\frac{Q}{t} = 2(400 \text{ ft}^2) \frac{20\left(\frac{9}{5}\right)^\circ\text{F}}{30 \text{ ft}^2 \text{ }^\circ\text{F h/BTU}} = 960 \text{ BTU/h.}$$

La pérdida de calor total en 6 meses (4 320 h) es

$$\begin{aligned} Q &= (4\,320 \text{ h})(1\,213 + 960) \text{ BTU/h} \\ &= 9\,387\,360 \text{ BTU.} \end{aligned}$$

El costo es entonces

$$\text{Costo} = \left(\frac{\$0.095}{1 \text{ kW h}} \right) \left(\frac{1 \text{ kW h}}{3\,412 \text{ BTU}} \right) (9\,387\,360 \text{ BTU}) = \$261.37.$$

Esto está cercano a nuestra respuesta y parece razonable.

Observe que el costo de calentar una pequeña casa durante el invierno parece pequeño comparado con la experiencia de la vida real. La reducción surge debido a que la casa no tiene puertas ni ventanas y está bien aislada.

El aislamiento térmico es un componente clave de las naves espaciales que tienen que reingresar a la atmósfera terrestre. El proceso de reingreso crea energía térmica por la fricción con las moléculas del aire. Debido a la gran rapidez, se forman ondas de choque enfrente de la nave espacial, las cuales desvían la mayor parte de la energía térmica creada en el proceso. Sin embargo, todavía se requiere un excelente aislante térmico para prevenir que este calor se conduzca a la estructura de la nave espacial, la cual está fabricada básicamente de aluminio y no puede resistir temperaturas de manera significativa mayores a 180°C . El sistema de protección térmica debe ser uno de muy poca masa, como todas las partes de la nave espacial, y ser capaz de protegerla de temperaturas muy altas, hasta de $1\,650^\circ\text{C}$. En la nave espacial de las misiones *Apolo*, en las cuales los astronautas alunizaron a finales de la década de 1960 y a principios de la década de 1970, y en sondas planetarias como el *Mars Rover*, la protección térmica es simplemente un escudo de calor ablativo, el cual se quema durante el ingreso a la atmósfera. Para las naves espaciales reutilizables, como el Transbordador Espacial, tal escudo no es una opción, debido a que requeriría un mantenimiento prohibitivamente costoso después de cada viaje. La nariz y los bordes de las alas del Transbordador Espacial están cubiertos, en lugar de esto, con carbono reforzado, capaz de resistir las altas temperaturas del reingreso. La parte inferior del Transbordador está recubierta por una protección del calor pasiva, que consiste en más de 20 000 baldosas cerámicas hechas de 10% de fibras de sílice y 90% de espacio vacío. Son tan buenos aislantes térmicos, que después de calentarse a una temperatura de $1\,260^\circ\text{C}$ (la cual es la temperatura máxima que la parte inferior del Transbordador Espacial se encuentra durante el reingreso), pueden sostenerse con las manos desprotegidas (vea la figura 18.18).



FIGURA 18.18 La baldosa cerámica de calor blanco ($1\,260^\circ\text{C}$) usada para el sistema de protección térmica del Transbordador Espacial se sostiene con una mano desprotegida.

Convección

Si usted sostiene su mano sobre una vela encendida, puede sentir la energía térmica transferida desde la llama. El aire calentado es menos denso que el aire circundante y asciende. El aire ascendente lleva consigo la energía térmica hacia arriba desde la llama de la vela. Este tipo de transferencia de energía térmica se llama *convección*. La figura 18.19 muestra la llama de una vela en la Tierra y en el Transbordador Espacial en órbita. Usted puede ver que la energía térmica viaja hacia arriba desde la vela encendida en Tierra, pero se expande en forma casi esférica desde la vela a bordo del Transbordador Espacial. El aire en el Transbordador Espacial (en realidad, en un pequeño recipiente en el Transbordador Espacial) tiene la misma densidad en todas las direcciones, así que el aire caliente no tiene una dirección preferida en la cual viajar. El punto más bajo de la llama en la vela a bordo del Transbordador Espacial se extingue debido a que el pabito lleva la energía térmica consigo. (Además de la



FIGURA 18.19 Las llamas de una vela en *a*) condiciones terrestres y *b*) condiciones de microgravedad.

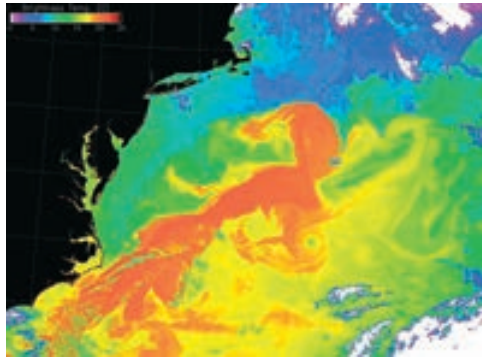


FIGURA 18.20 Imagen de satélite tomada por el satélite TERRA de la NASA, el 5 de mayo de 2001, en la que se muestra la temperatura del agua en el océano Atlántico Norte. Los colores falsos representan el rango de temperaturas del agua. La caliente Corriente del Golfo es visible en rojo y la Costa Este de Estados Unidos en negro.

convección que involucra un flujo de masa a gran escala, la convección puede ocurrir mediante las partículas individuales en un proceso llamado *difusión*, el cual no es cubierto en este capítulo.)

La mayoría de las casas y edificios de oficinas en Estados Unidos tiene calefacción de aire forzado; esto es, el aire se sopla a través de ductos de calefacción dentro de los cuartos. Éste es un excelente ejemplo de transferencia de energía térmica mediante la convección. Los mismos ductos de aire se usan en verano para refrescar las mismas estructuras soplando aire más frío a través de los ductos y adentro de los cuartos, el cual es otro ejemplo de la transferencia de la energía térmica convectiva. (Pero, desde luego, el calor tiene el signo opuesto, debido a que la temperatura en el cuarto disminuye.)

Grandes cantidades de energía se transfieren por convección en la atmósfera terrestre y en los océanos. Por ejemplo, la Corriente del Golfo lleva agua caliente del Golfo de México hacia el norte a través del Estrecho de Florida y por la costa este de Estados Unidos. La temperatura más caliente del agua en la Corriente del Golfo es revelada en una imagen de satélite de la NASA en la figura 18.20. La Corriente del Golfo tiene una temperatura de alrededor de $20\text{ }^{\circ}\text{C}$ conforme fluye con una rapidez de aproximadamente 2 m/s por la costa este de Estados Unidos y al interior del Océano Atlántico. Entonces, la Corriente del Golfo se divide. Una parte continúa fluyendo hacia Gran Bretaña y la Europa Occidental, mientras que la otra parte dobla hacia el sur a lo largo de la costa africana. La temperatura promedio en Gran Bretaña y Europa Occidental es aproximadamente de $5\text{ }^{\circ}\text{C}$ mayor de lo que sería sin la energía térmica transportada por las aguas cálidas de la Corriente del Golfo.

Algunos modelos climáticos predicen que el calentamiento global podría posiblemente amenazar a la Corriente del Golfo debido al derretimiento del hielo en el Polo Norte. El agua fresca extra del casquete de hielo polar que se derrite reduce la salinidad del agua en el extremo norte de la Corriente del Golfo, lo cual interfiere con el mecanismo que permite a las aguas enfriadas de la Corriente del Golfo sumirse y regresar al sur. De manera paradójica, el calentamiento global podría hacer más fría a la Europa del Norte.

PROBLEMA RESUELTO 18.3 Corriente del Golfo

Supongamos que una tubería rectangular de agua de 100 km de ancho y 500 m de profundidad puede usarse para aproximar la Corriente del Golfo. El agua en esta tubería se mueve con una rapidez de 2.0 m/s . La temperatura del agua es de $5.0\text{ }^{\circ}\text{C}$ más caliente que el agua circundante.

PROBLEMA

Estime cuánta potencia transporta la corriente del Golfo hacia el océano Atlántico Norte.

SOLUCIÓN

PIENSE

Podemos calcular la tasa de flujo volumétrica (o gasto volumétrico), sacando el producto de la rapidez de flujo y el área de la sección transversal de la tubería. Usando la densidad del agua, podemos calcular la tasa de flujo másico. Al usar el calor específico del agua y la diferencia de

temperatura entre el agua de la corriente del Golfo y el agua circundante, podemos calcular la potencia transportada por la corriente del Golfo hacia el Atlántico Norte.

ESBOCE

La figura 18.21 muestra la corriente del Golfo idealizada que fluye al noreste en el Atlántico Norte.

INVESTIGUE

Suponemos que la corriente del Golfo tiene una sección transversal de ancho $w = 100$ km y una profundidad $d = 500$ m. El área de flujo de la corriente del Golfo es entonces

$$A = wd.$$

La rapidez del flujo de la corriente del Golfo se supone como $v = 2.0$ m/s. La tasa de flujo volumétrico está dada por

$$R_V = vA.$$

La densidad del agua de mar es $\rho = 1\,025$ kg/m³. Podemos expresar la tasa de flujo másico como

$$R_m = \rho R_V.$$

El calor específico del agua es $c = 4\,186$ J/(kg K). El calor requerido para elevar la temperatura de una masa m por ΔT está dado por

$$Q = cm\Delta T.$$

La potencia llevada por la Corriente del Golfo es igual al calor por unidad de tiempo:

$$\frac{Q}{t} = P = \frac{cm\Delta T}{t} = cR_m\Delta T.$$

(Nota: La P mayúscula simboliza la potencia; no la confunda con la p minúscula usada para la presión.)

SIMPLIFIQUE

La potencia llevada por la Corriente del Golfo está dada por

$$P = cR_m\Delta T = c\rho R_V\Delta T = c\rho vwd\Delta T.$$

CALCULE

La diferencia de temperatura es $\Delta T = 5$ °C = 5 K. Al sustituir los valores numéricos nos da

$$\begin{aligned} P &= [4\,186 \text{ J/(kg K)}] (1\,025 \text{ kg/m}^3) (2.0 \text{ m/s}) (100 \cdot 10^3 \text{ m}) (500 \text{ m}) (5.0 \text{ K}) \\ &= 2.1453 \cdot 10^{15} \text{ W.} \end{aligned}$$

REDONDEE

Reportamos nuestro resultado con dos cifras significativas:

$$P = 2.1 \cdot 10^{15} \text{ W} = 2.1 \text{ PW} \quad (1 \text{ PW} = 1 \text{ petawatt} = 10^{15} \text{ W}).$$

VUELVA A REVISAR

Para verificar este resultado, calculemos cuánto poder incide sobre la Tierra desde el Sol. Esta potencia total está dada por el área de la sección transversal de la Tierra por la potencia que incide sobre la Tierra por unidad de área:

$$P_{\text{total}} = \pi (6.4 \cdot 10^6 \text{ m})^2 (1\,400 \text{ W/m}^2) = 180 \text{ PW}.$$

Calculemos cuánto de este poder podría ser absorbido por el Golfo de México. La intensidad de la luz solar a una distancia desde el Sol que corresponde al radio de la órbita terrestre alrededor del Sol es $S = 1\,400$ W/m². Podemos estimar el área del Golfo de México como $1.0 \cdot 10^6$ km² =

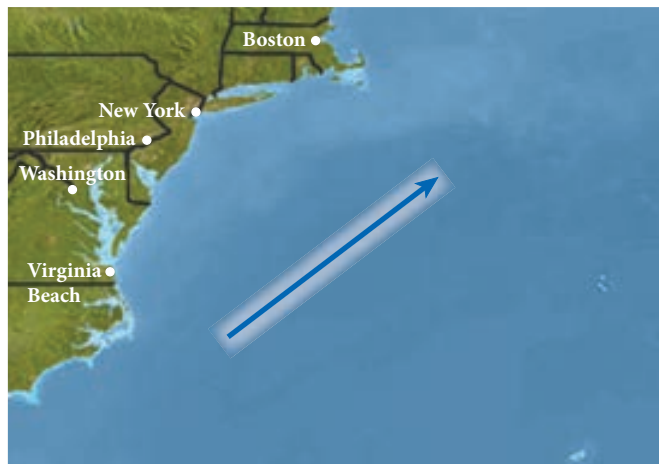


FIGURA 18.21 Corriente del Golfo idealizada que fluye en el Atlántico Norte a lo largo de la línea de la costa este de Estados Unidos.

(continúa)

(continuación)

$1.0 \cdot 10^{12} \text{ m}^2$. Si el agua del Golfo de México absorbiese toda la energía que incide del Sol durante la mitad de cada día, entonces la potencia disponible del Golfo sería

$$P = \frac{(1.0 \cdot 10^{12} \text{ m}^2)(1400 \text{ W/m}^2)}{2} = 7.0 \cdot 10^{14} \text{ W} = 0.7 \text{ PW},$$

lo cual es menor que nuestro estimado de la potencia transportada por la Corriente del Golfo. De esta suerte, una mayor parte del océano Atlántico debe estar involucrada en proporcionar la energía de la corriente del Golfo que sólo el Golfo de México. De hecho, la corriente del Golfo obtiene su energía de una gran parte del océano Atlántico. La corriente del Golfo es parte de una red de corrientes que fluyen en los océanos terrestres, inducidos por los vientos dominantes, diferencias de temperatura y la topología y rotación de la Tierra.

18.3 Oportunidad de autoexamen

Liste algunos otros fenómenos de convección encontrados en la vida diaria.

Radiación

La radiación ocurre a través de la transmisión de ondas electromagnéticas. Además, a diferencia de las ondas mecánicas o de sonido (cubiertas en los capítulos 15 y 16), estas ondas no necesitan ningún medio para sustentarse. De esta forma, las ondas electromagnéticas pueden llevar energía de un lugar a otro sin que ninguna materia tenga que estar presente entre los dos lugares. Un ejemplo del transporte de energía mediante la radiación electromagnética ocurre durante una conversación por teléfono celular; un teléfono celular actúa tanto como un transmisor de radiación a la torre celular más cercana o como un receptor de la radiación que se origina en la torre.

Todos los objetos emiten radiación electromagnética. La temperatura del objeto determina la potencia radiada del objeto, P_{radiada} , la cual está dada por la **ecuación de Stefan-Boltzmann**:

$$P_{\text{radiada}} = \sigma \epsilon AT^4, \quad (18.18)$$

donde $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ W/K}^4\text{m}^2$ se llama la **constante de Stefan-Boltzmann**, ϵ es la **emisividad**, la cual no tiene unidades y A es el área superficial (radiante). La temperatura en la ecuación 18.18 debe estar en kelvins y se supone que es constante. La emisividad varía entre 0 y 1, con 1 representando la emisividad de un objeto ideal llamado **cuerpo negro**. Un cuerpo negro radia 100% de su energía y absorbe 100% de la radiación que incide sobre éste. A pesar de que algunos objetos de la vida diaria se encuentran cerca de ser un cuerpo negro, no existe un cuerpo negro perfecto; de esta suerte, la emisividad es siempre menor a 1.

La subsección anterior acerca de la conducción discutía cómo la capacidad aislante de varios materiales se cuantifica por el factor R . La pérdida de calor en invierno o la ganancia de calor en verano dependen no sólo de la conducción, sino también de la radiación. Las nuevas técnicas de construcción se han dirigido a incrementar la eficiencia del aislante de una casa usando barreras radiantes. Una *barrera radiante* es una capa de material que refleja de manera efectiva las ondas electromagnéticas, en especial la radiación infrarroja (la cual es la radiación que comúnmente sentimos como calor). El uso de barreras radiantes en los aislantes de la casa se ilustra en la figura 18.22.

Una barrera radiante se construye con una sustancia reflectora, comúnmente aluminio. Una barrera radiante comercial típica se muestra en la figura 18.23. Su material es una poliolefina recubierta de aluminio, la cual refleja 97% de la radiación infrarroja. Las pruebas en el Laboratorio Nacional Oak Ridge de las casas en Florida con o sin barreras radiantes han mostrado que las ganancias de calor en verano de techos con aislante R-19 pueden reducirse de 16 a 42%, y dar por resultado la reducción de los costos de aire acondicionado hasta en 17%.

La casa de la figura 18.22 está diseñada para prevenir que el calor entre o salga por conducción a través de las capas de aislante, las cuales tienen factores R altos. Las barreras radiantes bloquean al calor evitando que entre

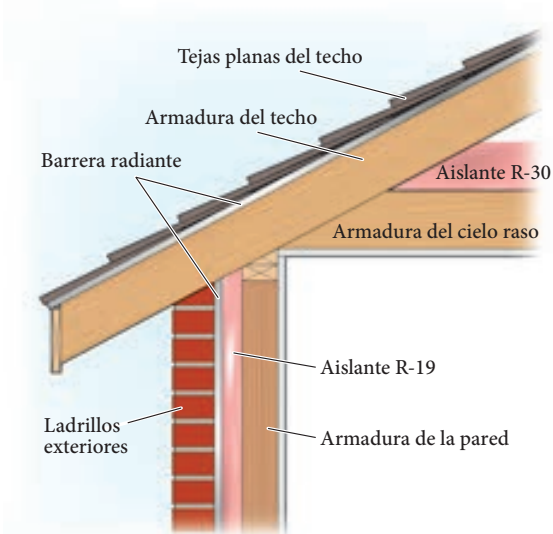


FIGURA 18.22 Dibujo esquemático de la esquina de una casa, en el que se muestra parte del techo, parte del cielo raso y parte de la pared. El techo consiste en una capa exterior de tejas planas, una barrera radiante y una armadura que sostiene al techo. El cielo raso consiste en una armadura del cielo que soporta un aislante con un factor R de R-30. La pared consiste en ladrillos exteriores, una barrera radiante, aislante con un factor R de R-19 y una armadura que soporta la pared.

a la casa en forma de radiación. Desafortunadamente, este tipo de barrera también impide que la casa sea calentada por el Sol en el invierno. La ganancia o pérdida de calor por convección se reduce por el espacio vacío entre el cielo raso y el techo. De esta manera, la casa está diseñada para reducir la ganancia o pérdida de calor por cualquiera de los tres modos de transferencia de energía térmica: conducción, convección y radiación.



FIGURA 18.23 Un tipo de material de barrera radiante, papel de aluminio ARMA, producida por Energy Efficient Solutions.

EJEMPLO 18.8 La Tierra como un cuerpo negro

Suponga que la Tierra absorbiese 100% de la energía que incide desde el Sol y luego radiase toda la energía de regreso al espacio, de la misma forma que lo haría un cuerpo negro.

PROBLEMA

¿Cuál sería la temperatura de la superficie de la Tierra?

SOLUCIÓN

La intensidad de la luz solar que alcanza a la Tierra es aproximadamente $S = 1\,400\text{ W/m}^2$. La Tierra absorbe la energía como un disco con el radio de la Tierra, R , en tanto que radia energía de su superficie entera. En el equilibrio, la energía absorbida iguala a la energía emitida:

$$(S)(\pi R^2) = (\sigma)(1)(4\pi R^2)T^4.$$

Al resolver para la temperatura, tenemos

$$T = \sqrt[4]{\frac{S}{4\sigma}} = \sqrt[4]{\frac{1\,400\text{ W/m}^2}{4(5.67)(10^{-8}\text{ W/K}^4\text{m}^2)}} = 280\text{ K}.$$

Este simple cálculo brinda un resultado cercano al valor real de la temperatura promedio de la Tierra, el cual es como de 288 K.

El calentamiento global

Como se ilustra en la figura 18.24, la diferencia entre la temperatura calculada para la Tierra como un cuerpo negro en el ejemplo 18.8 y la temperatura real de la superficie terrestre se debe en parte a la atmósfera terrestre.

Las nubes en la atmósfera terrestre reflejan 20% y absorben 19% de la energía solar. La atmósfera refleja 6% de la energía solar y 4% es reflejada por la superficie terrestre. La atmósfera terrestre transmite 51% de la energía solar a la superficie terrestre. La energía solar es absorbida por

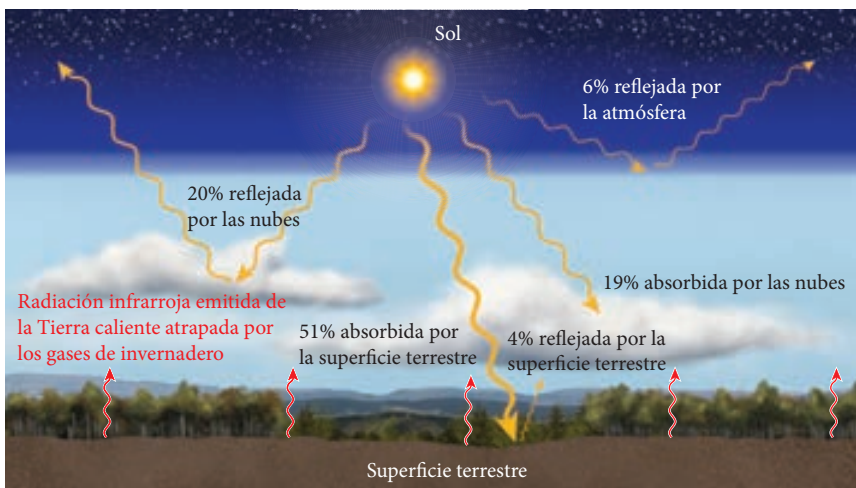


FIGURA 18.24 La atmósfera terrestre afecta fuertemente la cantidad de energía absorbida por la Tierra desde el Sol.



a)



b)

FIGURA 18.25 a) Un científico de la NASA con su brazo dentro de una bolsa plástica negra, iluminada con luz visible. b) El mismo científico de la NASA fotografiado con una cámara infrarroja. El científico radiaba radiación infrarroja que pasó a través de la bolsa.

la superficie terrestre y la calienta, causando que la superficie emita radiación infrarroja. Ciertos gases en la atmósfera —notablemente vapor de agua y dióxido de carbono, además de otros gases— absorben algo de la radiación infrarroja, atrapando así una fracción de la energía que, de otra manera, se radiaría de regreso al espacio. Este efecto de atrapar la energía térmica se llama **efecto de invernadero**. El efecto de invernadero mantiene a la Tierra más caliente de lo que sería de otra forma y minimiza las variaciones de temperatura entre el día y la noche.

Las dos fotografías en la figura 18.25 ilustran cómo la radiación a distintas longitudes de onda penetra los materiales de manera diferente. En la figura 18.25a), un científico de la NASA tiene su brazo dentro de una bolsa plástica negra. En la figura 18.25b), se fotografió la misma persona con las luces apagadas, usando una cámara sensible a la radiación infrarroja. El cuerpo humano emite radiación infrarroja debido a que su metabolismo produce calor. Esta radiación pasa a través de la bolsa plástica negra que bloquea la luz visible y el brazo previamente oculto resulta visible.

La quema de combustibles fósiles y otras actividades humanas han incrementado la cantidad de dióxido de carbono en la atmósfera terrestre y aumentado la temperatura superficial, al atrapar la radiación infrarroja que de otro modo se emitiría al espacio. La concentración de dióxido de carbono en la atmósfera terrestre como función del tiempo se grafica en la figura 18.26. En la figura 18.26a), la concentración de dióxido de carbono en la atmósfera terrestre se muestra desde el año 1832 hasta el año 2004. La concentración de dióxido de carbono se ha incrementado durante los últimos 150 años desde alrededor de 284 ppmv (partes por millón por volumen) en 1832 a 377 ppmv en 2004.

La figura 18.26b) muestra la concentración de dióxido de carbono en el aire en los pasados 420 000 años. Visibles en esta gráfica se encuentran los periodos glaciares con concentraciones de dióxido de carbono relativamente bajas alrededor de 200 ppmv y periodos interglaciares con concentraciones de dióxido de carbono relativamente altas alrededor de 275 ppmv. La combinación de mediciones directas de los últimos 50 años y las concentraciones inferidas de los núcleos de hielo indica que la concentración al día de hoy de dióxido de carbono en la atmósfera es mayor que en cualquier momento en los últimos 420 000 años. Algunos investigadores estiman que la concentración actual de dióxido de carbono se encuentra en su nivel superior de los últimos 20 millones de años. Los modelos para la composición de la atmósfera terrestre basados en las tendencias actuales predicen que la concentración de dióxido de carbono continuará incrementándose en los próximos 100 años. Este incremento en la concentración de dióxido de carbono atmosférico contribuye al calentamiento global observado descrito en el capítulo 17.

En todo el mundo, los gobiernos están reaccionando a estas observaciones y predicciones de muchas maneras, incluyendo el Protocolo de Kyoto, el cual entró en vigor en 2005. En dicho protocolo, las naciones firmantes acordaron hacer recortes sustanciales en sus emisiones de gases de invernadero para el año 2012. Sin embargo, no se les requirió a varias naciones en vías de desarrollo que redujesen sus emisiones de gases de invernadero.

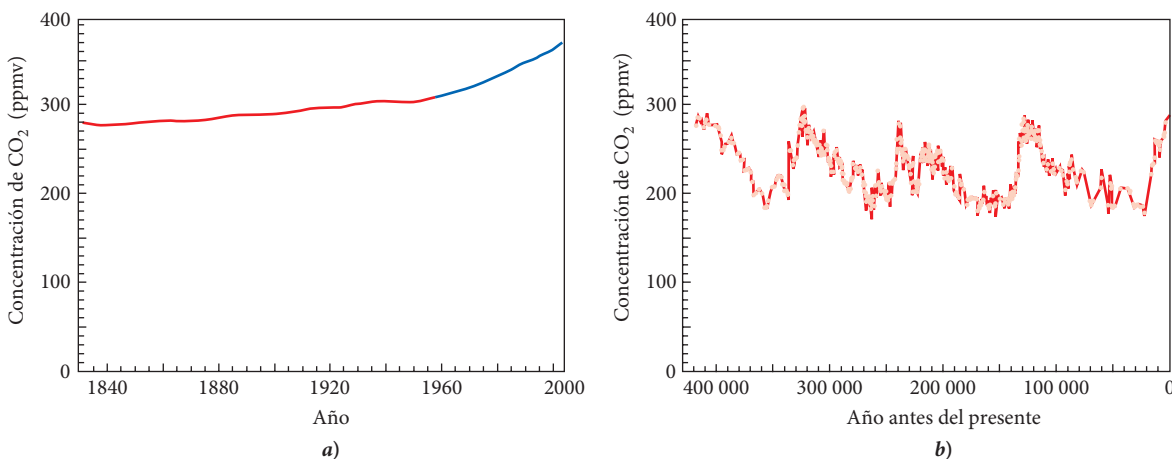


FIGURA 18.26 Concentración de dióxido de carbono (CO_2) en la atmósfera terrestre en partes por millón por volumen (ppmv). a) Concentración de dióxido de carbono en la atmósfera desde 1832 hasta 2004. Las mediciones desde 1832 hasta 1978 se realizaron usando núcleos de hielo en la Antártida y las mediciones desde 1959 hasta 2004 se llevaron a cabo en la atmósfera de Mauna Loa en Hawái. b) Concentraciones de dióxido de carbono para los pasados 420 000 años, extraídos de núcleos de hielo en la Antártida.

18.4 Ejercicio en clase

Indique si cada una de las siguientes afirmaciones es cierta (C) o falsa (F).

1. Un objeto frío no radia energía.
2. Cuando el calor se agrega a un sistema, la temperatura debe subir.
3. Cuando una temperatura en Celsius se duplica, la temperatura en Fahrenheit también se duplica.
4. La temperatura del punto de fusión es la misma que la temperatura del punto de congelación.

El calor en las computadoras

Pensar acerca de la transferencia de energía térmica puede no hacerle recordar a su computadora en seguida. Pero enfriar una computadora es un problema mayor de ingeniería. Una computadora de escritorio típica usa entre 100 y 150 W de potencia eléctrica y una portátil usa entre 25 y 70 W. Como regla general, cuanto mayor es la frecuencia de oscilación del *microchip*, tanto mayor será el consumo de potencia. La mayoría de la potencia eléctrica se convierte en energía térmica y se tiene que eliminar de la computadora. Para lograr esto, las computadoras tienen sumideros de calor pasivos, los cuales consisten en piezas de metal con grandes áreas superficiales sujetas a las partes de la computadora que se necesitan enfriar, principalmente la CPU y los *chips* gráficos (figura 18.27). Los sumideros de calor pasivos aplican la conducción para quitar la energía térmica de las partes de la computadora y entonces radiación para transferir la energía térmica al aire circundante. Un sumidero de calor activo incluye un pequeño ventilador para mover más aire por las superficies metálicas a fin de incrementar la transferencia de energía térmica. Desde luego, el ventilador también consume potencia eléctrica y reduce de esta manera el periodo de carga de las baterías en las computadoras portátiles.

En tanto que podría ser sólo un ligero inconveniente que su computadora portátil le caliente el regazo, enfriar grandes grupos de computadoras es muy costoso. Si un conjunto de servidores contiene 10 000 CPU individuales, su consumo de potencia eléctrica está en el orden de 1 MW, la mayor parte del cual se transforma en calor que tiene que ser retirado por sistemas de aire acondicionado muy grandes. De esta manera, actualmente el punto central de muchas investigaciones son los componentes más eficientes de la computadora, desde los suministros de poder hasta los microchips de la CPU y los métodos más eficientes de enfriamiento.



FIGURA 18.27 Tecnología de sumidero de calor activo y pasivo montado sobre la CPU de una computadora.

LO QUE HEMOS APRENDIDO | GUÍA DE ESTUDIO PARA EXAMEN

- El calor es energía transferida entre un sistema y su ambiente o entre dos sistemas debido a una diferencia de temperatura entre éstos.
- Una caloría se define en términos de un joule:
 $1 \text{ cal} = 4.186 \text{ J}$.
- El trabajo efectuado por un sistema al pasar de un volumen inicial V_i a un volumen final V_f es
$$W = \int dW = \int_{V_i}^{V_f} p dV.$$
- La primera ley de la termodinámica afirma que el cambio en la energía interna de un sistema aislado es igual al calor que fluye hacia dentro del sistema menos el trabajo efectuado por el sistema, o $\Delta E_{\text{int}} = Q - W$. La primera ley de la termodinámica afirma que la energía en un sistema cerrado se conserva.
- Un proceso adiabático es aquel en el cual $Q = 0$.
- En un proceso a volumen constante, $W = 0$.
- En un proceso de trayectoria cerrada, $Q = W$.
- En una expansión libre adiabática, $Q = W = \Delta E_{\text{int}} = 0$.
- Si el calor, Q , se agrega a un objeto, su cambio en la temperatura, ΔT , está dado por $\Delta T = \frac{Q}{C}$, donde C es la capacidad calorífica del objeto.
- Si el calor, Q , se agrega a un objeto con masa m , su cambio en la temperatura, ΔT , está dado por $\Delta T = \frac{Q}{cm}$, donde c es el calor específico del objeto.
- La energía que se requiere para fundir un sólido a líquido, dividido entre su masa, es el calor latente de fusión, $L_{\text{fusión}}$. Durante el proceso de fusión, la temperatura del sistema permanece al punto de fusión, $T = T_{\text{fusión}}$.
- La energía requerida para vaporizar un líquido a gas, dividido entre su masa es el calor latente de vaporización, $L_{\text{vaporización}}$. Durante el proceso de vaporización, la temperatura del sistema permanece al punto de ebullición, $T = T_{\text{ebullición}}$.

- Si una barra con un área de sección transversal A se coloca entre un depósito térmico con una temperatura T_h y un depósito térmico con una temperatura T_c , donde $T_h > T_c$, la tasa de transferencia de calor a través de la barra es $P_{\text{cond}} = \frac{Q}{t} = A \frac{T_h - T_c}{R}$, donde R es la resistencia térmica de la barra.
- La potencia radiada de un objeto con una temperatura T y un área superficial A está dada por la ecuación de Stefan-Boltzmann: $P_{\text{radiadas}} = \sigma \epsilon A T^4$, donde $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ W/K}^4 \text{ m}^2$ es la constante de Stefan-Boltzmann y ϵ es la emisividad.

TÉRMINOS CLAVE

sistema, p. 582	proceso adiabático, p. 588	calor específico, p. 589	convección, p. 596
ambiente, p. 582	procesos isocóricos (volumen constante), p. 588	calorímetro, p. 591	conducción, p. 596
energía térmica, p. 583	proceso en trayectoria cerrada, p. 588	estados de la materia, p. 592	conductividad térmica, p. 596
calor, p. 583	expansión libre, p. 589	fases, p. 592	resistencia térmica, p. 596
caloría, p. 583	procesos isobáricos (presión constante), p. 589	cambios de fase (transiciones de fase), p. 592	ecuación de Stefan-Boltzmann, p. 602
proceso termodinámico, p. 584	procesos isotérmicos, p. 589	calor latente de fusión, p. 592	constante de Stefan-Boltzmann, p. 602
diagramas pV , p. 585	isoterma, p. 589	calor latente de vaporización, p. 592	emisividad, p. 602
procesos dependientes de la trayectoria, p. 585	capacidad calorífica, p. 589	sublimación, p. 593	cuerpo negro, p. 602
trayectoria cerrada, p. 585		plasma, p. 593	efecto de invernadero, p. 604
sistema cerrado, p. 586		radiación, p. 596	
primera ley de la termodinámica, p. 586			

NUEVOS SÍMBOLOS Y ECUACIONES

Q , calor	R , resistencia térmica de una losa de material en $\text{m}^2 \text{ K/W}$
$\Delta E_{\text{int}} = Q - W$, cambio en la energía interna del sistema, primera ley de la termodinámica	$L_{\text{fusión}}$, calor latente de fusión
C , capacidad calorífica en J/K	$L_{\text{vaporización}}$, calor latente de vaporización
c , calor específico en $\text{J}/(\text{kg K})$	$T_{\text{fusión}}$, punto de fusión de una sustancia
k , conductividad térmica de un material en $\text{W}/(\text{m K})$	$T_{\text{ebullición}}$, punto de ebullición de una sustancia

RESPUESTAS A LAS OPORTUNIDADES DE AUTOEXAMEN

18.1 El trabajo es negativo.

$$18.2 \left(\frac{1 \text{ m}^2 \text{ K}}{1 \text{ W}} \right) \left(\frac{(3.281)^2 \text{ ft}^2}{\text{m}^2} \right) \left(\frac{9}{5} \frac{\text{°F}}{\text{K}} \right) \left(\frac{1 \text{ W s}}{1 \text{ J}} \right) \left(\frac{1055 \text{ J}}{1 \text{ BTU}} \right) \left(\frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}} \right)$$

$$= 5.678 \frac{\text{ft}^2 \text{°F h}}{\text{BTU}}$$

18.3 tormentas de truenos, corriente de chorro, calentar agua en una olla, calentar una casa.

PRÁCTICA PARA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Lineamientos para resolución de problemas

1. Cuando use la primera ley de la termodinámica, siempre verifique los signos del calor y del trabajo. En este libro, el trabajo efectuado sobre el sistema es negativo (compresión) y el trabajo efectuado por el sistema es positivo (expansión); el calor agregado a un sistema es positivo y el calor emitido por

un sistema es negativo. Algunos libros definen los signos del trabajo y el calor de forma diferente; asegúrese que usted sabe qué convención de signos se aplica al problema particular.

2. El trabajo y el calor son cantidades dependientes de la trayectoria, pero el cambio en la energía interna es independiente de la trayectoria. De esta manera, para calcular un cambio en la

energía interna, usted puede usar cualesquiera procesos que comiencen desde la misma posición inicial y terminen en la misma posición final en el diagrama pV . El calor y el trabajo pueden variar, dependiendo de la trayectoria en el diagrama, pero su diferencia, $Q - W$, permanecerá igual. Para estos tipos de problemas, asegúrese de tener un sistema claramente definido y de conocer cuáles son las condiciones iniciales y finales para cada paso en el proceso.

3. Para los problemas calorimétricos, la conservación de la energía demanda que las transferencias de energía sumen cero. En otras palabras, el calor ganado por un sistema debe ser igual al calor perdido por los alrededores o algún otro sistema. Este hecho establece la ecuación básica que describe cualquier transferencia de calor entre objetos.

4. Para calcular las cantidades de calor y los correspondientes cambios de temperatura, recuerde que el calor específico se refiere a un cambio de calor por unidad de masa del material, correspondiente a un cambio de temperatura; para un objeto de masa conocida, usted necesita usar la capacidad calorífica. También debe estar consciente de la posibilidad de un cambio de fase. Si es posible un cambio de fase, divida el proceso de transferencia de calor en pasos, calculando el calor correspondiente a los cambios de temperatura y el calor latente correspondiente a los cambios de fase. Recuerde que los cambios de temperatura son siempre la temperatura final menos la temperatura inicial.

5. Asegúrese de verificar los cálculos de calorimetría contra la realidad. Por ejemplo, si la temperatura es mayor que una temperatura inicial, incluso a pesar de que se extrajo calor de un sistema, usted ha pasado por alto un cambio de fase.

PROBLEMA RESUELTO 18.4 Flujo de la energía térmica a través de una barra de cobre/aluminio

PROBLEMA

Una barra de cobre (Cu) con una longitud $L = 90.0$ cm y un área de sección transversal $A = 3.00$ cm² está en contacto térmico en un extremo con un depósito térmico a una temperatura de 100.0 °C. El otro extremo de la barra de cobre está en contacto térmico con una barra de aluminio (Al) de la misma área de sección transversal y una longitud de 10.0 cm. El otro extremo de la barra de aluminio se encuentra en contacto térmico con un depósito térmico a una temperatura de 1.00 °C. ¿Cuál es el flujo de energía térmica a través de la barra compuesta?

SOLUCIÓN

PIENSE

El flujo de energía térmica depende de la diferencia de temperatura entre los dos extremos de la barra, la longitud y el área de la sección transversal y la conductividad térmica de los materiales. Todo el calor que fluye del extremo de la temperatura superior debe fluir a través tanto del segmento de cobre como del de aluminio.

ESBOCE

La figura 18.28 es un bosquejo de la barra de cobre/aluminio.

INVESTIGUE

Podemos usar la ecuación 18.15 para describir el flujo de energía térmica a través de la barra de longitud L y área de sección transversal A :

$$P_{\text{cond}} = kA \frac{T_h - T_c}{L}.$$

Tenemos $T_h = 100$ °C y $T_c = 1$ °C. Identificamos la temperatura en la interfaz entre los segmentos de cobre y de aluminio como T . El flujo de energía térmica a través del segmento de cobre es entonces

$$P_{\text{Cu}} = k_{\text{Cu}} A \frac{T_h - T}{L_{\text{Cu}}}.$$

El flujo de energía térmica a través del segmento de aluminio es

$$P_{\text{Al}} = k_{\text{Al}} A \frac{T - T_c}{L_{\text{Al}}}.$$

El flujo de energía térmica a través del segmento de cobre debe ser igual al flujo de energía térmica a través del segmento de aluminio, así es que tenemos

$$\begin{aligned} P_{\text{Cu}} &= P_{\text{Al}} \\ &= k_{\text{Cu}} A \frac{T_h - T}{L_{\text{Cu}}} = k_{\text{Al}} A \frac{T - T_c}{L_{\text{Al}}}. \end{aligned} \quad (i)$$

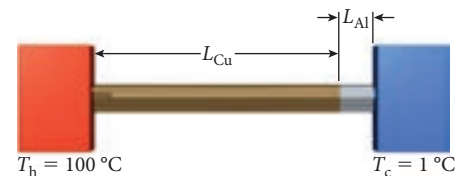


FIGURA 18.28 Una barra de cobre/aluminio mantenida a 100 °C en un extremo y a 1 °C en el otro extremo.

(continúa)

(continuación)

SIMPLIFIQUE

Podemos resolver esta ecuación para T . Primero, dividimos entre A y entonces multiplicamos ambos lados por $L_{\text{Cu}}L_{\text{Al}}$

$$k_{\text{Cu}}L_{\text{Al}}(T_{\text{h}} - T) = k_{\text{Al}}L_{\text{Cu}}(T - T_{\text{c}}).$$

Ahora, multiplicamos en ambos lados y recolectamos todos los términos con T en un lado:

$$\begin{aligned} k_{\text{Cu}}L_{\text{Al}}T_{\text{h}} - k_{\text{Cu}}L_{\text{Al}}T &= k_{\text{Al}}L_{\text{Cu}}T - k_{\text{Al}}L_{\text{Cu}}T_{\text{c}} \\ k_{\text{Al}}L_{\text{Cu}}T + k_{\text{Cu}}L_{\text{Al}}T &= k_{\text{Cu}}L_{\text{Al}}T_{\text{h}} + k_{\text{Al}}L_{\text{Cu}}T_{\text{c}} \\ T(k_{\text{Al}}L_{\text{Cu}} + k_{\text{Cu}}L_{\text{Al}}) &= k_{\text{Cu}}L_{\text{Al}}T_{\text{h}} + k_{\text{Al}}L_{\text{Cu}}T_{\text{c}} \\ T &= \frac{k_{\text{Cu}}L_{\text{Al}}T_{\text{h}} + k_{\text{Al}}L_{\text{Cu}}T_{\text{c}}}{k_{\text{Cu}}L_{\text{Al}} + k_{\text{Al}}L_{\text{Cu}}}. \end{aligned}$$

Al sustituir esta expresión para T en la ecuación (i) nos da el flujo de energía térmica a través de la barra de cobre/aluminio.

CALCULE

Al colocar los valores numéricos nos da

$$\begin{aligned} T &= \frac{k_{\text{Cu}}L_{\text{Al}}T_{\text{h}} + k_{\text{Al}}L_{\text{Cu}}T_{\text{c}}}{k_{\text{Cu}}L_{\text{Al}} + k_{\text{Al}}L_{\text{Cu}}} \\ &= \frac{[386 \text{ W/(m K)}](0.100 \text{ m})(373 \text{ K}) + [220 \text{ W/(m K)}](0.900 \text{ m})(274 \text{ K})}{[386 \text{ W/(m K)}](0.100 \text{ m}) + [220 \text{ W/(m K)}](0.900 \text{ m})} \\ &= 290.1513 \text{ K}. \end{aligned}$$

Al poner este resultado para T en la ecuación (i) nos da el flujo de energía térmica a través del segmento de cobre

$$\begin{aligned} P_{\text{Cu}} &= k_{\text{Cu}}A \frac{T_{\text{h}} - T}{L_{\text{Cu}}} \\ &= [386 \text{ W/(m K)}] \left[(3.00 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2) \frac{373 \text{ K} - 290.1513 \text{ K}}{0.900 \text{ m}} \right] \\ &= 10.6599 \text{ W}. \end{aligned}$$

REDONDEE

Reportamos nuestro resultado con tres cifras significativas:

$$P_{\text{Cu}} = 10.7 \text{ W}.$$

VUELVA A REVISAR

Para volver a revisar, calculemos el flujo de energía térmica a través del segmento de aluminio:

$$P_{\text{Al}} = k_{\text{Al}}A \frac{T - T_{\text{c}}}{L_{\text{Al}}} = [220 \text{ W/(m K)}] \left[(3.00 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2) \frac{290.1513 \text{ K} - 274 \text{ K}}{0.100 \text{ m}} \right] = 10.7 \text{ W}.$$

Esto está de acuerdo con nuestros resultados para el segmento de cobre.

PREGUNTAS DE OPCIÓN MÚLTIPLE

18.1 Un objeto metálico de 2.0 kg con una temperatura de 90 °C se sumerge en 1.0 kg de agua a 20 °C. El sistema agua-metal alcanza un equilibrio a 32 °C. ¿Cuál es el calor específico del metal?

- a) 0.840 kJ/kg K c) 0.512 kJ/kg K
b) 0.129 kJ/kg K d) 0.433 kJ/kg K

18.2 Un gas encerrado en un cilindro se calienta por medio de un pistón que puede moverse sin fricción y entran 1 000 J

de calor al gas. Suponiendo que el volumen del gas es constante, el cambio en la energía interna del gas es

- a) 0. b) 1 000 J. c) -1 000 J. d) Ninguna de las anteriores.

18.3 En la compresión isotérmica de un gas, el volumen ocupado por el gas está decreciendo, pero la temperatura del gas permanece constante. Para que esto pueda suceder,

- a) El calor debe entrar al gas. c) No debe tener lugar ningún intercambio de calor entre el gas y sus alrededores.
b) El calor debe salir del gas.

18.4 ¿En qué superficie debe usted poner una olla para mantenerla caliente por un tiempo más largo?

- a) Una superficie de vidrio lisa. c) Una superficie de madera lisa.
 b) Una superficie de acero lisa. d) Una superficie de madera rugosa.

18.5 Suponiendo que la severidad de una quemadura se incrementa conforme la cantidad de energía puesta en la piel aumenta, ¿cuál de las siguientes causaría la quemadura más severa (suponga masas iguales)?

- a) Agua a 90 °C. d) Aluminio a 100 °C.
 b) Cobre a 110 °C. e) Plomo a 100 °C.
 c) Vapor a 180 °C.

18.6 ¿En qué tipo de proceso no se efectúa trabajo sobre un gas?

- a) Isotérmico. c) Isobárico.
 b) Isocórico. d) Ninguno de los anteriores.

18.7 Un bloque de aluminio de masa $M_{Al} = 2.0$ kg y un calor específico $C_{Al} = 910$ J/(kg K) se encuentra a una temperatura inicial de 1 000 °C y se arroja en un cubo de agua. El agua tiene una masa $M_{H_2O} = 12$ kg y un calor específico $C_{H_2O} = 4 190$ J/(kg K) y está a temperatura ambiente (25 °C). ¿Cuál es la temperatura final aproximada del sistema cuando alcanza el equilibrio térmico? (Desprecie la pérdida de calor hacia fuera del sistema.)

- a) 50 °C b) 60 °C c) 70 °C d) 80 °C

18.8 Un material tiene una densidad másica ρ , volumen V y calor específico c . ¿Cuál de las siguientes es la expresión correcta para el intercambio de calor que ocurre cuando la temperatura del material cambia en ΔT en grados Celsius?

- a) $(\rho c/V)\Delta T$ c) $(\rho c V)/\Delta T$
 b) $(\rho c V)(\Delta T + 273.15)$ d) $\rho c V \Delta T$

18.9 ¿Cuál de los siguientes *no* radia calor?

- a) Un cubo de hielo. e) Todos los anteriores.
 b) Nitrógeno líquido. f) Ninguno de los anteriores.
 c) Helio líquido.
 d) Un dispositivo a $T = 0.010$ K.

18.10 ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

- a) Cuando un sistema efectúa trabajo, su energía interna siempre decrece.
 b) El trabajo efectuado sobre un sistema siempre decrece su energía interna.
 c) Cuando un sistema efectúa un trabajo sobre sus alrededores, el signo del trabajo es siempre positivo.
 d) El trabajo positivo efectuado sobre un sistema es siempre igual a la ganancia del sistema en energía interna.
 e) Si usted empuja sobre el pistón de un cilindro lleno de gas, la energía del gas en el cilindro se incrementará.

PREGUNTAS

18.11 Calcule la potencia radiada por una persona promedio. (Piense en el cuerpo humano como un cuerpo negro cilíndrico.)

18.12 Varios días después de que termine una tormenta de nieve, el techo de una casa se encuentra completamente cubierto con nieve y el techo de otra casa no tiene una cubierta de nieve. ¿Cuál de las dos casas se encuentra probablemente mejor aislada?

18.13 ¿Por qué siente mucho más frío en sus pies en el azulejo después de bañarse que en la alfombra de baño? ¿Por qué este efecto es más notable cuando sus pies están fríos?

18.14 ¿Puede usted pensar en una forma de hacer un cuerpo negro, un material que absorbe esencialmente toda la energía radiante que cae sobre éste, si usted sólo tiene un material que refleja la mitad de la energía radiante que cae sobre éste?

18.15 En 1883, el volcán en la isla Krakatoa en el Pacífico hizo erupción violentamente en la mayor explosión terrestre jamás registrada en la historia, destruyendo gran parte de la isla en el proceso. Las mediciones de la temperatura global indican que dicha explosión redujo la temperatura promedio de la Tierra en cerca de 1 °C durante las siguientes dos décadas. ¿Por qué?

18.16 Caminar sobre el fuego se practica en algunas partes del mundo por diversas razones y es también una atracción

turística en algunos complejos turísticos a las orillas del mar. ¿Cómo puede una persona caminar a través de carbones ardiendo a una temperatura bastante mayor a 500 °F sin quemarse sus pies?

18.17 ¿Por qué un abrigo seco y mullido es mejor aislante que el mismo abrigo cuando está mojado?

18.18 Se ha propuesto que el calentamiento global podría contrarrestarse dispersando grandes cantidades de polvo en la atmósfera superior. ¿Por qué podría funcionar esto y cómo?

18.19 Una botella térmica adaptada con un pistón está llena con un gas. Dado que la botella está bien aislada, ningún calor puede entrar o salir de ésta. El pistón se empuja hacia dentro, comprimiendo al gas.

- a) ¿Qué pasa con la presión del gas? ¿Aumenta, disminuye o se queda igual?
 b) ¿Qué pasa con la temperatura del gas? ¿Aumenta, disminuye o se queda igual?
 c) ¿Cambian otras propiedades del gas?

18.20 ¿Cómo diferirían las tasas de transferencia de calor entre un depósito térmico a una mayor temperatura y a una menor temperatura si los depósitos estuviesen en contacto con una barra de vidrio de 10 cm de longitud en lugar de una barra de aluminio de 10 m de longitud que tienen un área de sección transversal idéntica?

18.21 ¿Por qué podría un excursionista preferir una botella de plástico a una cantimplora de aluminio para llevar su agua de beber?

18.22 Una niña ha descubierto una muy antigua moneda de plata de un dólar de Estados Unidos y está sosteniéndola apretadamente en sus manitas. Suponga que ella puso el dólar

en una superficie de madera (aislante) de una mesa y después una amiga vino de afuera y colocó encima del dólar de plata un centavo igualmente antiguo que recientemente se encontró en la nieve, donde se quedó toda la noche. Estime la temperatura de equilibrio final del sistema de las dos monedas en equilibrio térmico.

PROBLEMAS

Una • y dos •• indican un nivel creciente de dificultad del problema.

Secciones 18.2 y 18.3

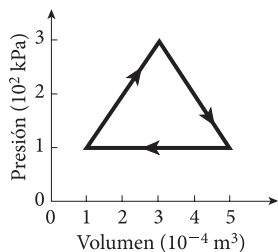
18.23 Usted levantará un elefante (masa = $5.0 \cdot 10^3$ kg) sobre su cabeza (un desplazamiento vertical de 2.0 m).

a) Calcule el trabajo requerido para hacer esto. Usted levantará al elefante lentamente (¡no se permite lanzar al elefante!). Si usted quiere, puede usar un sistema de poleas. (Como usted vio en el capítulo 5, esto no cambia la energía requerida para levantar al elefante, pero definitivamente reduce la fuerza necesaria para hacerlo.)

b) ¿Cuántas donas (a 250 calorías de comida cada una) debe usted metabolizar para suministrar la energía para esta proeza?

18.24 Un gas tiene un volumen inicial de 2.00 m^3 . Se expande a tres veces su volumen inicial a través de un proceso en el cual $P = \alpha V^3$, con $\alpha = 4.00 \text{ N/m}^{11}$. ¿Cuánto trabajo se efectúa al expandirse el gas?

18.25 ¿Cuánto trabajo se efectúa por ciclo por el gas que sigue la trayectoria mostrada en el diagrama pV ?



Secciones 18.4 y 18.5

18.26 La energía interna de un gas es de 500. J. El gas se comprime adiabáticamente y su volumen decrece en $100. \text{ cm}^3$. Si la presión aplicada sobre el gas durante la compresión es de 3.00 atm, ¿cuál es la energía interna del gas después de la compresión adiabática?

Sección 18.6

18.27 Usted tiene 1.00 cm^3 de cada uno de los materiales listados en la tabla 18.1, todos a temperatura ambiente, $22.0 \text{ }^\circ\text{C}$. ¿Cuál material tiene la temperatura más alta después de que se agrega 1.00 J de energía térmica a cada muestra? ¿Cuál tiene la temperatura inferior? ¿Cuáles son dichas temperaturas?

18.28 Suponga que usted mezcla 7.00 L de agua a $2.00 \cdot 10^1 \text{ }^\circ\text{C}$ con 3.00 L de agua a $32.0 \text{ }^\circ\text{C}$; el agua está aislada de tal modo que ninguna energía puede fluir hacia dentro o hacia fuera de ésta. (Usted puede lograr esto, aproximadamente, mezclando los dos fluidos en una nevera portátil del tipo que se usa para mantener las bebidas frías para los días de campo.) Los 10.0 L de agua alcanzarán alguna temperatura final. ¿Cuál es esta temperatura final?

18.29 Un pedazo de 25 g de aluminio a $85 \text{ }^\circ\text{C}$ se arroja en 1.0 L de agua a $1.0 \cdot 10^1 \text{ }^\circ\text{C}$, la cual se encuentra en un vaso de pre-

cipitados aislado. Suponiendo que hay una pérdida de calor despreciable a los alrededores, determine la temperatura de equilibrio del sistema.

18.30 Una bala de plomo de 12 g se dispara con una rapidez de 250 m/s a una pared de madera. Suponiendo que 75% de la energía cinética se absorbe por la bala como calor (y 25% por la pared), ¿cuál es la temperatura final de la bala?

•**18.31** Un bloque de cobre de 1.00 kg a $80.0 \text{ }^\circ\text{C}$ se deja caer en un recipiente con 2.00 L de agua a $10.0 \text{ }^\circ\text{C}$. Compare la magnitud del cambio de energía del cobre con la magnitud del cambio en la energía del agua. ¿Cuál valor es mayor?

•**18.32** Una olla de aluminio de 1.19 kg contiene 2.31 L de agua. Tanto la olla como el agua se encuentran inicialmente a $19.7 \text{ }^\circ\text{C}$. ¿Cuánto calor debe fluir en la olla y el agua para llevar su temperatura a $95.0 \text{ }^\circ\text{C}$? Suponga que el efecto de la evaporación del agua durante el proceso de calentamiento puede despreciarse y que la temperatura permanece uniforme por toda la olla y el agua.

•**18.33** Un ladrillo metálico encontrado en una excavación se envía a un laboratorio de pruebas para una identificación no destructiva. El laboratorio pesó el ladrillo de muestra y encontró que su masa era de 3.0 kg . El ladrillo se calentó hasta una temperatura de $3.0 \cdot 10^2 \text{ }^\circ\text{C}$ y sumergido en un calorímetro de cobre aislado con una masa de 1.5 kg , que contenía 2.0 kg de agua a $2.0 \cdot 10^1 \text{ }^\circ\text{C}$. La temperatura final en el equilibrio se anotó como de $31.7 \text{ }^\circ\text{C}$. Calculando el calor específico de la muestra a partir de estos datos, ¿puede usted identificar el material del ladrillo?

•**18.34** Un pedazo de cobre de $2.0 \cdot 10^2 \text{ g}$ a una temperatura de 450 K y un pedazo de aluminio de $1.0 \cdot 10^2 \text{ g}$ a una temperatura de $2.0 \cdot 10^2 \text{ K}$ se arrojan en una cubeta aislada que contiene $5.0 \cdot 10^2 \text{ g}$ de agua a 280 K . ¿Cuál es la temperatura de equilibrio de la mezcla?

••**18.35** Cuando se usa un termómetro de vidrio de inmersión para medir la temperatura de un líquido, la lectura de la temperatura se verá afectada por un error debido a la transferencia de calor entre el líquido y el termómetro. Suponga que usted quiere medir la temperatura de 6.00 mL de agua en un frasquito de vidrio Pyrex aislado térmicamente del ambiente. El frasquito vacío tiene una masa de 5.00 g . El termómetro que usted usa está hecho de vidrio Pyrex también y tiene una masa de 15.0 g , de los cuales 4.00 g son del mercurio que está dentro del termómetro. El termómetro se encuentra inicialmente a una temperatura ambiente ($20.0 \text{ }^\circ\text{C}$). Usted coloca su termómetro en el agua del frasquito y, después de un tiempo, usted lee una temperatura de equilibrio de $29.0 \text{ }^\circ\text{C}$. ¿Cuál era la temperatura real del agua en el frasquito antes de que se midiese la temperatura?

La capacidad calorífica específica del vidrio Pyrex alrededor de la temperatura ambiente es de 800. J/(kg K) y la del mercurio líquido a temperatura ambiente es de 140. J/(kg K).

Sección 18.7

•18.36 Suponga que 400. g de agua a 30.0 °C se vierten sobre un cubo de hielo de 60.0 g con una temperatura de -5.00 °C. Si todo el hielo se funde, ¿cuál es la temperatura final del agua? Si no todo el hielo se funde, ¿cuánto hielo queda cuando la mezcla agua-hielo alcanza el equilibrio?

18.37 Una persona emitió 180 kcal de calor en la evaporación del agua en su piel en una sesión de ejercicios. ¿Cuánta agua perdió esta persona, suponiendo que el calor emitido sólo se usó para evaporar el agua?

18.38 Un bloque de aluminio de 1.3 kg a 21 °C se ha de fundir y darle nueva forma. ¿Cuánto calor debe fluir hacia el bloque con objeto de fundirlo?

18.39 El calor latente de vaporización del nitrógeno líquido es como de 200. kJ/kg. Suponga que usted tiene 1.00 kg de nitrógeno líquido hirviendo a 77.0 K. Si usted suministra calor a una tasa constante de 10.0 W mediante un calentador eléctrico inmerso en el nitrógeno líquido, ¿cuánto tomará en vaporizarse por completo? ¿Cuál es el tiempo para 1 kg de helio líquido, cuyo calor de vaporización es de 20.9 kJ/kg?

•18.40 Suponga que 0.010 kg de vapor (a 100.00 °C) se agrega a 0.10 kg de agua (inicialmente a 19.0 °C). El agua está dentro de una taza de aluminio con una masa de 35 g. La taza está dentro de un recipiente de calorimetría perfectamente aislado, que previene el flujo de calor con el ambiente exterior. Encuentre la temperatura final del agua una vez que se ha alcanzado el equilibrio.

•18.41 Suponga que $1.0 \cdot 10^2$ g de aluminio fundido a 932 K se arrojan en 1.00 L de agua a temperatura ambiente, 22 °C.

- a) ¿Cuánta agua hervirá?
- b) ¿Cuánto del aluminio se solidificará?
- c) ¿Cuál será la temperatura final del sistema agua-aluminio?
- d) Suponga que el aluminio estaba inicialmente a 1 150 K. ¿Podría usted todavía resolver este problema usando la información dada en este problema? ¿Cuál sería el resultado?

•18.42 En una de sus rigurosas sesiones de ejercicio, usted perdió 150 g de agua a través de la evaporación. Suponga que la cantidad de trabajo efectuado por su cuerpo fue de $1.80 \cdot 10^5$ J y que el calor requerido para evaporar el agua vino de su propio cuerpo.

- a) Encuentre la pérdida de energía interna de su cuerpo, suponiendo que el calor latente de vaporización es de $2.42 \cdot 10^6$ J/kg.
- b) Determine el número mínimo de calorías de comida que debe consumir para reponer la energía interna perdida (1 caloría de comida = 4 186 J).

•18.43 Las hojas de los cuchillos a menudo se fabrican con acero al carbono endurecido. El proceso de endurecimiento es un tratamiento de calor en el cual la hoja primero se calienta a una temperatura de 1 346 °F y entonces se enfría rápidamente, sumergiéndola en un baño de agua. Para lograr la dureza desea-

da, después de calentarla a 1 346 °F, la hoja necesita llevarse a una temperatura inferior a $5.00 \cdot 10^2$ °F. Si la hoja tiene una masa de 0.500 kg y el agua se encuentra en un recipiente de cobre abierto con una masa de 2.000 kg y con un volumen suficientemente grande, ¿cuál es la mínima cantidad de agua que necesita estar en el recipiente para que el proceso de endurecimiento sea exitoso? Suponga que la hoja no está en contacto mecánico (y por lo tanto térmico) directo con el recipiente y desprecie el enfriamiento a través de la radiación hacia el aire. Suponga que el agua no hierve, pero alcanza los 100 °C. La capacidad calorífica del cobre alrededor de la temperatura ambiente es $c_{\text{cobre}} = 386$ J/(kg K). Use los datos en la tabla inferior para la capacidad calorífica del acero al carbono.

Rango de temperatura (°C)	Capacidad calorífica (J/kg K)
150 a 200	519
200 a 250	536
250 a 350	553
350 a 450	595
450 a 550	662
550 a 650	754
650 a 750	846

•18.44 Se ha postulado que cae “nieve” de etanol cerca de los polos de los planetas Júpiter, Saturno, Urano y Neptuno. Si las regiones polares de Urano, definidas como aquéllas a una latitud al norte de los 75.0° N y a una latitud al sur de los 75° S, experimentan 1.00 ft de nieve de etanol, ¿cuál es la mínima cantidad de energía perdida a la atmósfera para producir tal cantidad de nieve a partir del vapor de etanol? Suponga que el etanol sólido tiene una densidad de 1.00 g/cm³ y que la nieve de etanol —la cual es esponjada como la nieve terrestre— es como 90.0% de espacio vacío. La capacidad calorífica específica es de 1.30 J/(g K) para el vapor de etanol, 2.44 J/(g K) para el etanol líquido y de 1.20 J/(g K) para el etanol sólido. ¿Cuánta potencia se disipa si 1 ft de nieve de etanol cae en un día terrestre?

Sección 18.8

18.45 Un bloque de hielo de 100. mm por 100. mm por 5.0 mm a 0 °C se coloca sobre su cara plana sobre un disco de metal que cubre una olla de agua hirviendo a presión atmosférica normal. El tiempo necesario para que el bloque entero se funda se mide en 0.400 s. La densidad del hielo es de 920. kg/m³. Use los datos en la tabla 18.3 para determinar de qué metal está hecho el disco con mayor probabilidad.

18.46 Una lámina de cobre con un espesor de 2.00 mm está pegada a una lámina de acero con un espesor de 1.00 mm. La superficie exterior de la lámina de cobre se mantiene a una temperatura de 100.0 °C y la de la lámina de acero a 25.0 °C.

- a) Determine la temperatura en la interfaz cobre-acero.
- b) ¿Cuánto calor se conduce a través de 1.00 m² de las láminas combinadas por segundo?

18.47 El Sol es aproximadamente una esfera con un radio de $6.963 \cdot 10^5$ km, a una distancia media $a = 1.496 \cdot 10^8$ km de la Tierra. La constante solar, la intensidad de la radiación solar en el borde exterior de la atmósfera terrestre, es de 1 370 W/m². Suponiendo que el Sol radia como un cuerpo negro, calcule su temperatura superficial.

•**18.48** El motor de una motocicleta enfriada por aire pierde una cantidad significativa de calor a través de la radiación térmica de acuerdo con la ecuación de Stefan-Boltzmann. Suponga que la temperatura ambiente es $T_0 = 27^\circ\text{C}$ (300 K). Suponga que el motor genera 15 hp (11 kW) de potencia y, debido a varias aletas superficiales profundas, tiene un área superficial $A = 0.50\text{ m}^2$. Un motor reluciente tiene una emisividad $e = 0.050$, en tanto que un motor pintado de negro tiene una emisividad $e = 0.95$. Determine las temperaturas de equilibrio para el motor negro y el motor brillante. (Suponga que la radiación es el único modo mediante el cual el calor se disipa del motor.)

•**18.49** Un día de verano, usted decide hacer una paleta de agua helada. Usted coloca un palo de paleta dentro de un vaso de jugo de naranja de 8.00 oz, el cual se encuentra a temperatura ambiente (71.0°F). Entonces pone el vaso dentro del congelador, el cual se encuentra a -15.0°F y tiene una potencia de enfriamiento de $4.00 \times 10^3\text{ BTU/h}$. ¿Cuánto tarda en congelarse su paleta helada?

•**18.50** Un cubo de hielo a 0°C mide 10.0 cm en cada arista. Reposo sobre un bloque de cobre con una sección transversal cuadrada de 10 cm por lado y una longitud de 20.0 cm. El bloque se sumerge parcialmente en una gran tina de agua a 90.0°C . ¿Cuánto tarda en fundirse el cubo de hielo? Suponga que sólo la parte en contacto con el bloque se derrite; esto es, el cubo se hace más corto conforme se funde. La densidad del hielo es de 0.917 g/cm^3 .

•**18.51** Una ventana de una sola hoja es un mal aislante. En un día frío, la temperatura en la superficie interior de la ventana es a menudo mucho menor que la temperatura del aire en el cuarto. Del mismo modo, la superficie exterior de la ventana es quizás mucho más caliente que el aire a la intemperie. Las temperaturas superficiales reales dependen fuertemente de los efectos convectivos. Por ejemplo, suponga que las temperaturas del aire son de 21.5°C dentro y de -3.0°C fuera y la superficie interior de la ventana está a 8.5°C y la superficie exterior de la ventana está a 4.1°C . ¿A qué tasa fluirá el calor a través de la ventana? Tome el grosor de la ventana como 0.32 cm, la altura de 1.2 m y el ancho de 1.4 m.

•**18.52** Un recipiente de almacenamiento criogénico contiene helio líquido, el cual hierve a 4.2 K. Suponga que un estudiante pintó la cubierta exterior del recipiente de negro, convirtiéndola en un pseudocuerpo negro y que la cubierta tiene un área efectiva de 0.50 m^2 y se encuentra a $3.0 \cdot 10^2\text{ K}$.

a) Determine la tasa de pérdida de calor debida a la radiación.
b) ¿Cuál es la tasa a la cual el volumen de helio líquido en el recipiente decrece como resultado de la ebullición? El calor latente de vaporización del helio líquido es de 20.9 kJ/kg . La densidad del helio líquido es de 0.125 kg/L .

•**18.53** Marte se encuentra 1.52 veces más distante del Sol que la Tierra y tiene un diámetro de 0.532 veces el de la Tierra.

a) ¿Cuál es la intensidad de la radiación solar (en W/m^2) en la superficie de Marte?

b) Estime la temperatura superficial de Marte.

••**18.54** Dos depósitos térmicos están conectados por una barra de cobre sólido. La barra tiene una longitud de 2.00 m y las temperaturas de los depósitos son de 80.0°C y 20.0°C .

a) Suponga que la barra tiene una sección transversal rectangular constante, de 10.0 cm por un lado. ¿Cuál es la tasa de flujo de calor a través de la barra?

b) Suponga que la barra tiene una sección transversal rectangular que se ensancha gradualmente desde el depósito más frío al depósito más caliente. El área está determinada por $A = (0.0100\text{ m}^2)[1.0 + x/(2.0\text{ m})]$, donde x es la distancia a lo largo de la barra del depósito más frío al más caliente. Encuentre el flujo de calor y la tasa de cambio de temperatura con la distancia del extremo más frío, en el extremo más caliente y a la mitad de la barra.

••**18.55** La radiación emitida por un cuerpo negro a una temperatura T tiene una distribución de frecuencias dada por el espectro de Planck:

$$\epsilon_r(f) = \frac{2\pi h}{c^2} \left(\frac{f^3}{e^{hf/k_B T} - 1} \right),$$

donde $\epsilon_r(f)$ es la densidad de energía de la radiación por unidad de incremento de la frecuencia, ν (por ejemplo, en watts por metro cuadrado por hertz), $h = 6.626 \cdot 10^{-34}\text{ J s}$ es la constante de Planck, $k_B = 1.38 \cdot 10^{-23}\text{ m}^2\text{ kg s}^{-2}\text{ K}^{-1}$ es la constante de Boltzmann y c es la rapidez de la luz en el vacío. (De manera notable, el ejemplo más exacto y más precisamente medido de esta distribución de energía en la naturaleza es la radiación cósmica de fondo en microondas.) Esta distribución tiende a cero en los límites $f \rightarrow 0$ y $f \rightarrow \infty$ con un solo pico entre estos dos límites. Conforme la temperatura se incrementa, la densidad de energía a cada valor de frecuencias se incrementa y el pico se desplaza a un valor de frecuencia mayor.

a) Encuentre la frecuencia correspondiente al pico del espectro de Planck, como función de la temperatura.

b) Evalúe la frecuencia pico a la temperatura $T = 6.00 \cdot 10^3\text{ K}$, aproximadamente la temperatura de la fotosfera (superficie) del Sol.

c) Evalúe la frecuencia pico a la temperatura $T = 2.735\text{ K}$, la temperatura de la radiación cósmica de fondo en microondas.

d) Evalúe la frecuencia pico a la temperatura $T = 300\text{ K}$, la cual es aproximadamente la temperatura superficial de la Tierra.

Problemas adicionales

18.56 ¿Cuánta energía se requiere para calentar 0.30 kg de aluminio desde 20.0°C hasta 100.0°C ?

18.57 La conductividad térmica de la guata de fibra de vidrio, la cual tiene un grosor de 4.0 in, es de $8.0 \cdot 10^{-6}\text{ BTU}/(\text{ft}^\circ\text{F s})$. ¿Cuál es su valor R (en $\text{ft}^2\text{ }^\circ\text{F h}/\text{BTU}$)?

18.58 El agua es un excelente refrigerante como resultado de su capacidad calorífica muy grande. Calcule la cantidad de calor que se requiere para cambiar la temperatura de 10.0 kg de agua en 10.0 K. Ahora calcule la energía cinética de un coche con $m = 1.00 \cdot 10^3\text{ kg}$, moviéndose a una rapidez de 27.0 m/s (60 mph). Compare estas dos cantidades.

18.59 Aproximadamente 95% de la energía desarrollada por un filamento en una bombilla esférica de $1.0 \cdot 10^2\text{ W}$ se disipa a través de la bombilla de vidrio. Si el espesor de la bombilla es de 0.50 mm y su radio es de 3.0 cm, calcule la diferencia de temperatura entre las superficies interior y exterior de la bombilla.

18.60 La etiqueta en un refresco gaseoso manifiesta que 12 fl oz (355 g) proporciona 150 kcal. La bebida se enfría a 10.0

$^{\circ}\text{C}$ antes de consumirse. Entonces, alcanza la temperatura del cuerpo de 37°C . Encuentre el contenido de energía neto de la bebida. (*Pista:* Usted puede tratar al refresco como idéntico al agua en términos de su capacidad calorífica.)

18.61 El cuerpo humano transporta calor desde los tejidos internos, a una temperatura de 37.0°C , hasta la superficie de la piel, a una temperatura de 27.0°C , a una tasa de 100 W . Si el área de la piel es de 1.5 m^2 y su espesor es de 3.0 mm , ¿cuál es la conductividad térmica efectiva, κ , de la piel?

18.62 Se ha dicho que en ocasiones las balas de plomo se funden al impacto. Suponga que una bala recibe 75% del trabajo hecho sobre ésta por la pared al impacto como un incremento en la energía interna.

a) ¿Cuál es la rapidez mínima con la cual una bala de 15 g podría impactar una superficie (suponiendo que la bala se detiene por completo y toda la energía cinética es absorbida por ésta) para empezarse a fundir?

b) ¿Cuál es la rapidez de impacto mínima requerida para que la bala se funda por completo?

18.63 La radiación solar en la superficie terrestre tiene una intensidad de unos 1.4 kW/m^2 . Suponiendo que la Tierra y Marte son cuerpos negros, calcule la intensidad de la luz solar en la superficie marciana.

18.64 Usted se perdió al hacer excursionismo a la intemperie, vistiendo sólo un traje de baño.

a) Calcule la potencia radiada por su cuerpo, suponiendo que su área superficial es de unos 2.00 m^2 y su temperatura es de unos 33.0°C . También, suponga que su cuerpo tiene una emisividad de 1.00 .

b) Calcule la potencia radiada neta desde su cuerpo cuando usted estaba dentro de un albergue a 20.0°C .

c) Calcule la potencia radiada neta de su cuerpo cuando la temperatura de su cuerpo bajó a 27.0°C .

18.65 Un cubo de hielo de 10.0 g a -10.0°C se deja caer en 40.0 g de agua a 30.0°C .

a) Después de que ha transcurrido suficiente tiempo para permitir que el cubo de hielo y el agua alcancen un equilibrio, ¿cuál es la temperatura del agua?

b) Si se agrega un segundo cubo de hielo, ¿cuál es la temperatura del agua?

18.66 Arthur Clarke escribió una interesante narración corta llamada "Un ligero caso de insolación". Los descontentos fanáticos del fútbol fueron al estadio un día equipados con espejos y estaban dispuestos a hacer barbacoa al árbitro si favorecía a un equipo en lugar del otro. Imagine que el árbitro es como un cilindro lleno con agua y una masa de 60.0 kg a 35.0°C . También suponga que este cilindro absorbe toda la energía reflejada sobre él desde $50\,000$ espejos. Si la capacidad calorífica del agua es de $4.20 \cdot 10^3\text{ J}/(\text{kg }^{\circ}\text{C})$, ¿cuánto tardará en subir la temperatura del agua hasta 100°C ? Suponga que el Sol emite $1.00 \cdot 10^3\text{ W/m}^2$, las dimensiones de cada espejo son de 25.0 cm por 25.0 cm y los espejos se sostienen con un ángulo de 45.0° .

18.67 Si la temperatura promedio del Atlántico Norte es de 12.0°C y la temperatura de la Corriente del Golfo promedia los 17.0°C , estime la cantidad neta de calor que la Corriente del Golfo radia al océano circundante. Use los detalles del problema resuelto 18.3 (la longitud es como de $8.00 \cdot 10^3\text{ km}$

y suponga que $e = 0.930$. No olvide incluir el calor absorbido por la Corriente del Golfo.

18.68 Para una demostración en el salón de clases, su instructor de física vierte 1.00 kg de vapor a 100.0°C sobre 4.00 kg de hielo a 0.00°C y permite que el sistema alcance el equilibrio. Entonces, él medirá la temperatura del sistema. Mientras el sistema alcanza el equilibrio, a usted le facilitan los calores latentes del hielo y el vapor y el calor específico del agua: $L_{\text{hielo}} = 3.33 \cdot 10^5\text{ J/kg}$, $L_{\text{vapor}} = 2.26 \cdot 10^6\text{ J/kg}$, $c_{\text{agua}} = 4\,186\text{ J}/(\text{kg }^{\circ}\text{C})$. A usted se le pide calcular la temperatura de equilibrio final del sistema. ¿Qué valor encuentra usted?

18.69 Determine la razón del flujo de calor hacia el interior de un paquete de seis latas de aluminio de refresco gaseoso con respecto al flujo de calor hacia el interior de una botella de plástico de refresco gaseoso de 2.00 L , cuando ambas se sacan del mismo refrigerador, esto es, tienen la misma diferencia de temperaturas con el aire en el cuarto. Suponga que cada lata de refresco tiene un diámetro de 6.00 cm , una altura de 12.0 cm y un espesor de 0.100 cm . Use $205\text{ W}/(\text{m K})$ como la conductividad térmica del aluminio. Suponga que la botella de refresco de 2 L tiene un diámetro de 10.0 cm , una altura de 25.0 cm y un espesor de 0.100 cm . Use $0.100\text{ W}/(\text{m K})$ como la conductividad térmica del plástico.

18.70 El factor R para el aislante de construcción reporta la resistencia térmica en unidades de $\text{ft}^2\text{ }^{\circ}\text{F h}/\text{BTU}$. Una buena pared para climas rigurosos, correspondiente a unas 10.0 pulgadas de fibra de vidrio, tiene $R = 40.0\text{ ft}^2\text{ }^{\circ}\text{F h}/\text{BTU}$.

a) Determine la resistencia térmica en unidades del SI.

b) Encuentre el flujo de calor por metro cuadrado a través de una pared que tiene un factor R de 40.0 , con una temperatura exterior de -22.0°C y una temperatura interior de 23.0°C .

18.71 Suponga que usted tiene un cuarto en el desván que mide 5.0 m por 5.0 m y se mantiene a 21°C cuando la temperatura exterior es de 4.0°C .

a) Si usted usó un aislante R-19 en lugar de un aislante R-30, ¿cuánto más calor saldrá de este cuarto en un día?

b) Si la energía eléctrica para calentar el cuarto cuesta 12 centavos por kilowatt-hora, ¿cuánto más le costará calentar por un periodo de 3 meses con el aislante R-19?

18.72 Una ventana térmica consiste en dos hojas de vidrio separadas por un espacio de aire. Cada hoja de vidrio tiene un espesor de 3.0 mm y el espacio de aire tiene un espesor de 1.0 cm . El vidrio de la ventana tiene una conductividad de $1.00\text{ W}/(\text{m K})$ y el aire tiene una conductividad de $0.0260\text{ W}/(\text{m K})$. Suponga que la ventana térmica separa un cuarto a una temperatura de 20.00°C del exterior que está a 0.00°C .

a) ¿Cuál es la temperatura en cada una de las cuatro interfaces aire-vidrio?

b) ¿A qué tasa se pierde el calor del cuarto, por metro cuadrado de ventana?

c) Suponga que la ventana no tuviese espacio de aire, sino que consistiese en una sola capa de vidrio de 6.00 mm de espesor. ¿Cuál sería la tasa de pérdida de calor por metro cuadrado, bajo las mismas condiciones de temperatura?

d) La conducción de calor a través de la ventana térmica podría reducirse a esencialmente cero, evacuando el espacio entre las hojas de vidrio. ¿Por qué no se hace esto?

19

Gases ideales

LO QUE APRENDEREMOS	615
19.1 Leyes empíricas de gases	615
Ley de Boyle	616
Ley de Charles	616
Ley de Gay-Lussac	617
Ley de Avogadro	617
19.2 Ley de los gases ideales	617
Ejemplo 19.1 Gas en un cilindro	619
Ejemplo 19.2 Enfriamiento de un globo	620
Ejemplo 19.3 Calor en el campo de golf	621
Trabajo hecho por un gas ideal a temperatura constante	622
Ley de Dalton	622
19.3 Teorema de equipartición	623
Ejemplo 19.4 Energía cinética media de las moléculas de aire	626
19.4 Calor específico de un gas ideal	626
Calor específico con volumen constante	627
Calor específico con presión constante	628
Grados de libertad	628
Proporción de calores específicos	630
19.5 Procesos adiabáticos para un gas ideal	630
Problema resuelto 19.1 Bomba para inflar neumáticos de bicicleta	632
Trabajo hecho por un gas ideal en un proceso adiabático	634
19.6 La teoría cinética de los gases	634
Distribución de rapidez de Maxwell	634
Distribución de energía cinética de Maxwell	636
Ejemplo 19.5 Temperatura del plasma de quark-gluones	637
Camino libre medio	638
Ejemplo 19.6 El camino libre medio de las moléculas de aire	639
LO QUE HEMOS APRENDIDO/ GUÍA DE ESTUDIO PARA EXAMEN	640
Práctica para resolución de problemas	641
Problema resuelto 19.2 Densidad del aire con STP	642
Problema resuelto 19.3 Presión de una nebulosa planetaria	643
Preguntas de opción múltiple	644
Preguntas	644
Problemas	645



FIGURA 19.1 Un buzo respira aire comprimido debajo del agua.

LO QUE APRENDEREMOS

- Un gas es una sustancia que, puesta en un recipiente, se expande para llenar el recipiente.
- Las propiedades físicas de un gas son presión, volumen, temperatura y número de moléculas.
- Un gas ideal es uno en el cual se tratan las moléculas del gas como partículas puntuales que no interactúan entre sí.
- La ley de los gases ideales da la relación entre presión, volumen, temperatura y número de moléculas de un gas ideal.
- El trabajo hecho por un gas ideal es proporcional al cambio de volumen del gas si la presión es constante.
- La ley de Dalton dice que la presión total ejercida por una mezcla de gases es igual a la suma de las presiones parciales ejercida por cada gas en la mezcla.
- El calor específico de un gas se puede calcular tanto para procesos de volumen constante como de presión constante. Gases compuestos de moléculas monoatómicas, biatómicas o poliatómicas tienen diferentes calores específicos.
- La teoría cinética, que describe el movimiento de los componentes de un gas ideal, explica sus propiedades macroscópicas, tales como temperatura y presión.
- La temperatura de un gas es proporcional a la energía cinética media de sus moléculas.
- La distribución de rapidez de las moléculas de un gas se describe mediante la distribución de rapidez de Maxwell, y la distribución de las energías cinéticas de las moléculas de un gas se describe mediante la distribución de energía cinética de Maxwell.
- La trayectoria libre media de una molécula en un gas es la distancia media que recorre la molécula antes de interactuar con otra molécula.

El buceo con escafandra (*scuba diving*) (*scuba* fue originalmente un acrónimo para “self-contained underwater breathing apparatus” [“aparato de respiración subacuática autosuficiente”]) es una actividad popular en lugares con agua marina tibia. Sin embargo, también es una gran aplicación de la física de los gases. El buzo de la figura 19.1 depende de un tanque de aire comprimido para respirar debajo del agua. El aire se mantiene normalmente a una presión de 200 atm ($\sim 3\,000$ psi, o ~ 20 MPa). Sin embargo, para respirar este aire, su presión se tiene que modificar para que sea más o menos igual a la presión que rodea el cuerpo del buzo en el agua, lo que incrementa por aproximadamente 1 atm por cada 10 m debajo de la superficie (vea la sección 13.4).

En este capítulo estudiamos la física de los gases. Los resultados se basan sobre un gas ideal, que en realidad no existe, pero muchos gases reales se comportan aproximadamente como un gas ideal en muchas situaciones. Primero examinaremos las propiedades de gases basados en observaciones, incluyendo las leyes que primero pronunciaron los pioneros de la navegación de globos de aire caliente, que tenían un interés muy práctico en el comportamiento de los gases en grandes alturas. Luego vamos a adquirir ideas adicionales de la teoría cinética de un gas ideal, lo que aplica el análisis matemático a partículas de gas bajo varias condiciones supuestas.

Las propiedades clave de gases, que veremos, son las cantidades termodinámicas de temperatura, presión y volumen, por lo que este capítulo se enlaza con los demás sobre la termodinámica. Sin embargo, la física de los gases tiene aplicaciones para diferentes áreas de la ciencia, desde la astronomía hasta la meteorología, desde la química hasta la biología. Muchos de estos conceptos van a ser importantes en capítulos posteriores.

19.1 Leyes empíricas de gases

El capítulo 13 presentó una visión general de los estados de la materia. Se introdujo la presión como una cantidad física y declaró que un gas es un caso especial de un líquido. Con el concepto de la temperatura, introducido en el capítulo 17, podemos ver ahora cómo gases responden a cambios de temperatura, presión y volumen. Las leyes de los gases que se introducen en esta sección ofrecen la evidencia empírica que llevará a la derivación de la ley de gases ideales en la siguiente sección. Veremos que todas las leyes empíricas de gases son casos especiales de la ley de gases ideales.

Un **gas** es una sustancia que se expande para llenar el recipiente en el que se coloca. Por lo tanto, el volumen de un gas es el volumen de su recipiente. Este capítulo utiliza el término *moléculas de gas* para referirse a los elementos de un gas, aunque un gas podrá consistir en átomos o moléculas o puede ser una combinación de átomos y moléculas.

En el capítulo 17, la temperatura de una sustancia se definió en términos de su tendencia a emitir calor a su entorno o de absorber calor de su entorno. La presión de un gas se determina

como la fuerza por unidad de área ejercida por las moléculas de gas en las paredes de un recipiente. Para muchas aplicaciones, la temperatura y presión estándar (STP) se definieron a $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ (273.15 K) y 100 kPa .

Otra característica de un gas, aparte del volumen, temperatura y presión, es el número de moléculas del gas en el volumen en un recipiente. Este número se expresa en términos de moles: 1 mol de un gas se determina para tener $6.022 \cdot 10^{23}$ partículas. Este número se conoce como *número de Avogadro*, introducido en el capítulo 13, y se discutirá con mayor detalle en conexión con la ley de Avogadro más adelante en esta sección.

Varias relaciones simples existen entre las cuatro propiedades de un gas, o sea presión, volumen, temperatura y número de moléculas. Esta sección cubre cuatro leyes simples de los gases que relacionan estas propiedades. Todas estas leyes de los gases llevan el nombre de su descubridor (Boyle, Charles, Gay-Lussac, Avogadro) y son empíricas; es decir, se encontraron tras la ejecución de una serie de mediciones y no se derivaron a partir de alguna teoría más fundamental. En la siguiente sección vamos a combinar estas cuatro leyes para formular la ley de los gases ideales, relacionando todas las características macroscópicas de los gases. Una vez que se entiende la ley de los gases ideales, todas las demás leyes empíricas de gases siguen inmediatamente. ¿Por qué no saltarlos, entonces? La respuesta es que estas leyes empíricas de gases forman la base de la que se deriva la ley de los gases ideales.

Ley de Boyle

La primera ley empírica de los gases es la ley de Boyle, también conocida en Europa como ley de Mariotte. El científico inglés Robert Boyle publicó esta ley en 1662; el científico francés Edme Mariotte publicó un resultado similar en 1676. La **ley de Boyle** establece que el producto de la presión de un gas p y su volumen V con temperatura constante y con un número fijo de partículas es una constante (figura 19.2). Matemáticamente, la ley de Boyle se expresa como $pV = \text{constante}$ (con temperatura constante).

Otra manera de expresar la ley de Boyle es la de declarar que el producto de la presión p_1 y el volumen V_1 de un gas en el tiempo t_1 es igual al producto de la presión, p_2 , y el volumen, V_2 , del mismo gas a la misma temperatura en otro momento de tiempo, t_2 :

$$p_1 V_1 = p_2 V_2 \quad (\text{con temperatura constante}). \quad (19.1)$$

Un ejemplo cotidiano de la aplicación de la ley de Boyle es la respiración. Cuando usted inspira, se expande el diafragma y esta expansión produce un mayor volumen en su cavidad del pecho. De acuerdo con la ley de Boyle, la presión de aire en los pulmones se reduce en relación con la presión atmosférica normal del entorno. Entonces, la presión más alta fuera de su cuerpo fuerza aire hacia sus pulmones con objeto de igualar la presión. Para expirar, su diafragma se contrae, reduciendo el volumen de su cavidad del pecho. Esta reducción de volumen produce una presión más alta que lleva a sacar el aire de sus pulmones.

Ley de Charles

La segunda ley empírica de los gases es la **ley de Charles**, que establece que para un gas que se mantiene con una presión constante y con un número fijo de partículas, el volumen del gas V , dividido entre su temperatura T , es constante (figura 19.3). El físico francés (y piloto pionero de globos aerostáticos a gran altura) Jacques Charles propuso esta ley en 1787. Matemáticamente, la ley de Charles es $V/T = \text{constante}$ (a presión constante y número fijo de partículas).

Otra forma de establecer la ley de Charles es decir que la proporción de la temperatura, T_1 , y el volumen, V_1 , de un gas en un momento dado, t_1 , es igual a la proporción de la temperatura, T_2 , y el volumen, V_2 , del mismo gas con la misma presión en otro momento, t_2 :

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2} \Leftrightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{T_1}{T_2} \quad (\text{con presión constante}). \quad (19.2)$$

Observe que la temperatura debe siempre expresarse en Kelvin (K).

Debido a que la densidad, ρ , de una masa dada, m , de un gas es $\rho = m/V$, la ley de Charles también se puede escribir como $\rho T = \text{constante}$ (a presión constante). Como corolario a la ecuación 19.2, entonces tenemos que

$$\rho_1 T_1 = \rho_2 T_2 \Leftrightarrow \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{T_2}{T_1} \quad (\text{con presión constante}). \quad (19.3)$$

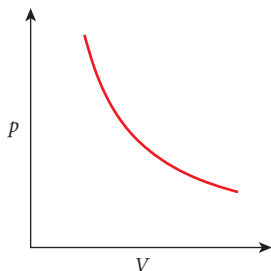


FIGURA 19.2 Relación entre presión y volumen expresada como la ley de Boyle.

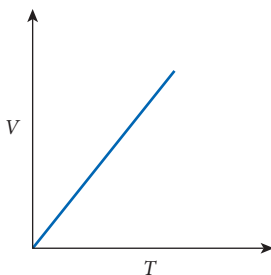


FIGURA 19.3 Relación entre volumen y temperatura expresada como la ley de Charles.

Ley de Gay-Lussac

Una tercera ley empírica de los gases es la **ley de Gay-Lussac**, que establece que la proporción del volumen V , presión p de un gas con su temperatura T con la misma presión y con un número fijo de partículas es constante (figura 19.4). Esta ley la presentó en 1802 el químico francés Joseph Louis Gay-Lussac (por cierto, otro piloto ávido de globos aerostáticos de gran altura). Matemáticamente, la ley de Gay-Lussac se expresa como $p/T = \text{constante}$ (con volumen constante).

Otra forma de expresar la ley de Gay-Lussac es establecer que la proporción del volumen presión de un gas p_1 , y su temperatura, T_1 , en un momento dado, t_1 , es igual que la proporción del volumen presión p_2 , y la temperatura, T_2 , del mismo gas con el mismo volumen pero en otro tiempo o momento, t_2 :

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2} \quad (\text{con presión constante}). \quad (19.4)$$

Nuevamente, la temperatura debe indicarse en Kelvin (K).

Ley de Avogadro

La cuarta ley empírica de los gases trata de la cantidad de gas. La **ley de Avogadro** establece que la proporción del volumen de un gas, V , con el número de moléculas de gas, N , en este volumen es constante si la presión y la temperatura se mantienen constantes. Esta ley la introdujo en 1811 el químico italiano Amadeo Avogadro. Matemáticamente, la ley de Avogadro se expresa como $V/N = \text{constante}$ (con presión y temperatura constantes).

Otra manera de expresar la ley de Avogadro es la de establecer que la proporción del volumen, V_1 , y el número de moléculas, N_1 , de un gas en un momento dado, t_1 , es igual que la proporción del volumen, V_2 , y el número de moléculas, N_2 , del mismo gas con la misma presión y temperatura en otro momento, t_2 :

$$\frac{V_1}{N_1} = \frac{V_2}{N_2} \quad (\text{con presión y temperatura constantes}). \quad (19.5)$$

Se encontró que un volumen de 22.4 L ($1 \text{ L} = 10^{-3} \text{ m}^3$) de un gas con temperatura y presión constantes contiene $6.022 \cdot 10^{23}$ moléculas. Este número de moléculas se conoce como el **número de Avogadro**, N_A . Actualmente el valor aceptado para el número de Avogadro es

$$N_A = (6.02214179 \pm 0.00000030) \cdot 10^{23}.$$

Un mol de cualquier gas tiene por definición el número de moléculas de Avogadro. El número de moles usualmente se simboliza por n . Por ende, el número de moléculas, N , y el número de moles, n , de un gas están relacionados por el número de Avogadro:

$$N = nN_A. \quad (19.6)$$

Por lo tanto, la masa de un mol de un gas es igual a la masa atómica o masa molecular de las partículas constitutivas en gramos. Por ejemplo, el gas nitrógeno consiste en moléculas compuestas de dos átomos de nitrógeno. Cada átomo de nitrógeno tiene un número de masa atómica de 14. Por lo tanto, la molécula de nitrógeno tiene una masa molecular de 28, y un volumen de gas nitrógeno de 22.4 L a la temperatura y presión estándares tiene una masa de 28 g.

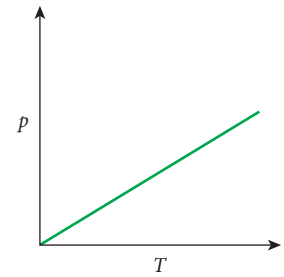


FIGURA 19.4 Relación entre presión y temperatura expresada como la ley de Gay-Lussac.

19.2 Ley de los gases ideales

Podemos combinar las leyes empíricas de gases que se describen en la sección 19.1 a fin de obtener una ley más general relacionando las propiedades de los gases que se llama **ley de los gases ideales**:

$$pV = nRT, \quad (19.7)$$

donde p , V y T son la presión, volumen y temperatura, respectivamente, de n moles de un gas, y R es la **constante universal de los gases**. El valor de R está determinado en forma experimental y está dado por

$$R = (8.314472 \pm 0.000015) \text{ J}/(\text{mol K}).$$

La constante R también se puede expresar en otras unidades, lo que cambia su valor numérico; por ejemplo, $R = 0.08205746 \text{ L atm}/(\text{mol K})$.

La ley de los gases ideales la estableció primero el científico francés Benoit Paul Émile Clapeyron en 1834. Es el resultado principal de este capítulo.

DEDUCCIÓN 19.1

Ley de los gases ideales

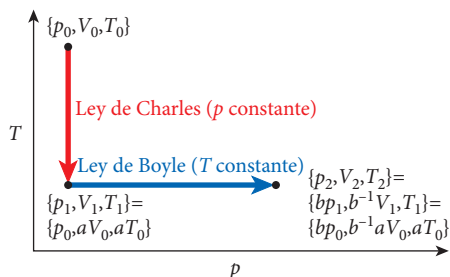


FIGURA 19.5 Trayectoria del estado de un gas en una gráfica de temperatura versus presión (diagrama Tp). La primera parte de la trayectoria toma lugar con una presión constante y la describe la ley de Charles. La segunda parte de la trayectoria toma lugar con una temperatura constante y la describe la ley de Boyle.

Para derivar la ley de los gases ideales, comenzamos con un mol de un gas ideal, descrito por una presión p_0 , un volumen V_0 y una temperatura T_0 , lo que se puede indicar utilizando la notación breve $\{p_0, V_0, T_0\}$. (Recuerde que un gas ideal no tiene interacciones entre sus moléculas.) Este particular estado del gas se muestra en una gráfica de temperatura versus presión (un diagrama Tp) en la figura 19.5.

Luego se cambia el estado del gas mediante la variación de su volumen y temperatura mientras que se mantenga su presión constante. En la figura 19.5, el estado del gas va de $\{p_0, V_0, T_0\}$ a $\{p_1, V_1, T_1\}$ en el diagrama Tp (flecha roja). Utilizando la ley de Charles (ecuación 19.2), podemos escribir

$$\frac{V_0}{T_0} = \frac{aV_0}{aT_0} = \frac{V_1}{T_1},$$

donde hemos multiplicado el numerador y denominador del cociente V_0/T_0 por una constante a . Podemos describir el gas en este nuevo estado con

$$\{p_1, V_1, T_1\} = \{p_0, aV_0, aT_0\}. \quad (\text{i})$$

A partir de este punto en el diagrama Tp cambian la presión y volumen del gas mientras la temperatura se mantenga constante. En la figura 19.5, la trayectoria va desde $\{p_1, V_1, T_1\}$ a $\{p_2, V_2, T_2\}$ como lo indica la flecha azul. Usando la ley de Boyle (ecuación 19.1) podemos escribir

$$p_1 V_1 = \frac{b}{b} p_1 V_1 = (bp_1)(b^{-1}V_1) = p_2 V_2,$$

donde el producto $p_1 V_1$ es multiplicado y dividido por una constante, b . Ahora podemos describir el estado del gas con

$$\{p_2, V_2, T_2\} = \{bp_1, b^{-1}V_1, T_1\}, \quad (\text{ii})$$

La combinación de las ecuaciones (i) y (ii) nos da

$$\{p_2, V_2, T_2\} = \{bp_0, b^{-1}aV_0, aT_0\}.$$

Ahora podemos escribir la proporción

$$\frac{p_2 V_2}{T_2} = \frac{(bp_0)(b^{-1}aV_0)}{aT_0} = \frac{p_0 V_0}{T_0}.$$

Esto implica que $p_0 V_0/T_0$ es una constante que llamamos R , la constante universal de gas.

Esta deducción se hizo para 1 mol de gas. Para n moles de gas, la ley de Avogadro dice que con presión y temperatura constante, el volumen de n moles de gas será igual al número de moles multiplicado por el volumen de un mol de gas. Podemos ordenar $p_0 V_0/T_0 = R$ y multiplicarlo por n para obtener

$$np_0 V_0 = nRT_0.$$

Ahora escribimos la ley de gases ideales como $pV/T = nR$ o bien, en forma más común, como

$$pV = nRT,$$

donde $p = p_0$, $V = nV_0$ y $T = T_0$ son la presión, volumen y temperatura, respectivamente, de n moles de gas.

La ley de los gases ideales también se puede escribir en términos del número de moléculas de gas en lugar del número de moles de gas. Esto es a veces útil si describimos las relaciones de las propiedades de la materia a nivel molecular. En esta forma, la ley de los gases ideales es

$$pV = Nk_B T, \quad (19.8)$$

donde N es el número de átomos o moléculas y k_B es la **constante de Boltzmann**, dada por

$$k_B = \frac{R}{N_A}.$$

El valor actualmente aceptado de la constante de Boltzmann es

$$k_B = (1.38106504 \pm 0.0000024) \cdot 10^{-23} \text{ J/K}.$$

La constante de Boltzmann es una constante fundamental de la naturaleza que a menudo surge en relaciones basadas en el comportamiento atómico o molecular. Se volverá a usar más adelante en este capítulo y nuevamente en discusiones de la electrónica de estado sólido y la mecánica cuántica. Se podrá haber dado cuenta por ahora que la letra k se utiliza frecuentemente en matemáticas y física para denotar una constante (la palabra alemana para *constante* es *Konstante*, donde se originó el uso de la letra k). Sin embargo, la constante de Boltzmann es de tal significado básico que se usa el subíndice B para distinguirla de otras constantes físicas denotadas por k .

Otra manera de expresar la ley de los gases ideales para un número constante de moles de gas es

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}, \quad (19.9)$$

donde p_1 , V_1 y T_1 son la presión, volumen y temperatura, respectivamente, en el tiempo 1, y p_2 , V_2 , y T_2 son la presión, volumen y temperatura, respectivamente, en el tiempo 2. La ventaja de esta formulación es que no se tiene que conocer el valor numérico de la constante universal de gas o de la constante de Boltzmann para relacionar las presiones, volúmenes y temperaturas en dos diferentes momentos del tiempo.

Es sencillo confirmar que las leyes de Boyle, Charles y Gay-Lussac están comprendidas en la ley de los gases ideales. En la figura 19.6, una superficie tridimensional representa la relación entre la presión, volumen y temperatura de un gas ideal. Si se proyecta esta superficie al eje de presión constante, se obtiene una curva que refleja la ley de Charles. Si se proyecta al eje de la temperatura constante, se obtiene una curva que refleja la ley de Boyle. Si se proyecta al eje del volumen constante, se obtiene una curva que refleja la ley de Gay-Lussac.

Observe que la ley de los gases ideales se obtuvo en esta discusión mediante la combinación de las leyes empíricas de los gases. La siguiente sección analizará el comportamiento de moléculas de los gases ideales en un recipiente y, por lo tanto, proporcionará una idea de la base microscópica física para la ley de los gases ideales. Primero vamos a explorar las consecuencias y poderes predictivos de la ley de los gases ideales mediante unos cuantos ejemplos ilustrativos.

19.1 Ejercicio en clase

La presión dentro de un tanque de buceo es de 205 atm a 22.0 °C. Suponga que el tanque se deja en el sol y la temperatura del aire comprimido dentro del tanque sube a 40.0 °C. ¿Cuál será la presión dentro del tanque?

- a) 205 atm d) 321 atm
b) 218 atm e) 373 atm
c) 254 atm

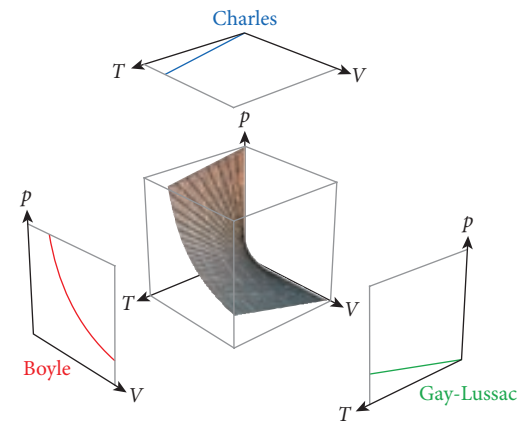


FIGURA 19.6 La relación entre la ley de los gases ideales y la ley de Charles (presión constante), la ley de Boyle (temperatura constante) y la ley de Gay-Lussac (volumen constante).

EJEMPLO 19.1 Gas en un cilindro

Considere un gas con una presión de 24.9 kPa en un cilindro con un volumen de 0.100 m³ y un pistón. Esta presión y volumen corresponden al punto 1 de la figura 19.7. La presión de este gas se deberá reducir para permitir que un proceso de manufactura funcione de manera eficiente. El pistón está diseñado para incrementar el volumen del cilindro de 0.100 m³ a 0.900 m³ mientras la temperatura se mantenga constante.

PROBLEMA

¿Cuál es la presión del gas con un volumen de 0.900 m³?

SOLUCIÓN

El punto 2 en la figura 19.7 representa la presión del gas con un volumen de 0.900 m³. Puede ver que la presión se reduce conforme aumenta el volumen.

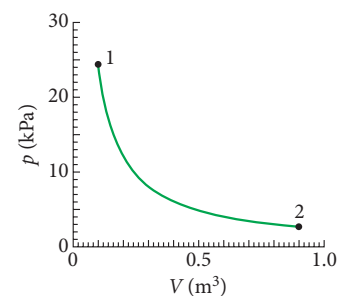


FIGURA 19.7 Gráfica de presión versus volumen para un gas descrito por la ley de Boyle.

(continúa)

(continuación)

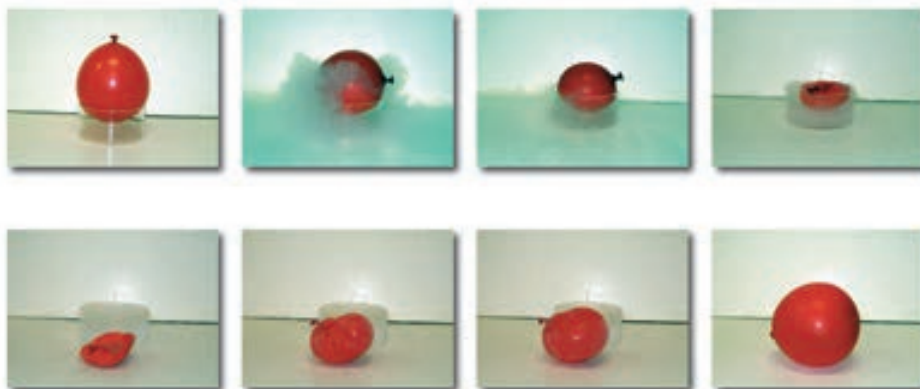
Puesto que la temperatura es constante ($T_1 = T_2$) en esta situación, la ley de los gases ideales (en la forma de la ecuación 19.9), $p_1 V_1/T_1 = p_2 V_2/T_2$ se reduce a $p_1 V_1 = p_2 V_2$. (La sección 19.1 identifica este caso especial de la ley de los gases ideales como la ley de Boyle.) Podemos usar esto para calcular la nueva presión:

$$p_2 = \frac{p_1 V_1}{V_2} = \frac{(24.9 \text{ kPa})(0.100 \text{ m}^3)}{0.900 \text{ m}^3} = 2.77 \text{ kPa}.$$

Desde luego que hay muchas aplicaciones donde cambia la temperatura de un gas. El ejemplo 19.2 contempla una de ellas.

EJEMPLO 19.2 Enfriamiento de un globo

FIGURA 19.8 La hilera superior muestra un globo inflado a temperatura ambiente que luego se coloca en nitrógeno líquido. En la hilera inferior, el globo frío se saca del nitrógeno líquido y se permite que se caliente hasta la temperatura ambiente. El tiempo entre cada toma en cada secuencia es de 20 s. Observe que el nitrógeno líquido dentro del globo causa un cambio de fase en el aire dentro del globo, lo que deja que el globo se contraiga más de lo que predice la ley de los gases ideales.



Un globo se infla a temperatura ambiente y luego se coloca en nitrógeno líquido (figura 19.8). Se permite que el globo se enfríe hasta la temperatura del nitrógeno líquido y se contrae en forma drástica. El globo frío se saca entonces del nitrógeno líquido y se permite que se vuelva a calentar hasta la temperatura ambiente. El globo regresa a su volumen original.

PROBLEMA

¿Por qué factor se reduce el volumen del globo mientras que la temperatura del aire dentro del globo disminuye desde la temperatura ambiente hasta la temperatura del nitrógeno líquido?

SOLUCIÓN

El gas dentro del globo se mantiene a una presión atmosférica constante ($p_1 = p_2$) porque es la presión de su ambiente. La ley de gases ideales (ecuación 19.9), $p_1 V_1/T_1 = p_2 V_2/T_2$ se vuelve en este caso $V_1/T_1 = V_2/T_2$. (En la sección 19.1, este caso especial de la ley de los gases ideales se identificó como la ley de Charles.) Suponga que la temperatura ambiente sea de 22°C o $T_1 = 295 \text{ K}$, y la temperatura del nitrógeno líquido sea $T_2 = 77.2 \text{ K}$. Podemos calcular el cambio fraccional en el volumen del globo:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{T_2}{T_1} = \frac{77.2 \text{ K}}{295 \text{ K}} = 0.262.$$

EXPLICACIÓN

El globo de la figura 19.8 encogió por más del factor calculado según la ley de Charles. (Una proporción de volumen frío al volumen caliente de 25% implica que el radio del globo frío deberá ser 63% del radio del globo a temperatura ambiente.) En primer lugar, el vapor de agua en el aire del globo se congela en forma de partículas de hielo. En segundo lugar, una parte del oxígeno y el nitrógeno en el aire dentro del globo se condensa a líquidos a los que no se aplica la ley de gases ideales.

El ejemplo 19.3 trata de la relación de la temperatura del aire y la presión del aire.

EJEMPLO 19.3 Calor en el campo de golf

El campeonato de 2007 de la PGA se realizó en agosto en Oklahoma en el Southern Hills Country Club, con la temperatura media más alta de cualquier campeonato de golf en la historia, que llegó hasta aproximadamente 101 °F (38.3 °C = 311.5 K). Por lo tanto, la densidad del aire fue más baja que en temperaturas menores, lo que provocó que la pelota de golf volara más lejos. Los jugadores tenían que corregir este efecto, igual que tienen que considerar trayectorias más largas cuando juegan en elevaciones más altas.

PROBLEMA

El Southern Hills Country Club se encuentra a una altura de 213 m (700 ft) sobre el nivel del mar. ¿A qué altura se debería encontrar el Old Course de St. Andrews, Escocia, que se muestra en la figura 19.9, si la temperatura del aire fue de 48 °F (8.9 °C = 282.0 K), para que la pelota de golf tuviera el mismo incremento de longitud de vuelo que en Southern Hills?

SOLUCIÓN

Primero calculamos cómo la temperatura influye en la densidad del aire. Podemos usar la relación entre la densidad y la temperatura para la presión constante $\rho_1/\rho_2 = T_2/T_1$, ecuación 19.3. Si sustituimos los valores conocidos (recuerde que necesitamos usar la escala de Kelvin para valores de temperatura del aire), obtenemos

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{T_2}{T_1} = \frac{282.0 \text{ K}}{311.5 \text{ K}} = 0.9053.$$

En otras palabras, el aire a 101 °F tiene sólo 90.53% de la densidad del aire a 48 °F, a la misma presión. Ahora tenemos que calcular la altura que corresponde a la misma proporción de densidad. En la sección 13.4 dedujimos una fórmula que relaciona la densidad con la altura.

$$\rho(h) = \rho_0 e^{-h\rho_0 g/p_0},$$

donde h es la altura sobre el nivel del mar, ρ_0 es la densidad de aire a nivel del mar y p_0 es la presión del aire a nivel del mar. Las constantes en la fórmula que relacionan la densidad con la altura se pueden escribir como

$$\frac{p_0}{\rho_0 g} = \frac{1.01 \cdot 10^5 \text{ Pa}}{(1.229 \text{ kg/m}^3)(9.81 \text{ m/s}^2)} = 8 \text{ 377 m}.$$

La altura en Southern Hills es de $h_1 = 213 \text{ m}$ y la densidad del aire es

$$\rho(h_1) = \rho_0 e^{-h_1/(8 \text{ 377 m})}.$$

La densidad del aire en el Old Course a una altura h_2 sería

$$\rho(h_2) = \rho_0 e^{-h_2/(8 \text{ 377 m})}.$$

Si tomamos el cociente de estas dos densidades, obtenemos

$$\frac{\rho(h_2)}{\rho(h_1)} = \frac{\rho_0 e^{-h_2/(8 \text{ 377 m})}}{\rho_0 e^{-h_1/(8 \text{ 377 m})}} = e^{-(h_2-h_1)/(8 \text{ 377 m})}.$$

Si ponemos este cociente igual al cociente de las densidades según la diferencia de temperaturas, nos da

$$e^{-(h_2-h_1)/(8 \text{ 377 m})} = 0.9053.$$

Sacando el logaritmo natural de ambos lados de esta ecuación obtenemos

$$-(h_2 - h_1) / (8 \text{ 377 m}) = \ln(0.9053),$$

que se puede resolver para la altura h_2 :

$$h_2 = h_1 - (8 \text{ 377 m}) \ln(0.9053) = (213 \text{ m}) - (8 \text{ 377 m}) \ln(0.9053) = 1 \text{ 046 m}.$$

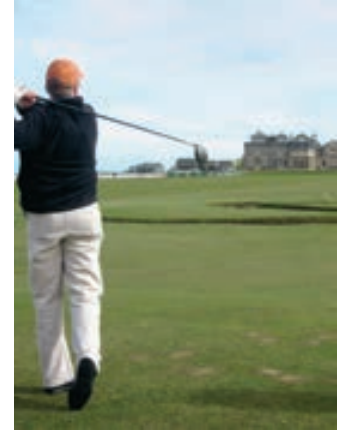


FIGURA 19.9 Primer golpe a la pelota en el Old Course de St. Andrews, Escocia, a nivel del mar y a finales de invierno. A elevaciones más bajas o con temperaturas inferiores, la pelota no se va tan lejos.

(continúa)

(continuación)

Por lo tanto, con la temperatura de 101 °F, el campo en Southern Hills daría vuelos de pelota tan largos como en el campo Old Course a una altura de 1 046 m (3 432 ft) y una temperatura de 48 °F.

EXPLICACIÓN

Nuestra solución ignoró el efecto de la alta humedad en Southern Hills, que redujo la densidad del aire en 2% adicional en relación con la densidad de aire seco, causando que en el campo hubiera vuelos de pelota como en un campo con aire seco y una temperatura de 48 °F a una altura de más de 4 000 pies sobre el nivel del mar. (El efecto del vapor de agua sobre la densidad del aire se discutirá más adelante, al referirnos a la ley de Dalton.)

Trabajo hecho por un gas ideal a temperatura constante

Suponga que tenemos un gas ideal con temperatura constante en un recipiente cerrado cuyo volumen se pueda cambiar, como por ejemplo, un cilindro con un pistón. Esta configuración nos permite realizar un proceso isotérmico, que se describe en el capítulo 18. Para un proceso isotérmico la ley de gases ideales dice que la presión es igual a una constante multiplicado por el inverso del volumen $p = nRT/V$. Si se cambia el volumen del recipiente desde un volumen inicial, V_i , a un volumen final, V_f , el trabajo hecho por el gas (vea el capítulo 18) está dado por

$$W = \int_{V_i}^{V_f} p dV.$$

Al sustituir la expresión para la presión en esta integral, obtenemos

$$W = \int_{V_i}^{V_f} p dV = (nRT) \int_{V_i}^{V_f} \frac{dV}{V} = nRT \left[\ln V \right]_{V_i}^{V_f},$$

que halla el valor numérico a

$$W = nRT \ln \left(\frac{V_f}{V_i} \right). \quad (19.10)$$

La ecuación 19.10 indica que el trabajo hecho por el gas es positivo si $V_f > V_i$ y es negativo si $V_f < V_i$.

Podemos comparar lo que se obtiene a los resultados que encontramos en el capítulo 18 para el trabajo realizado por el gas bajo otros supuestos. Por ejemplo, si el volumen se mantiene constante, en lugar de la temperatura, el gas no puede realizar ningún trabajo: $W = 0$. Si la presión se mantiene constante, el trabajo hecho por el gas está dado por (vea el capítulo 18)

$$W = \int_{V_i}^{V_f} p dV = p \int_{V_i}^{V_f} dV = p(V_f - V_i) = p\Delta V.$$

Ley de Dalton

¿Cómo cambian las deducciones que obtuvimos de los gases ideales si hay más de un tipo de gas en un volumen dado, como, por ejemplo, en el caso de la atmósfera terrestre? La **ley de Dalton** establece que la presión de un gas compuesto por una mezcla homogénea de diferentes gases es igual que la suma de la presión parcial de cada uno de los gases. La **presión parcial** se define como la presión que el gas ejercería si se extraen los otros gases presentes. La ley de Dalton significa que la presión parcial de cada gas no presenta efecto alguno por la presencia de otros gases, mientras que no haya interacción entre las moléculas de los gases. La ley se denomina así por John Dalton, químico inglés, que la publicó en 1801. La ley de Dalton da la presión total, p_{total} , ejercida por una mezcla de m gases, cada uno con la presión parcial p_i :

$$p_{\text{total}} = p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_m = \sum_{i=1}^m p_i. \quad (19.11)$$

La ley de Avogadro se puede extender para establecer que el número total de moles de gas, n_{total} , contenidos en una mezcla de m gases es igual a la suma del número de moles de cada gas, n_i :

$$n_{\text{total}} = n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_m = \sum_{i=1}^m n_i.$$

19.2 Ejercicio en clase

Suponga que un gas ideal tiene presión p , volumen, V , y temperatura T . Si el volumen se duplica con presión constante, el gas hace el trabajo $W_{p=\text{const}}$. Si en su lugar se duplica el volumen a temperatura constante, el gas hace el trabajo $W_{T=\text{const}}$. ¿Cuál es la relación entre estas dos cantidades de trabajo hecho por el gas?

a) $W_{p=\text{const}} < W_{T=\text{const}}$

b) $W_{p=\text{const}} = W_{T=\text{const}}$

c) $W_{p=\text{const}} > W_{T=\text{const}}$

d) La relación no puede ser determinada a partir de la información dada.

Tabla 19.1 Principales gases que componen la atmósfera de la Tierra

Gas	Porcentaje por volumen	Símbolo químico	Masa molecular
Nitrógeno	78.08	N ₂	28.0
Oxígeno	20.95	O ₂	32.0
Argón	0.93	Ar	40.0
Dióxido de carbono	0.038	CO ₂	44.0
Neón	0.0018	Ne	20.2
Helio	0.0005	He	4.00
Metano	0.0002	CH ₄	16.0
Criptón	0.0001	Kr	83.8

Luego, la **fracción molar**, r_i , para cada gas en una mezcla es el número de moles de este gas dividido entre el número total de moles de todos los gases:

$$r_i = \frac{n_i}{n_{\text{total}}} \quad (19.12)$$

La suma de la fracción molar es igual a: $\sum_{i=1}^m r_i = 1$. Si el número de moles de gas aumenta, con la temperatura y el volumen constante, la presión tiene que subir. Entonces podemos expresar cada presión parcial como

$$p_i = r_i p_{\text{total}} = n_i \frac{p_{\text{total}}}{n_{\text{total}}} \quad (19.13)$$

Esto significa que las presiones parciales en una mezcla de gases son simplemente proporcionales a las fracciones molares de aquellos gases presentes en la mezcla.

La atmósfera terrestre

La atmósfera de la Tierra tiene una masa de aproximadamente $5.1 \cdot 10^{18}$ kg (5 mil billones de toneladas métricas). Es una mezcla de varios gases, vea la tabla 19.1. La tabla nombra solamente los componentes de aire seco; además, el aire contiene vapor de agua (H₂O), que forma aproximadamente 0.25% de la atmósfera. (Este número parece ser pequeño, ¡pero su masa iguala aproximadamente a 10^{16} kg de agua, una cantidad que es semejante a cuatro veces el volumen de agua en todos los Grandes Lagos entre Estados Unidos y Canadá!) Cerca de la superficie de la Tierra, el contenido de agua del aire se encuentra entre un poco menos de 1% y un poco más de 3%, dependiendo principalmente de la temperatura del aire y la disponibilidad de agua líquida en el entorno. El vapor tiene una masa molecular de 18 g/mol, que es menor que la masa molecular o atómica de casi todos los demás gases atmosféricos. Por eso el vapor agua en el aire *disminuye* la densidad media de la atmósfera.

19.3 Teorema de equipartición

Hemos discutido las propiedades macroscópicas de los gases, incluido volumen, temperatura y presión. Para explicar estas propiedades en términos de las moléculas (o los átomos) de un gas, se requiere hacer varias suposiciones acerca del comportamiento de estas partículas en un recipiente. Estas suposiciones, junto con los resultados derivados de ellas, se conocen como la **teoría cinética del gas ideal**.

Suponga que un gas llenara de manera uniforme un recipiente de un volumen V . Hacemos las siguientes suposiciones:

- El número de moléculas, N , es grande, pero las moléculas en sí son pequeñas, así que la distancia media entre las moléculas es grande en comparación con su tamaño. Todas las moléculas son idénticas, y cada una tiene masa m .
- Las moléculas están en constante movimiento aleatorio en trayectorias de líneas rectas y no interactúan entre sí y, por lo tanto, pueden considerarse como partículas puntuales.

19.3 Ejercicio en clase

¿Cuál es la masa de 22.4 L de aire seco con temperatura y presión estándares?

- a) 14.20 g d) 32.22 g
b) 28.00 g e) 60.00 g
c) 28.95 g

19.4 Ejercicio en clase

¿Cuál es la presión de oxígeno en la atmósfera de la Tierra al nivel del mar?

- a) 0 d) 4.8 atm
b) 0.21 atm e) 20.9 atm
c) 1 atm

- Las moléculas tienen colisiones elásticas con las paredes del recipiente.
- El volumen, V , del recipiente es mucho más grande que el promedio del volumen que ocupan las moléculas del gas. Las paredes del recipiente son rígidas y estacionarias.

La teoría cinética explica cómo las propiedades microscópicas de las moléculas de gas causan las propiedades macroscópicas observadas por nosotros como presión, volumen y temperatura que aparecen en la ley de los gases ideales. Por ahora estamos principalmente interesados en lo que es la energía cinética media de las moléculas de gas y cómo se relaciona con la temperatura del gas. Esta conexión se llama **teorema de equipartición**. En la siguiente sección usaremos este teorema para deducir expresiones para los calores específicos de gases. Veremos entonces que el teorema de equipartición está fuertemente entrelazado con la idea de los grados de libertad del movimiento de las moléculas de gas. Por último, en la sección 19.6, regresaremos a la teoría cinética, incluyendo la distribución de energías cinéticas de las moléculas (en vez de solamente la energía cinética media) en la teoría, y discutiremos las limitaciones del concepto del gas ideal.

Primero obtenemos la energía cinética media del gas ideal, si calculamos el promedio de las energías cinéticas de las moléculas individuales de gases:

$$K_{\text{media}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N K_i = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m v_i^2 = \frac{1}{2} m \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N v_i^2 \right) = \frac{1}{2} m v_{\text{rms}}^2. \quad (19.14)$$

Por lo tanto, la **rapidez de la raíz media cuadrática** de las moléculas de gas, v_{rms} , se define como

$$v_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N v_i^2}. \quad (19.15)$$

Observe que la rapidez de la raíz media cuadrática *no es la misma* que la rapidez media de las moléculas de gas. Pero puede considerarse como el promedio adecuado porque se relaciona inmediatamente con la energía cinética media, como se ve en la ecuación 19.14.

La deducción 19.2 muestra cómo la energía cinética media de las moléculas en un gas ideal se relaciona con la temperatura del gas. Veremos que la temperatura del gas es simplemente proporcional a la energía cinética media, con una proporcionalidad constante $\frac{3}{2}$ veces la constante de Boltzmann:

$$K_{\text{media}} = \frac{3}{2} k_B T. \quad (19.16)$$

Éste es el teorema de equipartición. Por ende, cuando medimos la temperatura de un gas, estamos determinando la energía cinética media de las moléculas del gas. Esta relación es uno de los entendimientos clave de la teoría cinética y será muy útil para el resto de este capítulo.

Veamos cómo despejar el teorema de equipartición empezando desde la mecánica newtoniana y utilizando la ley de los gases ideales.

DEDUCCIÓN 19.2

Teorema de equipartición

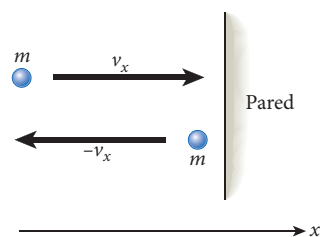


FIGURA 19.10 Molécula de gas con la masa m y la velocidad v_x , rebotando de la pared de un recipiente.

La presión de un gas en las paredes de un recipiente es consecuencia de la interacción de las moléculas de gas con las paredes del recipiente; por medio del cambio del momento de las moléculas se genera una fuerza. La presión del gas es entonces una consecuencia de colisiones elásticas de las moléculas de gas con las paredes del recipiente. Cuando una molécula de gas impacta en la pared, rebota con la misma energía cinética que tuvo antes de la colisión. Supongamos que la pared sea estacionaria y, por lo tanto, el componente del momento de la molécula de gas perpendicular a la superficie de la pared se invierte en la colisión (vea la sección 7.5).

Considere una molécula de gas con masa m y un componente x de velocidad, v_x , viajando perpendicular a la pared de un recipiente (figura 19.10). La molécula de gas rebota en la pared y se mueve en dirección opuesta con la velocidad $-v_x$. (Recuerde que supusimos colisiones elásticas entre moléculas y paredes.) El cambio en el componente x del momento, Δp_x , de la molécula de gas durante la colisión con la pared es

$$\Delta p_x = p_{f,x} - p_{i,x} = (m)(-v_x) - (m)(v_x) = -2mv_x.$$

Para calcular la fuerza media en el tiempo promediado ejercida por el gas sobre la pared del recipiente, no sólo necesitamos conocer qué tanto cambia el momento durante la colisión, sino también cuántas veces ocurre una colisión de una molécula de gas con una pared. Para obtener una expresión para el tiempo entre colisiones supongamos que el recipiente sea un cubo con el lado L (figura 19.11). Luego ocurre una colisión como la que se muestra en la figura 19.10 cada vez que la molécula de gas realiza un viaje completo de un lado del cubo al otro y viceversa. Este viaje redondo cubre una distancia $2L$. Podemos expresar el intervalo de tiempo Δt , entre colisiones con la pared así:

$$\Delta t = \frac{2L}{v_x}.$$

Sabemos de la segunda ley de Newton que el componente x de la fuerza ejercida por la pared sobre la molécula de gas, $F_{\text{pared},x}$ está dada por

$$F_{\text{pared},x} = \frac{\Delta p_x}{\Delta t} = \frac{-2mv_x}{(2L/v_x)} = -\frac{mv_x^2}{L},$$

donde hemos usado $\Delta p_x = -2mv_x$ y $\Delta t = 2L/v_x$.

El componente x de la fuerza ejercida por la molécula de gas sobre la pared, F_x , tiene la misma magnitud que $F_{\text{pared},x}$, pero está en la dirección opuesta; es decir, $F_x = -F_{\text{pared},x}$, que es una consecuencia directa de la tercera ley de Newton (vea el capítulo 4). Si hay N moléculas de gas, podemos establecer la fuerza total debido a las moléculas de gas en las paredes como

$$F_{\text{tot},x} = \sum_{i=1}^N \frac{mv_{x,i}^2}{L} = \frac{m}{L} \sum_{i=1}^N v_{x,i}^2. \quad (i)$$

Este resultado para la fuerza sobre la pared ubicada en $x = L$ es independiente de las componentes y y z de los vectores velocidad de las moléculas de gas. Puesto que las moléculas están en movimiento aleatorio, el cuadrado medio de las componentes x de la velocidad es el mismo que

el cuadrado medio de la componente y o las componentes z : $\sum_{i=1}^N v_{x,i}^2 = \sum_{i=1}^N v_{y,i}^2 = \sum_{i=1}^N v_{z,i}^2$. Puesto

que $v_i^2 = v_{x,i}^2 + v_{y,i}^2 + v_{z,i}^2$, tenemos $\sum_{i=1}^N v_{x,i}^2 = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^N v_i^2$, o el cuadrado medio de las componentes

x de la velocidad es $\frac{1}{3}$ del cuadrado medio de la velocidad. Ésta es la razón para el nombre del teorema de equipartición: cada componente de velocidad cartesiana tiene una parte igual, $\frac{1}{3}$, de la energía cinética global. Podemos usar este hecho para reescribir la ecuación (i) para el componente x de la fuerza del gas en la pared:

$$F_{\text{tot},x} = \frac{m}{3L} \sum_{i=1}^N v_i^2.$$

Al repetir este análisis de fuerza para las otras cinco paredes o caras del cubo, encontramos

que cada una experimenta una fuerza de la misma magnitud, dada por $F_{\text{tot}} = \frac{m}{3L} \sum_{i=1}^N v_i^2$. Para

encontrar la presión ejercida por las moléculas de gas, dividimos esta fuerza entre el área de la pared $A = L^2$:

$$p = \frac{F_{\text{tot}}}{A} = \frac{\frac{m}{3L} \sum_{i=1}^N v_i^2}{L^2} = \frac{m \sum_{i=1}^N v_i^2}{3L^3} = \frac{m}{3V} \sum_{i=1}^N v_i^2,$$

en el último paso hemos usado el volumen del cubo $V = L^3$. Si usamos la ecuación 19.15 para la rapidez de la raíz media cuadrática de las moléculas de gas, podemos expresar la presión como:

$$p = \frac{Nm v_{\text{rms}}^2}{3V}. \quad (ii)$$

Este resultado es válido para cada cara del cubo y se puede aplicar a un volumen de cualquier forma. La multiplicación de ambos lados de la ecuación (ii) por el volumen nos lleva a $pV =$

(continúa)

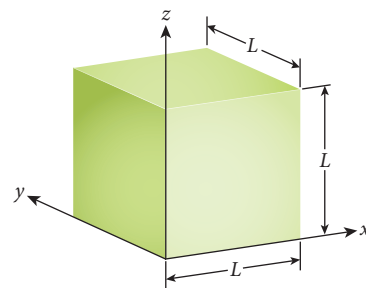


FIGURA 19.11 Un recipiente cúbico con una longitud de lado L . Tres de las caras del cubo están en los planos xy , xz y yz .

(continuación)

$\frac{1}{3} Nmv_{\text{rms}}^2$, y puesto que la ley de los gases ideales (ecuación 19.8) estipula que $pV = Nk_{\text{B}}T$, obtenemos $Nk_{\text{B}}T = \frac{1}{3}Nmv_{\text{rms}}^2$. Al anular el factor de N en ambos lados nos lleva a

$$3k_{\text{B}}T = mv_{\text{rms}}^2. \quad (\text{iii})$$

Puesto que $\frac{1}{2}mv_{\text{rms}}^2 = K_{\text{media}}$, la energía cinética media de una molécula de gas, hemos llegado al resultado deseado, la ecuación 19.16:

$$K_{\text{media}} = \frac{3}{2}k_{\text{B}}T.$$

Observe que si reescribimos la ecuación (iii) de la deducción 19.2 como $3k_{\text{B}}T = mv_{\text{rms}}^2$, obtenemos una ecuación para la rapidez de la raíz media cuadrática de las moléculas de gas:

$$v_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{3k_{\text{B}}T}{m}}. \quad (19.17)$$

EJEMPLO 19.4 Energía cinética media de las moléculas de aire

Suponga una habitación llena de aire con una temperatura de 22.0 °C.

PROBLEMA

¿Cuál es la energía cinética media de las moléculas (y átomos) en el aire?

SOLUCIÓN

La energía cinética media de moléculas de aire está dada por la ecuación 19.16:

$$K_{\text{media}} = \frac{3}{2}k_{\text{B}}T = \frac{3}{2}(1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K})(273.15 \text{ K} + 22.0 \text{ K}) = 6.11 \cdot 10^{-21} \text{ J}.$$

A menudo, la energía cinética media de moléculas de aire se expresa en electrón-volt (eV) en lugar de joules (J):

$$K_{\text{media}} = (6.11 \cdot 10^{-21} \text{ J}) \frac{1 \text{ eV}}{1.602 \cdot 10^{-19} \text{ J}} = 0.0381 \text{ eV}.$$

Una aproximación útil para recordar es que la energía cinética media de moléculas de aire a nivel del mar y temperatura ambiental es de aproximadamente 0.04 eV.

19.5 Ejercicio en clase

La energía cinética media de moléculas de un gas ideal se duplica si _____ se duplica.

- la temperatura
- la presión
- la masa de las moléculas de gas
- el volumen del recipiente
- ninguna de las declaraciones anteriores

19.4 Calor específico de un gas ideal

El capítulo 18 aborda el calor específico de los materiales que ahora vamos a considerar para los gases. Los gases consisten en átomos o moléculas, y la energía interna de los gases puede expresarse en términos de sus propiedades atómicas y moleculares. Estas relaciones llevan a los calores específicos molares de los gases ideales.

Vamos a empezar con los **gases monoatómicos**, que son gases en los cuales los átomos no están enlazados con otros átomos. Los gases monoatómicos incluyen helio, neón, argón, criptón y xenón (los gases nobles). Supongamos que toda la energía interna de un gas monoatómico esté en la forma de energía cinética de traslación. La energía cinética media de traslación depende solamente de la temperatura, como se determina en la ecuación 19.16.

La energía interna de un gas monoatómico es el número de átomos, N , multiplicado por la energía cinética media de traslación de un átomo en el gas:

$$E_{\text{int}} = NK_{\text{media}} = N\left(\frac{3}{2}k_{\text{B}}T\right).$$

El número de átomos del gas es el número de moles, n , multiplicado por el número de Avogadro, N_A : $N = nN_A$. Puesto que $N_A k_B = R$, podemos expresar la energía interna como

$$E_{\text{int}} = \frac{3}{2} nRT. \quad (19.18)$$

La ecuación 19.18 muestra que la energía interna de un gas monoatómico depende solamente de la temperatura del gas.

Calor específico con volumen constante

Suponga que un gas ideal monoatómico con la temperatura T se mantenga en un volumen constante. Si ahora dejamos fluir el calor Q al gas, se ha demostrado empíricamente (capítulo 18) que la temperatura del gas cambia conforme a

$$Q = nC_V \Delta T \quad (\text{con volumen constante}),$$

donde C_V es el calor molar específico con volumen constante. Puesto que el volumen del gas es constante, no puede hacer trabajo. Por lo tanto, podemos usar la primera ley de la termodinámica (vea el capítulo 18) para escribir

$$\Delta E_{\text{int}} = Q - W = nC_V \Delta T \quad (\text{con volumen constante}). \quad (19.19)$$

Al recordar que la energía interna de un gas monoatómico depende solamente de su temperatura, usamos la ecuación 19.18 y obtenemos

$$\Delta E_{\text{int}} = \frac{3}{2} nR \Delta T.$$

Si combinamos este resultado con $Q = nC_V \Delta T$ nos da $nC_V \Delta T = \frac{3}{2} nR \Delta T$. Si cancelamos los términos n y ΔT , que aparecen en ambos lados, obtenemos una expresión para el calor molar específico de un gas ideal monoatómico con volumen constante:

$$C_V = \frac{3}{2} R = 12.5 \text{ J/(mol K)}. \quad (19.20)$$

Este valor para el calor molar específico de un gas ideal monoatómico concuerda bien con valores medidos para gases monoatómicos a temperatura y presión estándares. Estos gases son principalmente los gases nobles. Los calores molares específicos de **gases diatómicos** (moléculas de gas con dos átomos) y **gases poliatómicos** (moléculas de gas con más de dos átomos) son más altos que los calores molares específicos de gases monoatómicos, como se muestra en la tabla 19.2. Más adelante en esta sección discutiremos esta diferencia.

Para un gas ideal podemos usar la ecuación 19.18 y escribimos

$$E_{\text{int}} = nC_V T, \quad (19.21)$$

lo que significa que la energía interna de un gas ideal depende solamente de n , C_V y T .

Tabla 19.2 Algunos típicos calores molares específicos de diferentes tipos de gases

Gas	C_V [J/(mol K)]	C_p [J/(mol K)]	$\gamma = C_p/C_V$
Helio (He)	12.5	20.8	1.66
Neón (Ne)	12.5	20.8	1.66
Argón (Ar)	12.5	20.8	1.66
Criptón (Kr)	12.5	20.8	1.66
Hidrógeno (H ₂)	20.4	28.8	1.41
Nitrógeno (N ₂)	20.7	29.1	1.41
Oxígeno (O ₂)	21.0	29.4	1.41
Dióxido de carbono (CO ₂)	28.2	36.6	1.29
Metano (CH ₄)	27.5	35.9	1.30

Una generalización de la ecuación 19.21, $\Delta E_{\text{int}} = nC_V\Delta T$, se aplica a todos los gases mientras que se usa el apropiado calor molar específico. De acuerdo con esta ecuación, el cambio de la energía interna de un gas ideal solamente depende de n , C_V y el cambio de temperatura, ΔT , pero no depende de cualquier tipo de cambio de presión o volumen.

Calor específico con presión constante

Ahora vamos a describir el caso en el cual aumenta la temperatura de un gas ideal mientras que su presión se mantiene constante. Se ha demostrado en forma empírica que el calor agregado, Q , está relacionado con el cambio de temperatura como sigue:

$$Q = nC_p\Delta T \quad (\text{para presión constante}), \quad (19.22)$$

donde C_p es el calor molar específico con presión constante. El calor molar específico con presión constante es mayor que el calor molar específico con volumen constante porque el calor se debe suministrar, tanto para hacer trabajo como para aumentar la temperatura.

Para vincular el calor molar específico con volumen constante al calor molar específico con presión constante empezamos con la primera ley de la termodinámica: $\Delta E_{\text{int}} = Q - W$. Sustituimos de la ecuación 19.19 para ΔE_{int} y de la ecuación 19.22 para Q . En el capítulo 18, el trabajo W , hecho cuando la presión permanece constante, se expresó como $W = p\Delta V$. Con estas sustituciones para $\Delta E_{\text{int}} = Q - W$, obtenemos

$$nC_V\Delta T = nC_p\Delta T - p\Delta V.$$

La ley de los gases ideales (ecuación 19.7) enlaza un cambio en el volumen al cambio de una temperatura si la presión se mantiene constante: $p\Delta V = nR\Delta T$. Al sustituir esta expresión para el trabajo tenemos finalmente

$$nC_V\Delta T = nC_p\Delta T - nR\Delta T.$$

Cada término en esta ecuación contiene el factor común $n\Delta T$. Al dividirla se da la muy simple relación entre calores específicos con volumen constante y con presión constante:

$$C_p = C_V + R. \quad (19.23)$$

Grados de libertad

Como puede observar en la tabla 19.2, la relación $C_V = \frac{3}{2}R$ es válida para gases monoatómicos, pero no para gases diatómicos y poliatómicos. Esta discrepancia se puede explicar en términos de los posibles grados de libertad de movimiento con que cuentan las distintas moléculas.

En general, un **grado de libertad** es una orientación de un tipo de movimiento que puede mostrar una molécula. Para una partícula puntual en el espacio tridimensional hay tres direcciones ortogonales que son independientes entre sí. Para una colección de N partículas puntuales hay $3N$ grados de libertad para el movimiento de traslación en el espacio tridimensional. Pero si las partículas puntuales están ordenadas en un objeto sólido, no se pueden mover independientemente entre sí, y el número de grados de libertad se reduce a los grados de libertad de traslación del centro de masa del objeto (3), más rotaciones independientes del objeto alrededor del centro de masa. En general hay tres posibles orientaciones de rotación independientes, lo que da un total de seis grados de libertad, tres de traslación y tres de rotación.

Vamos a considerar tres diferentes tipos de gases (figura 19.12). El primero es un gas monoatómico, como por ejemplo el helio (He). El segundo es un gas diatómico, representado por el nitrógeno (N_2). El tercero es una molécula poliatómica, por ejemplo el metano (CH_4). La molécula del gas poliatómico puede girar alrededor de los tres ejes de coordenadas y , y por lo tanto, tiene tres grados rotacionales de libertad. La molécula diatómica que se muestra en la figura 19.12 está alineada con el eje x , y la rotación alrededor de este eje no da ninguna configuración diferente. Por ende, esta molécula sólo tiene dos grados rotacionales de libertad, que se muestran en la figura como asociados con rotaciones alrededor de los ejes y y z . El gas monoatómico consiste en átomos esféricamente simétricos que no tienen ningún grado de libertad rotacional.

Las diferentes maneras en las que se puede asignar la energía interna de un gas ideal están especificadas por el principio de **equipartición de energía**, que estipula que moléculas de gas en equilibrio térmico tienen la misma energía media asociada con cada grado de libertad indepen-

19.1 Oportunidad de autoexamen

Use los datos de la tabla 19.2 y verifique la relación dada en la ecuación 19.23 entre el calor molar específico con presión constante, y el calor molar específico con volumen constante para un gas ideal.

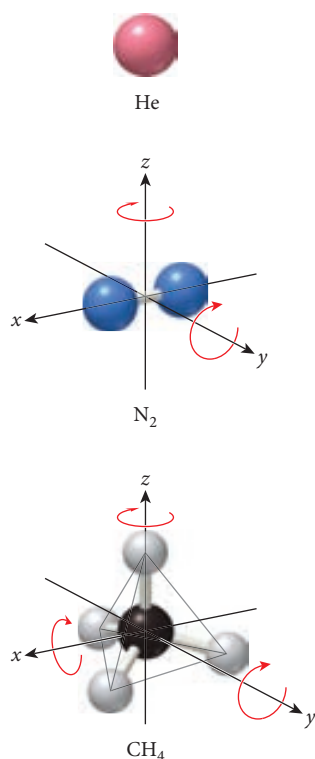


FIGURA 19.12 Grados rotacionales de libertad para un átomo de helio (He), una molécula de nitrógeno (N_2) y una molécula de metano (CH_4).

diente de su movimiento. La energía media por grado de libertad está dada por $\frac{1}{2}k_B T$ para cada molécula de gas.

Con el teorema de equipartición (ecuación 19.16), la energía cinética media de un gas monoatómico con temperatura T se calcula como: $K_{\text{prom}} = \frac{3}{2}k_B T$. Esto es consistente con la equipartición de la energía cinética de traslación de las moléculas entre las tres direcciones (o tres grados de libertad), x , y y z . La energía cinética de traslación tiene tres grados de libertad, la energía cinética media por grado de libertad de traslación es $\frac{1}{2}k_B T$, y la energía cinética media de las moléculas de gas está dada por $3\left(\frac{1}{2}k_B T\right) = \frac{3}{2}k_B T$.

De este modo, el calor molar específico con volumen constante pronosticado por la teoría cinética para gases monoatómicos que cuentan con tres grados de libertad para el movimiento de traslación, es consistente con la realidad. Sin embargo, los calores molares específicos observados con volumen constante son más altos para gases diatómicos que para gases monoatómicos. Para gases poliatómicos, los calores molares específicos observados son incluso más altos.

Calor específico con volumen constante para un gas diatómico

La molécula de nitrógeno en la figura 19.12 está alineada a lo largo del eje x . Si observamos a lo largo del eje x a la molécula, vemos un punto y por ende no podemos discernir ninguna rotación alrededor del eje x . Sin embargo, si observamos a lo largo del eje y o z , podemos ver que la molécula de nitrógeno puede tener un movimiento rotacional visible alrededor de cualquiera de estos dos ejes. Por lo tanto, hay dos grados de libertad para la energía cinética rotacional de la molécula de nitrógeno y, por extensión, todas las moléculas diatómicas. Por ende, la energía cinética media por molécula diatómica es $(3 + 2)\left(\frac{1}{2}k_B T\right) = \frac{5}{2}k_B T$.

Este resultado supone que el cálculo del calor molar específico con un volumen constante para un gas diatómico deberá ser similar al cálculo para un gas monoatómico, pero con dos grados de libertad adicionales para la energía media. De esta manera modificamos la ecuación 19.20 para obtener el calor molar específico con volumen constante para un gas diatómico:

$$C_V = \frac{3+2}{2}R = \frac{5}{2}R = \frac{5}{2}\left[8.31 \text{ J}/(\text{mol K})\right] = 20.8 \text{ J}/(\text{mol K}).$$

Si comparamos este valor con los calores molares específicos reales medidos con volumen constante dados en la tabla 19.2 para los gases diatómicos ligeros hidrógeno, nitrógeno y oxígeno, vemos que esta predicción de la teoría cinética de gases ideales concuerda de manera razonable con estas mediciones.

Calor específico con volumen constante para un gas poliatómico

Ahora vamos a considerar el gas poliatómico metano (CH_4) que se muestra en la figura 19.12. La molécula de metano está compuesta por cuatro átomos de hidrógeno ordenados en un tetraedro, enlazados a un átomo de carbono en el centro. Al observar a lo largo de cualquiera de los tres ejes, podemos discernir la rotación de esta molécula. Por lo tanto, esta molécula particular y todas las moléculas poliatómicas tienen tres grados de libertad relacionados con la energía cinética rotacional.

Por ende, el cálculo del calor molar específico con volumen constante para un gas poliatómico deberá ser similar al cálculo para un gas monoatómico, pero con tres grados de libertad adicionales para la energía media. Modificamos la ecuación 19.20 para obtener el calor molar específico con volumen constante para un gas poliatómico:

$$C_V = \frac{3+3}{2}R = \frac{6}{2}R = 3\left[8.31 \text{ J}/(\text{mol K})\right] = 24.9 \text{ J}/(\text{mol K}).$$

Si comparamos este valor con los calores molares específicos reales medidos con volumen constante dados en la tabla 19.2 para el gas poliatómico de metano, vemos que el valor pronosticado por la teoría cinética de los gases ideales es cerca de, pero algo más bajo, que el valor medido.

Lo que explica las diferencias entre valores pronosticados y reales de los calores molares específicos para moléculas diatómicas y poliatómicas es el hecho de que estas moléculas pueden tener grados de libertad internos, además de grados de libertad de traslación y rotación. Los átomos de estas moléculas pueden oscilar uno con respecto al otro. Por ejemplo, imagine que los dos átomos de oxígeno y un átomo de carbono de una molécula de dióxido de carbono estén conectados por resortes. Los tres átomos podrían oscilar hacia adelante y atrás uno con respecto al otro, lo que corresponde a grados extra de libertad. El calor molar específico de un volumen constante sería entonces más grande que los $24.9 \text{ J}/(\text{mol K})$ pronosticados para un gas poliatómico.

Se requiere cierta energía mínima para excitar el movimiento de oscilación interna en moléculas. Este hecho no se puede entender desde el punto de vista de la mecánica clásica. Por ahora, todo lo que usted necesita saber es que se observa un efecto de umbral para grados de libertad vibracionales. De hecho, los grados de libertad rotacionales de moléculas de gas diatómicas y poliatómicas también muestran este efecto de umbral. En temperaturas bajas, la energía interna del gas podrá ser demasiado baja para facilitar la rotación de las moléculas. Sin embargo, con temperatura y presión estándares, la mayoría de los gases diatómicos y poliatómicos ligeros tienen un calor molar específico con volumen constante que es consistente con los grados de libertad de traslación y rotación de sus moléculas.

19.6 Ejercicio en clase

El cociente de calor específico a presión constante con el calor específico a volumen constante C_p/C_V para un gas ideal

- siempre es igual a 1.
- siempre es menor que 1.
- siempre es mayor que 1.
- puede ser menor o mayor que 1, dependiendo de los grados de libertad de las moléculas de gas.

Proporción de calores específicos

Finalmente calculamos el cociente del calor específico con presión constante con el calor específico de volumen constante. Este cociente se llama *coeficiente de dilatación adiabática* y por convención se simboliza con la letra griega γ :

$$\gamma \equiv \frac{C_p}{C_V}. \quad (19.24)$$

Si sustituimos los valores pronosticados para los calores específicos de gases ideales con diferentes grados de libertad nos da $\gamma = C_p/C_V = \frac{5}{2}R/\frac{3}{2}R = \frac{5}{3}$ para gases monoatómicos, $\gamma = C_p/C_V = \frac{7}{2}R/\frac{5}{2}R = \frac{7}{5}$ para gases diatómicos y $\gamma = C_p/C_V = \frac{8}{2}R/\frac{6}{2}R = \frac{4}{3}$ para gases poliatómicos.

La tabla 19.2 también contiene valores para γ obtenidos de datos empíricos. Los valores empíricos de los calores específicos para los gases, salvo los gases nobles, no son muy cercanos a los valores calculados para un gas ideal; sin embargo, los coeficientes de dilatación adiabática sí cumplen bien nuestras expectativas teóricas.

19.5 Procesos adiabáticos para un gas ideal

Como vimos en el capítulo 18, en un proceso adiabático el estado de un sistema puede cambiar en ausencia de un intercambio de calor con el entorno. Un proceso adiabático puede ocurrir cuando el cambio de sistema se realiza rápidamente. Por lo tanto, $Q = 0$ para un proceso adiabático. Desde la primera ley de la termodinámica tenemos entonces $\Delta E_{\text{int}} = -W$, como se demostró en el capítulo 18.

Vamos a analizar cómo el cambio de volumen está relacionado con el cambio de presión de un gas ideal cuando ocurre un proceso adiabático; es decir, un proceso en ausencia de un flujo de calor. La relación está dada por

$$pV^\gamma = \text{constante} \quad (\text{en un proceso adiabático}), \quad (19.25)$$

donde $\gamma = C_p/C_V$ es el *coeficiente de dilatación adiabática* que se calcula como cociente entre el calor específico a presión constante y el calor específico a volumen constante del gas ideal.

DEDUCCIÓN 19.3

Presión y volumen en un proceso adiabático

A fin de derivar la relación entre presión y volumen para un proceso adiabático, vamos a contemplar pequeños cambios diferenciales en la energía interna durante este tipo de proceso: $dE_{\text{int}} = -dW$. En el capítulo 18 vimos que $dW = p dV$, y por ende para el proceso adiabático tenemos

$$dE_{\text{int}} = -p dV. \quad (i)$$

Sin embargo, la ecuación 19.21 dice que la energía interna depende nada más de la temperatura, si suponemos que N sea constante: $E_{\text{int}} = nC_V T$. Puesto que queremos calcular dE_{int} , tomamos la derivada de esta ecuación con respecto a la temperatura:

$$dE_{\text{int}} = nC_V dT. \quad (ii)$$

La combinación de las ecuaciones (i) y (ii) para dE_{int} nos da entonces

$$-p dV = nC_V dT. \quad (iii)$$

Podemos tomar la derivada total de la ley de los gases ideales (ecuación 19.7), $pV = nRT$ (con n y R constantes):

$$p dV + V dp = nR dT. \quad (\text{iv})$$

Al resolver la ecuación (iii) para dT y sustituir esta expresión en la ecuación (iv) nos da

$$p dV + V dp = nR \left(-\frac{p dV}{nC_V} \right).$$

Ahora podemos recabar los términos con proporción a dV del lado izquierdo, lo que da

$$\left(1 + \frac{R}{C_V} \right) p dV + V dp = 0. \quad (\text{v})$$

Puesto que $R = C_p - C_V$ de la ecuación 19.23, vemos que $1 + R/C_V = 1 + (C_p - C_V)/C_V = C_p/C_V$. La ecuación 19.24 define el *coeficiente de dilatación* adiabática γ . Con esto, la ecuación (v) se vuelve $\gamma p dV + V dp = 0$. La división de ambos lados entre pV nos deja finalmente escribir

$$\frac{dp}{p} + \gamma \frac{dV}{V} = 0.$$

La integración da entonces

$$\ln p + \gamma \ln V = \text{constante}. \quad (\text{vi})$$

Con las reglas de los logaritmos, la ecuación (vi) también se simplifica y obtenemos: $\ln(pV^\gamma) = \text{constante}$. Podemos exponenciar ambos lados de esta ecuación para obtener el resultado deseado:

$$pV^\gamma = \text{constante}.$$

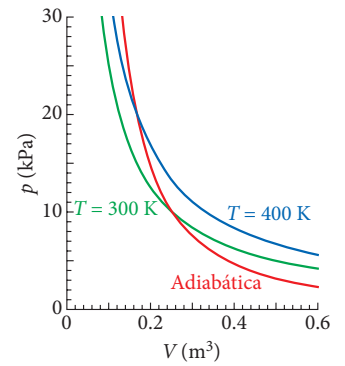


FIGURA 19.13 Gráfica del comportamiento de un gas monoatómico durante tres diferentes procesos en un diagrama pV . Un proceso es adiabático (rojo). El segundo proceso es isotérmico con $T = 300$ K (verde). El tercer proceso es también isotérmico con $T = 400$ K (azul).

Otra manera de escribir la relación entre presión y volumen para un proceso adiabático involucrando un gas ideal en la lengua matemática es:

$$p_f V_f^\gamma = p_i V_i^\gamma \quad (\text{para un proceso adiabático}), \quad (19.26)$$

donde p_i y V_i son presión y volumen iniciales, respectivamente, y p_f y V_f son presión y volumen finales, respectivamente.

La figura 19.13 grafica el comportamiento de un gas durante tres diferentes procesos como función de presión y volumen. La curva roja representa un proceso adiabático, en el que pV^γ es constante, para un gas monoatómico con $\gamma = \frac{5}{3}$. Las otras dos curvas representan procesos isotérmicos (constante T). Un proceso isotérmico ocurre en $T = 300$ K, y el otro ocurre en $T = 400$ K. El proceso adiabático muestra un decremento más empinado en presión como función del volumen que los procesos isotérmicos.

Podemos escribir una ecuación que enlaza la temperatura y el volumen de un gas en un proceso adiabático mediante la combinación de la ecuación 19.25 y la ley de los gases ideales (ecuación 19.7):

$$pV^\gamma = \left(\frac{nRT}{V} \right) V^\gamma = (nR)TV^{\gamma-1} = \text{constante}.$$

Suponiendo que el gas esté en un recipiente cerrado, n es constante, y podemos reescribir esta relación como $TV^{\gamma-1} = \text{constante}$ (para un proceso adiabático) o

$$T_f V_f^{\gamma-1} = T_i V_i^{\gamma-1} \quad (\text{para un proceso adiabático}), \quad (19.27)$$

donde T_i y V_i son temperatura y volumen inicial, respectivamente, y T_f y V_f son temperatura y volumen final, respectivamente.

Una expansión adiabática como la que describe la ecuación 19.27 ocurre cuando se abre un recipiente que contiene una bebida fría con gas. El dióxido de carbono de la carbonación y el vapor de agua crean un gas con una presión arriba de la presión atmosférica. Cuando este gas se expande y una parte sale de la apertura del recipiente, el sistema tiene que hacer trabajo. Puesto que el pro-

19.7 Ejercicio en clase

Un gas ideal monoatómico ocupa el volumen V_i , que luego se reduce a $\frac{1}{2}V_i$ siguiendo un proceso adiabático. ¿Qué relación es correcta para la presión de este gas?

- a) $p_f = 2p_i$ c) $p_f = 2^{5/3}p_i$
 b) $p_f = \frac{1}{2}p_i$ d) $p_f = \left(\frac{1}{2}\right)^{5/3}p_i$

19.8 Ejercicio en clase

Un gas ideal monoatómico ocupa el volumen V_i , que luego es reducido a $\frac{1}{2}V_i$ siguiendo un proceso adiabático. ¿Qué relación es correcta para las temperaturas de este gas?

- a) $T_f = 2^{2/3}T_i$ c) $T_f = \left(\frac{1}{2}\right)^{2/3}T_i$
 b) $T_f = 2^{5/3}T_i$ d) $T_f = \left(\frac{1}{2}\right)^{5/3}T_i$

ceso sucede muy rápidamente, no hay tiempo para transferir calor al gas; por lo tanto, el proceso es adiabático, y el producto de la temperatura y el volumen elevado a la potencia $\gamma-1$ permanece constante. El volumen del gas aumenta, y la temperatura debe reducirse. Por ende, la condensación, que se percibe como una pequeña neblina, ocurre alrededor de la apertura del recipiente.

PROBLEMA RESUELTO 19.1 Bomba para inflar neumáticos de bicicleta

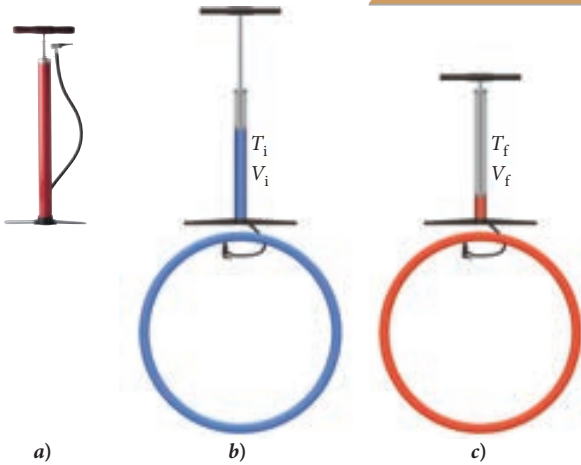


FIGURA 19.14 a) Una bomba de aire manual utilizada para inflar un neumático de bicicleta. b) La bomba y el neumático antes de la carrera de compresión. c) La bomba y el neumático después de la carrera de compresión.

Una bomba de aire de operación manual [figura 19.14a)] se usa para inflar el neumático de una bicicleta. La bomba de aire consiste en un cilindro con pistón. La bomba está conectada al neumático mediante una pequeña manguera. Hay una válvula entre la bomba y el neumático que permite que el aire entre en el neumático, pero no pueda salir. Además hay otra válvula que permite que el aire entre a la bomba del entorno después de que termine la carrera de compresión y el pistón regresa a su posición original. La figura 19.14b) muestra la bomba y el neumático antes de la compresión. La figura 19.14c) muestra el pistón y la llanta después de la compresión.

El radio interno del cilindro de la bomba es $r_p = 1.00$ cm, la altura del volumen activo antes de la carrera de compresión es de $h_i = 60.0$ cm, y después de la carrera de compresión disminuye a $h_f = 10.0$ cm. El neumático puede ser considerado como un anillo cilíndrico con radio interior $r_1 = 66.0$ cm, radio exterior $r_2 = 67.5$ cm y espesor $t = 1.50$ cm. La temperatura del aire en la bomba y el neumático antes de la carrera de compresión es $T_i = 295$ K (22 °C).

PROBLEMA

¿Cuál es la temperatura T_f , del aire después de una carrera de compresión?

SOLUCIÓN

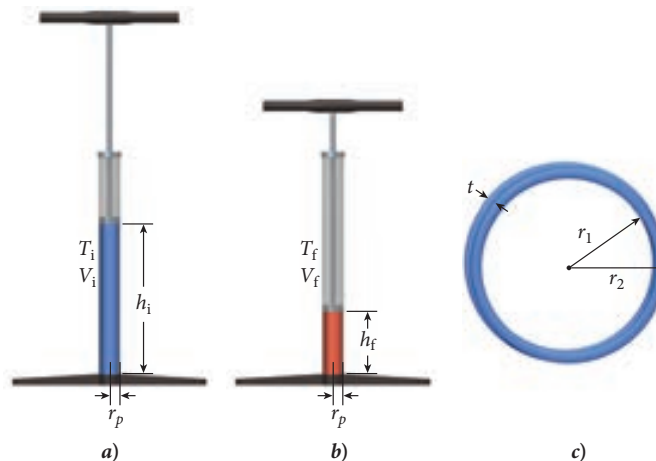
PIENSE

El volumen y la temperatura del aire antes de la carrera de compresión son V_i y T_i , respectivamente, y el volumen y la temperatura del aire después de la carrera de compresión son V_f y T_f , respectivamente. La carrera de compresión toma lugar con rapidez, así que no hay tiempo para transferir calor hacia dentro o hacia fuera del sistema, y este proceso se puede tratar como un proceso adiabático. El volumen del aire en la bomba se reduce cuando se empuja la manija de la bomba mientras que el volumen del aire en el neumático permanece constante.

ESBOCE

Las dimensiones de la bomba de aire y el neumático se muestran en la figura 19.15.

FIGURA 19.15 a) Dimensiones de la bomba de aire antes de la carrera de compresión. b) Dimensiones de la bomba de inflar después de la carrera de compresión. c) Dimensiones del neumático de bicicleta.



INVESTIGUE

El volumen de aire en el neumático es

$$V_{\text{neumático}} = t(\pi r_2^2 - \pi r_1^2).$$

El volumen de aire en la bomba antes de la carrera de compresión es

$$V_{\text{bomba,i}} = \pi r_p^2 h_i.$$

El volumen de aire en la bomba después de la carrera de compresión es

$$V_{\text{bomba,f}} = \pi r_p^2 h_f.$$

El volumen inicial de aire en el sistema de bomba-neumático es $V_i = V_{\text{bomba,i}} + V_{\text{neumático}}$ y al terminar la carrera de compresión es $V_f = V_{\text{bomba,f}} + V_{\text{neumático}}$. Despreciamos el volumen de aire en la manguera entre la bomba y el neumático.

Este proceso es adiabático, así que podemos usar la ecuación 19.27 para describir el sistema antes y después de la carrera de compresión:

$$T_f V_f^{\gamma-1} = T_i V_i^{\gamma-1}. \quad (i)$$

SIMPLIFIQUE

Podemos resolver la ecuación (i) para la temperatura final:

$$T_f = T_i \frac{V_i^{\gamma-1}}{V_f^{\gamma-1}} = T_i \left(\frac{V_i}{V_f} \right)^{\gamma-1}.$$

Luego podemos insertar las expresiones para el volumen inicial y el volumen final:

$$T_f = T_i \left(\frac{\pi r_p^2 h_i + t(\pi r_2^2 - \pi r_1^2)}{\pi r_p^2 h_f + t(\pi r_2^2 - \pi r_1^2)} \right)^{\gamma-1} = T_i \left(\frac{r_p^2 h_i + t(r_2^2 - r_1^2)}{r_p^2 h_f + t(r_2^2 - r_1^2)} \right)^{\gamma-1}.$$

CALCULE

El aire consiste principalmente en gases diatómicos (78% N₂ y 21% O₂, vea la tabla 19.1), así que usamos $\gamma = \frac{7}{5}$, de la sección 19.4. Al sustituir los valores numéricos, obtenemos

$$T_f = (295 \text{ K}) \left(\frac{(0.0100 \text{ m})^2 (0.600 \text{ m}) + (0.0150 \text{ m}) \left[(0.675 \text{ m})^2 - (0.660 \text{ m})^2 \right]}{(0.0100 \text{ m})^2 (0.100 \text{ m}) + (0.0150 \text{ m}) \left[(0.675 \text{ m})^2 - (0.660 \text{ m})^2 \right]} \right)^{(7/5)-1}$$

$$= 313.162 \text{ K}.$$

REDONDEE

Reportamos nuestro resultado con tres cifras significativas:

$$T_f = 313 \text{ K}.$$

VUELVA A REVISAR

La razón entre el volumen inicial y final del sistema bomba-neumático es:

$$\frac{V_i}{V_f} = 1.16.$$

Durante la carrera de compresión, la temperatura del aire aumenta de 295 K a 313 K, así que la proporción de la temperatura final a la temperatura inicial es

$$\frac{T_f}{T_i} = \frac{313 \text{ K}}{295 \text{ K}} = 1.06,$$

lo cual parece razonable porque la temperatura final deberá ser igual a la temperatura inicial, multiplicado por la proporción del volumen inicial y final elevado a la potencia $\gamma-1$: $(1.16)^{\gamma-1} = 1.16^{0.4} = 1.06$. Si usted oprime el pistón muchas veces en un periodo corto, cada carrera de compresión aumentará la temperatura del aire en el neumático por aproximadamente 6%. Por lo tanto, el aire en el neumático y en la bomba se vuelve más caliente conforme se infla el neumático.

Trabajo hecho por un gas ideal en un proceso adiabático

También podemos encontrar el trabajo realizado por un gas que experimenta un proceso adiabático desde un estado inicial hasta un estado final. En general, el trabajo está dado por

$$W = \int_i^f p dV.$$

Para un proceso adiabático podemos usar la ecuación 19.25 para escribir $p = cV^{-\gamma}$ (donde c es constante), y con esto la integral que determina el trabajo se vuelve:

$$W = \int_{V_i}^{V_f} cV^{-\gamma} dV = c \int_{V_i}^{V_f} V^{-\gamma} dV = c \left[\frac{V^{1-\gamma}}{1-\gamma} \right]_{V_i}^{V_f} = \frac{c}{1-\gamma} (V_f^{1-\gamma} - V_i^{1-\gamma}).$$

La constante c tiene el valor $c = pV^\gamma$. Usando la ley de gases ideales en la forma $p = nRT/V$, tenemos

$$c = \left(\frac{nRT}{V} \right) V^\gamma = nRTV^{\gamma-1}.$$

Ahora sustituimos esta constante en la expresión que hemos obtenido en resolver la integral y usamos la ecuación 19.27. Finalmente encontramos el trabajo hecho por un gas experimentando un proceso adiabático:

$$W = \frac{nR}{1-\gamma} (T_f - T_i). \quad (19.28)$$

19.6 La teoría cinética de los gases

Como se prometió antes, en la introducción del teorema de equipartición, en esta sección, conocerá algunos resultados adicionales importantes de la teoría cinética de los gases.

Distribución de rapidez de Maxwell

La ecuación 19.17 nos da la rapidez de la raíz media cuadrática de las moléculas de un gas con una temperatura dada. Ésta es una rapidez media, pero ¿cuál es la distribución de rapidez? Es decir, ¿cuál es la probabilidad de que una molécula de gas tenga alguna velocidad dada entre v y $v+dv$? La **distribución de rapidez de Maxwell**, o a veces también llamada la *distribución de rapidez de Maxwell-Boltzmann*, está dada por

$$f(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} v^2 e^{-mv^2/2k_B T}. \quad (19.29)$$

Las unidades de esta distribución son $(\text{m/s})^{-1}$. Como se requiere para una distribución de probabilidad, la integración de esta distribución de todas las velocidades v con respecto a dv nos da 1:

$$\int_0^\infty f(v) dv = 1.$$

Una característica muy importante de distribuciones de probabilidad para cantidades observables, como la de la ecuación 19.29 para la rapidez molecular es que todos los promedios que se pueden deducir de ellas se calculan simplemente multiplicando la cantidad a promediar por la distribución de probabilidad e integrando a través del rango entero. Por ejemplo, podemos obtener la rapidez media de la distribución de rapidez de Maxwell mediante la multiplicación de la rapidez v por la distribución de probabilidad $f(v)$ e integrando este producto $vf(v)$ a través de todos los valores posibles desde cero hasta el infinito. La rapidez media se da entonces por

$$v_{\text{media}} = \int_0^\infty vf(v) dv = \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m}},$$

donde usamos la integral definida $\int_0^\infty x^3 e^{-x^2/a} dx = a^2/2$ al integrar.

Para encontrar la rapidez de la raíz media cuadrática para la distribución de Maxwell, tenemos que hallar primero la rapidez de la media cuadrática:

$$(v^2)_{\text{media}} = \int_0^\infty v^2 f(v) dv = \frac{3k_B T}{m},$$

19.2 Oportunidad de autoexamen

Demuestre de manera explícita que la integración de la distribución de rapidez de Maxwell de $v = 0$ a $v = \infty$ nos da 1, como se requiere para una distribución de probabilidad.

donde empleamos la integral definida $\int_0^\infty x^4 e^{-x^2/a} dx = \frac{3}{8} a^{5/2} \sqrt{\pi}$. Luego tomamos la raíz cuadrada:

$$v_{\text{rms}} = \sqrt{\langle v^2 \rangle_{\text{media}}} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}$$

Como se pide, esto coincide con la ecuación 19.17 para la rapidez media cuadrática de moléculas en un gas ideal.

La velocidad más probable de la distribución de Maxwell —es decir, el valor en el cual $f(v)$ tiene un máximo— se calcula al igualar la derivada de $f(v)$ con cero y despejar el resultado por la velocidad v ; este procedimiento nos da:

$$v_{\text{mp}} = \sqrt{\frac{2k_B T}{m}}$$

La figura 19.16 muestra la distribución de rapidez de Maxwell para moléculas de nitrógeno (N_2) en el aire, a una temperatura de 295 K (22 °C), con la rapidez más probable, media y la rapidez de la raíz media cuadrática, indicadas por flechas. Usted puede observar en la figura 19.16 que las rapideces de las moléculas de nitrógeno están distribuidas alrededor de la rapidez media, v_{media} . Sin embargo, la distribución no es simétrica alrededor de v_{rms} . Una cola en la distribución se extiende a velocidades altas. Usted también puede comprobar que la rapidez más probable corresponde al máximo de la distribución.

La figura 19.17 muestra la distribución de rapidez de Maxwell para moléculas de nitrógeno a cuatro diferentes temperaturas. Cuando se incrementa la temperatura, la distribución de rapideces de Maxwell se amplía. El valor máximo de $f(v)$ disminuye cuando la temperatura aumenta, porque el área total debajo de la curva siempre es 1; una condición que toda distribución de probabilidad tiene que cumplir.

Además, a una temperatura dada, la distribución de Maxwell para partículas más ligeras es más amplia y tiene más de una cola de rapideces altas que la de átomos o moléculas más pesados (figura 19.18). La figura 19.18a) muestra las distribuciones de rapideces de Maxwell para moléculas de hidrógeno y nitrógeno graficadas en una escala logarítmica a una temperatura de 22 °C, típica para la superficie terrestre. El hecho de que esta curva no tiene cola de alta velocidad es importante para la composición de la atmósfera terrestre. Como hemos visto en el capítulo 12, la rapidez de escape, v_e , para cualquier objeto cerca de la superficie de la Tierra es de 11.2 km/s. Por lo tanto, cualquier molécula de aire que tiene por lo menos esta rapidez de escape puede salirse de la atmósfera terrestre. El hecho de que no haya una cola en la distribución para altas rapideces significa que no hay moléculas de aire que puedan escapar al espacio. Sin embargo, el gas hidrógeno es ligero en comparación con los otros gases en la atmósfera de la Tierra y tiende a moverse hacia arriba. La temperatura de la

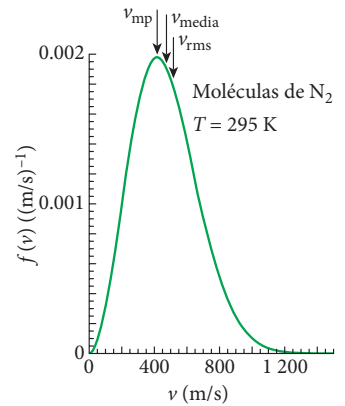


FIGURA 19.16 Distribución de la rapidez de Maxwell para moléculas de nitrógeno a una temperatura de 295 K graficada en una escala lineal.

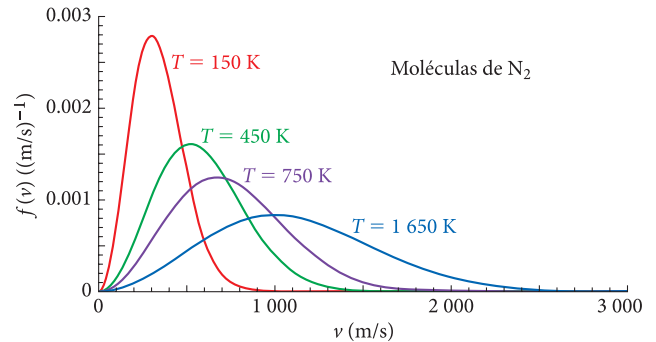


FIGURA 19.17 Distribución de rapidez de Maxwell para moléculas de N_2 a cuatro diferentes temperaturas.

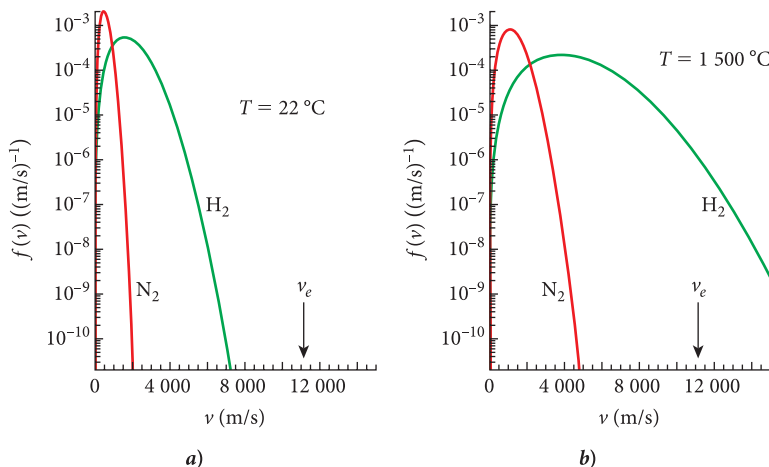


FIGURA 19.18 Distribuciones de rapideces de Maxwell para moléculas de hidrógeno y de nitrógeno en la atmósfera de la Tierra, graficadas en una escala logarítmica: a) a una temperatura de 22 °C; b) a una temperatura de 1 500 °C.

atmósfera de la Tierra depende de la altitud. A una altitud de 100 km sobre la superficie, la atmósfera de la Tierra empieza a estar muy caliente y puede llegar a temperaturas de 1 500 °C. Esta capa de la atmósfera se llama *termosfera*.

La figura 19.18b) muestra las distribuciones de rapidez de Maxwell para moléculas de hidrógeno y nitrógeno graficadas en una escala logarítmica a una temperatura de 1 500 °C. Podemos calcular la fracción de moléculas de hidrógeno que tendrán una rapidez más alta que la velocidad de escape, si calculamos la integral de la distribución de Maxwell sobre todas las rapidezces mayores o iguales a esta velocidad:

$$\text{Fracción de H}_2 \text{ con rapidez mayor que la velocidad de escape} = \int_{v=11.2 \text{ km/s}}^{\infty} f(v) dv = 6 \cdot 10^{-4} = 0.06\%.$$

Sólo una pequeña fracción de las moléculas de hidrógeno en la termosfera tiene rapidezces arriba de la rapidez de escape. Las moléculas de hidrógeno con rapidezces arriba de la rapidez de escape pueden salir al espacio. Las moléculas de hidrógeno, que se quedan atrás, tienen la misma temperatura que el resto de la termosfera, y la distribución de rapidez reflejará esta temperatura. Por lo tanto, a través del tiempo en la escala geológica, la mayoría de las moléculas de hidrógeno en la atmósfera de la Tierra suben a la termosfera y finalmente salen de la Tierra.

¿Qué pasa en el resto de la atmósfera, que consiste principalmente de nitrógeno y oxígeno? Prácticamente ninguna molécula de nitrógeno tiene una rapidez arriba de la rapidez de escape. Si suponemos la temperatura de 1 500 °C, la razón entre la probabilidad de encontrar una molécula de nitrógeno entre moléculas del mismo gas con una velocidad arriba de 11.2 km/h y la probabilidad de encontrar una molécula de hidrógeno entre moléculas del mismo gas arriba del mismo umbral de velocidades es de $3 \cdot 10^{-48}$. Puesto que la atmósfera completa tiene una masa de $5 \cdot 10^{18}$ kg y contiene aproximadamente 10^{44} moléculas de nitrógeno, puede ver que virtualmente ninguna molécula de nitrógeno tiene una rapidez arriba de la de escape. Por ende, hay muy poco hidrógeno en la atmósfera de la Tierra, mientras que el nitrógeno y gases más pesados (oxígeno, argón, dióxido de carbono, neón, etcétera) permanecen en la atmósfera de manera permanente.

Distribución de energía cinética de Maxwell

Como se puede hallar una distribución de rapidez, también se puede encontrar la distribución de energía cinética. La **distribución de energía cinética de Maxwell** (a veces llamada *distribución de energía cinética de Maxwell-Boltzmann*) describe los espectros de energía de moléculas de gas y está dada por

$$g(K) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{k_B T} \right)^{3/2} \sqrt{K} e^{-K/k_B T}. \tag{19.30}$$

El valor de la distribución para energías cinéticas K dentro de un margen de dK da la probabilidad de observar una molécula de gas con una energía cinética entre K y $K + dK$. La integración de esta distribución con respecto a dK da 1: $\int_0^{\infty} g(K) dK = 1$, como se requiere para toda distribución de probabilidad. La unidad de esta distribución es J^{-1} .

La figura 19.19 muestra la distribución de energía cinética de Maxwell para moléculas de nitrógeno a una temperatura de 295 K. Las energías cinéticas de las moléculas de nitrógeno están distribuidas alrededor de la energía cinética media. Igual que la distribución de rapidezces de Maxwell la distribución de energía cinética de Maxwell no es simétrica alrededor de K_{media} y tiene una cola significativa con energías cinéticas altas. Esta cola de energía cinética alta contiene información sobre la temperatura del gas.

La figura 19.20 muestra la distribución de energía cinética de Maxwell de moléculas de nitrógeno a dos temperaturas, $T = 295$ K y $T = 1 500$ K. La distribución de energía cinética a $T = 1 500$ K es mucho más plana y extiende a energías cinéticas mucho más altas que la distribución de energía cinética a $T = 295$ K. La cola de energía cinética alta para $T = 295$ K en la figura 19.20 se acerca a una simple distribución exponencial de energía cinética con una pendiente de $-1/k_B T$, donde $T = 295$ K, como se ilustra mediante la línea interrumpida.

Observe que las expresiones dadas aquí para las distribuciones de rapidezces y de energías cinéticas de Maxwell no toman en cuenta los efectos explicados por la teoría de la relatividad. Por ejemplo, la distribución de rapidez se extiende hasta velocidades infinitas, aunque ningún objeto puede viajar más rápido que la velocidad de la luz. Sin embargo, las velocidades relevantes para gases ideales son pequeñas en comparación con la rapidez de la luz. La rapidez más alta que

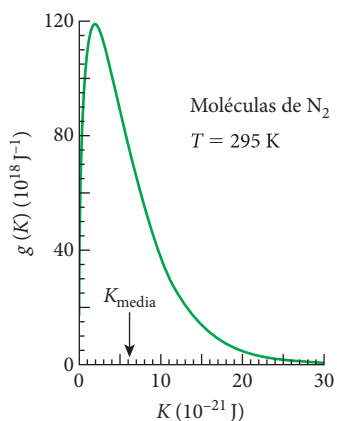


FIGURA 19.19 Distribución de energía cinética de Maxwell para moléculas de nitrógeno a una temperatura de 295 K, graficada en una escala lineal.

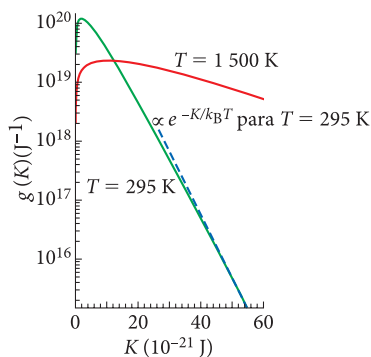


FIGURA 19.20 Distribución de energía cinética de Maxwell para moléculas de nitrógeno a $T = 295$ K y $T = 1 500$ K, graficada en una escala logarítmica.

se muestra en la figura 19.18 es $v = 1.5 \cdot 10^4$ m/s (para el gas de hidrógeno con la temperatura de $T = 1\,500$ K), que es apenas el 0.005% de la rapidez de la luz. Las distribuciones de la rapidez y de la energía cinética de Maxwell también se basan en la suposición de que las moléculas del gas no interactúan. Si las moléculas de gas interactúan, entonces hay que analizar si éstas todavía se aproximan con precisión suficiente al comportamiento real. Para moléculas de gas que se mueven en la atmósfera de la Tierra, la suposición de no interacción se puede justificar ya que muchas de las propiedades de la atmósfera terrestre pueden describirse usando como base la distribución de rapidez de Maxwell y la distribución de la energía cinética de Maxwell.

EJEMPLO 19.5 Temperatura del plasma de quark-gluones

La medición de la distribución de energía cinética de los elementos de un gas puede revelar la temperatura del gas. Esta técnica se usa en muchos experimentos científicos, incluyendo el estudio de gases que consisten en partículas y núcleos elementales. La figura 19.21 muestra por ejemplo las distribuciones de energía cinética de antiprotones y piones que salen como productos de colisiones entre iones pesados de núcleos de oro con velocidades relativistas. Los datos generados en experimentos de la colaboración “STAR” se muestran como puntos rojos. Como el aparato experimental no puede detectar energías debajo de cierto umbral, no hay datos en este rango. Las líneas azules representan los mejores ajustes para los datos, usando la ecuación 19.30 con el valor de mejor ajuste para la temperatura T . Se extrajeron valores de $k_B T = 6.71 \cdot 10^{-11}$ J = 417 MeV para los antiprotones y $k_B T = 3.83 \cdot 10^{-11}$ J = 238 MeV para los piones, lo que significa que las temperaturas de los antiprotones y piones son de $4.86 \cdot 10^{12}$ K y $2.77 \cdot 10^{12}$ K, respectivamente. (¡Estas temperaturas son varios cientos de millones de veces más altas que la temperatura de la superficie del Sol!) Con estas observaciones (entre otras) los investigadores pueden deducir que un plasma de quark-gluones con una temperatura de $2 \cdot 10^{12}$ K se creó para un tiempo fugaz de aproximadamente 10^{-22} s en las colisiones.

Nota: Como las colisiones de los núcleos de oro son eventos explosivos la conexión entre la temperatura del plasma de quark-gluones y de los valores de temperatura extraídos de las distribuciones de energía de partículas no es tan sencilla. También hay que mencionar que un gas ideal no es el modelo correcto. Además, las energías cinéticas en la figura 19.21 se determinaron mediante fórmulas que cumplen las exigencias de la física relativista. No obstante, es asombroso el grado hasta donde la energía cinética observada sigue a la distribución de Maxwell.

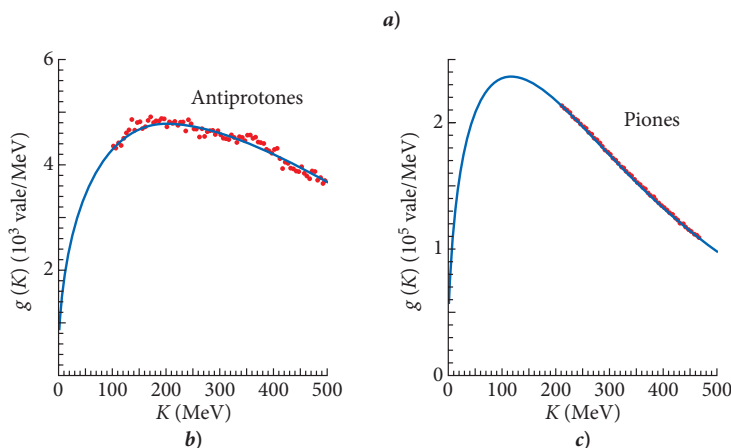


FIGURA 19.21 a) El acelerador de partículas “Relativistic Heavy Ion Collider” del Brookhaven National Laboratory tiene la forma de un anillo con una circunferencia de 3.83 km. Datos experimentales sobre la distribución de energía cinética de b) antiprotones y c) piones, producidos en colisiones de núcleos de oro. Durante los breves momentos que existen, estas colisiones son por mucho el lugar más caliente del sistema solar. El estado de materia que se genera en el momento del choque se llama plasma de quark-gluones. Se cree que durante una fracción de un segundo después del Big Bang la materia tenía este estado de agregación. Las líneas azules representan ajustes a las distribuciones de energía cinética usando la ecuación 19.30.

Para terminar esta subsección, vamos a contemplar la fusión nuclear en el centro del Sol. Esta fusión nuclear es la fuente de energía que causa toda la radiación solar y con eso permite la vida terrestre. La temperatura en el centro del Sol es de aproximadamente $1.5 \cdot 10^7$ K. Conforme a la ecuación 19.16, la energía cinética media de los iones de hidrógeno en el centro del Sol es de $\frac{3}{2}k_B T = 3.1 \cdot 10^{-16}$ J = 1.9 keV. Sin embargo, para que dos átomos de hidrógeno experimenten una fusión nuclear, se tienen que acercar lo suficientemente entre sí para superar su mutua repulsión electrostática. La mínima energía requerida para superar la repulsión electrostática es del orden de 1 MeV, o más que quinientas veces más alta que la energía cinética media de los iones de hidrógeno en el centro del Sol. Por lo tanto, sólo iones de hidrógeno en la cola extrema de la distribución de Maxwell tienen la energía suficiente para participar en reacciones de fusión.

Camino libre medio

Una de las suposiciones de un gas ideal es que las moléculas de éste son partículas puntuales que no interactúan entre sí. En cambio las moléculas de gases reales sí tienen tamaños (muy pequeños, pero no cero) y por lo tanto chocan entre sí. Las colisiones de moléculas de gases entre sí producen un efecto de dispersión que causa que el movimiento sea aleatorio. Si perturbamos en un momento la distribución de velocidades de Maxwell, por las colisiones, el gas regresará extremadamente rápido a la distribución anterior.

¿Qué camino recorren regularmente las moléculas de un gas real hasta que chocan contra otra molécula del mismo gas? Esta distancia media se llama el **camino libre medio** λ , de las moléculas de un gas. El camino libre medio es proporcional a la temperatura e inversamente proporcional a la presión del gas y el área de sección transversal de la molécula:

$$\lambda = \frac{k_B T}{\sqrt{2} (4\pi r^2) p} \tag{19.31}$$

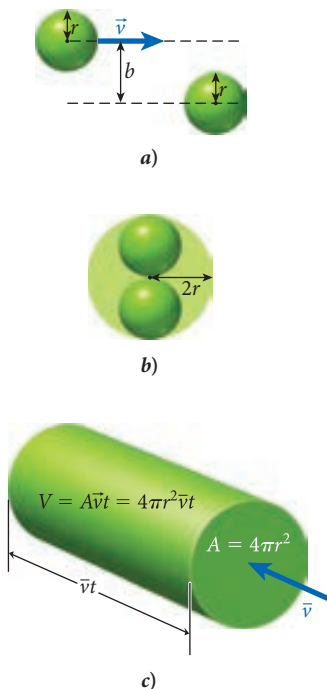


FIGURA 19.22 a) Una molécula de gas en movimiento se acerca a una molécula de gas estacionaria con el parámetro de impacto b . b) La sección transversal para la dispersión se representa por un círculo con el radio $2r$. c) El volumen barrido por las moléculas dentro del área de sección transversal A en un tiempo t si viaja con la rapidez \bar{v} .

DEDUCCIÓN 19.4 Camino libre medio

Para estimar el camino libre medio empezamos con la definición geométrica de una sección transversal para la dispersión. Supongamos que todas las moléculas en el gas sean esferas con el radio r . Si en sus trayectorias dos moléculas se acercan y se tocan, tendrán una colisión elástica, en la que se conserva el momento total y la energía cinética total (vea el capítulo 7). Vamos a imaginar que una molécula de gas en movimiento encuentre otra molécula de gas en reposo, como se muestra en la figura 19.22a).

El parámetro de impacto b , como se muestra en la figura 19.22a), es la distancia perpendicular entre dos líneas que conectan los centros de las dos moléculas, y que está orientada paralelamente a la dirección de la velocidad de la molécula en movimiento. La molécula en movimiento colisionará con la molécula estacionaria si $b \leq 2r$. De este modo la sección transversal para la dispersión está dada por un círculo con el área

$$A = \pi (2r)^2 = 4\pi r^2,$$

como se ilustra en la figura 19.22b). En un espacio de tiempo t , moléculas con la rapidez media \bar{v} barren en su camino un volumen de:

$$V = A(\bar{v}t) = (4\pi r^2)(\bar{v}t) = 4\pi r^2 \bar{v}t,$$

como se muestra en la figura 19.22c). Por lo tanto, este camino libre medio λ , es la distancia que recorre la molécula en el periodo t dividida entre el número de colisiones con otras moléculas con las que va a colisionar en esta distancia. El número de moléculas que la molécula va a encontrar es simplemente el volumen barrido multiplicado por el número de moléculas por unidad de volumen n_V . El camino libre medio es entonces

$$\lambda = \frac{\bar{v}t}{V n_V} = \frac{\bar{v}t}{(4\pi r^2 \bar{v}t) n_V} = \frac{1}{(4\pi r^2) n_V}.$$

Este resultado necesita ser modificado porque supusimos que una molécula en movimiento chocara con una molécula estacionaria. En un gas ideal, todas las moléculas están en movimiento, así que tenemos que usar la velocidad relativa, v_{rel} , entre las moléculas en lugar de la velocidad media.

Se puede demostrar que $v_{\text{rel}} = \bar{v}\sqrt{2}$; así que el volumen barrido por las moléculas cambia a $V = 4\pi r^2 v_{\text{rel}} t = 4\pi r^2 \bar{v}\sqrt{2}t$. Por ende, la expresión para el camino libre medio se vuelve

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}(4\pi r^2)n_V}.$$

Para gases difusos podemos reemplazar el número de moléculas por unidad de volumen con el valor del gas ideal, usando la ecuación 19.8:

$$n_V = \frac{N}{V} = \frac{p}{k_B T}.$$

El camino libre medio para una molécula en un gas real es entonces:

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}(4\pi r^2)\left(\frac{p}{k_B T}\right)} = \frac{k_B T}{\sqrt{2}(4\pi r^2)p}.$$

19.9 Ejercicio en clase

El camino libre medio de una molécula de gas se duplica si _____ se duplica.

- la temperatura
- la presión
- el diámetro de las moléculas de gas
- ninguna de las anteriores

Ahora que hemos derivado la fórmula para el camino libre medio, será instructivo aplicarlo a un caso real. Vamos a contemplar el gas más importante, la atmósfera de la Tierra. Un gas ideal tiene un camino libre medio “infinitamente” largo en relación con el espaciado entre moléculas del gas. Qué tan cerca un gas real se aproxima al gas ideal está determinado por la proporción del camino libre medio al espaciado intermolecular en el gas. Vamos a ver qué tan cerca está de ser la atmósfera de la Tierra un gas ideal.

EJEMPLO 19.6 El camino libre medio de las moléculas de aire

PROBLEMA

¿Cuál es el camino libre medio de una molécula de gas en aire con una presión atmosférica de 101.3 kPa y a una temperatura de 20.0 °C? Puesto que el aire es de 78.1% nitrógeno, vamos a suponer por el bien de la simplicidad que el aire sea 100% nitrógeno. El radio de una molécula de nitrógeno es de aproximadamente 0.150 nm. Compare el camino libre medio con el radio de una molécula de nitrógeno y al espaciado medio entre las moléculas de nitrógeno.

SOLUCIÓN

Podemos usar la ecuación 19.31 para calcular el camino libre medio:

$$\lambda = \frac{(1.381 \cdot 10^{-23} \text{ J/K})(293.15 \text{ K})}{\sqrt{2}(4\pi)(0.150 \cdot 10^{-9} \text{ m})^2(101.3 \cdot 10^3 \text{ Pa})} = 9.99 \cdot 10^{-8} \text{ m}.$$

La razón entre el camino libre medio y el radio molecular es, entonces,

$$\frac{\lambda}{r} = \frac{9.99 \cdot 10^{-8} \text{ m}}{0.150 \cdot 10^{-9} \text{ m}} = 666.$$

El volumen por partícula en un gas ideal se puede obtener usando la ecuación 19.8:

$$\frac{V}{N} = \frac{k_B T}{p}.$$

El espaciado medio entre moléculas es entonces el volumen medio a la $\frac{1}{3}$ potencia:

$$\left(\frac{V}{N}\right)^{1/3} = \left(\frac{k_B T}{p}\right)^{1/3} = \left(\frac{(1.381 \cdot 10^{-23} \text{ J/K})(293.15 \text{ K})}{(101.3 \cdot 10^3 \text{ Pa})}\right)^{1/3} = 3.42 \cdot 10^{-9} \text{ m}.$$

(continúa)

(continuación)

Por lo tanto, la razón entre el camino libre medio y el espaciado medio entre moléculas es

$$\frac{9.99 \cdot 10^{-8} \text{ m}}{3.42 \cdot 10^{-9} \text{ m}} = 29.2.$$

El valor de esta razón demuestra que tratando el aire como un gas ideal es una buena aproximación. La figura 19.23 compara el diámetro de moléculas de nitrógeno, la distancia media entre moléculas y el camino libre medio.

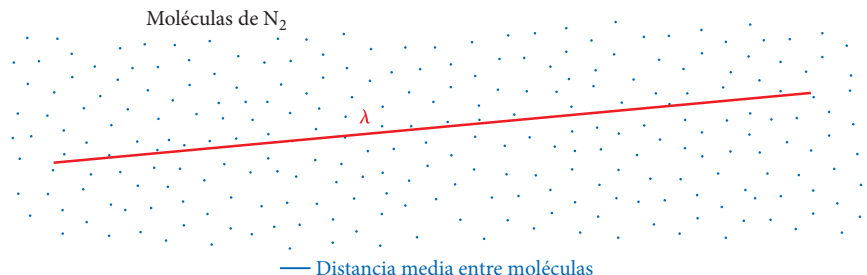


FIGURA 19.23 Dibujo a escala que muestra el tamaño de las moléculas de nitrógeno, el camino libre medio de las moléculas en el gas, y la distancia media entre moléculas.

LO QUE HEMOS APRENDIDO | GUÍA DE ESTUDIO PARA EXAMEN

- La ley de los gases ideales relaciona la presión p , el volumen V , el número de moles n y la temperatura T de un gas ideal, $pV = nRT$, donde $R = 8.314 \text{ J}/(\text{mol K})$ es la constante universal de los gases. (Las leyes de Boyle, Charles, Gay-Lussac y Avogadro son casos especiales de la ley de los gases ideales.)
- La ley de los gases ideales también se puede expresar como $pV = Nk_B T$, donde N es el número de moléculas en el gas y $k_B = 1.381 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$ es la constante de Boltzmann.
- La ley de Dalton establece que la presión total ejercida por una mezcla de gases es igual a la suma de las presiones parciales de los gases en la mezcla:

$$p_{\text{total}} = p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n$$

- El trabajo hecho por un gas ideal a temperatura constante al cambiar de un volumen inicial V_i a un volumen final V_f está dado por $W = nRT \ln(V_f/V_i)$.
- El teorema de equipartición establece que la energía cinética media de traslación de las moléculas de un gas es proporcional a la temperatura: $K_{\text{media}} = \frac{3}{2} k_B T$.
- La rapidez de la raíz media cuadrática de las moléculas de un gas es $v_{\text{rms}} = \sqrt{3k_B T/m}$, donde m es la masa de cada molécula.
- El calor molar específico de un gas con volumen constante, C_V , está definido por $Q = nC_V \Delta T$, donde Q es el calor, n es el número de moles de gas y ΔT es el cambio de la temperatura del gas.

- El calor molar específico de un gas con presión constante, C_p , está definido por $Q = nC_p \Delta T$, donde Q es el calor, n es el número de moles de gas y ΔT es el cambio de la temperatura del gas.
- El calor molar específico de un gas con presión constante se relaciona con el calor molar específico de un gas con volumen constante por $C_p = C_V + R$.
- El calor molar específico de un gas con presión constante es $C_V = \frac{3}{2} R = 12.5 \text{ J}/(\text{mol K})$ para un gas monoatómico y $C_V = \frac{5}{2} R = 20.8 \text{ J}/(\text{mol K})$ para un gas diatómico.
- Para un gas que experimenta un proceso adiabático, $Q = 0$, y las siguientes relaciones son válidas: $pV^\gamma = \text{constante}$ y $TV^{\gamma-1} = \text{constante}$, donde $\gamma = C_p/C_V$. Para gases monoatómicos, $\gamma = \frac{5}{3}$; para gases diatómicos, $\gamma = \frac{7}{5}$.
- La distribución de rapidez de Maxwell está dada por

$$f(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} v^2 e^{-mv^2/2k_B T}, \text{ y } f(v) dv \text{ describe la}$$

probabilidad de que una molécula tenga una rapidez entre v y $v + dv$.

- La distribución de energía cinética de Maxwell está dada por $g(K) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{k_B T} \right)^{3/2} \sqrt{K} e^{-K/k_B T}$, y $g(K) dK$ describe la probabilidad de que una molécula tenga una energía cinética entre K y $K + dK$.
- El camino libre medio λ , de una molécula en un gas ideal está dada por $\lambda = \frac{k_B T}{\sqrt{2} (4\pi r^2) p}$, donde r es el radio de la molécula.

TÉRMINOS CLAVE

gas, p. 615	ley de los gases ideales, p. 617	teoría cinética del gas ideal, p. 623	gas poliatómico, p. 627
mol, p. 616	constante universal de los gases, p. 617	teorema de equipartición, p. 624	grado de libertad, p. 628
ley de Boyle, p. 616	constante de Boltzmann, p. 619	rapidez de la raíz media cuadrática, p. 624	equipartición de energía, p. 628
ley de Charles, p. 616	ley de Dalton, p. 622	gas monoatómico, p. 626	distribución de rapidez de Maxwell, p. 634
ley de Gay-Lussac, p. 617	presión parcial, p. 622	gas diatómico, p. 627	distribución de energía cinética de Maxwell, p. 636
ley de Avogadro, p. 617	fracción molar, p. 623		camino libre medio, p. 638
número de Avogadro, p. 617			

NUEVOS SÍMBOLOS Y ECUACIONES

$N_A = (6.02214179 \pm 0.00000030) \cdot 10^{23}$, número de Avogadro

$pV = nRT$, ley de los gases ideales, para el número de moles

$pV = Nk_B T$, ley de los gases ideales, para el número de moléculas

$R = (8.314472 \pm 0.000015) \text{ J}/(\text{mol K})$, la constante universal de los gases

$k_B = (1.38106504 \pm 0.0000024) \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$, la constante de Boltzmann

$K_{\text{media}} = \frac{3}{2}k_B T$, energía cinética media de traslación de una molécula de gas

λ , el camino libre medio de una molécula en un gas

C_V , el calor molar específico de un gas con volumen constante

C_p , el calor molar específico de un gas con presión constante

$\gamma = C_p/C_V$, proporción de calores molares específicos

RESPUESTAS A OPORTUNIDADES DE AUTOEXAMEN

19.1 Compare C_p con $(C_V + R)$

Gas	C_V [J/(mol K)]	C_p [J/(mol K)]	$(C_V + R)$ [J/(mol K)]
Helio (He)	12.5	20.8	20.8
Neón (Ne)	12.5	20.8	20.8
Argón (Ar)	12.5	20.8	20.8
Criptón (Kr)	12.5	20.8	20.8
Hidrógeno (H_2)	21.6	28.8	29.9
Nitrógeno (N_2)	20.7	29.1	29.0
Oxígeno (O_2)	20.8	29.4	29.1
Dióxido de carbono (CO_2)	28.5	36.9	36.8
Metano (CH_4)	27.5	35.9	35.8

19.2 Utilice la integral definida $\int_0^{\infty} x^2 e^{-x^2/a} dx = \frac{1}{4} a^{3/2} \sqrt{\pi}$.

PRÁCTICA PARA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Lineamientos para resolución de problemas

1. A menudo es útil hacer una lista de todas las cantidades conocidas y desconocidas cuando aplica la ley de los gases ideales, a fin de clarificar qué es lo que tiene y qué es lo que busca. Este paso incluye la identificación de un estado inicial, un estado final y una lista de cantidades para cada estado.

2. Si usted se está ocupando con moles de un gas, necesita la forma de la ley de los gases ideales que involucra R . Si está abordando números de moléculas, necesita la forma que involucra k_B .

3. Ponga mucha atención a las unidades, las cuales se puedan dar en diferentes sistemas. Para temperaturas, la conversión de unidades no sólo involucra constantes multiplicativas; las diferentes escalas de temperatura también son contrarrestadas por constantes aditivas. Para estar seguro, las temperaturas siempre se deberán convertir en Kelvin. También asegúrese de que el valor de R o k_B que use sea consistente con las unidades con las que esté trabajando. Además, recuerde que las masas molares se dan usualmente en gramos; posiblemente tendrá que convertir las masas a kilogramos.

PROBLEMA RESUELTO 19.2 Densidad de aire con STP

PROBLEMA

¿Cuál es la densidad de aire con temperatura y presión estándares (STP)?

SOLUCIÓN

PIENSE

Sabemos que un mol de algún gas con temperatura y presión estándares ocupa un volumen de 22.4 L. Conocemos las fracciones relativas de los gases en los que consiste la atmósfera. Podemos combinar la ley de Dalton, la ley de Avogadro y las fracciones de gases en el aire para obtener la masa de aire contenida en 22.4 L. La densidad es la masa dividida entre el volumen.

ESBOCE

Ésta es una de las raras ocasiones donde un trazo no es útil.

INVESTIGUE

Contemplamos solamente los cuatro gases de la tabla 19.1 que representan una fracción significativa de la atmósfera: nitrógeno, oxígeno, argón y dióxido de carbono. Sabemos que 1 mol de algún gas tiene una masa de M (en gramos) en un volumen de 22.4 L con STP. Según la ecuación 19.12 sabemos que la masa de cada gas en 22.4 L será la fracción por volumen multiplicada por la masa molecular, así que tenemos

$$m_{\text{aire}} = r_{\text{N}_2}M_{\text{N}_2} + r_{\text{O}_2}M_{\text{O}_2} + r_{\text{Ar}}M_{\text{Ar}} + r_{\text{CO}_2}M_{\text{CO}_2}$$

y

$$\rho_{\text{aire}} = \frac{m_{\text{aire}}}{V_{\text{aire}}} = \frac{m_{\text{aire}}}{22.4 \text{ L}}$$

SIMPLIFIQUE

La densidad de aire es entonces

$$\rho_{\text{aire}} = \frac{(0.7808 \cdot 28 \text{ g}) + (0.2095 \cdot 32 \text{ g}) + (0.0093 \cdot 40 \text{ g}) + (0.00038 \cdot 44 \text{ g})}{22.4 \text{ L}}$$

CALCULE

Si calculamos el resultado numérico, obtenemos

$$\begin{aligned} \rho_{\text{aire}} &= \frac{0.0218624 \text{ kg} + 0.006704 \text{ kg} + 0.000372 \text{ kg} + 0.00001672 \text{ kg}}{22.4 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3} \\ &= 1.29264 \text{ kg/m}^3. \end{aligned}$$

REDONDEE

Reportamos nuestro resultado con tres cifras significativas:

$$\rho_{\text{aire}} = 1.29 \text{ kg/m}^3.$$

VUELVA A REVISAR

Podemos volver a verificar nuestro resultado mediante el cálculo de la densidad del gas nitrógeno sólo con STP, ya que el aire es 78.08% nitrógeno. La densidad de nitrógeno con STP es

$$\rho_{\text{N}_2} = \frac{28.0 \text{ g}}{22.4 \text{ L}} = 1.25 \text{ g/L} = 1.25 \text{ kg/m}^3.$$

Este resultado es cercano y levemente más bajo que nuestro resultado para la densidad del aire, así que es razonable.

PROBLEMA RESUELTO 19.3 Presión de una nebulosa planetaria

PROBLEMA

Una nebulosa planetaria es una nube que consiste principalmente del gas hidrógeno con una densidad, ρ , de 1 000.0 moléculas por centímetro cúbico (cm^3) y una temperatura, T , de 10 000 K. Un ejemplo de una nebulosa planetaria, la Nebulosa del Anillo, se muestra en la figura 19.24. ¿Cuál es la presión de gas en la nebulosa?

SOLUCIÓN

PIENSE

Debido a la muy baja densidad del gas en una nebulosa planetaria, el camino libre medio de las moléculas de gas (vea la sección 19.6) es extremadamente largo. Por lo tanto, es una muy buena aproximación tratar la nebulosa como un gas ideal y aplicar la ley de los gases ideales. Conocemos la densidad, que es el número de moléculas de gas por unidad de volumen. Podemos reemplazar en la ley de los gases ideales el producto entre la densidad y el volumen de la nebulosa. Entonces el volumen se cancela y así podemos resolver la presión del gas.

ESBOCE

Un trazo aproximado de una nebulosa planetaria se muestra en la figura 19.25.

INVESTIGUE

La ley de los gases ideales está dada por

$$pV = Nk_B T, \quad (\text{i})$$

donde p es la presión, V es el volumen, N es el número de moléculas de gas, k_B es la constante de Boltzmann, y T es la temperatura. El número de moléculas N es

$$N = \rho V, \quad (\text{ii})$$

donde ρ es el número de moléculas por unidad de volumen en la nebulosa.

SIMPLIFIQUE

Si sustituimos para N según la ecuación (ii) en (i), obtenemos

$$pV = Nk_B T = \rho V k_B T,$$

que podemos simplificar para obtener una expresión para la presión del gas en la nebulosa:

$$p = \rho k_B T.$$

CALCULE

Al sustituir los valores numéricos, obtenemos

$$\begin{aligned} p &= \rho k_B T = \left(\frac{1\,000 \text{ moléculas}}{1 \text{ cm}^3} \right) \left(\frac{1 \text{ cm}^3}{10^{-6} \text{ m}^3} \right) (1.381 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}) (10\,000 \text{ K}) \\ &= 1.381 \cdot 10^{-10} \text{ Pa.} \end{aligned}$$

REDONDEE

Reportamos nuestro resultado con dos cifras significativas:

$$p = 1.4 \cdot 10^{-10} \text{ Pa.}$$

VUELVA A REVISAR

Podemos volver a verificar nuestro resultado si lo comparamos con la presión de un buen vacío en un laboratorio en la Tierra, que es $p_{\text{lab}} = 10^{-7} \text{ Pa}$. Esta presión es aproximadamente 1 000 veces más alta que la presión dentro de una nebulosa planetaria.

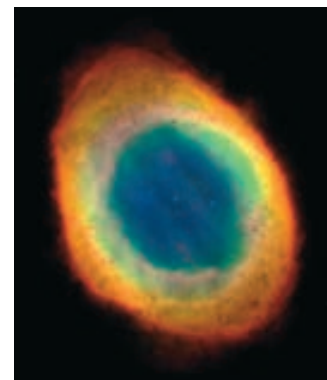


FIGURA 19.24 La Nebulosa del Anillo como se ve mediante el Telescopio Espacial Hubble.

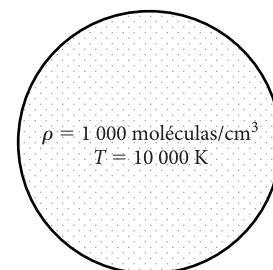
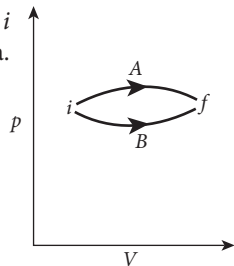


FIGURA 19.25 Una nebulosa planetaria idealizada.

PREGUNTAS DE OPCIÓN MÚLTIPLE

19.1 Un sistema puede ir de un estado i al estado f como se muestra en la figura. ¿Qué relación es verdadera?

- a) $Q_A > Q_B$
 b) $Q_A = Q_B$
 c) $Q_A < Q_B$
 d) Es imposible decidir a partir de la información dada.



19.2 Un neumático en un vehículo es inflado hasta una presión manométrica de 32 lb/in² a una temperatura de 27 °C. Después de que el vehículo se haya manejado durante 30 mi, la presión ha aumentado a 34 lb/in². ¿Cuál es la temperatura en el interior del neumático en este momento?

- a) 40 °C b) 23 °C c) 32 °C d) 54 °C

19.3 El calor molar específico con la presión constante, C_p , es mayor que el calor molar específico con un volumen constante, C_v , para

- a) un gas ideal monoatómico. c) los dos gases anteriores.
 b) un gas ideal diatómico. d) ninguna de las respuestas anteriores.

19.4 Un gas ideal se puede expandir desde una presión inicial, p_i , y un volumen, V_i , hasta un volumen final, V_f , de manera isotérmica, adiabática o isobárica. ¿Para qué tipo de proceso el calor transferido al gas es más grande? (Suponga que p_i , V_i y V_f son los mismos para cada proceso.)

- a) Proceso isotérmico d) Todos los procesos tienen el mismo flujo de calor.
 b) Proceso adiabático
 c) Proceso isobárico

19.5 ¿Cuál de los siguientes gases tiene la mayor rapidez de la raíz media cuadrática?

- a) Nitrógeno con 1 atm y 30 °C.
 b) Argón con 1 atm y 30 °C.
 c) Argón con 2 atm y 30 °C.

PREGUNTAS

19.11 El aire caliente es menos denso que el aire frío y por ende experimenta una fuerza de flotación neta y sube. Puesto que el aire caliente sube, entre más alta sea la elevación, más caliente deberá ser el aire. Por lo tanto, la cima del Monte Everest debería ser muy caliente. Explique por qué el Monte Everest es más frío que Death Valley.

19.12 La distribución de rapidez de Maxwell supone que el gas esté en equilibrio. Por lo tanto, si un gas cuyas moléculas se mueven todas con la misma rapidez tuviese el tiempo suficiente, finalmente llegarían a cumplir con esta distribución. Sin embargo, las derivaciones de la teoría cinética en el texto supusieron que cuando una molécula de gas impacta con la pared de un recipiente, rebotará con la misma energía que tuvo antes de la colisión, y que las moléculas de gas no ejercen fuerzas una sobre la otra. Si las moléculas de gas ni intercambian

- d) Oxígeno con 2 atm y 30 °C.
 e) Nitrógeno con 2 atm y 15 °C.

19.6 Dos recipientes idénticos contienen masas iguales de gas, con oxígeno en uno y nitrógeno en el otro. Los gases se mantienen a la misma temperatura. ¿Cómo se compara la presión del oxígeno con la del nitrógeno?

- a) $p_O > p_N$ d) No se puede determinar con la información dada.
 b) $p_O = p_N$
 c) $p_O < p_N$

19.7 Un mol de un gas ideal a una temperatura de 0 °C está limitado a un volumen de 1.0 L. La presión de este gas es

- a) 1.0 atm. c) 1/22.4 atm.
 b) 22.4 atm. d) 11.2 atm.

19.8 Cien mililitros de nitrógeno líquido con una masa de 80.7 g están sellados dentro de un recipiente de 2 L. Después de que el nitrógeno líquido se calienta y se convierte en gas, ¿cuál es la presión en el interior del recipiente?

- a) 0.05 atm c) 0.09 atm e) 18 atm
 b) 0.08 atm d) 9.1 atm

19.9 Considere una caja llena de un gas ideal. La caja experimenta una repentina expansión libre de V_1 a V_2 . ¿Cuál de las siguientes respuestas describe este proceso en forma correcta?

- a) El trabajo realizado por el gas durante la expansión es igual a $nRT \ln(V_2/V_1)$.
 b) Se agrega calor a la caja.
 c) La temperatura final es igual a la temperatura inicial multiplicado por (V_2/V_1) .
 d) La energía interna del gas permanece constante.

19.10 Compare la energía cinética media a temperatura ambiente de una molécula de nitrógeno con la de un átomo de nitrógeno. ¿Cuál tiene la mayor energía cinética?

- a) El átomo de nitrógeno. c) Tienen la misma energía.
 b) La molécula de nitrógeno. d) Depende de la presión.

bian energía con las paredes del recipiente ni entre sí, ¿cómo podrán encontrar un equilibrio? ¿No es cierto que si todas tuvieron inicialmente la misma rapidez, algunas hubiesen llegado a desacelerar y otras a acelerar, conforme a la distribución de rapidez de Maxwell?

19.13 Cuando usted sopla fuertemente en su mano, se siente frío, pero cuando sopla suavemente, se siente caliente. ¿Por qué?

19.14 Explique por qué la velocidad media de moléculas de aire en un auditorio cerrado es cero, pero su rapidez de la raíz media cuadrática o rapidez media no es cero.

19.15 En un motor diesel, la mezcla de combustible y aire es comprimida rápidamente. Como resultado, la temperatura sube hasta la temperatura de combustión espontánea del combustible, causando que el combustible se encienda. ¿Cómo el

aumento de temperatura es posible, dado el hecho de que la compresión ocurre tan rápidamente que no hay tiempo suficiente para que una cantidad significativa de calor entre o salga de la mezcla de combustible y aire?

19.16 Un cilindro con un pistón de deslizamiento contiene un gas ideal. El cilindro (con el gas en el interior) es calentado mediante la transferencia de la misma cantidad de calor al sistema en dos diferentes maneras:

- El pistón es bloqueado para evitar su movimiento.
- Se permite que el pistón se deslice sin fricción hasta el final del cilindro.

¿Cómo se compara la temperatura final del gas bajo la condición 1 con la temperatura final del gas bajo la condición 2? ¿Es posible que la temperatura esté igual?

19.17 Demuestre que el módulo de compresibilidad adiabático, definido como $B = -V(dP/dV)$, para un gas ideal es igual a γP .

19.18 Un gas ideal monoatómico se expande en forma isotérmica de $\{p_1, V_1, T_1\}$ a $\{p_2, V_2, T_1\}$. Luego experimenta un proceso isocórico que lo lleva de $\{p_2, V_2, T_1\}$ a $\{p_1, V_2, T_2\}$. Finalmente el gas experimenta una compresión isobárica que lo lleva de regreso a $\{p_1, V_1, T_1\}$.

a) Utilice la primera ley de la termodinámica para encontrar Q para cada uno de estos procesos.

b) Escriba una expresión para Q total en términos de p_1, p_2, V_1 y V_2 .

19.19 Dos gases monoatómicos reaccionarán para formar un gas diatómico: $A + B \rightarrow AB$. Suponga que usted realiza esta reacción con 1 mol de c/u A y B en una cámara de aislamiento térmico, de tal modo que no hay intercambio de calor con el entorno. ¿Aumentará o disminuirá la temperatura del sistema?

19.20 Una relación que da la presión, p , de una sustancia como función de su densidad, ρ , y su temperatura, T , se llama

una *ecuación de estado*. Para un gas con la masa molar M , escriba la ley de gases ideales como una ecuación de estado.

19.21 La compresión y rarefacción asociadas con una onda sonora propagándose en un gas son tanto más rápidas que el flujo de calor en el gas que se puedan tratar como procesos adiabáticos.

a) Busque la rapidez del sonido, v_s , en un gas ideal de masa molar M .

b) De acuerdo con el refinamiento de Einstein de la mecánica newtoniana, v_s no puede exceder la rapidez de la luz en un vacío c . Este hecho implica una temperatura máxima para un gas ideal. Busque esta temperatura.

c) Evalúe la temperatura máxima del inciso b) para el gas monoatómico de hidrógeno (H).

d) ¿Qué le pasa al hidrógeno a esta temperatura máxima?

19.22 La teoría cinética de un gas ideal toma en cuenta no sólo el movimiento de traslación de átomos o moléculas, sino también la vibración y la rotación para gases diatómicos y poliatómicos. ¿Diferirá el aumento de temperatura a partir de una transferencia dada de calor que se suministre a un gas monoatómico del aumento de temperatura debido a la misma cantidad de calor que se suministre a un gas diatómico? Explique.

19.23 En la termosfera, la capa de la atmósfera terrestre que se extiende desde una altitud de 100 km hasta 700 km, la temperatura puede alcanzar aproximadamente 1 500 °C. ¿Cómo se sentiría el aire en esta capa en la piel desnuda?

19.24 Un vaso de agua se deja a temperatura ambiente en la mesa de la cocina durante la noche. En la mañana, la cantidad de agua en el vaso es menor debido a la evaporación pero el agua en el vaso está debajo del punto de ebullición, así que ¿cómo es posible que una parte del agua líquida se haya convertido en gas?

PROBLEMAS

Una • y dos •• indican un nivel mayor de dificultad del problema.

Sección 19.1

19.25 Un neumático tiene una presión manométrica de 300 kPa a 15.0 °C. ¿Cuál es la presión manométrica a 45.0 °C? Suponga que el cambio de volumen del neumático es insignificante.

19.26 Un tanque de helio comprimido para inflar globos tiene la indicación de contener helio de una presión de 2 400 psi, el cual ocupará un volumen de 244 ft³ cuando se permite su expansión a la presión atmosférica. Suponiendo que no sucede ningún cambio de temperatura durante la expansión, ¿cuál es el volumen del tanque en pies cúbicos?

•**19.27** Antes de emprender un viaje en automóvil desde Michigan a Florida para escapar del frío del invierno, usted infla los neumáticos de su auto con una presión de 33 psi, sugerida por el fabricante, mientras que la temperatura exterior es de 25 °F, y luego se asegura de que las tapas de las válvulas estén herméticamente cerradas. Usted llega a Florida dos días después, y la temperatura exterior es agradable a 72 °F.

a) ¿Cuál es la nueva presión de sus neumáticos en unidades de SI?

b) Si usted deja escapar aire de los neumáticos para llevar la presión nuevamente a los 33 psi recomendados, ¿qué porcentaje de la masa de aire original en los neumáticos va a liberar?

•**19.28** Un volumen de 1.00 L de un gas experimenta un proceso isocórico en el cual duplica su presión, seguido por un proceso isotérmico hasta que se logre la presión original. Determine el volumen final del gas.

•**19.29** Suponga que tiene una olla llena de vapor a 100.0 °C y con una presión de 1.00 atm. La olla tiene un diámetro de 15.0 cm y una altura de 10.0 cm. La masa de la tapa es de 0.500 kg. ¿Hasta qué temperatura tendrá que calentar el vapor para levantar la tapa de la olla?

Sección 19.2

•**19.30** Una cantidad de agua líquida entra en equilibrio con el aire en un recipiente cerrado, sin evaporar por completo, a una temperatura de 25.0 °C. ¿Cuántos gramos de vapor de

agua contiene un litro del aire en esta situación? La presión de vapor de agua a 25.0 °C es de 3.1690 kPa.

•**19.31** Utilice la ecuación $pT = \text{constante}$ y la información del capítulo 16 para estimar la rapidez del sonido en el aire a 40.0 °C, dado que la rapidez a 0.00 °C es de 331 m/s.

19.32 Suponga que 2.00 moles de un gas ideal están encerrados en un recipiente que tiene un volumen de $1 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3$. El recipiente luego se coloca en un horno y se eleva a una temperatura de 400. K. ¿Cuál es la presión final del gas?

19.33 1.00 mol de un gas ideal se mantiene con un volumen constante de 2.00 L. Encuentre el cambio de presión si la temperatura aumenta por 100. °C.

19.34 ¿Cuánto calor se agrega al sistema cuando 2 000 J de trabajo es realizado por un gas ideal en un proceso isotérmico? Dé una razón para su respuesta.

•**19.35** El nitrógeno líquido, que se usa en muchos laboratorios de investigación física, puede presentar un riesgo de seguridad si una cantidad grande evapora en un espacio cerrado. El nitrógeno evaporado reduce la concentración de oxígeno, creando el riesgo de asfixia. Suponga que 1.00 L de nitrógeno líquido ($\rho = 808 \text{ kg/m}^3$) evapora y entra en equilibrio con el aire a 21.0 °C y 101 kPa. ¿Qué volumen ocupará?

•**19.36** Se derrama bromo líquido (Br_2) en un accidente de laboratorio y se evapora. Suponiendo que el vapor se comporta como un gas ideal con una temperatura de 20.0 °C y una presión de 101.0 kPa, encuentre su densidad.

•**19.37** Dos recipientes contienen el mismo gas con diferentes temperaturas y presiones, como lo indica la figura. El recipiente pequeño tiene un volumen de 1.00 litro y el recipiente grande tiene un volumen de 2.00 litros. Entonces se conectan los dos recipientes entre sí por medio de un tubo delgado, y se permite que se iguale la presión y temperatura en ambos recipientes. Si la temperatura final es de 300. K, ¿cuál es la presión final? Suponga que el tubo de conexión tiene un volumen y masa despreciables.



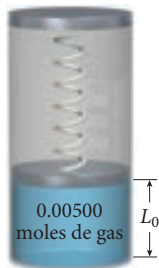
•**19.38** Una muestra de gas con $p = 1\,000. \text{ Pa}$, $V = 1.00 \text{ L}$ y $T = 300. \text{ K}$ es encerrada en un cilindro.

a) Encuentre la nueva presión si el volumen se reduce a la mitad del volumen original a la misma temperatura.

b) Si la temperatura se eleva a 400. K en el proceso del inciso a), ¿cuál es la nueva presión?

c) Si el gas es entonces calentado a 600 K desde el valor inicial y la presión del gas se convierte a 3 000 Pa, ¿cuál es el nuevo volumen?

•**19.39** Un cilindro de un área de sección transversal de 12.00 cm^2 es equipado con un pistón, que está conectado a un resorte con una constante de resorte de $1\,000. \text{ N/m}$, como se muestra en la figura. El cilindro se llena



con 0.00500 moles de gas. A temperatura ambiente (23.0 °C), el resorte está ni comprimido ni estirado. ¿Qué tanto se comprime el resorte si la temperatura del gas es elevada a 150. °C?

••**19.40** Aire con 1.00 atm se encuentra en el interior de un cilindro de 20.0 cm de radio y 20.0 cm de largo que reposa en una mesa. La parte superior del cilindro está sellada mediante un pistón móvil. Se deja caer un bloque de 20.0 kg sobre el pistón. ¿Desde qué altura arriba del pistón se tiene que soltar el bloque para comprimir el pistón por 1.00 mm, 2.00 mm y 1.00 cm?

Sección 19.3

19.41 El espacio interestelar lejos de alguna estrella usualmente está lleno de hidrógeno atómico (H) con una densidad de 1 átomo/cm³ y una temperatura muy baja de 2.73 K.

a) Determine la presión en el espacio interestelar.

b) ¿Cuál es la rapidez de la raíz media cuadrática de los átomos?

c) ¿Cuál sería la longitud de arista de un cubo que contiene una cantidad de átomos con una energía interna de 1.00 J?

19.42 a) ¿Cuál es la rapidez de la raíz media cuadrática para un grupo de átomos de ⁴He (helio-4) a 300. K?

b) ¿Cuál es la rapidez de la raíz media cuadrática para un grupo de átomos de ³He (helio-3) a 300. K?

19.43 Dos isótopos de uranio, ²³⁵U y ²³⁸U, están separados por un proceso de difusión de gas que involucra su combinación con flúor para hacer el compuesto UF₆. Determine la proporción de la rapidez de la raíz media cuadrática de moléculas de UF₆ para los dos isótopos. Las masas de ²³⁵UF₆ y ²³⁸UF₆ son de 249 uma y 252 uma.

19.44 Los electrones, que causan la conductividad de un metal, se comportan aproximadamente como moléculas de un gas ideal. La masa de un electrón es $m_e \doteq 9.109 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$. Si la temperatura del metal es de 300.0 K, ¿cuál es la rapidez de la raíz media cuadrática de los electrones?

•**19.45** En un periodo de 6.00 s, $9.00 \cdot 10^{23}$ moléculas de nitrógeno impactan en una sección de una pared con un área de 2.00 cm^2 . Si las moléculas se mueven con una rapidez de 400.0 m/s y se impactan contra la pared de frente en colisiones elásticas, ¿cuál es la presión que se ejerce sobre la pared? (La masa de una molécula de N₂ es de $4.68 \cdot 10^{-26} \text{ kg}$.)

•**19.46** Suponiendo que la presión permanezca constante, ¿a qué temperatura la rapidez de la raíz media cuadrática de un átomo de helio es igual a la rapidez de la raíz media cuadrática de una molécula de aire con STP?

Sección 19.4

19.47 Dos cilindros de cobre, inmersos en un tanque de agua a 50.0 °C contienen helio y nitrógeno, respectivamente. El tanque lleno de helio tiene un volumen dos veces más grande que el tanque de nitrógeno.

a) Calcule la energía cinética media de una molécula de helio y la energía cinética media de una molécula de nitrógeno.

b) Determine el calor molar específico con volumen constante (C_V) y con una presión constante (C_P) para los dos gases.

c) Encuentre γ para los dos gases.

19.48 A temperatura ambiente, cilindros idénticos de gas contienen 10 moles de gas nitrógeno y de argón, respectivamente. Determine el cociente de las energías internas almacenadas en los dos sistemas. Suponga el comportamiento de un gas ideal.

19.49 Calcule el cambio de energía interna de 1.00 mol de un gas ideal diatómico que empieza a temperatura ambiente (293 K) cuando su temperatura es incrementada por 2.00 K.

19.50 Tratando al aire como un gas ideal de moléculas diatómicas, calcule cuánto calor se requiere para subir la temperatura del aire en una habitación de 8.00 m por 10.0 m por 3.00 m de 20.0 °C a 22.0 °C con 101 kPa. Ignore el cambio en el número de moles de aire en la habitación.

•**19.51** ¿Cuál es la energía aproximada que se requiere para subir la temperatura de 1.00 L de aire por 100. °C mientras el volumen se mantiene constante?

•**19.52** Usted está diseñando un experimento que requiere un gas con un coeficiente de dilatación adiabática de $\gamma = 1.60$. Sin embargo, usted recuerda de sus clases de física que ningún gas tiene este tipo de valor de γ . Y al mismo tiempo también recuerda que la mezcla de gases monoatómicos y diatómicos puede dar un gas con tal valor de γ . Determine la fracción de moléculas diatómicas que una mezcla debe tener para obtener este valor.

Sección 19.5

19.53 Suponga que 15.0 L de un gas ideal monoatómico con una presión de $1.50 \cdot 10^5$ kPa se expande en forma adiabática (sin transferencia de calor) hasta que se duplique el volumen.

- ¿Cuál es la presión del gas con el nuevo volumen?
- Si la temperatura inicial del gas fue de 300. K, ¿cuál es su temperatura final después de la expansión?

19.54 Un motor diesel trabaja con una relación de compresión alta para comprimir aire hasta que alcance una temperatura suficientemente alta para encender el combustible diesel. Suponga que la relación de compresión (razón de volúmenes) de un motor diesel específico sea de 20 a 1. Si entra aire en un cilindro con 1.00 atm y es comprimido en forma adiabática, el aire comprimido alcanza una presión de 66.0 atm. Suponiendo que el aire entra en el motor a temperatura ambiente (25.0 °C) y que el aire se pudiese tratar como un gas ideal, encuentre la temperatura del aire comprimido.

19.55 El aire en un cilindro de un motor diesel es rápidamente comprimido desde una temperatura inicial de 20.0 °C, una presión inicial de 1.00 atm y un volumen inicial de 600. cm³ a un volumen final de 45.0 cm³. Suponiendo que el aire fuese un gas diatómico ideal, encuentre la temperatura y presión finales.

•**19.56** 6.00 litros de un gas ideal monoatómico, originalmente a 400. K y presión de 3 atm (llamado estado 1) experimenta los siguientes procesos:

- 1 → 2 expansión isotérmica a $V_2 = 4V_1$
- 2 → 3 compresión isobárica
- 3 → 1 compresión adiabática a su estado inicial

Encuentre la presión, volumen y temperatura del gas en los estados 2 y 3. ¿Cuántos moles del gas existen?

•**19.57** ¿Cuánto trabajo realiza el gas durante cada uno de los tres procesos en el problema 19.56 y cuánto calor fluye al gas en cada proceso?

••**19.58** Dos cilindros geoméricamente idénticos de un diámetro interior de 5.0 cm, uno hecho de cobre y el otro de teflón, son inmersos en un tanque de agua de gran volumen a temperatura ambiente (20 °C), como se muestra en la figura. En cada cilindro se coloca un pistón de teflón sin fricción con un vástago y plato fijo. La masa del ensamble de pistón y plato es de 0.50 kg, y los cilindros están llenos de gas helio así que inicialmente ambos pistones están en equilibrio a 20.0 cm del fondo de sus respectivos cilindros.

a) Un bloque de plomo de 5.0 kg se coloca *lentamente* en cada plato y se baja el pistón *lentamente* hasta que llegue a su estado de equilibrio final. Calcule la altura final de cada pistón (medida desde el fondo de su respectivo cilindro).



b) Si los dos bloques de plomo se *dejan caer repentinamente* sobre los platos, ¿cómo se compararán las alturas finales de los dos pistones?

••**19.59** El capítulo 13 examinó la variación de presión con altitud en la atmósfera de la Tierra, suponiendo una temperatura constante, un modelo que se conoce como la *atmósfera isotérmica*. Una mejor aproximación es tratar las variaciones de presión con altitud como adiabática. Suponga que el aire se pueda tratar como un gas ideal diatómico con una masa molar efectiva de $M_{\text{aire}} = 28.97$ g/mol.

- Encuentre la presión y temperatura de la atmósfera como funciones de altitud. Suponga que la presión a nivel del mar sea $p_0 = 101.0$ kPa y la temperatura a nivel del mar sea de 20.0 °C.
- Determine la altitud en la que la presión y densidad del aire estén a la mitad de sus valores a nivel del mar. ¿Cuál es la temperatura a esta altitud, en este modelo?
- Compare estos resultados con el modelo isotérmico del capítulo 13.

Sección 19.6

19.60 Considere el gas nitrógeno N₂ a 20.0 °C. ¿Cuál es la rapidez de la raíz media cuadrática de las moléculas de nitrógeno? ¿Cuál es la rapidez más probable? ¿Qué porcentaje de moléculas de nitrógeno tienen una rapidez dentro de 1.00 m/s de la rapidez más probable? (*Pista:* Suponga que la probabilidad de que los átomos de neón tengan rapidez entre 200.00 m/s y 202.00 m/s es constante.)

19.61 Como se menciona en el texto, la distribución de rapidez de moléculas en la atmósfera de la Tierra tiene un impacto significativo sobre su composición.

- ¿Cuál es la rapidez media de una molécula de nitrógeno en la atmósfera a una temperatura de 18.0 °C y una presión (parcial) de 78.8 kPa?
- ¿Cuál es la rapidez media de una molécula de hidrógeno a la misma temperatura y presión?

19.62 Un recipiente sellado contiene 1 mol de gas neón con STP. Estime el número de átomos de neón que tienen rapidez en el rango de 200.00 m/s a 202.00 m/s.

•**19.63** Para una habitación a 21.0 °C y a 1.00 atm, escriba una expresión para la fracción de moléculas de aire que tienen rapidez mayores que la rapidez del sonido, conforme a la distribución de Maxwell. ¿Cuál es la rapidez media de cada molécula? ¿Cuál es la rapidez de la raíz media cuadrática? Suponga que el aire consiste en moléculas uniformes de un gas diatómico con una masa de 15.0 uma.

••**19.64** Si un transbordador espacial es golpeado por un meteoro y le produce un agujero de 1.0 cm de diámetro en la ventana, ¿cuánto tiempo tarda antes de que la presión en el interior de la cabina se reduce a la mitad de su valor original? Suponga que la cabina del transbordador sea un cubo con bordes que miden 5.00 m con una temperatura constante de 21 °C con 1.0 atm, y que el aire en el interior consiste de moléculas diatómicas uniformes con una masa de 15 uma. (*Pista:* ¿Qué fracción de las moléculas se está moviendo en la dirección correcta para salir a través del agujero, y cuál es su rapidez media? Derive una expresión para la rapidez con la que las moléculas salen por el agujero como función de la presión y , por ende, de dp/dt .)

Problemas adicionales

19.65 1.00 mol de gas nitrógeno molecular se expande en volumen rápidamente, así que no se intercambia calor con el entorno durante el proceso. Si el volumen aumenta de 1.00 L a 1.50 L, determine el trabajo hecho sobre el entorno si la temperatura del gas baja de 22.0 °C a 18.0 °C. Suponga el comportamiento de un gas ideal.

19.66 Calcule la rapidez de la raíz media cuadrática de moléculas de aire a temperatura ambiente (22.0 °C) a partir de la teoría cinética de un gas ideal.

19.67 En Party City usted compra un globo lleno de helio con un diámetro de 40.0 cm a 20.0 °C y con 1.00 atm.

- ¿Cuántos átomos de helio se encuentran dentro del globo?
- ¿Cuál es la energía cinética media de los átomos?
- ¿Cuál es la rapidez de la raíz media cuadrática de los átomos?

19.68 ¿Cuál es la masa total de todas las moléculas de oxígeno en un metro cúbico de aire a temperatura normal (25 °C) y presión normal ($1.01 \cdot 10^5$ Pa)? Observe que el aire es aproximadamente 21% (por volumen) de oxígeno (O_2 molecular), y el resto es principalmente nitrógeno (N_2 molecular).

19.69 Los neumáticos de un auto de $3.0 \cdot 10^3$ lb están llenos de aire con una presión manométrica (presión adicional a la presión atmosférica) de 32 lb/in² mientras que el vehículo se encuentra en el ascensor de un taller de reparación. Luego se baja el auto al piso.

- Suponiendo que el volumen interno de los neumáticos no cambie de manera apreciable como resultado del contacto con el piso, calcule la presión absoluta en los neumáticos en pascales cuando el auto está en el piso.
- ¿Cuál es el área total de contacto entre los neumáticos y el piso?

19.70 Un gas se expande con una presión constante desde 3.00 L a 15.0 °C hasta que el volumen es de 4.00 L. ¿Cuál es la temperatura final del gas?

19.71 Un gas ideal tiene una densidad de 0.0899 g/L a 20.00 °C y 101.325 kPa. Identifique el gas.

19.72 Un tanque de gas que consiste en 30.0% de O_2 y 70.0% de Ar tiene un volumen de 1.00 m³. Se mueve del almacén a 20.0 °C a las afueras en un día soleado. Inicialmente el manómetro marca 1 000. psi. Después de varias horas, el manómetro señala 1 500. psi. ¿Cuál es la temperatura del gas en el tanque en ese momento?

19.73 Suponga que 5.0 moles de un gas ideal monoatómico se expanden a una temperatura constante de 22 °C desde un volumen inicial de 2.0 m³ a 8.0 m³.

- ¿Cuánto trabajo hizo el gas?
- ¿Cuál es la presión final del gas?

19.74 Suponga que 0.0400 moles de un gas ideal monoatómico tiene una presión de 1.00 atm a 273 K y luego es enfriado con presión constante hasta que su volumen es reducido a la mitad. ¿Cuál es la cantidad de trabajo hecho por el gas?

•**19.75** Una botella de 2.00 L contiene 1.00 mol de bicarbonato sódico y 1.00 mol de ácido acético. Éstos se combinan para producir 1.00 mol de gas de dióxido de carbono, junto con agua y acetato de sodio. Si se sella la botella herméticamente antes de que ocurra la reacción, ¿cuál es la presión dentro de la botella cuando la reacción está completa?

•**19.76** Una cámara cilíndrica con un radio de 3.5 cm contiene 0.12 moles de un gas ideal. Está equipada con un pistón de 450 g que reposa en la parte superior, encerrando un espacio de una altura de 7.5 cm. Cuando el cilindro se enfría a 15 °C ¿a qué distancia debajo de la posición inicial terminará el pistón?

•**19.77** Encuentre la energía cinética *más probable* para una molécula de un gas a la temperatura $T = 300$ K. ¿De qué manera depende este valor de la identidad del gas?

•**19.78** Un auditorio cerrado con un volumen de $2.50 \cdot 10^4$ m³ está lleno con 2 000 personas al principio de un evento. Al principio el aire en el espacio está a una temperatura de 293 K y una presión de $1.013 \cdot 10^5$ Pa. Si no hubiera ventilación, ¿qué tanto subirá la temperatura del aire durante el evento de 2.00 horas si cada persona metabolizara a una rapidez de 70.0 W?

•**19.79** A la temperatura de 295 K, la presión de vapor de pentano (C_5H_{12}) es de 60.7 kPa. Suponga que 1.000 g de pentano gaseoso está contenido en un cilindro con paredes diatérmicas (de conducción térmica) y un pistón para variar el volumen. El volumen inicial es de 1.000 L, y el pistón se mueve lentamente, manteniendo la temperatura a 295 K. ¿A qué volumen aparecerá la primera gota de pentano líquido?

•**19.80** Helio llena un cilindro bien aislado equipado con un pistón a 22.0 °C y con 1.00 atm. El pistón se mueve muy lentamente (expansión adiabática), así que el volumen aumenta hasta cuatro veces su volumen original.

- ¿Cuál es la presión final?
- ¿Cuál es la temperatura final del gas?

La segunda ley de la termodinámica

20



FIGURA 20.1 a) Una locomotora de vapor. b) El Thrust SSC.

LO QUE APRENDEREMOS 650

20.1 Procesos reversibles e irreversibles 650

Tiempo recurrente de Poincaré 651

Ejemplo 20.1 Mazo de naipes 651

20.2 Motores y refrigeradores 652

Ejemplo 20.2 Calentar una casa con una bomba de calor 653

20.3 Motores ideales 654

El ciclo de Carnot 654

Ejemplo 20.3 Trabajo realizado por un motor de Carnot 657

Ejemplo 20.4 Eficiencia máxima de una planta de energía eléctrica 657

20.4 Motores reales y eficiencia 658

Ciclo de Otto 658

Problema resuelto 20.1 Eficiencia de un motor de automóvil 660

Ciclo de Diesel 662

Automóviles híbridos 662

Eficiencia y la crisis de energía 663

20.5 La segunda ley de la termodinámica 664

20.6 Entropía 666

Ejemplo 20.5 Cambio de la entropía para el congelamiento del agua 668

Ejemplo 20.6 Cambio de la entropía para el calentamiento del agua 669

20.7 Interpretación microscópica de la entropía 669

Ejemplo 20.7 El incremento de la entropía durante la libre expansión de un gas 671

Muerte de la entropía 672

LO QUE HEMOS APRENDIDO/ GUÍA DE ESTUDIO PARA EXAMEN 672

Práctica para resolución de problemas 674

Problema resuelto 20.2 Costo de operar una planta de energía eléctrica 674

Problema resuelto 20.3 Congelar agua en un refrigerador 676

Preguntas de opción múltiple 677

Preguntas 678

Problemas 679

LO QUE APRENDEREMOS

- Los procesos termodinámicos reversibles son procesos idealizados en los cuales un sistema se puede mover de un estado termodinámico a otro y de regreso, mientras permanece cerca del equilibrio termodinámico.
- Muchos de los procesos son irreversibles; por ejemplo, las piezas rotas de una taza de café tiradas en el suelo no se pueden volver a armar espontáneamente hasta formar la taza de nuevo. Prácticamente todos los procesos termodinámicos del mundo real son irreversibles.
- La energía mecánica se puede transformar en energía térmica, y la energía térmica se puede transformar en energía mecánica.
- El motor térmico es un aparato que convierte la energía térmica en energía mecánica. Este motor opera en un ciclo termodinámico, regresando periódicamente a su estado original.
- Ningún motor térmico puede ser 100% eficiente. La segunda ley de la termodinámica impone limitaciones fundamentales en la eficiencia del motor térmico.
- Los refrigeradores y acondicionadores de aire son motores térmicos que operan al revés.
- La entropía de un sistema es una medida de qué tan lejos del equilibrio está dicho sistema.
- La segunda ley de la termodinámica dice que la entropía de un sistema cerrado jamás puede disminuir.
- La entropía de un sistema puede relacionarse a los estados microscópicos de los elementos de un sistema.

Los primeros estudios de la termodinámica estuvieron motivados por el deseo de los científicos e ingenieros de descubrir los principios que gobiernan a los motores y las máquinas, para que ellos pudieran diseñarlos en forma más eficiente y poderosa. El motor de vapor podía ser usado para impulsar las primeras locomotoras y barcos; sin embargo, las calderas de vapor sobrecalentadas podían explotar causando daños y fallecimientos. Hoy en día, las locomotoras y barcos de vapor se usan principalmente en rutas panorámicas para turistas.

Los principios que afectan la eficiencia de los motores térmicos se aplican a todos los motores, desde locomotoras de vapor [figura 20.1a)] hasta los motores de propulsión a chorro. El Thrust SSC (automóvil supersónico) mostrado en la figura 20.1b), usaba dos poderosos motores de propulsión a chorro para establecer un récord de rapidez terrestre de 763 mph en octubre de 1997. Sin embargo, a pesar de toda su rapidez y potencia, aún produce más gasto calórico que energía aprovechable, lo cual también es cierto para la mayoría de los motores.

En este capítulo examinamos en la teoría y en la práctica los motores térmicos. Su operación está gobernada por la segunda ley de la termodinámica, uno de los enunciados científicos de mayor alcance y poder. Existen diversos modos de expresar esta ley, incluyendo uno que implica un concepto llamado *entropía*. Las ideas que se abordan en este capítulo tienen aplicaciones en prácticamente todas las áreas de la ciencia, incluyendo el procesamiento de la información, la biología y la astronomía.

20.1 Procesos reversibles e irreversibles

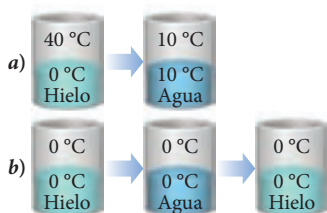


FIGURA 20.2 Dos procesos termodinámicos: a) Un proceso irreversible en el cual un disco de hielo a una temperatura de 0 °C es colocado dentro de una lata de metal que se encuentra a una temperatura de 40 °C. b) Un proceso reversible en el cual un disco de hielo a una temperatura de 0 °C es colocado dentro de una lata de metal a una temperatura igual de 0 °C.

Como advertimos en el capítulo 18, si usted vierte agua caliente en un vaso y lo coloca sobre una mesa, el agua se enfriará lentamente hasta alcanzar la temperatura ambiente. El aire en la habitación también se entibiará, aunque de manera imperceptible. Usted se sorprendería si el agua se calentara y el aire de la habitación se enfriara ligeramente, mientras conserva la energía. De hecho, la primera ley de la termodinámica se aplica para *ambos* escenarios. Sin embargo, siempre es el caso de que el agua se enfría hasta tener la temperatura ambiente. De esta manera, otros principios físicos son requeridos para explicar por qué la temperatura cambia de un modo y no de otro.

Prácticamente todos los procesos termodinámicos de la vida real son irreversibles. Por ejemplo, si un disco de hielo a una temperatura de 0 °C es colocado en una lata de metal a una temperatura de 40 °C, el calor fluirá irreversiblemente de la lata hacia el hielo, como se muestra en la figura 20.2a). El hielo se derretirá, el agua entonces se calentará y la lata se enfriará hasta que el agua y la lata estén a la misma temperatura (10 °C en este caso). No es posible hacer pequeños cambios en ninguna variable termodinámica y regresar el sistema al estado correspondiente a la lata caliente y el agua hecha hielo.

Sin embargo, podemos imaginarnos una clase de idealización de procesos *reversibles*. Con un **proceso reversible**, un sistema está siempre cerca de estar en un equilibrio termodinámico. En ese caso, hacer un pequeño cambio en el estado del sistema puede revertir cualquier cambio en las variables termodinámicas del sistema. Por ejemplo, en la figura 20.2b), un disco de hielo

a una temperatura de $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ es colocado en una lata de metal que también está a una temperatura de $0\text{ }^{\circ}\text{C}$. Al subir ligeramente la temperatura de la lata el hielo se derretirá formando agua. Así al bajar la temperatura de la lata de metal hará que el agua forme hielo otra vez, regresando de esta manera el sistema a su estado original. (Técnicamente hablando, la estructura de cristal del hielo sería distinta y de ese modo el estado final sería diferente del estado inicial, pero no de un modo que nos preocupe aquí.)

Podemos pensar en procesos reversibles como procesos de equilibrio en los cuales el sistema siempre conserva su equilibrio térmico o se mantiene cerca de él. Si un sistema estuviera en verdad en equilibrio térmico, no habría calor que fluyera y el sistema no trabajaría. Es por ello que el proceso reversible es una idealización. Sin embargo, para un proceso casi reversible, pequeños ajustes en la presión y temperatura pueden mantener al sistema cerca del equilibrio térmico.

Por otra parte, si un proceso involucra el flujo de calor con una diferencia limitada de temperatura, la expansión libre de un gas, o la conversión de trabajo mecánico a energía térmica, es un **proceso irreversible**. No es posible hacer pequeños cambios en la presión o temperatura del sistema y causar que el proceso continúe en la dirección opuesta. Adicionalmente, mientras que un proceso irreversible está sucediendo, el sistema no se encuentra en equilibrio térmico.

La irreversibilidad de un proceso está relacionada con la aleatoriedad o desorden del sistema. Por ejemplo, suponga que ordena un mazo de naipes por rango y categoría y entonces toma los primeros cinco naipes, como se muestra en la figura 20.3a). Usted observará un sistema de naipes bien ordenado, por ejemplo, todas las espadas, empezando por el as y bajando hasta el diez. Después pone usted esos cinco naipes de regreso al mazo, lo lanza al aire y deja que los naipes caigan al piso. Levanta los naipes de uno en uno sin ver su rango o categoría, y entonces toma los primeros cinco naipes de la parte superior de su mazo. Es sumamente improbable que esos cinco naipes estén ordenados por rango y categoría. Es mucho más probable que vea como resultado el que se muestra en la figura 20.3b); es decir, los naipes en un orden aleatorio. El proceso de lanzar y recoger los naipes es irreversible.

Otro ejemplo de un proceso irreversible es la libre expansión de un gas, que ya vimos en el capítulo 18 y que discutiremos con mayor detalle en la sección 20.7.

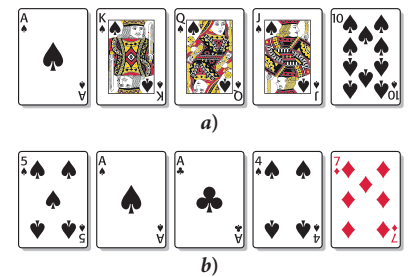


FIGURA 20.3 a) Los primeros cinco naipes de un mazo ordenado por rango y categoría. b) Los primeros cinco naipes de un mazo que fue lanzado en el aire y recogido de manera aleatoria.

Tiempo recurrente de Poincaré

La experiencia común de un *déjà vu* (del francés y significa “ya visto o algo ya conocido”) es el sentimiento de haber vivido ya una situación particular antes. Pero, ¿los eventos realmente se repiten? Si los procesos que conducen de un suceso a otro son realmente irreversibles, entonces un suceso no se puede repetir con exactitud.

El físico y matemático francés Henry Poincaré hizo una importante contribución a esta discusión en 1890, al afirmar su famoso teorema de recurrencia. En él postula que ciertos sistemas dinámicos cerrados regresarán a estar arbitrariamente cercanos a su estado inicial transcurrido el suficiente tiempo. Dicho tiempo es conocido como el *tiempo recurrente de Poincaré*, o simplemente como el *tiempo de Poincaré* de un sistema. Dicho tiempo puede ser calculado relativamente directo para varios sistemas que únicamente tienen un número finito de diferentes estados, como ilustra el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 20.1 Mazo de naipes

Supongamos que usted vuelve a lanzar y recoger el mazo de naipes, como en la figura 20.3, una y otra vez. A la larga, existe la posibilidad de que el orden aleatorio en el que usted recogió los naipes arrojará la secuencia de ases hasta el diez de espadas en los primeros cinco naipes del mazo.

PROBLEMA

Si en promedio tarda un minuto lanzar los naipes al aire y luego apilarlos formando el mazo otra vez, ¿cuánto tiempo espera usted que le tome, en promedio, antes de que encuentre la secuencia de ases hasta el diez de espadas en los primeros cinco naipes del mazo?

SOLUCIÓN

Hay 52 naipes en el mazo. Cada uno de ellos tiene la misma probabilidad de $\frac{1}{52}$ de ser la primera carta. Así es que la probabilidad de que el as de espadas quede como la primera carta del mazo es de $\frac{1}{52}$. Si el as es la primera carta, entonces aún hay 51 naipes abajo. La probabilidad

(continúa)

(continuación)

de que el rey de espadas esté en la primera posición de los 51 naipes que restan es de $\frac{1}{51}$. De este modo, la probabilidad combinada de que el as y el rey de espadas ocupen los primeros dos lugares en ese orden, es de $1/(52 \cdot 51) = 1/2\,652$. Del mismo modo, la probabilidad de que la secuencia ordenada desde el as hasta el diez de espadas ocurra es de $1/(52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48) = 1/311\,875\,200$.

Así es que el número promedio de intentos para obtener la secuencia deseada es de 311 875 200. Como cada uno de estos intentos toma un minuto, el término exitoso de este ejercicio tomaría aproximadamente 593 años.

EXPLICACIÓN

Podemos afirmar casi inmediatamente el número promedio de intentos que requeriríamos para tener los 52 naipes en una secuencia ordenada del as al dos, para las cuatro categorías. ¡Esto es $52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 52!$ Si cada uno de estos intentos tomara un minuto, requeriríamos un promedio de $1.534 \cdot 10^{62}$ años para obtener el orden deseado. Pero, aun después de ese tiempo, no habría ninguna garantía que la secuencia ordenada tendría que aparecer. Sin embargo, como hay 52 posibles secuencias diferentes de los naipes en el mazo, ¡por lo menos una de estas secuencias aparecería por lo menos dos veces!

20.2 Motores y refrigeradores

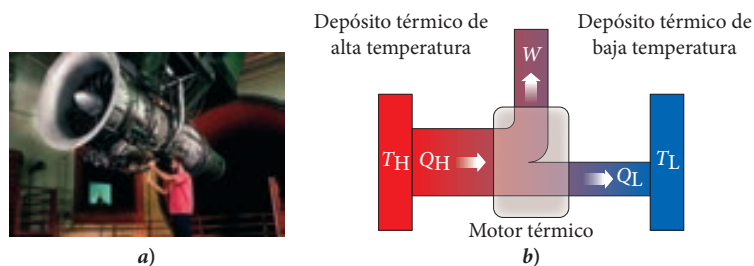
Un **motor térmico** es un aparato que convierte la energía térmica en trabajo útil. Por ejemplo, un motor de combustión interna o un motor de propulsión a chorro extrae trabajo mecánico de la energía térmica generado al quemar la mezcla de gasolina y aire [figura 20.4a)]. Para que un motor térmico trabaje repetidamente, debe operar en un ciclo. Por ejemplo, se haría trabajo si usted pone un petardo debajo de una lata de sopa y lo prende, estallándolo. La energía térmica producida por la explosión se convertiría en movimientos mecánicos para la lata de sopa. (Sin embargo, las aplicaciones de este motor de petardo y sopa enlatada son limitadas.)

Un motor que funciona en ciclo pasa por varios estados termodinámicos y al final regresa a su estado original. Podemos pensar en el motor como operando entre dos depósitos térmicos [figura 20.4b)]. Uno de los depósitos térmicos está a temperatura alta, T_H , y el otro depósito térmico está a baja temperatura, T_L . El motor toma el calor, Q_H , del depósito de alta temperatura, convierte un poco de dicho calor en trabajo mecánico, W , y agota el calor restante, Q_L (donde $Q_L > 0$), en el depósito de baja temperatura. De acuerdo con la primera ley de la termodinámica (equivalente a la conservación de energía), $Q_H = W + Q_L$. De esta forma, para lograr que un motor funcione, debe estar provisto de energía en la forma de Q_H , y entonces regresará trabajo útil, W . La **eficiencia**, ϵ , de un motor se define como

$$\epsilon = \frac{W}{Q_H}. \quad (20.1)$$

Un **refrigerador**, como el que se muestra en la figura 20.5a), es un motor térmico que funciona al revés. En vez de convertir el calor en trabajo, el refrigerador usa el trabajo para mover el calor de un depósito térmico de baja temperatura a un depósito térmico de alta temperatura [figura 20.5b)]. En un refrigerador real, un motor eléctrico dirige el compresor, el cual transfiere energía térmica del interior del refrigerador al aire de la habitación. Un acondicionador de aire también es un refrigerador; transfiere energía térmica desde el aire de la habitación hasta el aire de la intemperie.

FIGURA 20.4 a) Un motor de propulsión a chorro convierte la energía térmica en trabajo mecánico. b) Diagrama de flujo de un motor térmico que funciona entre dos depósitos térmicos.



Para este refrigerador, la primera ley de la termodinámica requiere que $Q_L + W = Q_H$. Es deseable que un refrigerador remueva cuanto calor sea posible del depósito frío, Q_L , dado el trabajo, W , puesto en el refrigerador. El **coeficiente de desempeño**, K , de un refrigerador está definido como

$$K = \frac{Q_L}{W}. \quad (20.2)$$

En Estados Unidos los refrigeradores generalmente se evalúan de acuerdo con su uso anual de energía, sin hacer alusión a su verdadera eficiencia. Un refrigerador eficiente es aquel cuyo uso de energía es comparable con otro de la misma categoría de capacidad pero con el uso más bajo de energía.

Los acondicionadores de aire a menudo se evalúan en términos de la categorización de la eficiencia energética (EER, por sus siglas en inglés), definidos por su capacidad de remover el calor, H , en BTU/hora dividido entre la potencia P usada en watts. La relación entre K y EER es

$$K = \frac{|Q_L|}{|W|} = \frac{Ht}{Pt} = \frac{H}{P} = \frac{\text{EER}}{3.41},$$

donde t es el tiempo de intervalo. El factor $1/3.41$ surge de la definición del BTU por hora:

$$\frac{1 \text{ BTU/h}}{1 \text{ watt}} = \frac{(1055 \text{ J})/(3600 \text{ s})}{1 \text{ J/s}} = \frac{1}{3.41}.$$

Los valores típicos de EER para un acondicionador de aire de habitación van desde 8 hasta 11, esto significa que los valores de K alcanzan entre 2.3 a 3.2. De este modo, un acondicionador de aire de habitación típico puede remover aproximadamente tres unidades de calor por cada unidad de energía que utiliza. Los acondicionadores de aire centrales a menudo se evalúan por su capacidad de ajustar su eficiencia energética a las estaciones (SEER, por sus siglas en inglés) que toma en cuenta qué tanto tiempo puede funcionar el acondicionador de aire durante un año.

Una **bomba de calor** es la variación de un refrigerador que se puede utilizar para calentar edificios. Esa bomba de calor calienta el edificio al enfriar el aire del exterior. Así como para un refrigerador, $Q_L + W = Q_H$. Sin embargo, para una bomba de calor, la cantidad de interés es el calor puesto en el depósito más cálido, Q_H , en vez de remover el calor del depósito más frío. De esta manera, el coeficiente de desempeño de una bomba de calor es

$$K_{\text{bomba de calor}} = \frac{Q_H}{W}, \quad (20.3)$$

donde W es el trabajo que se requiere para mover el calor del depósito de baja temperatura al depósito de alta temperatura. El típico coeficiente de desempeño de una bomba de calor comercial está en el rango de 3 a 4. Las bombas de calor no trabajan bien cuando la temperatura exterior está por debajo de los -18°C (0°F).

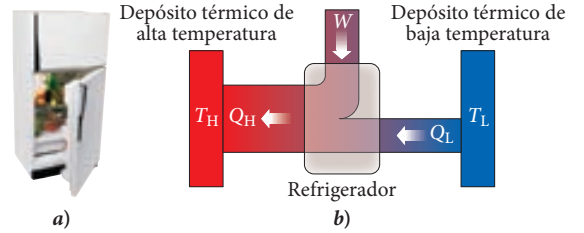


FIGURA 20.5 a) Un refrigerador de casa. b) Diagrama de flujo de un refrigerador que funciona entre dos depósitos térmicos.

EJEMPLO 20.2

Calentar una casa con una bomba de calor

Una bomba de calor con un coeficiente de desempeño de 3.500 se usa para calentar una casa que pierde 75 000 BTU/h de calor en un día frío. Suponga que los costos de electricidad son de 10.00 centavos por kilowatt-hora.

PROBLEMA

¿Cuánto cuesta calentar la casa por un día?

SOLUCIÓN

El coeficiente de desempeño de la bomba de calor se da por la ecuación 20.3:

$$K_{\text{bomba de calor}} = \frac{Q_H}{W}.$$

El trabajo necesario para calentar la casa es entonces

$$W = \frac{Q_H}{K_{\text{bomba de calor}}}.$$

(continúa)

(continuación)

La casa está perdiendo 75 000 BTU/h, que convertimos a unidades SI:

$$\frac{75\,000 \text{ BTU}}{1 \text{ h}} \cdot \frac{1\,055 \text{ J}}{1 \text{ BTU}} \cdot \frac{1 \text{ h}}{3\,600 \text{ s}} = 21.98 \text{ kW}.$$

Por lo tanto, la energía que se requiere para calentar la casa es

$$P = \frac{W}{t} = \frac{Q_H/t}{K_{\text{bomba de calor}}} = \frac{21.98 \text{ kW}}{3.500} = 6.280 \text{ kW}.$$

El costo de calentar la casa por 24 horas es entonces

$$\text{Costo} = (6.280 \text{ kW})(24 \text{ h}) \frac{\$0.1000}{1 \text{ kWh}} = \$15.07.$$

20.3 Motores ideales

Un **motor ideal** es el que utiliza únicamente procesos reversibles. Además, el motor incorpora no tener efectos de desechos de energía, tales como la fricción o la viscosidad. Recuerde, como definimos en la sección anterior, un motor térmico es un aparato que convierte la energía térmica en trabajo utilizable. Usted quizá pensará que un motor *ideal* sería uno 100% eficiente; que convertiría toda la energía térmica provista en trabajo mecánico utilizable. Sin embargo, veremos que incluso el más eficaz motor ideal no puede lograr esto. Esta inhabilidad fundamental de convertir energía térmica totalmente en trabajo mecánico recae en el meollo de la segunda ley de la termodinámica y la entropía, los dos temas centrales de este capítulo.

El ciclo de Carnot

Un ejemplo de un motor ideal es el **motor de Carnot**, el cual es el motor más eficiente que opera entre dos depósitos de temperatura. El ciclo del proceso termodinámico usado por el motor de Carnot se llama **ciclo de Carnot**.

Un ciclo de Carnot consiste en dos procesos isotérmicos y dos procesos adiabáticos, como se muestra en la figura 20.6 en un diagrama pV (diagrama de presión-volumen). Podemos escoger un punto de partida arbitrario para el ciclo; vamos a decir que comienza en el punto 1. El sistema primero sufre un proceso isotérmico durante el cual el sistema se expande y absorbe calor del depósito térmico a una temperatura fija T_H (en la figura 20.6, $T_H = 400 \text{ K}$). En el punto 2, el sistema comienza una expansión adiabática en la cual no se gana ni se pierde calor. En el punto 3 el sistema empieza otro proceso isotérmico, esta vez dejando calor en el segundo depósito térmico de baja temperatura, T_L (en la figura 20.6 $T_L = 300 \text{ K}$), mientras que el sistema se comprime. En el punto 4 el sistema comienza un segundo proceso adiabático en el cual no se gana ni se pierde calor. El ciclo de Carnot está completo cuando el sistema regresa al punto 1.

La eficiencia del motor de Carnot no está al 100% pero en cambio está dada por

$$\epsilon = 1 - \frac{T_L}{T_H}. \tag{20.4}$$

Notablemente, la eficiencia del motor de Carnot depende sólo en la proporción de la temperatura de los dos depósitos térmicos. Para los motores mostrados en la figura 20.6, por ejemplo, la eficiencia es $\epsilon = 1 - (300 \text{ K})/(400 \text{ K}) = 0.25$.

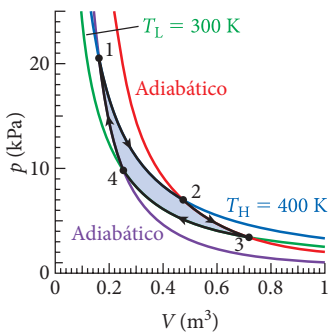


FIGURA 20.6 El ciclo de Carnot consiste en dos procesos isotérmicos y dos procesos adiabáticos.

DEDUCCIÓN 20.1

Eficiencia del motor de Carnot

Podemos determinar el trabajo y el calor ganado y perdido en un ciclo de Carnot. Para realizar esto, necesitamos suponer que el sistema consiste en un gas ideal en un contenedor cuyo volumen puede cambiar. Este sistema se coloca en contacto con un depósito térmico y originalmente tiene una presión P_1 y volumen V_1 , correspondiente al punto 1 de la figura 20.6. El depósito térmico sostiene la temperatura del sistema constante en T_H . Al volumen del sistema se le permite entonces incrementarse hasta que el sistema alcanza el punto 2 de la figura 20.6. En el punto 2,

la presión es p_2 y el volumen es V_2 . Durante este proceso isotérmico, el trabajo, W_{12} , lo realiza el sistema, y el calor, Q_H , es transferido al sistema. Ya que este proceso es isotérmico, la energía interna del sistema no cambia. De este modo, la cantidad de trabajo realizado por el sistema y la energía térmica transferida al sistema son correspondientes, dado por (vea la deducción en el capítulo 19):

$$W_{12} = Q_H = nRT_H \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right). \quad (i)$$

El sistema entonces se aleja del contacto con el depósito térmico cuya temperatura es T_H . El sistema continúa expandiéndose adiabáticamente hasta el punto 3 en la figura 20.6. En el punto 3 la expansión se detiene, y el sistema se pone en contacto con el segundo depósito térmico que tiene una temperatura T_L . Una expansión adiabática significa que $Q = 0$. En el capítulo 19 vimos que el trabajo hecho por un gas ideal que pasa por un proceso adiabático es $W = nR(T_f - T_i)/(1 - \gamma)$, donde $\gamma = C_p/C_v$ y C_p es el calor específico del gas en constante presión y C_v es el calor específico del gas en volumen constante. De este modo, el trabajo hecho por el sistema cuando pasa del punto 2 al punto 3 es

$$W_{23} = \frac{nR}{1 - \gamma} (T_L - T_H).$$

Al permanecer en contacto con el depósito térmico cuya temperatura es T_L , el sistema está isotérmicamente comprimido desde el punto 3 hasta el punto 4. El trabajo realizado por el sistema y el calor absorbido por el sistema son

$$W_{34} = -Q_L = nRT_L \ln \left(\frac{V_4}{V_3} \right). \quad (ii)$$

(En el capítulo 18 esto se habría escrito $W_{34} = Q_L$ porque Q_L habría sido el calor añadido al sistema y por ello $Q_L < 0$. Sin embargo, en este capítulo usamos la definición de Q_L como el calor entregado al depósito de baja temperatura, en $T = T_L$, y por lo tanto, $Q_L > 0$.)

Finalmente, el sistema se remueve del contacto con el segundo depósito térmico y comprimido adiabáticamente del punto 4 de regreso a su punto de origen, el punto 1. Para este proceso adiabático, $Q = 0$, y el trabajo realizado por el sistema es

$$W_{41} = \frac{nR}{1 - \gamma} (T_H - T_L).$$

Advierta que $W_{41} = -W_{23}$, ya que el trabajo realizado por el proceso adiabático depende únicamente de las temperaturas inicial y final. Por consiguiente, $W_{41} + W_{23} = 0$, y para el ciclo completo, el total del trabajo realizado por el sistema es

$$W = W_{12} + W_{23} + W_{34} + W_{41} = W_{12} + W_{34}.$$

Al sustituir las expresiones por W_{12} y por W_{34} de las ecuaciones (i) y (ii), tenemos

$$W = nRT_H \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right) + nRT_L \ln \left(\frac{V_4}{V_3} \right).$$

Ahora podemos encontrar la eficiencia del motor de Carnot. La eficiencia se define en la ecuación 20.1 como la proporción del trabajo realizado por el sistema, W , a la cantidad de calor abastecido al sistema Q_H :

$$\epsilon = \frac{W}{Q_H} = \frac{nRT_H \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right) + nRT_L \ln \left(\frac{V_4}{V_3} \right)}{nRT_H \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right)} = 1 + \frac{T_L \ln \left(\frac{V_4}{V_3} \right)}{T_H \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right)}. \quad (iii)$$

Esta expresión para la eficiencia del motor de Carnot contiene los volúmenes de los puntos 1, 2, 3 y 4. Sin embargo, podemos eliminar los volúmenes de esta expresión usando la relación para la expansión adiabática de un gas ideal del capítulo 19, $TV^{\gamma-1} = \text{constante}$.

Para el proceso adiabático del punto 2 al punto 3, tenemos

$$T_H V_2^{\gamma-1} = T_L V_3^{\gamma-1}. \quad (iv)$$

(continúa)

(continuación)

Similarmente, para el proceso adiabático del punto 4 al punto 1 tenemos

$$T_L V_4^{\gamma-1} = T_H V_1^{\gamma-1}. \quad (v)$$

Al tomar las proporciones de ambos lados de las ecuaciones (iv) y (v)

$$\frac{T_H V_2^{\gamma-1}}{T_H V_1^{\gamma-1}} = \frac{T_L V_3^{\gamma-1}}{T_L V_4^{\gamma-1}} \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}.$$

Al usar la relación entre los volúmenes, podemos ahora reescribir la ecuación (iii) para la eficiencia como

$$\epsilon = 1 + \frac{-T_L \ln\left(\frac{V_3}{V_4}\right)}{T_H \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)} = 1 - \frac{T_L}{T_H},$$

la cual corresponde a la ecuación 20.4.

¿Puede la eficiencia del motor de Carnot alcanzar el 100%? Para poder obtener una eficiencia de 100%, T_H , en la ecuación 20.4 habría sido elevado al infinito o T_L habría sido disminuido hasta el cero absoluto. Ninguna de estas opciones es posible. De este modo, la eficiencia del motor de Carnot siempre será menor a 100 por ciento.

Advierta que el total del trabajo realizado por el sistema durante el ciclo de Carnot de la derivación 20.1 es $W = W_{12} + W_{34}$, y las dos contribuciones al total del trabajo debido a los dos procesos isotérmicos son $W_{12} = Q_H$ y $W_{34} = -Q_L$. Por consiguiente, el total del trabajo mecánico producido por el ciclo de Carnot también se puede escribir como

$$W = Q_H - Q_L. \quad (20.5)$$

Como la eficiencia generalmente se define como $\epsilon = W/Q_H$ (ecuación 20.1), la eficiencia de un motor de Carnot puede de este modo, ser expresada también como

$$\epsilon = \frac{Q_H - Q_L}{Q_H}. \quad (20.6)$$

En esta formulación, la eficiencia de un motor de Carnot está determinada por el calor que se toma del depósito caliente menos el calor que se da al depósito frío. Para que esta expresión de la eficiencia del motor de Carnot pueda producir una eficiencia de 100%, el calor que se regresa al depósito frío tendría que ser cero. Inversamente, si la eficiencia del motor de Carnot es menor a 100%, el motor no puede convertir todo el calor que toma del depósito caliente a trabajo aprovechable.

El físico francés Nicolás Carnot (1796-1832), quien desarrolló el ciclo de Carnot en el siglo XIX, demostró la siguiente afirmación, conocida como el **teorema de Carnot**:

Ningún motor térmico que opera entre dos depósitos térmicos puede ser más eficiente que el motor de Carnot cuando opera entre dos depósitos térmicos.

20.1 Ejercicio en clase

¿Cuál es el máximo coeficiente de desempeño (de Carnot) de un refrigerador en una habitación con una temperatura de 22.0 °C? La temperatura en el interior del refrigerador se mantiene a 2.0 °C.

- a) 0.10 d) 5.8
b) 0.44 e) 13.8
c) 3.0

No vamos a presentar pruebas del teorema de Carnot. Sin embargo, advertiremos la idea que está detrás de la prueba después de discutir la segunda ley de la termodinámica en la sección 20.5.

Nos podemos imaginar ejecutando un motor de Carnot en reversa, creando un “refrigerador de Carnot”. El máximo coeficiente de desempeño de tal refrigerador funcionando entre dos depósitos térmicos es

$$K_{\text{máx}} = \frac{T_L}{T_H - T_L}. \quad (20.7)$$

De igual modo, el máximo coeficiente de desempeño de una bomba de calor funcionando entre dos depósitos térmicos está dado por

$$K_{\text{bomba de calor máx}} = \frac{T_H}{T_H - T_L}. \quad (20.8)$$

Observe que el ciclo de Carnot constituye el proceso termodinámico ideal, el cual es el límite superior absoluto en lo que es teóricamente alcanzable. Las complicaciones del mundo real aminoran drásticamente la eficiencia, como veremos en la sección 20.4. El típico coeficiente de desempeño para un refrigerador real o bomba de calor es alrededor de 3.

EJEMPLO 20.3

Trabajo realizado por un motor de Carnot

Un motor de Carnot necesita 3 000 J de calor de un depósito térmico con una temperatura $T_H = 500$ K y descarga calor a un depósito térmico con una temperatura $T_L = 325$ K.

PROBLEMA

¿Cuánto trabajo hace el motor de Carnot en este proceso?

SOLUCIÓN

Empezamos con la definición de la eficiencia, ϵ , de un motor térmico (ecuación 20.1):

$$\epsilon = \frac{W}{Q_H},$$

donde W es el trabajo que el motor realiza y Q_H es el calor que se toma del depósito térmico caliente. Es entonces cuando podemos usar la ecuación 20.4 para la eficiencia de un motor de Carnot:

$$\epsilon = 1 - \frac{T_L}{T_H}.$$

Al combinar estas dos expresiones para la eficiencia nos da

$$\frac{W}{Q_H} = 1 - \frac{T_L}{T_H}.$$

Ahora podemos expresar el trabajo realizado por el motor de Carnot:

$$W = Q_H \left(1 - \frac{T_L}{T_H} \right).$$

Al poner los valores numéricos nos da la cantidad de trabajo realizado por el motor de Carnot:

$$W = (3\,000 \text{ J}) \left(1 - \frac{325 \text{ K}}{500 \text{ K}} \right) = 1\,050 \text{ J}.$$

20.2 Ejercicio en clase

¿Cuál es el máximo coeficiente de desempeño (de Carnot) de una bomba de calor que se usa para calentar una casa a 22.0 °C de temperatura interior? La temperatura fuera de la casa es de 2.0 °C.

- a) 0.15 d) 6.5
b) 1.1 e) 14.8
c) 3.5

20.1 Oportunidad de autoexamen

¿Cuál es la eficiencia del motor de Carnot en el ejemplo 20.3?

EJEMPLO 20.4

Eficiencia máxima de una planta de energía eléctrica

En Estados Unidos, 85% de la electricidad se genera al quemar combustibles fósiles para producir vapor, el cual a su vez impulsa los alternadores que producen la electricidad. Las plantas de energía pueden producir vapor con una temperatura tan alta como 600 °C presurizando el vapor. El desperdicio de calor resultante necesita descargarse al medio ambiente a una temperatura de 20.0 °C.

PROBLEMA

¿Cuál es la eficiencia máxima de una planta de energía?

SOLUCIÓN

La eficiencia máxima de una planta de energía es la eficiencia de un motor térmico de Carnot (ecuación 20.4) funcionando entre los 20.0 °C y los 600 °C:

$$\epsilon = 1 - \frac{T_L}{T_H} = 1 - \frac{293 \text{ K}}{873 \text{ K}} = 66.4\%.$$

Las plantas de energía reales alcanzan una eficiencia disminuida de alrededor de 40%. Sin embargo, muchas plantas bien diseñadas simplemente no desechan el desperdicio de calor al medio ambiente. En vez de esto, emplean *cogeneración* o *energía y calor combinado* (ECC). El

(continúa)

FIGURA 20.7 La planta de energía eléctrica generada por carbón de la Michigan State University provee toda la electricidad que se usa en el campus, así como también provee de calefacción en el invierno y aire acondicionado en el verano.



(continuación)

calor que normalmente se habría perdido se usa para calentar casas y edificios aledaños. Este calor incluso puede usarse para operar acondicionadores de aire que enfrían estructuras cercanas, un proceso llamado *trigeneración*. Al emplear ECC, plantas de energía modernas pueden utilizar hasta 90% de la energía usada para generar electricidad. Por ejemplo, la planta de energía de Michigan State University (figura 20.7) quema carbón para generar electricidad para su campus. El calor de desecho se utiliza para calentar los edificios del campus en invierno y para accionar los acondicionadores de aire de los edificios del campus en verano.

20.4 Motores reales y eficiencia

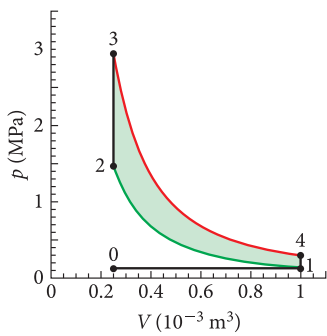


FIGURA 20.8 El ciclo de Otto consiste en dos procesos adiabáticos y dos procesos de volumen constante.

Un motor térmico real basado en el ciclo de Carnot no es práctico. Sin embargo, muchos de los motores térmicos prácticos que se utilizan a diario son diseñados para funcionar por medio de procesos termodinámicos cíclicos. Como ejemplo de una operación de un motor del mundo real, vamos a examinar el ciclo de Otto. De nuevo, suponemos que como medio de trabajo tenemos un gas ideal.

Ciclo de Otto

El **ciclo de Otto** se usa en los motores de combustión interna modernos de los automóviles. Este ciclo consiste en dos procesos adiabáticos y dos procesos de volumen constante (isocóricos) (figura 20.8) y es la configuración predeterminada de un motor de combustión interna de cuatro ciclos. El típico arreglo del pistón cilíndrico de un motor de combustión interna se muestra en la figura 20.9.

La energía térmica se provee por el encendido de una mezcla de combustible y aire. El ciclo empieza con el pistón en lo alto del cilindro y prosigue a través de los pasos siguientes:

- **Carrera de admisión.** El pistón se mueve hacia abajo con la válvula de admisión abierta, aspirando la mezcla de combustible y aire [punto 0 a punto 1 en las figuras 20.8 y 20.9a)] y la válvula de admisión se cierra.
- **Carrera de compresión.** El pistón se mueve hacia arriba, comprimiendo la mezcla de combustible y aire adiabáticamente [punto 1 a punto 2 en las figuras 20.8 y 20.9b)].
- La bujía prende la mezcla de combustible y aire, incrementando la presión a volumen constante (punto 2 a punto 3 en la figura 20.8).
- **Carrera de potencia.** Los gases calientes empujan el pistón hacia abajo adiabáticamente [punto 3 a punto 4 en las figuras 20.8 y 20.9c)].
- Cuando el pistón desciende por completo (punto 4 en la figura 20.8), la válvula de escape se abre. Esto reduce la presión en volumen constante, provee el rechazo del calor y mueve el sistema de regreso al punto 1.
- **Carrera de escape.** El pistón se mueve hacia arriba, forzando a los gases quemados a salir [punto 1 al punto 0 en las figuras 20.8 y 20.9d)], y la válvula de escape se cierra.

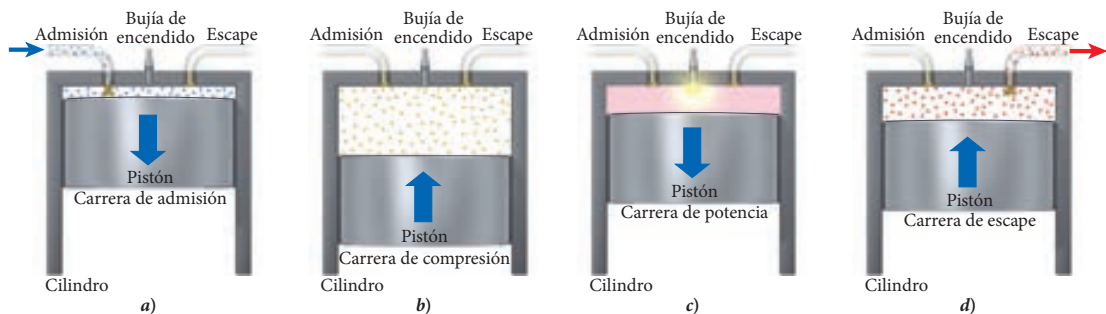


FIGURA 20.9 Las cuatro carreras de un motor de combustión interna: a) Carrera de admisión, en la cual la mezcla de combustible-aire es aspirada hacia el cilindro. b) Carrera de compresión, en la cual la mezcla de combustible-aire es comprimida. c) Carrera de potencia, donde la mezcla de combustible-aire es encendida por la bujía, liberando el calor. d) Carrera de escape, durante la cual los gases quemados son empujados fuera del cilindro.

La proporción del volumen expandido, V_1 , al volumen comprimido, V_2 , se conoce como *proporción de compresión*:

$$r = \frac{V_1}{V_2}. \quad (20.9)$$

La eficiencia, ϵ , del ciclo de Otto se puede expresar como una función de la proporción de compresión únicamente:

$$\epsilon = 1 - r^{1-\gamma}. \quad (20.10)$$

(En contraste, para el ciclo de Carnot, la ecuación 20.4 mostró que la eficiencia depende solamente en la proporción de las dos temperaturas.)

DEDUCCIÓN 20.2

La eficiencia del ciclo de Otto

El ciclo de Otto empieza en el punto 0 de la figura 20.8. El proceso del punto 0 al punto 1 simplemente extrae la mezcla de combustible y aire hacia el cilindro y no juega un rol adicional en las consideraciones de eficiencia. Tampoco lo hace el proceso inverso del punto 1 al punto 0, la carrera de escape, la cual remueve los productos de combustión del cilindro.

El proceso del punto 1 al punto 2 es adiabático. La energía térmica transferida es de cero, y el trabajo hecho por el sistema (vea el capítulo 19) está dado por

$$W_{12} = \frac{nR}{1-\gamma}(T_2 - T_1).$$

Para el proceso de volumen constante del punto 2 al punto 3, el trabajo hecho por el sistema es de cero, $W_{23} = 0$, y la energía térmica transferida al sistema (vea el capítulo 18) está dada por

$$Q_{23} = nC_V(T_3 - T_2).$$

El proceso del punto 3 al punto 4 es otra vez adiabático, y la energía térmica transferida es cero. El trabajo hecho por el sistema es

$$W_{34} = \frac{nR}{1-\gamma}(T_4 - T_3).$$

El proceso del punto 4 al punto 1 toma lugar con el volumen constante, así que el trabajo hecho por el sistema es de cero, $W_{41} = 0$, y el calor expulsado del sistema es

$$Q_{41} = nC_V(T_4 - T_1).$$

El trabajo total hecho por el sistema es entonces simplemente la suma de las cuatro contribuciones del ciclo entero (recuerde que $W_{23} = W_{41} = 0$)

$$W = W_{12} + W_{34} = \frac{nR}{1-\gamma}(T_2 - T_1) + \frac{nR}{1-\gamma}(T_4 - T_3) = \frac{nR}{1-\gamma}(T_2 - T_1 + T_4 - T_3).$$

El factor $R/(1-\gamma)$ se puede expresar en términos de la capacidad específica del calor, C_V :

$$\frac{R}{1-\gamma} = \frac{C_p - C_V}{1 - \frac{C_p}{C_V}} = -C_V.$$

La eficiencia del ciclo de Otto es entonces (el trabajo neto hecho dividido entre el calor ganado por el sistema por ciclo)

$$\epsilon = \frac{W}{Q_{23}} = \frac{-nC_V(T_2 - T_1 + T_4 - T_3)}{nC_V(T_3 - T_2)} = 1 - \frac{(T_4 - T_1)}{(T_3 - T_2)}. \quad (i)$$

Podemos usar el hecho de que el proceso del punto 1 al punto 2 y el proceso del punto 3 al punto 4 se escriben adiabáticamente (vea la sección 19.5)

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1} \Rightarrow T_2 = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} T_1 \quad (ii)$$

(continúa)

(continuación)

$$T_3 V_2^{\gamma-1} = T_4 V_1^{\gamma-1} \Rightarrow T_3 = \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} T_4, \quad (\text{iii})$$

donde V_1 es el volumen en los puntos 1 y 4 y V_2 es el volumen de los puntos 2 y 3. Al sustituir las expresiones T_2 y T_3 de las ecuaciones (ii) y (iii) en la ecuación (i) para la eficiencia, obtenemos la ecuación 20.10:

$$\epsilon = 1 - \frac{(T_4 - T_1)}{\left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} T_4 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} T_1} = 1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{1-\gamma} = 1 - r^{1-\gamma}.$$

20.2 Oportunidad de autoexamen

¿Cuánto aumentaría la eficiencia teórica de un motor de combustión interna si la proporción de compresión aumentara de 4 a 15?

20.3 Ejercicio en clase

¿Cuál de las cuatro temperaturas en el ciclo de Otto es la más alta?

- a) T_1 d) T_4
 b) T_2 e) Las cuatro son idénticas
 c) T_3

Como un ejemplo numérico, la proporción de compresión del ciclo de Otto mostrado en la figura 20.8 es de 4, y así, la eficiencia de ese ciclo de Otto es $\epsilon = 1 - 4^{1-7/5} = 1 - 4^{-0.4} = 0.426$. De esta manera, la eficiencia teórica de un motor que funciona en el ciclo de Otto con una proporción de compresión de 4 es 42.6%. Observe, sin embargo, que éste es el límite superior teórico para la eficiencia en esta proporción de compresión. En principio, un motor de combustión interna se puede hacer más eficiente al incrementar la proporción de compresión, pero factores prácticos impiden este planteamiento. Por ejemplo, si la proporción de compresión es demasiado alta, la mezcla de combustible y aire se detonará antes de terminar la compresión. Proporciones de compresión muy altas ponen altos esfuerzos en los componentes del motor. Las verdaderas proporciones de motores de combustión interna accionados por gasolina alcanzan rangos entre 8 y 12.

Motores reales de Otto

La verdadera eficiencia de un motor de combustión interna es de cerca de 20%. ¿Por qué esto es mucho más bajo que el límite superior teórico? Existen muchas razones. Primero, las partes “adiabáticas” del ciclo no proceden realmente sin el intercambio de calor entre el gas en el pistón y el bloque del motor. Esto es obvio; todos sabemos por experiencia que los motores se calientan cuando están funcionando, y esta elevación de la temperatura es una consecuencia directa del calor que se filtra del gas que está experimentando la compresión y la ignición. Segundo, la mezcla de gasolina y aire no es exactamente un gas ideal y de este modo tiene pérdidas de energía debido a la excitación interna. Tercero, durante el proceso de rechazo del calor y la ignición, el volumen no se mantiene exactamente constante, porque ambos procesos toman un poco de tiempo, y los pistones se siguen moviendo constantemente durante ese tiempo. Cuarto, durante las carreras de admisión y escape, la presión en la cámara no es exactamente la presión atmosférica por las consideraciones dinámicas del gas. Todos estos efectos, junto con pérdidas pequeñas de fricción, se combinan para reducir la eficiencia del motor. Todas las empresas grandes de automóviles, así como los equipos de carreras automotrices, gobiernos y laboratorios de universidades, incluso algunos aficionados, constantemente están buscando maneras de incrementar la eficiencia del motor, porque una mayor eficiencia significa mayor potencia de salida y (o) mejor consumo de combustible por kilómetro. Desde la crisis del petróleo de mediados de la década de 1970, la eficiencia de los motores automovilísticos en Estados Unidos se ha incrementado de manera constante (vea la sección 5.7), pero aún se requiere un desempeño mucho mejor del litro por kilómetro para que dicho país reduzca las emisiones de gas de invernadero y su dependencia del petróleo extranjero.

PROBLEMA RESUELTO 20.1 Eficiencia de un motor de automóvil

Un automóvil con un motor de combustión interna accionado por gasolina viaja con una rapidez de 26.8 m/s (60.0 mph) en un camino nivelado y usa gasolina a una proporción de 6.92 L/100 km (34.0 mpg). La energía contenida por la gasolina es de 34.8 MJ/L.

PROBLEMA

Si el motor tiene una eficiencia de 20.0%, ¿cuánta potencia se entrega para mantener al automóvil moviéndose a una rapidez constante?

SOLUCIÓN

PIENSE

Podemos calcular cuánta energía está siendo abastecida al motor, al calcular la cantidad de combustible usado y multiplicando el contenido energético de dicho combustible. La eficiencia es el

trabajo útil dividido entre la energía que está siendo abastecida; así, una vez que determinemos la energía abastecida, podemos encontrar el trabajo útil de la eficiencia dada del motor. Al dividir el trabajo y la energía entre un intervalo de tiempo arbitrario, podemos determinar la media de la potencia entregada.

ESBOCE

La figura 20.10 muestra un motor de automóvil accionado por gasolina que funciona como un motor térmico.

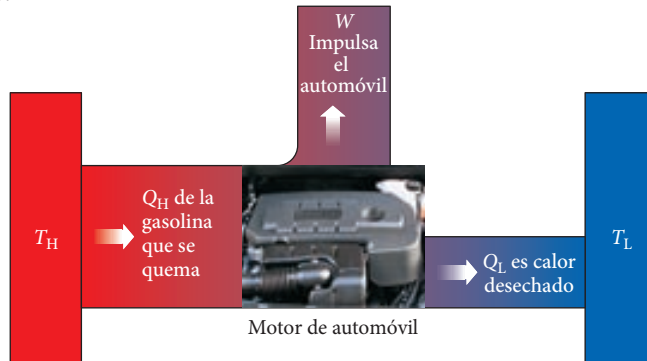


FIGURA 20.10 Motor de automóvil accionado por gasolina funcionando como un motor térmico para accionar un automóvil viajando a una rapidez constante v en una superficie horizontal.

INVESTIGUE

El automóvil está viajando a una rapidez v . La tasa, χ , a la cual el automóvil quema la gasolina, se puede expresar en términos del volumen de gasolina quemada por unidad de distancia. Podemos calcular el volumen de la gasolina quemada por unidad de tiempo, V_t , al multiplicar la rapidez del automóvil por la tasa, χ , a la que el automóvil quema la gasolina:

$$V_t = \chi v. \quad (\text{i})$$

La energía por unidad de tiempo abastecido al motor al consumir el combustible es la potencia, P , dada por el volumen de gasolina usada por unidad de tiempo multiplicada por la energía contenida en la gasolina, E_g :

$$P = V_t E_g. \quad (\text{ii})$$

La eficiencia del motor, ϵ , está dada por la ecuación 20.1:

$$\epsilon = \frac{W}{Q_H},$$

donde W es el trabajo útil y Q_H es la energía térmica provista por el motor. Si dividimos tanto W como Q_H entre el tiempo de intervalo, t , obtendremos

$$\epsilon = \frac{W/t}{Q_H/t} = \frac{P_{\text{dada}}}{P}, \quad (\text{iii})$$

donde P_{dada} es la potencia dada por el motor del automóvil.

SIMPLIFIQUE

Podemos combinar las ecuaciones desde (i) hasta (iii) para obtener

$$P_{\text{dada}} = \epsilon P = \epsilon V_t E_g = \epsilon \chi v E_g.$$

CALCULE

La potencia dada es

$$P_{\text{dada}} = \epsilon \chi v E_g = (0.200) \left(\frac{6.92 \text{ L}}{100 \cdot 10^3 \text{ m}} \right) (26.8 \text{ m/s}) (34.8 \cdot 10^6 \text{ J/L}) = 12\,907.7 \text{ W}.$$

REDONDEE

Reportamos nuestro resultado con tres cifras significantes:

$$P_{\text{dada}} = 12\,900 \text{ W} = 12.9 \text{ kW} = 17.3 \text{ hp}.$$

(continúa)

(continuación)

VUELVA A REVISAR

Para volver a revisar nuestro resultado, calculamos la potencia requerida para mantener al automóvil moviéndose a 60.0 mph en contra de la resistencia del aire. La potencia requerida, P_{aire} , es igual al producto de la fuerza de la resistencia del aire, F_{arrastre} , y la rapidez del automóvil:

$$P_{\text{aire}} = F_{\text{arrastre}}v. \tag{iv}$$

La fuerza de arrastre creada por la resistencia del aire está dada por

$$F_{\text{arrastre}} = Kv^2. \tag{v}$$

La constante K ha sido encontrada empíricamente como

$$K = \frac{1}{2}c_d A\rho, \tag{vi}$$

donde c_d es el coeficiente de arrastre del automóvil, A es su área de sección transversal frontal, y ρ es la densidad del aire. Al combinar las ecuaciones desde (iv) hasta (vi) nos da

$$P_{\text{aire}} = F_{\text{arrastre}}v = (Kv^2)v = \frac{1}{2}c_d A\rho v^3.$$

Al usar $c_d = 0.33$, $A = 2.2 \text{ m}^2$ y $\rho = 1.29 \text{ kg/m}^3$, obtenemos

$$P_{\text{aire}} = \frac{1}{2}(0.33)(2.2 \text{ m}^2)(1.29 \text{ kg/m}^3)(26.8 \text{ m/s})^3 = 9\,014 \text{ W} = 9.0 \text{ kW}.$$

Este resultado de la potencia requerida para vencer la resistencia del aire ($P_{\text{aire}} = 9.0 \text{ kW} = 12 \text{ hp}$) está cerca de 70% del valor calculado para la potencia dada ($P_{\text{dada}} = 12.9 \text{ kW} = 17.3 \text{ hp}$). La potencia sobrante se usa para vencer otras clases de fricciones, como la fricción de rodamiento. De este modo, nuestra respuesta parece razonable.

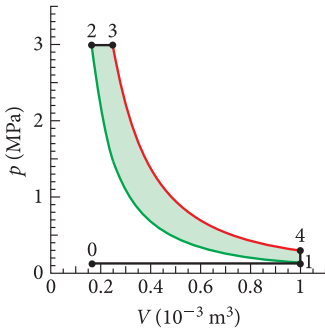


FIGURA 20.11 Diagrama pV para el ciclo de Diesel.

20.4 Ejercicio en clase

¿En qué parte del ciclo de Diesel en la figura 20.11 hay calor agregado?

- En el trayecto del punto 0 al punto 1.
- En el trayecto del punto 1 al punto 2.
- En el trayecto del punto 2 al punto 3.
- En el trayecto del punto 3 al punto 4.
- En el trayecto del punto 4 al punto 1.

20.5 Ejercicio en clase

¿Durante qué parte(s) del ciclo de Diesel en la figura 20.11 el trabajo mecánico está hecho por el motor?

- En el trayecto del punto 0 al punto 1 y en el trayecto del punto 1 al punto 0.
- En el trayecto del punto 1 al punto 2.
- En el trayecto del punto 2 al punto 3 y en el trayecto del punto 3 al punto 4.
- En el trayecto del punto 4 al punto 1.

Ciclo de Diesel

Los motores diesel y de gasolina tienen diseños algo diferentes. Los motores diesel no comprimen la mezcla de combustible y aire, sino más bien únicamente el aire (trayectoria desde el punto 1 hasta el punto 2 en la figura 20.11, curva verde). Este combustible es introducido (entre el punto 2 y el punto 3) únicamente después de que el aire ha sido comprimido. La energía térmica de la compresión enciende la mezcla (de este modo, no se requiere de una bujía de ignición). Este proceso de combustión empuja al pistón hacia afuera en una presión constante. Después de la combustión, los productos de la combustión empujan al pistón aún más lejos en el mismo modo adiabático que en el ciclo de Otto (trayectoria desde el punto 3 al punto 4, curva roja). El proceso del rechazo del calor hacia el medio ambiente en un volumen constante (entre los puntos 4 y 1 en el diagrama) también procede del mismo modo que en un ciclo de Otto, como la carrera de admisión (trayectoria desde 0 hasta 1) y la carrera de escape (trayectoria desde 1 hasta 0). Los motores diesel tienen una proporción de compresión más alta y de este modo tienen una eficiencia más alta que los motores de cuatro tiempos accionados por gasolina, aunque tienen un ciclo termodinámico un poco diferente.

La eficiencia de un motor diesel ideal está dada por

$$\epsilon = 1 - r^{1-\gamma} \frac{\alpha^\gamma - 1}{\gamma(\alpha - 1)}, \tag{20.11}$$

donde la proporción de la compresión es, otra vez, $r = V_1/V_2$ (del mismo modo que lo es para el ciclo de Otto), γ es nuevamente la proporción del calor específico a presión constante y volumen constante, $\gamma = C_p/C_v$ (introducidos en el capítulo 19), y $\alpha = V_3/V_2$ es llamada la relación de corte, la proporción entre los volúmenes inicial y final de la fase de combustión. La derivación de esta fórmula procede similarmente a las derivaciones 20.1 y 20.2 para los ciclos de Carnot y Otto, pero está omitida aquí.

Automóviles híbridos

Los automóviles híbridos combinan el motor de gasolina con un motor eléctrico para lograr una eficiencia mejor de lo que un motor de gasolina podría lograr solo. La mejora en la eficiencia es resultado de usar un motor de gasolina más pequeño de lo que en realidad se necesitaría y un motor eléctrico que funciona con una batería cargada por el motor de gasolina, para suplemen-

tar el motor de gasolina cuando se requiere mayor potencia. Por ejemplo, el Ford Escape Hybrid (figura 20.12) tiene 99.2 kW (133 hp) de motor de gasolina acoplado con un motor eléctrico de 70 kW (94-hp), y el Ford Escape tiene 149-kW (200 hp) de motor de gasolina. Además, el motor de gasolina usado en el Ford Escape Hybrid, así como también en los vehículos de Toyota y Honda, aplica un ciclo termodinámico diferente al ciclo de Otto. Este *ciclo de Atkinson* incluye tiempo de válvulas variable para incrementar la fase de expansión del proceso, permitiendo que más trabajo útil sea extraído de la energía consumida por el motor. Un motor de ciclo de Atkinson produce menos potencia por el desplazamiento comparado con el motor de ciclo de Otto, pero tiene mayor eficiencia.



FIGURA 20.12 El motor de gasolina y el motor eléctrico de un automóvil híbrido.

En un manejo de frena y avanza, los automóviles híbridos tienen la ventaja de usar frenos regenerativos en vez de los frenos normales. Los frenos convencionales usan fricción para parar el automóvil, lo que convierte a la energía cinética del automóvil en energía desperdiciada en la forma de energía térmica (y desgasta las almohadillas de los frenos). Los frenos regenerativos conectan los neumáticos a un generador eléctrico (lo que puede ser el motor eléctrico que maneja el automóvil), lo que convierte la energía cinética del automóvil en energía eléctrica. Esta energía se almacena en la batería del automóvil híbrido para ser usada después. Además, el motor de gasolina del automóvil híbrido puede ser apagado cuando el automóvil se detiene, así el automóvil no utiliza energía mientras espera en un alto.

Cuando se manejan en carretera, los automóviles híbridos se aprovechan del hecho de que el motor de gasolina puede correr a una rapidez constante, correspondiente a su más eficiente rapidez de operación, en vez de tener que correr a una rapidez dictada por la rapidez del automóvil. La operación de un motor de gasolina a una rapidez constante mientras la rapidez del automóvil cambia se logra por una transmisión continuamente variable. La transmisión se acopla con el motor de gasolina y con el motor eléctrico a los neumáticos del automóvil, permitiendo que el motor de gasolina corra a su rapidez más eficiente mientras toma la potencia del motor eléctrico cuando la necesita.

Eficiencia y la crisis de energía

La eficiencia de los motores y refrigeradores no son únicamente constructos teóricos, sino que han tenido consecuencias económicas muy importantes, las cuales son extremadamente relevantes para solucionar la crisis de energía. Las eficiencias y los coeficientes de desempeño calculados en este capítulo con la ayuda de los principios de termodinámica son límites superiores teóricos. Las complicaciones del mundo real siempre reducen las eficiencias verdaderas de los motores y los coeficientes de desempeño de los refrigeradores. Pero la investigación de la ingeniería puede vencer estas complicaciones del mundo real y proveer un mejor desempeño de los dispositivos reales, acercándose a los límites ideales.

Un ejemplo impresionante de mejora en el desempeño ha ocurrido con los refrigeradores vendidos en Estados Unidos, de acuerdo con los datos recopilados por Steve Chu (vea la figura

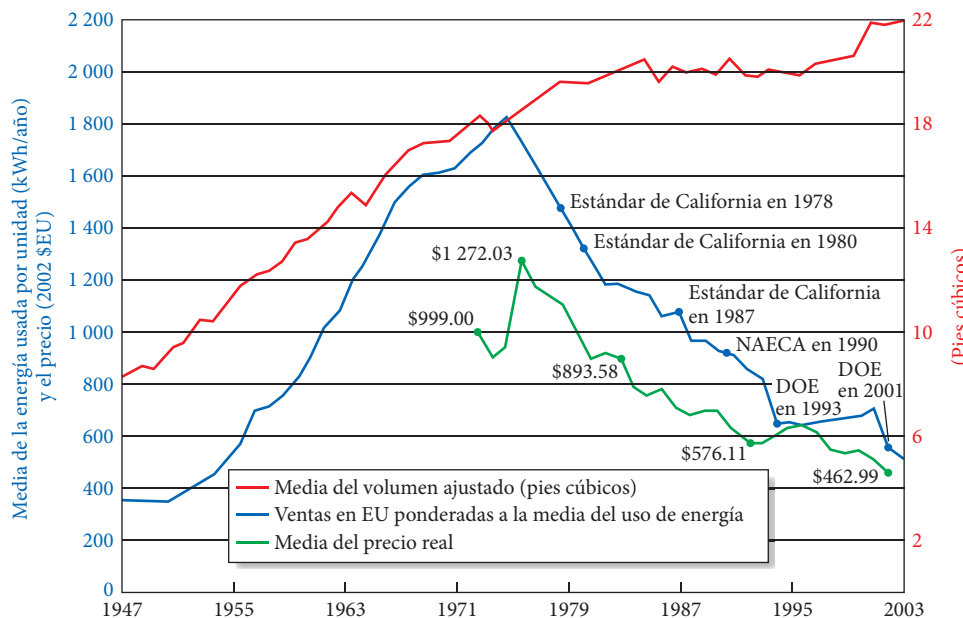


FIGURA 20.13 Media del volumen de los refrigeradores en EU (línea roja), precio (línea verde) y uso de energía (línea azul) desde 1947 hasta 2003.

20.13). Desde 1975, el tamaño medio de un refrigerador en las cocinas de Estados Unidos se ha incrementado cerca de 20%, pero a través de una combinación de estándares de energía más duros e investigaciones y desarrollo en el diseño y tecnología de los refrigeradores, la media de consumo de electricidad decayó por dos tercios, un total de 1 200 kWh/año, de 1 800 kWh/año en 1975 a 600 kWh/año en el 2003.

Alrededor de 150 millones de nuevos refrigeradores y congeladores se compran cada año en Estados Unidos, y cada uno ahorra aproximadamente 1 200 kWh/año, un total de 180 mil millones de kWh ($6.5 \cdot 10^{17} \text{ J} = 0.65 \text{ EJ}$) de energía se ha ahorrado cada año. Este ahorro (en 2009) es aproximadamente el doble tanto como la energía combinada producida por el uso de la energía eólica (30 mil millones de kWh/año), la energía solar (2 mil millones de kWh/año), geotérmica (14 mil millones de kWh/año) y de biomasa (54 mil millones de kWh/año).

El consumo de energía es directamente proporcional al costo de la energía, así es que la media de las casas de Estados Unidos está ahorrando un total de casi 200 dólares cada año en costos de electricidad por usar refrigeradores más eficientes a los estándares de 1975. Además, aunque los refrigeradores se han vuelto mucho mejores, su precio ha disminuido más de la mitad, también indicado en la figura 20.13. Así es que un refrigerador más eficiente no es más caro. ¡Y mantiene nuestras comidas y bebidas favoritas tan frías como lo haría un modelo de 1975!

20.5 La segunda ley de la termodinámica

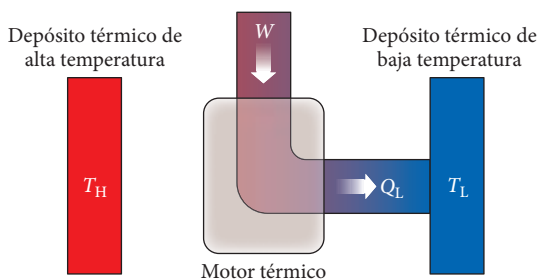


FIGURA 20.14 Diagrama de flujo de calor que muestra un sistema que convierte trabajo en calor completamente.

Vimos en la sección 20.1 que la primera ley de la termodinámica se satisface si un vaso de agua fría se entibia al permanecer a temperatura ambiente o se vuelve más frío. Sin embargo, la segunda ley de la termodinámica es un principio general que establece inhibiciones en la cantidad y dirección de la energía térmica transferida entre los sistemas y en las posibles eficiencias de los motores térmicos. Este principio va más allá de la conservación energética de la primera ley de la termodinámica.

En el capítulo 18 discutimos el famoso experimento de Joule que demostró que el trabajo mecánico podría ser convertido por completo en calor, como se ilustra en la figura 20.14. En contraste, los experimentos muestran que es imposible construir un motor térmico que convierta completamente el calor en trabajo. Este concepto se ilustra en la figura 20.15.

En otras palabras, no es posible construir un motor térmico que sea 100% eficiente. Este hecho constituye la base de la **segunda ley de la termodinámica**:

Es imposible para un sistema experimentar un proceso en el cual absorba calor de un depósito térmico a cierta temperatura y convierta ese calor completamente en trabajo mecánico sin rechazar calor hacia un depósito térmico de menor temperatura.

Esta formulación es a menudo llamada la *enunciación de Kelvin-Planck sobre la segunda ley de la termodinámica*. Como ejemplo, considere un libro que se desliza sobre una mesa. El libro se desliza hasta detenerse, y entonces la energía mecánica de movimiento se vuelve energía térmica. Esta energía térmica toma la forma de movimiento aleatorio de las moléculas del libro, del aire y de la mesa. Es imposible convertir los movimientos aleatorios de regreso a los movimientos organizados del libro. Sin embargo, es posible convertir algo del movimiento aleatorio relacionado con la energía térmica de regreso a la energía mecánica. Los motores térmicos hacen esa clase de conversión.

Si la segunda ley de la termodinámica no fuera cierta, varios escenarios imposibles ocurrirían. Por ejemplo, una planta de energía eléctrica podría operar al tomar calor del aire circundante y un transatlántico podría impulsarse a sí mismo tomando el calor del agua del océano. Estos escenarios no violan la primera ley de la termodinámica porque la energía se conserva. El hecho de que no pueden ocurrir demuestra que la segunda ley contiene información adicional acerca de cómo la naturaleza funciona, más allá del principio de conservación de la energía. La segunda ley limita las maneras en las que la energía puede ser usada.

Otra forma de establecer la segunda ley de la termodinámica se relaciona con los refrigeradores. Sabemos que los flujos calientes son espontáneos de un depósito térmico caliente a un depósito térmico frío. El calor nunca fluye *espontáneamente* de un depósito térmico frío a un depósito

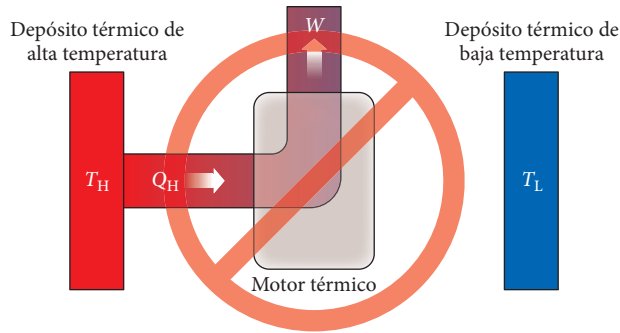


FIGURA 20.15 Diagrama de flujo de calor que ilustra la imposibilidad del proceso de convertir completamente el calor en trabajo útil sin rechazar calor hacia el depósito térmico de baja temperatura.

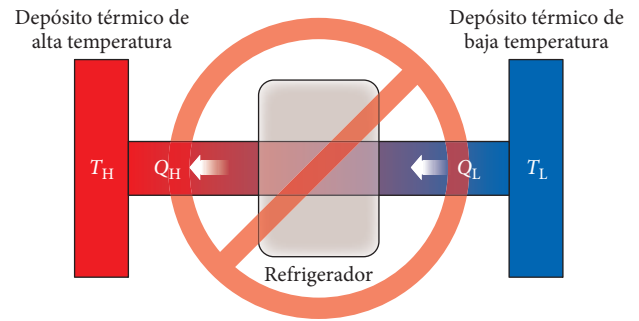


FIGURA 20.16 Diagrama de flujo de calor que demuestra el proceso imposible de mover el calor del depósito térmico de baja temperatura al depósito térmico de alta temperatura sin usar ningún tipo de trabajo.

térmico caliente. Un refrigerador es un motor térmico que mueve el calor de un depósito térmico frío a un depósito térmico caliente; sin embargo, la energía necesita ser abastecida al refrigerador para que esta transferencia tenga lugar, como se muestra en la figura 20.5b). El hecho es que es imposible para un refrigerador transformar la energía térmica de un depósito frío a un depósito caliente sin hacer trabajo, como se ilustra en la figura 20.16. Este hecho es de los fundamentos de otra forma de la segunda ley de la termodinámica:

Es imposible para cualquier proceso transferir la energía térmica del depósito térmico frío al depósito térmico caliente sin que no se haga ningún trabajo para conseguir hacer la transferencia.

Esta formulación equivalente es a menudo llamada la *enunciación de Clausius para la segunda ley de la termodinámica*.

DEDUCCIÓN 20.3 Teorema de Carnot

Lo siguiente explica cómo probar el teorema de Carnot, indicado en la sección 20.3. Suponga que hay dos depósitos térmicos, un motor térmico trabaja entre estos dos depósitos, y un motor de Carnot que opera en reversa como un refrigerador entre los depósitos, como se muestra en la figura 20.17.

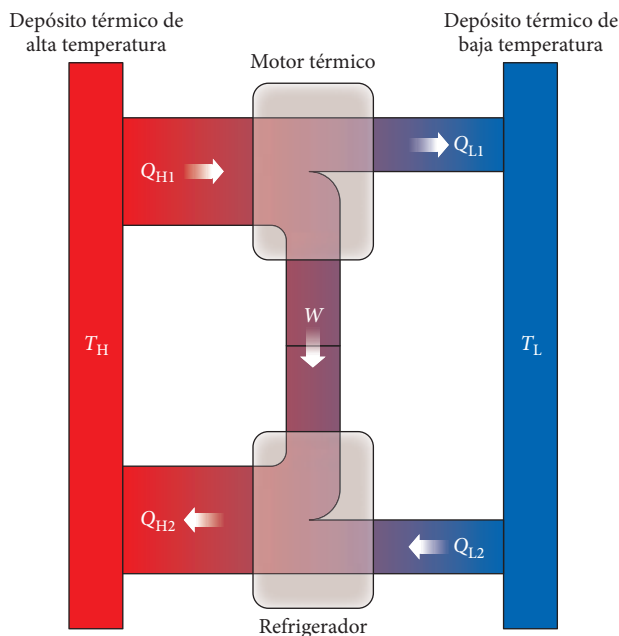


FIGURA 20.17 Un motor térmico entre los dos depósitos térmicos produce trabajo. Un motor de Carnot que opera en reversa como un refrigerador entre dos depósitos térmicos es conducido por el trabajo producido por el motor térmico.

(continúa)

(continuación)

Vamos a suponer que el refrigerador de Carnot opera con la eficiencia teórica dada por

$$\epsilon_2 = \frac{W}{Q_{H2}}, \quad (i)$$

donde W es el trabajo requerido para proporcionar calor Q_{H2} dentro del depósito de alta temperatura. También suponemos que este trabajo requerido está siendo provisto por el motor térmico que funciona entre los mismos dos depósitos. La eficiencia del motor térmico se puede expresar como

$$\epsilon_1 = \frac{W}{Q_{H1}}, \quad (ii)$$

donde Q_{H1} es el calor removido del depósito de alta temperatura por el motor térmico. Como ambas ecuaciones (i) y (ii) contienen el mismo trabajo, W , podemos resolver cada una por el trabajo y entonces establecer las expresiones iguales una a la otra:

$$\epsilon_1 Q_{H1} = \epsilon_2 Q_{H2}.$$

De este modo, la proporción de las dos eficiencias es

$$\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} = \frac{Q_{H2}}{Q_{H1}}.$$

Si la eficiencia del motor térmico es igual a la eficiencia del refrigerador de Carnot ($\epsilon_1 = \epsilon_2$), entonces tenemos que $Q_{H1} = Q_{H2}$, lo que significa que el calor removido del depósito de alta temperatura es igual al calor añadido por el depósito de alta temperatura. Si la eficiencia del motor térmico es más alta que la eficiencia del refrigerador de Carnot ($\epsilon_1 > \epsilon_2$), entonces tenemos que $Q_{H2} > Q_{H1}$, lo que significa que se gana más calor de lo que se pierde por el depósito de alta temperatura. Al aplicar la primera ley de la termodinámica a todo el sistema nos dice que el motor térmico que trabaja en conjunto con el refrigerador de Carnot es entonces capaz de transferir la energía térmica del depósito de baja temperatura al depósito de alta temperatura sin que se haya proporcionado ningún trabajo. Al actuar en conjunto, estos dos dispositivos estarían violando la afirmación de Clausius sobre la segunda ley de la termodinámica. De esa manera, ningún motor térmico puede ser más eficiente que un motor de Carnot.

La conversión de trabajo mecánico a energía térmica (como cuando hay fricción) y el flujo de calor de depósito térmico caliente a uno frío son procesos irreversibles. La segunda ley de la termodinámica indica que estos procesos pueden ser revertidos únicamente de manera parcial, por consiguiente reconociendo su calidad inherente de una sola dirección.

20.6 Entropía

Como se indica en la sección 20.5, la segunda ley de la termodinámica es un poco diferente de otras leyes que se han presentado en capítulos anteriores, tal como las leyes de Newton, porque están expresadas en términos de imposibilidades. Sin embargo, la segunda ley se puede establecer de un modo mucho más directo usando el concepto de **entropía**.

En los últimos tres capítulos hemos discutido la noción del equilibrio térmico. Si dos objetos que se encuentran a diferentes temperaturas tienen contacto térmico, ambas temperaturas se aproximarán de manera asintótica a un equilibrio de temperatura común. Lo que impulsa a este sistema a un equilibrio térmico es la entropía, y el estado de equilibrio térmico es el estado de máxima entropía.

La entropía provee una medida cuantitativa de qué tan cercano al equilibrio está un sistema. La dirección de la transferencia de la energía térmica no está determinada por la conservación de energía sino por el cambio en la entropía de un sistema. El cambio en la entropía de un sistema, ΔS , durante un proceso que lleva al sistema de un estado inicial a un estado final está definida como

$$\Delta S = \int_i^f \frac{dQ}{T}, \quad (20.12)$$

donde Q es el calor y T es la temperatura en kelvins. Las unidades SI para el cambio en la entropía son joules por kelvin (J/K). Debemos notar que la ecuación 20.12 se aplica únicamente a procesos reversibles; esto es, la integración puede ser realizada solamente durante el curso que representa un proceso reversible.

Observe que la entropía está definida en términos de su cambio de una configuración inicial a una final. El cambio de entropía es la cantidad físicamente significativa, no el valor absoluto de la entropía en cualquier punto. Otra cantidad física de la cual únicamente el cambio es importante es la energía potencial. El valor absoluto de la energía potencial siempre se define únicamente como una constante arbitraria aditiva, pero el cambio en la energía potencial entre los estados inicial y final es una cantidad física precisamente medible que eleva la(s) fuerza(s). De manera similar a la forma en que las conexiones entre las fuerzas y la energía potencial cambian y se explicaron en el capítulo 6, esta sección muestra cómo calcular cambios en la entropía dadas por cambios en la temperatura y el calor y trabajo en diferentes sistemas. En el equilibrio térmico, la entropía tiene un extremo (un máximo). En un equilibrio mecánico estable, la fuerza neta es de cero, y por consiguiente, la energía potencial tiene un extremo (un mínimo, en este caso).

En un proceso irreversible en un sistema cerrado, la entropía, S , del sistema nunca disminuye; siempre se incrementa o se mantiene constante. En un sistema cerrado, la energía siempre se conserva, pero la entropía no. De este modo, el cambio en la entropía define la dirección del tiempo, esto es, el tiempo se mueve hacia adelante si la entropía de un sistema cerrado se incrementa.

La definición de la entropía dada por la ecuación 20.12 descansa en las propiedades macroscópicas de un sistema, como lo son el calor y la temperatura. Otra definición de entropía, basada en descripciones estadísticas de cómo los átomos y las moléculas de un sistema están arreglados, se presentará en la siguiente sección.

Ya que la integral en la ecuación 20.12 puede ser únicamente evaluada como un proceso reversible, ¿cómo podemos calcular el cambio en la entropía de un proceso irreversible? La respuesta se debe al hecho de que la entropía es un estado termodinámico variable, así como la temperatura, la presión y el volumen. Esto significa que podemos calcular la diferencia de entropía entre un estado inicial conocido y un estado final conocido incluso en un proceso irreversible si existe un proceso reversible (¡para el cual la integral en la ecuación 20.12 puede ser evaluada!) que lleva al sistema del mismo estado inicial al mismo estado final. Quizás éste es el punto más sutil de la termodinámica dado a conocer en todo este capítulo.

Para poder ilustrar este método general de calcular el cambio de la entropía en un proceso irreversible, vamos a regresar a la situación descrita en el capítulo 18, la libre expansión de un gas. La figura 20.18a) muestra un gas confinado a la mitad izquierda de una caja. En la figura 20.18b), la barrera entre las dos mitades se elimina y el gas se expande para llenar el volumen entero de la caja. Claramente, una vez que el gas se expande para llenar el volumen entero de la caja, el sistema no regresará espontáneamente al estado en el que las moléculas del gas estaban localizadas en la mitad izquierda de la caja. Las variables del estado del sistema antes de que la barrera se eliminara es la temperatura inicial, T_i , el volumen inicial, V_i , y la entropía inicial, S_i . Después de que la barrera se eliminó y el gas está otra vez en equilibrio, el estado del sistema se puede describir en términos de la temperatura final, T_f , el volumen final, V_f , y la entropía final, S_f .

No podemos calcular el cambio de entropía de este sistema usando la ecuación 20.12 porque el gas no está en equilibrio durante la fase de expansión. Sin embargo, el cambio en las propiedades del sistema depende únicamente en los estados inicial y final, no en cómo el sistema pasó de uno a otro. Por lo tanto, podemos escoger un proceso que el sistema podría haber sufrido por el cual podemos evaluar la integral de la ecuación 20.12.

En la libre expansión de un gas ideal, la temperatura se mantiene constante, de este modo, parece razonable usar la expansión isotérmica de un gas ideal. Podemos entonces evaluar la integral en la ecuación 20.12 para calcular el cambio en la entropía de un sistema que ha sufrido un proceso isotérmico:

$$\Delta S = \int_i^f \frac{dQ}{T} = \frac{1}{T} \int_i^f dQ = \frac{Q}{T}. \quad (20.13)$$

(Podemos mover el factor $1/T$ fuera de la integral, porque estamos tratando con un proceso isotérmico, para el cual la temperatura es una constante por definición.) Como vimos en el capítulo 19, el trabajo realizado por un gas ideal en expansión de V_i a V_f en una temperatura constante T está dado por

$$W = nRT \ln \left(\frac{V_f}{V_i} \right).$$

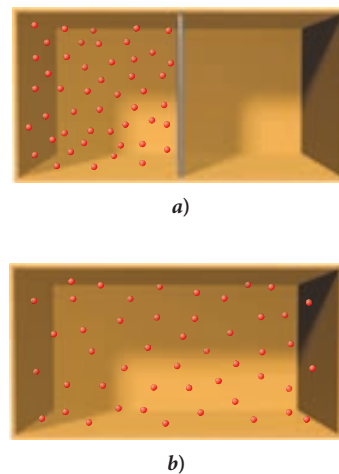


FIGURA 20.18 a) Un gas confinado a la mitad del volumen de una caja. b) La barrera que separa las dos mitades se quita y el gas se expande para llenar el volumen entero de la caja.

Para un proceso isotérmico, la energía interna del gas no cambia; así que $\Delta E_{\text{int}} = 0$. De este modo, como se mostró en el capítulo 18, podemos utilizar la primera ley de la termodinámica para escribir

$$\Delta E_{\text{int}} = W - Q = 0.$$

Consecuentemente, para un proceso isotérmico, el calor agregado al sistema es

$$Q = W = nRT \ln \left(\frac{V_f}{V_i} \right).$$

El cambio de la entropía resultante para el proceso isotérmico es entonces

$$\Delta S = \frac{Q}{T} = \frac{nRT \ln \left(\frac{V_f}{V_i} \right)}{T} = nR \ln \left(\frac{V_f}{V_i} \right). \quad (20.14)$$

El cambio de la entropía para la expansión libre irreversible de un gas debe ser igual al cambio de la entropía para el proceso isotérmico porque ambos procesos tienen el mismo estado inicial y final y de este modo deben tener el mismo cambio en la entropía.

Para la expansión libre irreversible de un gas, $V_f > V_i$, y así $\ln(V_f/V_i) > 0$. De este modo, $\Delta S > 0$ porque n y R son números positivos. De hecho, el cambio de la entropía de cualquier proceso irreversible es siempre positivo.

Por consiguiente, la segunda ley de la termodinámica se puede indicar en una tercera forma.

La entropía de un sistema cerrado nunca puede disminuir.

EJEMPLO 20.5

Cambio de la entropía para el congelamiento del agua

Suponga que tenemos 1.50 kg de agua a una temperatura de 0°C . Ponemos el agua en un congelador y el calor suficiente es removido del agua para poderla congelar por completo hasta el hielo a una temperatura de 0°C .

PROBLEMA

¿Cuánto cambia la entropía del sistema del agua helada durante el proceso de congelamiento?

SOLUCIÓN

El derretimiento del hielo es un proceso isotérmico, así es que podemos usar la ecuación 20.13 para el cambio de entropía:

$$\Delta S = \frac{Q}{T},$$

donde Q es el calor que necesita ser removido para convertir el agua en hielo a $T = 273.15\text{ K}$, el punto de congelación del agua. El calor que necesita ser removido para congelar el agua se determina por el calor latente de la fusión de agua (hielo), definida en el capítulo 18. El calor que necesita ser removido es

$$Q = mL_{\text{fusión}} = (1.50\text{ kg})(334\text{ kJ/kg}) = 501\text{ kJ}.$$

De este modo, el cambio en la entropía del sistema del agua-hielo es

$$\Delta S = \frac{-501\text{ kJ}}{273.15\text{ K}} = -1\,830\text{ J/K}.$$

Observe cómo la entropía del sistema de agua-hielo en el ejemplo 20.5 ha disminuido. ¿Cómo puede disminuir la entropía de este sistema? La segunda ley de la termodinámica afirma que la entropía de un sistema cerrado nunca puede disminuir. Sin embargo, el sistema de agua-hielo no es un sistema cerrado. El congelador usó energía para remover el calor del agua y poder congelar, y desechó el calor hacia el ambiente local. De este modo, la entropía del ambiente se incrementó más de lo que la entropía del sistema de agua-hielo disminuyó. Ésta es una diferencia muy importante.

Un análisis similar se puede aplicar a los orígenes de formas de vida complejas que tienen entropías más bajas de las que hay en sus alrededores. El desarrollo de formas de vida con entropía baja está acompañado por un incremento global de la entropía en la Tierra. Para que un subsistema vivo en la Tierra reduzca su propia entropía a costa de su ambiente, necesita una fuente de energía. Esta fuente de energía puede ser de enlaces químicos u otros tipos de energía potencial, que a la larga surge de la energía proporcionada a la Tierra por la radiación solar.

La evolución hacia formas de vida cada vez más complejas no está en contra de la segunda ley de la termodinámica, porque las formas de vida evolucionadas no forman sistemas cerrados. Una contradicción entre la evolución biológica y la segunda ley de la termodinámica a veces es falsamente aclamada por los oponentes de la evolución en el debate de evolución/creación. Desde el punto de vista de la termodinámica, este argumento tiene que ser rechazado inequívocamente.

EJEMPLO 20.6

Cambio de la entropía para el calentamiento del agua

Suponga que empezamos con 2.00 kg de agua a una temperatura de 20.0 °C y calentamos el agua hasta que alcance una temperatura de 80.0 °C.

PROBLEMA

¿Cuál es el cambio de la entropía del agua?

SOLUCIÓN

Empezamos con la ecuación 20.12 referente al cambio de la entropía en la integración del flujo diferencial de calor, dQ , con respecto a la temperatura:

$$\Delta S = \int_i^f \frac{dQ}{T}. \quad (\text{i})$$

El calor, Q , requerido para elevar la temperatura de la masa, m , del agua está dada por

$$Q = cm\Delta T, \quad (\text{ii})$$

donde $c = 4.19 \text{ kJ}/(\text{kg K})$ es el calor específico del agua. Podemos reescribir la ecuación (ii) en términos del cambio diferencial de calor, dQ , y el cambio diferencial de la temperatura, dT :

$$dQ = cm dT.$$

Entonces podemos reescribir la ecuación (i) como

$$\Delta S = \int_i^f \frac{dQ}{T} = \int_{T_i}^{T_f} \frac{cm dT}{T} = cm \int_{T_i}^{T_f} \frac{dT}{T} = cm \ln \frac{T_f}{T_i}.$$

Con $T_i = 293.15 \text{ K}$ y $T_f = 353.15 \text{ K}$, el cambio de la entropía es

$$\Delta S = \left[4.19 \text{ kJ}/(\text{kg K}) \right] (2.00 \text{ kg}) \ln \frac{353.15 \text{ K}}{293.15 \text{ K}} = 1.56 \cdot 10^3 \text{ J/K}.$$

Existe otro punto importante acerca de la definición macroscópica de la entropía y el cálculo de la entropía con ayuda de la ecuación 20.12: la segunda ley de la termodinámica también implica esto para todos los procesos cíclicos (tales como el ciclo de Carnot, de Otto y de Diesel); esto es, todos los procesos en los cuales el estado inicial es el mismo que el estado final, el total del cambio en la entropía del ciclo completo tiene que ser mayor que o igual a cero: $\Delta S \geq 0$.

20.7 Interpretación microscópica de la entropía

En el capítulo 19 vimos que la energía interna de un gas ideal puede ser calculada al sumar las energías de partículas constituyentes del gas. También podemos determinar la entropía de un gas ideal al estudiar sus partículas constituyentes. Ocurre que esta definición microscópica de entropía está de acuerdo con la definición anterior.

Las ideas de orden y desorden son intuitivas. Por ejemplo, una taza de café es un sistema ordenado. Romper la taza al tirarla al suelo crea un sistema que está menos ordenado, o más desordenado, que el sistema original. Este desorden de sistema se puede describir cuantitativamente usando el concepto de **estados microscópicos**. Otro término para un estado microscópico es *grado de libertad*.

Supongamos que lanzamos n monedas al aire, y la mitad cae con la cara arriba y la otra mitad cae con la cruz arriba. La afirmación “la mitad de las monedas son cara y la otra mitad son cruz” es una descripción de un estado *macroscópico* del sistema de n monedas. Cada moneda puede tener uno de dos estados *microscópicos*: cara o cruz. Al afirmar que la mitad de las monedas son caras y la mitad de las monedas son cruces no especifica nada acerca del estado microscópico de cada moneda, porque existen muchas posibles maneras de arreglar el estado microscópico de las monedas sin cambiar el estado macroscópico. Sin embargo, si todas las monedas son caras o todas las monedas son cruces, el estado microscópico de cada moneda será conocido. El estado macroscópico consistente de la mitad de caras y la mitad de cruces es un sistema *desordenado* porque muy poco se conoce acerca del estado microscópico de cada moneda. El estado macroscópico con todas las caras o el estado macroscópico con todas las cruces es un sistema *ordenado* porque el estado microscópico de cada moneda es conocido.

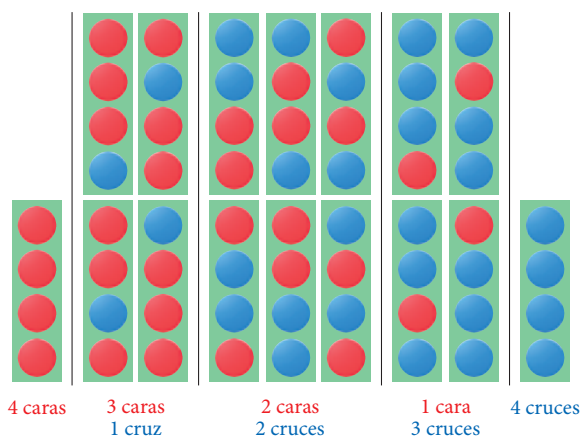


FIGURA 20.19 Los 16 estados microscópicos posibles para cuatro monedas lanzadas al aire, conduciendo a cinco estados macroscópicos posibles.

Para cuantificar este concepto, imagine lanzar cuatro monedas al aire. Únicamente existe una manera de obtener cuatro caras con tal lanzamiento, cuatro maneras de obtener tres caras y una cruz, seis maneras de obtener dos caras y dos cruces, cuatro maneras de obtener una cara y tres cruces, y únicamente una manera de obtener cuatro cruces. De esta manera, existen cinco posibles estados macroscópicos y dieciséis posibles estados microscópicos (vea la figura 20.19, donde las caras están representadas por círculos rojos, y las cruces por círculos azules).

Ahora vamos a suponer que lanzamos cincuenta monedas al aire en vez de cuatro. Existen $2^{50} = 1.13 \cdot 10^{15}$ posibles microestados de este sistema con cincuenta monedas lanzadas. El estado macroscópico más probable consiste en la mitad de caras y la mitad de cruces. Existen $1.26 \cdot 10^{14}$ posibles microestados con la mitad de caras y la mitad de cruces. La probabilidad de que la mitad de las monedas caigan con la cara arriba y la otra mitad con la cruz, es de 11.2%, mientras que la probabilidad de que todas las cincuenta monedas caigan con la cara arriba es de 1 en $1.13 \cdot 10^{15}$.

Vamos a aplicar estos conceptos a un sistema real de moléculas de gas: un mol de gas, o el número de moléculas de Avogadro, a presión p , volumen V , y temperatura T . Estas tres cantidades describen el estado macroscópico del gas. La descripción microscópica del sistema requiere especificar la cantidad de movimiento y la posición de cada molécula de gas. Cada molécula tiene tres componentes de sus momentos y tres componentes de su posición. De este modo, en cualquier momento, el gas puede estar en un gran número de estados microscópicos, dependiendo de las posiciones y velocidades de cada una de sus $6.02 \cdot 10^{23}$ moléculas. Si el gas sufre una libre expansión, el número de posibles estados microscópicos incrementa y el sistema se vuelve más desordenado. Porque la entropía de un gas que está sufriendo una libre expansión aumenta, el incremento en el desorden está relacionado con el aumento en la entropía. Esta idea puede generalizarse de la siguiente manera:

El estado macroscópico más probable de un sistema es el estado con el número más grande de estados microscópicos, que también es el estado macroscópico con más desorden.

Dejemos que w sea el número de estados microscópicos posibles de un estado macroscópico dado. Se puede mostrar que la entropía del estado macroscópico se da por

$$S = k_B \ln w, \tag{20.15}$$

donde k_B es la constante de Boltzmann. Esta ecuación fue la primera que escribió el físico austriaco Ludwig Boltzmann y es también su más grande logro (está cincelado en su lápida). Puede ver de la ecuación 20.15 que al incrementar el número de estados microscópicos posibles aumenta la entropía.

El aspecto importante de un proceso termodinámico no es la entropía absoluta, sino el cambio de la entropía entre el estado inicial y el estado final. Tomando la ecuación 20.15 como la definición de entropía, el número más pequeño de microestados es uno, y la más pequeña entropía que puede existir es entonces cero. De acuerdo con esta definición, la entropía no puede ser nunca negativa. En la práctica, es difícil determinar el número de posibles estados microscópicos excepto con los sistemas especiales. Sin embargo, el cambio en el número de posibles estados microscópicos a menudo puede ser determinado, de este modo se fundamenta al permitir el cambio en la entropía del sistema.

Considere un sistema que inicialmente tiene w_i microestados y entonces experimenta un proceso termodinámico hasta tener un estado macroscópico con w_f microestados. El cambio de la entropía es

$$\Delta S = S_f - S_i = k_B \ln w_f - k_B \ln w_i = k_B \ln \frac{w_f}{w_i}. \quad (20.16)$$

De este modo, el cambio de la entropía entre dos estados macroscópicos depende del número de microestados posibles.

La definición de la entropía de un sistema en términos del número de posibles microestados nos guía a una comprensión más profunda de la segunda ley de la termodinámica, la cual afirma que la entropía de un sistema cerrado no puede nunca disminuir. Este planteamiento de la segunda ley combinado con la ecuación 20.15 significa que *un sistema cerrado no puede nunca experimentar un proceso termodinámico que baje el número de posibles microestados*. Por ejemplo, si el proceso mostrado en la figura 20.18 ocurriera en reversa; esto es, que el gas experimentara una libre contracción hacia un volumen de la mitad de su tamaño original, el número de los posibles microestados por cada molécula disminuiría por un factor de 2. La probabilidad de encontrar una molécula de gas a la mitad del volumen original es entonces $\frac{1}{2}$, y la probabilidad de encontrar todas las moléculas de gas a la mitad de su volumen original es $\left(\frac{1}{2}\right)^N$, donde N es el número de moléculas. Si existen 100 moléculas de gas en el sistema, entonces la probabilidad de que las 100 moléculas terminen teniendo la mitad de su volumen original es de $7.9 \cdot 10^{-31}$. Tendríamos que revisar el sistema aproximadamente $1/(7.9 \cdot 10^{-31}) \approx 10^{30}$ veces para encontrar las moléculas a la mitad de su volumen sólo una vez. Al revisar una por segundo, esto nos tomaría alrededor de 10^{14} mil millones de años, mientras que la edad del universo es solamente de 13.7 mil millones de años. Si el sistema contiene el número de moléculas de gas de Avogadro, entonces la probabilidad de que las moléculas estén a la mitad de su volumen original es aún más pequeña. De este modo, aunque la probabilidad de que este proceso ocurra no es cero, es tan pequeño que lo podemos tratar como cero. Podemos, de este modo, concluir que la segunda ley de la termodinámica, aun cuando se expresa en términos de probabilidades, nunca es violada en ninguna situación práctica.

EJEMPLO 20.7

El incremento de la entropía durante la libre expansión de un gas

Vamos a considerar la libre expansión de un gas como el que se muestra en la figura 20.18. Inicialmente 0.500 moles de gas nitrógeno están confinados en un volumen de 0.500 m^3 . Cuando la barrera se quita, el gas se expande para llenar el nuevo volumen de 1.00 m^3 .

PROBLEMA

¿Cuál es el cambio en la entropía del gas?

SOLUCIÓN

Podemos usar la ecuación 20.14 para calcular el cambio de la entropía del sistema, suponiendo que podemos tratar el sistema como una expansión isotérmica de un gas ideal:

$$\begin{aligned} \Delta S &= nR \ln \left(\frac{V_f}{V_i} \right) = nR \ln \left(\frac{1.00 \text{ m}^3}{0.500 \text{ m}^3} \right) = nR \ln 2 \\ &= (0.500 \text{ mol}) [8.31 \text{ J}/(\text{mol K})] (\ln 2) \\ &= 2.88 \text{ J/K}. \end{aligned} \quad (i)$$

Otra aproximación es examinar el número de microestados del sistema antes y después de la expansión para calcular el cambio en la entropía. En este sistema, el número de moléculas de gas es

$$N = nN_A,$$

(continúa)

20.6 Ejercicio en clase

Todos los procesos termodinámicos reversibles siempre proceden en

- presión constante.
- temperatura constante.
- entropía constante.
- volumen constante.
- ninguna de las anteriores.

(continuación)

donde N_A es el número de Avogadro. Antes de la expansión, había w_i microestados para las moléculas de gas en la mitad izquierda del contenedor. Después de la expansión, cualquiera de las moléculas podía estar en la mitad izquierda o en la mitad derecha del contenedor. Por consiguiente, el número de microestados después de la expansión es

$$w_f = 2^N w_i.$$

Al usar la ecuación 20.16 y al recordar que $nR = Nk_B$, podemos expresar el cambio en la entropía del sistema como

$$\Delta S = k_B \ln \frac{w_f}{w_i} = k_B \ln \frac{2^N w_i}{w_i} = Nk_B \ln 2 = nR \ln 2.$$

De esta manera, obtenemos el mismo resultado por el cambio de la entropía de un gas libremente expandido al observar las propiedades microscópicas del sistema que al usar las propiedades macroscópicas del sistema en la ecuación (i).

Muerte de la entropía

El universo es el sistema cerrado extremo. La vasta mayoría de los procesos termodinámicos en el universo son irreversibles, y de esta manera, la entropía del universo como un todo se está incrementando de manera continua y asintóticamente aproximándose a su máximo. De este modo, si el universo existe durante suficiente tiempo, toda la energía será distribuida de manera uniforme por todo su volumen. Además, si el universo se sigue expandiendo por siempre, la gravedad —la única fuerza importante de largo alcance— no tendrá la capacidad de seguir jalando los objetos para mantenerlos juntos. Esta condición más reciente es la principal diferencia del primer universo en los primeros momentos después del Big Bang, cuando la materia y la energía también estaban distribuidas uniformemente a través del universo, como lo revelaron los análisis de la radiación de fondo de microondas (visto en el capítulo 17). Pero en el primer universo, la gravedad era muy fuerte, como resultado de la concentración de la materia en un espacio pequeño, y era capaz de desarrollar fluctuaciones mínimas y contraer la materia para formar estrellas y galaxias. De este modo, aunque la materia y la energía fueron distribuidas uniformemente en el primer universo, la entropía no estaba cerca de su máximo, y el universo entero estaba lejos del equilibrio térmico.

En el futuro a largo plazo del universo, todas las estrellas, las cuales en la actualidad representan las fuentes de energía de otros objetos como nuestro planeta, estarán finalmente extintas. Entonces, la vida será imposible, porque la vida necesita una fuente de energía para poder disminuir la entropía localmente. Mientras el universo se acerca de manera asintótica a su estado de entropía máxima, cada subsistema del universo alcanzará el equilibrio termodinámico.

En ocasiones, a este destino a largo plazo del universo se le llama *muerte térmica*. Sin embargo, la temperatura del universo en ese momento no será alta, como su nombre lo sugeriría, sino muy cercana al cero absoluto y muy similar en todas partes.

Esto no es algo de lo que nos tengamos que preocupar por ahora, porque algunas estimaciones indican que la muerte de la entropía del universo está a 10^{100} años en el futuro (con una inseguridad en muchos órdenes de magnitud). Obviamente, el futuro a largo plazo del universo es muy interesante y en la actualidad es un área de investigación intensa. Nuevos descubrimientos acerca de la materia oscura y la energía oscura pueden cambiar nuestra imagen del futuro a largo plazo del universo. Pero tal como está en este momento, el universo no desaparecerá con una explosión, sino con un quejido.

LO QUE HEMOS APRENDIDO | GUÍA DE ESTUDIO PARA EXAMEN

- En un proceso *reversible*, el sistema siempre está cercano al equilibrio termodinámico. Al hacer un pequeño cambio en el estado del sistema puede revertir cualquier cambio en las variables termodinámicas del sistema.
- Un proceso *irreversible* involucra el flujo de calor con una diferencia limitada de temperatura, libre expansión de un gas, o la conversión de trabajo mecánico a energía térmica.
- Un motor térmico es un aparato que convierte la energía térmica en trabajo útil.
- La eficiencia, ϵ , de un motor térmico se define como $\epsilon = W/Q_H$, donde W es el trabajo útil extraído del motor y Q_H es la energía que se provee al motor en forma de calor.

- Un refrigerador es un motor térmico que funciona en forma inversa.
- El coeficiente de desempeño, K , de un refrigerador se define como $K = Q_L/W$, donde Q_L es el calor extraído del depósito térmico de baja temperatura y W es el trabajo requerido para extraer el calor.
- Un motor ideal es uno en el que todos los procesos involucrados son reversibles.
- Un motor de Carnot usa el ciclo de Carnot, un proceso termodinámico ideal que consiste en dos procesos isotérmicos y dos procesos adiabáticos. El motor de Carnot es el motor más eficiente que puede funcionar entre dos depósitos térmicos.
- La eficiencia del motor de Carnot está dada por $\epsilon = (T_H - T_L)/T_H$, donde T_H es la temperatura del depósito térmico más caliente y T_L es la temperatura del depósito térmico más frío.
- El coeficiente de desempeño de un refrigerador de Carnot es $K_{\text{máx}} = T_L/(T_H - T_L)$, donde T_H es la temperatura del depósito térmico más caliente y T_L es la temperatura del depósito térmico más frío.
- El ciclo de Otto describe la operación de los motores de combustión interna. Consiste en dos procesos adiabáticos y dos procesos de volumen constante. La eficiencia de un motor que usa el ciclo de Otto está dada por $\epsilon = 1 - r^{1-\gamma}$, donde $r = V_1/V_2$ es la proporción de compresión y $\gamma = C_p/C_v$.
- La segunda ley de la termodinámica se puede establecer como sigue: es imposible para un sistema pasar por un proceso en el cual absorbe calor de un depósito térmico a cierta temperatura y convierte ese calor completamente en trabajo mecánico sin rechazar el calor hacia un depósito térmico de temperatura baja.
- La segunda ley de la termodinámica también puede establecerse como sigue: es imposible para cualquier proceso transferir energía térmica de un depósito térmico de baja temperatura a un depósito térmico de alta temperatura sin que ningún trabajo sea realizado para lograr la transferencia.
- El cambio en la entropía de un sistema se define como $\Delta S = \int_i^f \frac{dQ}{T}$, donde dQ es el calor diferencial añadido al sistema, T es la temperatura y la integración se realiza desde un estado termodinámico inicial hasta un estado termodinámico final.
- Una tercera manera de establecer la segunda ley de la termodinámica es la que sigue: la entropía de un sistema cerrado nunca puede disminuir.
- La entropía de un sistema macroscópico se puede definir en términos del número de posibles estados microscópicos, w , del sistema: $S = k_B \ln w$, donde k_B es la constante de Boltzmann.

TÉRMINOS CLAVE

proceso reversible, p. 650
 proceso irreversible,
 p. 651
 motor térmico, p. 652
 eficiencia, p. 652

refrigerador, p. 652
 coeficiente de desempeño,
 p. 653
 bomba de calor, p. 653
 motor ideal, p. 654

motor de Carnot, p. 654
 ciclo de Carnot, p. 654
 teorema de Carnot,
 p. 656
 ciclo de Otto, p. 658

segunda ley de la
 termodinámica, p. 664
 entropía, p. 666
 estados microscópicos,
 p. 670

NUEVOS SÍMBOLOS Y ECUACIONES

$\epsilon = \frac{W}{Q_H}$, eficiencia de un motor térmico

$K = \frac{Q_L}{W}$, coeficiente de desempeño de un refrigerador

$\Delta S = \int_i^f \frac{dQ}{T}$, cambio de la entropía de un sistema

$S = k_B \ln w$, definición microscópica de la entropía
 W , número de posibles estados microscópicos

RESPUESTAS A OPORTUNIDADES DE AUTOEXAMEN

20.1 La eficiencia está dada por

$$\epsilon = 1 - \frac{T_L}{T_H} = 1 - \frac{325 \text{ K}}{500 \text{ K}} = 0.35 \quad (\text{o } 35\%).$$

20.2 La proporción de las dos eficiencias es

$$\frac{\epsilon_{15}}{\epsilon_{10}} = \frac{1 - 15^{-0.4}}{1 - 4^{-0.4}} = \frac{66.1\%}{42.6\%} = 1.55, \text{ que es una mejora de } 55\%.$$

PRÁCTICA PARA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Lineamientos de problemas resueltos

1. Con los problemas en termodinámica, necesita poner mucha atención a los signos de trabajo (W) y calor (Q). El trabajo hecho por un sistema es positivo, y el trabajo realizado en un sistema es negativo; el calor que es transferido a un sistema es positivo, y el calor que es emitido por un sistema es negativo.
2. Algunos problemas que involucran motores térmicos tienen que ver con la potencia y con la tasa de la transferencia de energía térmica. La potencia es trabajo por unidad de tiempo ($P = W/t$) y la tasa de la transferencia de la energía térmica es calor por unidad de tiempo (Q/t). Usted puede tratar a estas cantidades como al trabajo y el calor, pero recuerde que involucran la unidad de tiempo.
3. La entropía puede parecerse un poco a la energía, pero éstos son conceptos muy diferentes. La primera ley de la termodinámica es una ley de conservación; la energía se conserva. La segunda ley de la termodinámica no es una ley de conservación; la entropía no se conserva; siempre o se queda igual o incrementa y nunca disminuye en un sistema cerrado.

Usted puede requerir identificar los estados inicial y final para calcular el cambio en la entropía, pero recuerde que la entropía puede cambiar.

4. Recuerde que la entropía de un sistema cerrado siempre permanece igual o se incrementa (nunca disminuye), pero asegúrese de que en un problema la situación es realmente acerca de un sistema cerrado. La entropía de un sistema que no está cerrado puede disminuir si incrementa más la entropía en los alrededores y lo contrarresta; no suponga que todos los cambios en la entropía deben ser positivos.

5. No aplique la fórmula $\Delta S = \int_i^f \frac{dQ}{T}$ para el cambio de la

entropía sin primero asegurarse de que usted está tratando con un proceso reversible. Si necesita calcular el cambio de la entropía de un proceso irreversible, primero necesita hallar un proceso equivalente reversible que conecte los mismos estados inicial y final.

PROBLEMA RESUELTO 20.2

Costo de operar una planta de energía eléctrica

Una planta de energía eléctrica funciona con turbinas de vapor a una temperatura de 557°C y usa torres de enfriamiento para mantener frío el depósito térmico a una temperatura de 38.3°C . El costo operativo de la planta por año es de 52.0 millones de dólares. Los gerentes de la planta proponen usar agua de un lago cercano para bajar la temperatura del depósito frío a 8.90°C . Suponga que la planta opera a su eficiencia máxima posible.

PROBLEMA

¿Cuánto se reduciría el costo de operación de la planta en un año como resultado del cambio en la temperatura del depósito? Suponga que la planta genera la misma cantidad de electricidad.

SOLUCIÓN

PIENSE

Podemos calcular la eficiencia de la planta de energía suponiendo que ésta opera con la eficiencia teórica de Carnot, la cual depende únicamente de las temperaturas del depósito térmico caliente y del depósito térmico frío. Podemos calcular la cantidad de energía térmica puesta en el depósito térmico caliente y suponer que el costo de operación de la planta es proporcional a esa energía térmica. Esta energía térmica puede provenir de quemar un combustible (carbón, aceite o gas) o tal vez de un reactor nuclear. Bajar la temperatura del depósito frío va a incrementar la eficiencia de la planta de energía, y de este modo disminuirá la cantidad requerida de energía térmica y los costos asociados. Los costos ahorrados son entonces los costos de operación de la planta original menos los costos de operación de la planta mejorada.

ESBOCE

La figura 20.20 es un esbozo referente a las cantidades termodinámicas involucradas en el funcionamiento de una planta de energía eléctrica. La temperatura del depósito caliente es T_H , la energía térmica abastecida a la planta de energía original es Q_{H1} , la energía térmica provista a la planta de energía mejorada es Q_{H2} , el trabajo útil hecho por la planta de energía es W , la temperatura original del depósito frío es T_{L1} , y la temperatura del depósito frío mejorado es T_{L2} .

INVESTIGUE

La máxima eficiencia de la planta de energía cuando está operando con las torres de enfriamiento está dada por la eficiencia teórica de Carnot:

$$\epsilon_1 = \frac{T_H - T_{L1}}{T_H} \quad (i)$$

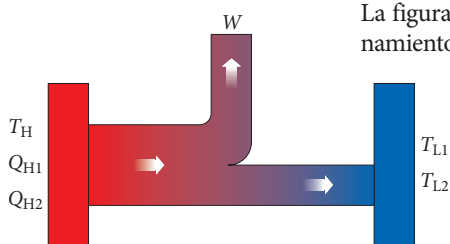


FIGURA 20.20 Las cantidades termodinámicas relacionadas a la operación de una planta de energía eléctrica.

La eficiencia de la planta de energía bajo esta condición también puede ser expresada como

$$\epsilon_1 = \frac{W}{Q_{H1}}, \quad (\text{ii})$$

donde Q_{H1} es la energía térmica abastecida cuando las torres de enfriamiento se están usando. Podemos escribir expresiones similares para la eficiencia de la planta de energía cuando el lago se está usando para disminuir la temperatura del depósito frío:

$$\epsilon_2 = \frac{T_H - T_{L2}}{T_H} \quad (\text{iii})$$

y

$$\epsilon_2 = \frac{W}{Q_{H2}}. \quad (\text{iv})$$

El costo de operar la planta de energía es proporcional a la energía térmica abastecida al depósito caliente. De este modo podemos igualar la proporción del costo original, c_1 , al costo reducido, c_2 , con la proporción de la energía térmica originalmente requerida, Q_{H1} , a la energía térmica requerida subsecuentemente, Q_{H2} :

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{Q_{H1}}{Q_{H2}}.$$

SIMPLIFIQUE

Podemos expresar el nuevo costo como

$$c_2 = c_1 \frac{Q_{H2}}{Q_{H1}}.$$

Podemos obtener una expresión para la energía térmica originalmente requerida usando las ecuaciones (i) y (ii):

$$Q_{H1} = \frac{W}{\epsilon_1} = \frac{W}{\left(\frac{T_H - T_{L1}}{T_H}\right)} = \frac{T_H W}{T_H - T_{L1}}.$$

Podemos obtener una expresión similar para la energía térmica requerida después de la mejora usando las ecuaciones (iii) y (iv):

$$Q_{H2} = \frac{W}{\epsilon_2} = \frac{W}{\left(\frac{T_H - T_{L2}}{T_H}\right)} = \frac{T_H W}{T_H - T_{L2}}.$$

Podemos ahora expresar el nuevo costo como

$$c_2 = c_1 \frac{Q_{H2}}{Q_{H1}} = c_1 \frac{\left(\frac{T_H W}{T_H - T_{L2}}\right)}{\left(\frac{T_H W}{T_H - T_{L1}}\right)} = c_1 \frac{T_H - T_{L1}}{T_H - T_{L2}}.$$

Observe que el trabajo W hecho por la planta de energía se cancela porque la planta genera la misma cantidad de electricidad en ambos casos. Los costos ahorrados son entonces

$$c_1 - c_2 = c_1 - c_1 \frac{T_H - T_{L1}}{T_H - T_{L2}} = c_1 \left(1 - \frac{T_H - T_{L1}}{T_H - T_{L2}}\right) = c_1 \frac{T_{L1} - T_{L2}}{T_H - T_{L2}}.$$

CALCULE

Al sustituir los valores numéricos obtenemos

$$c_1 - c_2 = c_1 \frac{T_{L1} - T_{L2}}{T_H - T_{L2}} = (\$52.0 \text{ millones}) \frac{311.45 \text{ K} - 282.05 \text{ K}}{830.15 \text{ K} - 282.05 \text{ K}} = \$2.78927 \text{ millones.}$$

(continúa)

(continuación)

REDONDEE

Reportamos nuestro resultado con tres cifras significativas

Costos ahorrados = \$2.79 millones.

VUELVA A REVISAR

Para volver a revisar nuestro resultado, calculamos la eficiencia de la planta de energía usando las torres de enfriamiento:

$$\epsilon_1 = \frac{T_H - T_{L1}}{T_H} = \frac{830.15 \text{ K} - 311.45 \text{ K}}{830.15 \text{ K}} = 62.5\%.$$

La eficiencia de la planta de energía usando el lago para bajar la temperatura del depósito frío es

$$\epsilon_2 = \frac{T_H - T_{L2}}{T_H} = \frac{830.15 \text{ K} - 282.05 \text{ K}}{830.15 \text{ K}} = 66.0\%.$$

Estas eficiencias parecen razonables. Para revisar aún más, verificamos que la proporción de las dos eficiencias sean iguales a la proporción inversa de los dos costos, porque mayor eficiencia significa menores costos. La proporción de las dos eficiencias es

$$\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} = \frac{62.5\%}{66.0\%} = 0.947.$$

La proporción inversa de los dos costos es

$$\frac{c_2}{c_1} = \frac{\$52 \text{ millones} - \$2.79 \text{ millones}}{\$52 \text{ millones}} = 0.946.$$

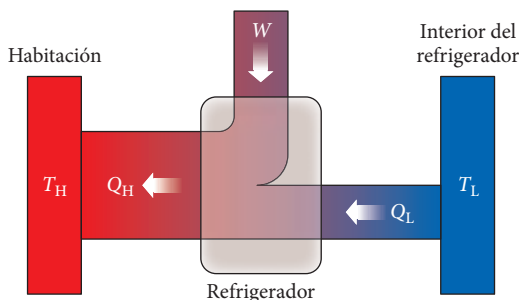
Estas proporciones coinciden dentro del error redondeado. De este modo, nuestro resultado parece razonable.

PROBLEMA RESUELTO 20.3 Congelar agua en un refrigerador

Suponga que tenemos 250 g de agua a 0.00 °C. Queremos congelar esta agua poniéndola en un refrigerador que funciona en una habitación con una temperatura de 22.0 °C. La temperatura dentro del refrigerador se mantiene en -5.00 °C.

PROBLEMA

¿Cuál es la cantidad mínima de energía eléctrica que se requiere abastecer para que el refrigerador congele el agua?

**FIGURA 20.21** Diagrama de flujo de calor para un refrigerador que toma calor del interior del refrigerador y lo desecha a la habitación usando una fuente de energía eléctrica.**SOLUCIÓN****PIENSE**

La cantidad de calor que debe ser removida depende del calor latente de la fusión y la masa dada de agua. El refrigerador más eficiente posible es el refrigerador Carnot, así es que utilizaremos el máximo coeficiente de desempeño teórico de tal refrigerador. Al conocer la cantidad de calor que va a ser removido del depósito de baja temperatura y el coeficiente de desempeño, podemos calcular el mínimo de energía que requerimos abastecer.

ESBOCE

En la figura 20.21 se muestra un diagrama de flujo de calor para el refrigerador.

INVESTIGUE

El refrigerador más eficiente posible es el refrigerador de Carnot. El coeficiente máximo de desempeño de un refrigerador de Carnot se obtiene con las ecuaciones 20.2 y 20.7:

$$K_{\text{máx}} = \frac{Q_L}{W} = \frac{T_L}{T_H - T_L}, \quad (\text{i})$$

donde Q_L es el calor removido dentro del refrigerador, W , es el trabajo (en términos de energía eléctrica) que requiere ser abastecido, T_L es la temperatura interior del refrigerador, y T_H es la temperatura de la habitación. La cantidad de calor que necesita ser retirada para poder congelar la masa de agua m se da por (vea el capítulo 18)

$$Q_L = mL_{\text{fusión}}, \quad (\text{ii})$$

donde $L_{\text{fusión}} = 334 \text{ kJ/kg}$ es el calor latente de la fusión del agua (el cual puede ser encontrado en la tabla 18.2).

SIMPLIFIQUE

Podemos resolver la ecuación (i) por la energía que se requiere abastecer para el refrigerador:

$$W = Q_L \frac{T_H - T_L}{T_L}.$$

Al sustituir la expresión del calor removido de la ecuación (ii), obtenemos

$$W = (mL_{\text{fusión}}) \frac{T_H - T_L}{T_L}.$$

CALCULE

Al colocar los valores numéricos obtenemos

$$W = \frac{mL_{\text{fusión}}}{K} = (0.250 \text{ kg})(334 \text{ kJ/kg}) \frac{295.15 \text{ K} - 268.15 \text{ K}}{268.15 \text{ K}} = 8.41231 \text{ kJ}.$$

REDONDEE

Reportamos nuestro resultado con tres cifras significativas:

$$W = 8.41 \text{ kJ}.$$

VUELVA A REVISAR

Para volver a revisar nuestro resultado, vamos a calcular el calor removido del agua:

$$Q_L = mL_{\text{fusión}} = (0.250 \text{ kg})(334 \text{ kJ/kg}) = 83.5 \text{ kJ}.$$

Al usar nuestro resultado de la energía requerida para congelar el agua, podemos calcular el coeficiente de desempeño del refrigerador:

$$K = \frac{Q_L}{W} = \frac{83.5 \text{ kJ}}{8.41 \text{ kJ}} = 9.93.$$

Podemos comparar este resultado con el máximo coeficiente de desempeño de un refrigerador de Carnot:

$$K_{\text{máx}} = \frac{T_L}{T_H - T_L} = \frac{268.15 \text{ K}}{295.15 \text{ K} - 268.15 \text{ K}} = 9.93.$$

De esta manera, nuestro resultado parece razonable.

PREGUNTAS DE OPCIÓN MÚLTIPLE

20.1 ¿Cuál de los siguientes procesos siempre resulta en un incremento de la energía de un sistema?

- a) El sistema pierde calor y trabaja en los alrededores.
- b) El sistema gana calor y trabaja en los alrededores.

c) El sistema pierde calor y tiene que trabajar en él por los alrededores.

d) El sistema gana calor y tiene que trabajar en él por los alrededores.

e) Ninguno de las anteriores.

20.2 ¿Cuál es la magnitud del cambio en la entropía cuando 6.00 g de vapor a 100 °C se condensan formando agua a 100 °C?

- a) 46.6 J/K c) 36.3 J/K
b) 52.4 J/K d) 34.2 J/K

20.3 El cambio de la entropía de un sistema puede ser calculada porque

- a) Depende únicamente en los estados inicial y final. c) La entropía siempre aumenta.
b) Cualquier proceso es reversible. d) Ninguna de las anteriores.

20.4 Un gas ideal experimenta una expansión isotérmica. ¿Qué pasará con su entropía?

- a) Aumentará. c) Es imposible determinarlo.
b) Disminuirá. d) Permanecerá sin cambios.

20.5 ¿Cuáles de los siguientes procesos (todos son expansiones de temperatura constantes) producen más trabajo?

- a) Un gas ideal que consiste en 1 mol de argón a 20 °C que se expande de 1 L a 2 L.
b) Un gas ideal que consiste en 1 mol de argón a 20 °C que se expande de 2 L a 4 L.
c) Un gas ideal que consiste en 2 moles de argón a 10 °C que se expande de 2 L a 4 L.
d) Un gas ideal que consiste en 1 mol de argón a 40 °C que se expande de 1 L a 2 L.
e) Un gas ideal que consiste en 1 mol de argón a 40 °C que se expande de 2 L a 4 L.

20.6 Un motor térmico funciona con una eficiencia de 0.5. ¿Cuáles pueden ser las temperaturas de depósitos de temperatura alta y de temperatura baja?

- a) $T_H = 600$ K y $T_L = 100$ K
b) $T_H = 600$ K y $T_L = 200$ K
c) $T_H = 500$ K y $T_L = 200$ K
d) $T_H = 500$ K y $T_L = 300$ K
e) $T_H = 600$ K y $T_L = 300$ K

PREGUNTAS

20.11 Uno de sus amigos empieza a hablar acerca de qué tan desafortunada es la segunda ley de la termodinámica, qué triste es que la entropía tenga que aumentar siempre, conduciendo a la irreversible degradación de energía útil a calor y la decadencia de todas las cosas. ¿Hay algún contraargumento que le pueda dar que sugeriría que la segunda ley es en realidad una bendición?

20.12 Mientras contempla un sistema muy pequeño, un científico observa que la entropía del sistema disminuye espontáneamente. De ser cierto, ¿es este un descubrimiento digno del premio Nobel o no es tan significativo?

20.13 ¿Por qué habría una bomba térmica de tener ventaja sobre un calentador unitario que convierte la energía eléctrica directamente en energía térmica?

20.14 Imagine dividir una caja en dos partes iguales, la parte A en la izquierda y la parte B en la derecha. Cuatro átomos de gas idéntico, numerados del 1 al 4, se colocan en la caja. ¿Cuá-

20.7 El número de macroestados que pueden resultar de lanzar un conjunto de N dados de seis lados es el número de los totales diferentes que pueden ser obtenidos al sumar los puntos de los dados en las N caras que caen hacia arriba. El número de macroestados es

- a) 6^N . b) $6N$. c) $6N - 1$. d) $5N + 1$.

20.8 ¿Qué capacidad debe tener una bomba de calor con un coeficiente de desempeño de 3 de calentar una casa que pierde energía térmica a una velocidad de 12 kW en el día más frío del año?

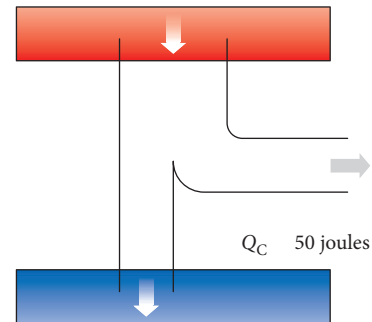
- a) 3 kW c) 10 kW e) 40 kW
b) 4 kW d) 30 kW

20.9 ¿Cuál de las siguientes afirmaciones acerca del ciclo de Carnot es (son) incorrecta(s)?

- a) La máxima eficiencia de un motor de Carnot es de 100% ya que el ciclo de Carnot es un proceso ideal.
b) El ciclo de Carnot consiste en dos procesos isotérmicos y dos procesos adiabáticos.
c) El ciclo de Carnot consiste en dos procesos isotérmicos y dos procesos isentrópicos (entropía constante).
d) La eficiencia del ciclo de Carnot depende solamente de las temperaturas de los dos depósitos térmicos.

20.10 ¿Puede funcionar un motor térmico con el parámetro especificado en la figura?

- a) Sí.
b) No.
c) Necesitaría saber el ciclo específico utilizado por el motor para contestar.
d) Sí, pero únicamente con un gas monoatómico.
e) Sí, pero únicamente con un gas diatómico.



les son la primera y la segunda distribución más probable (por ejemplo, 3 átomos en A, 1 átomo en B) de los átomos de gas en la caja? Calcule la entropía, S , de esas dos distribuciones. Observe que las configuraciones con los 3 átomos en A y 1 átomo en B, y con 1 átomo en A y 3 átomos en B cuentan como diferentes configuraciones.

20.15 Una característica clave de la termodinámica es el hecho de que la energía interna, E_{int} de un sistema y su entropía, S , son *estados variables*; esto es, dependen únicamente en el estado termodinámico del sistema y no en los procesos por los cuales alcanza ese estado (a diferencia de, por ejemplo, el calor contenido, Q). Esto significa que las diferenciales $dE_{\text{int}} = T dS - p dV$ y $dS = T^{-1} dE_{\text{int}} + pT^{-1} dV$, donde T es la temperatura (en kelvins), p es la presión y V es el volumen, son diferenciales exactas como se definen en el cálculo. ¿Qué relaciones se siguen de este hecho?

20.16 Otros estados variables útiles para la caracterización de diferentes clases de procesos se pueden definir como E_{int} , S , P , y V . Éstas incluyen la entalpía, $H \equiv E_{\text{int}} + pV$, la energía libre de Helmholtz, $A \equiv E_{\text{int}} - TS$, y la energía libre de Gibbs, $G \equiv E_{\text{int}} + pV - TS$.

a) Escriba las ecuaciones diferenciales para dH , dA , y dG .

b) Todas éstas son también diferenciales exactas. ¿Qué relaciones se siguen de este hecho?

Use la primera ley para simplificar.

20.17 Pruebe que la definición microscópica de la entropía de Boltzmann, $S = k_B \ln w$, implica que la entropía es una variable acumulativa: dados dos sistemas, A y B, en estados termodinámicos específicos, con entropías S_A y S_B , respectivamente, muestran que la entropía correspondiente al sistema combinado es $S_A + S_B$.

PROBLEMAS

Una • y dos •• indican un nivel creciente de dificultad del problema.

Sección 20.2

20.22 Con cada ciclo, un motor de 2 500. W extrae 2 100. J de un depósito térmico a 90.0 °C y expulsa 1 500. J a un depósito térmico a 20.0 °C. ¿Cuál es el trabajo hecho para cada ciclo? ¿Cuál es la eficiencia del motor? ¿Cuánto tiempo le toma a cada ciclo?

•**20.23** Un refrigerador con un coeficiente de desempeño de 3.80 se está usando para enfriar 2.00 L de agua mineral de temperatura ambiente (25.0 °C) a 4.00 °C. Si el refrigerador usa 480. W, ¿cuánto tiempo le llevará al agua llegar a los 4.00 °C? Recuerde que la capacidad calorífica del agua es de 4.19 kJ/(kg K), y la densidad del agua es de 1.00 g/cm³. Suponga que el resto del contenido del refrigerador está ya a 4.00 °C.

•**20.24** Quemar combustible transfiere $4 \cdot 10^5$ W de potencia al motor de 2 000. kg del vehículo. Si la eficiencia del motor es de 25.0%, determine la rapidez máxima que el vehículo puede alcanzar 5.00 s después de iniciar en el reposo.

•**20.25** Un motor térmico consiste en una fuente de calor que causa la expansión de un gas monoatómico, empujando al pistón, para de esta forma hacer el trabajo. El gas comienza con una presión de 300. kPa, un volumen de 150. cm³, y una temperatura ambiente de 20.0 °C. Al alcanzar un volumen de 450. cm³, el pistón está asegurado en su lugar y la fuente de calor es removida. En este momento, el gas enfría de regreso a la temperatura ambiente. Por último, el pistón es liberado y se usa para comprimir isotérmicamente el gas de regreso a su estado original.

a) Esboce el ciclo en un diagrama pV .

b) Determine el trabajo realizado en el gas y el flujo de calor que sale del gas en cada parte del ciclo.

c) Usando los resultados del inciso b), determine la eficiencia del motor.

20.18 Explique cómo es posible para una bomba de calor, como aquella en el ejemplo 20.2, operar con únicamente 6.28 kW de energía y calentar una casa que está perdiendo energía térmica a una velocidad de 21.98 kW.

20.19 La temperatura en las nubes superiores de Saturno es aproximadamente de 50 K. La atmósfera de Saturno produce vientos tremendos; rapidez del viento de 600 km/h han sido inferidas de medidas espaciales. ¿El factor del efecto enfriador del viento en Saturno puede producir una temperatura de (o menor a) cero absoluto? ¿Cómo, o por qué no?

20.20 ¿Es una violación a la segunda ley de la termodinámica capturar todo el calor desechado del motor de vapor y entubarlo de regreso al sistema a que trabaje? ¿Por qué sí o por qué no?

20.21 Le han dado una cubeta de agua. ¿Qué puede hacer para incrementar su entropía? ¿Qué puede hacer para disminuir su entropía?

•**20.26** Un ciclo de motor térmico que se usa a menudo en la refrigeración es el *ciclo de Brayton*, el cual involucra una compresión adiabática, seguida de expansión isobárica, una expansión adiabática y finalmente una compresión isobárica. El sistema comienza en una temperatura T_1 y hace una transición a temperaturas T_2 , T_3 y T_4 después de partes respectivas del ciclo.

a) Esboce este ciclo en un diagrama pV .

b) Muestre que las eficiencias del ciclo entero están dadas por $\epsilon = 1 - (T_4 - T_1)/(T_3 - T_2)$.

•**20.27** Suponga que un motor de Brayton (vea el problema 20.26) es manejado como un refrigerador. En este caso, el ciclo comienza a una temperatura T_1 , y el gas se expande isobáricamente hasta que alcanza una temperatura T_4 . Entonces el gas es comprimido de manera adiabática hasta que su temperatura es T_3 . Después es comprimido isobáricamente y la temperatura cambia a T_2 . Por último, se expande en forma adiabática hasta que regresa a una temperatura T_1 .

a) Esboce este ciclo en un diagrama pV .

b) Muestre que el coeficiente de desempeño del motor está dado por $K = (T_4 - T_1)/(T_3 - T_2 - T_4 + T_1)$.

Sección 20.3

20.28 Se desea construir una bomba térmica que tenga una temperatura de salida de 23 °C. Calcule el coeficiente de desempeño máximo para la bomba cuando la fuente de entrada es a) el aire externo de un día frío de invierno está a -10.0 °C y b) el agua subterránea está a 9 °C.

20.29 Considere un motor de Carnot que trabaja entre depósitos térmicos con temperaturas de 1 000.0 K y 300.0 K. La potencia media del motor es de 1.00 kJ por ciclo.

a) ¿Cuál es la eficiencia de este motor?

b) ¿Cuánta energía es extraída del depósito caliente por ciclo?

c) ¿Cuánta energía es entregada al depósito frío?

20.30 Un refrigerador de Carnot está operando entre depósitos térmicos con temperaturas de 27.0 °C y 0.00 °C.

- ¿Cuánto trabajo necesita introducirse para extraer 10.0 J de calor del depósito frío?
- ¿Cuánto trabajo se necesita si el depósito frío está a -20.0 °C?

20.31 Se ha sugerido que se puede usar la vasta cantidad de energía térmica en los océanos. El proceso descansaría en las diferencias de temperatura entre la capa superior del océano y la inferior; la temperatura del agua en la parte inferior es bastante constante, pero la temperatura del agua en la superficie cambia dependiendo del momento del día, la estación y el clima. Suponga que la diferencia de temperatura entre la superficie y el fondo en la ubicación de una planta de energía térmica propuesta sea de 3 °C. Suponiendo que la planta funcionara con la mayor eficiencia posible, ¿existe un límite de cuánta de la energía térmica del océano se puede extraer? Si es así, ¿cuál es el límite?

•20.32 Un motor de Carnot toma una cantidad de calor $Q_H = 100. \text{ J}$ de un depósito de alta temperatura a una temperatura $T_H = 1\,000. \text{ °C}$, y desecha el calor restante a un depósito de baja temperatura a $T_L = 10.0 \text{ °C}$. Encuentre la cantidad de trabajo que se obtiene en este proceso.

•20.33 Un motor de Carnot opera entre un depósito caliente a una temperatura T_1 y un depósito frío a una temperatura T_2 . Se encuentra que al incrementar la temperatura del depósito caliente por un factor de 2 mientras se mantiene a la misma temperatura el depósito frío también incrementa la eficiencia del motor de Carnot por un factor de 2. Encuentre la eficiencia del motor y la proporción de las temperaturas de los dos depósitos en sus formas originales.

•20.34 Cierta refrigerador está calificado con una eficiencia de 32.0%. Para remover 100. J de calor del interior a 0 °C y eyectarlo hacia afuera a 22 °C, ¿cuánto trabajo debe hacer el motor del refrigerador?

Sección 20.4

20.35 Un refrigerador tiene un coeficiente de desempeño de 5.0. Si el refrigerador absorbe 40.0 cal de calor del depósito de baja temperatura en cada ciclo, ¿cuál es la cantidad de calor expulsado al depósito de alta temperatura?

20.36 Una bomba de calor tiene un coeficiente de desempeño de 5.0. Si la bomba de calor absorbe 40.0 cal de calor del frío al aire libre en cada ciclo, ¿cuál es la cantidad de calor expulsado al aire caliente bajo techo?

20.37 Un motor de Otto tiene una máxima eficiencia de 20.0%; encuentre la proporción de compresión. Suponga que el gas es diatómico.

•20.38 Un motor fuera de borda para un barco es enfriado por el agua del lago a 15.0 °C y tiene una proporción de compresión de 10.0. Suponga que el aire es un gas diatómico.

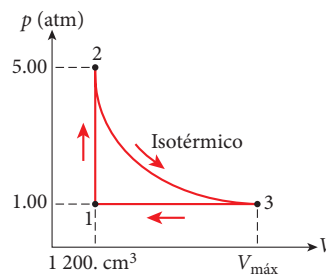
- Calcule la eficiencia del motor del ciclo de Otto.
- Usando su respuesta del inciso a) y el hecho de que la eficiencia de un ciclo de Carnot es mucho mayor que aquella del ciclo de Otto, estime la máxima temperatura del motor.

•20.39 Un motor térmico usa 100. mg de gas helio y sigue el ciclo mostrado en la figura.

- Determine la presión, volumen y temperatura del gas en los puntos 1, 2 y 3.

b) Determine la eficiencia del motor.

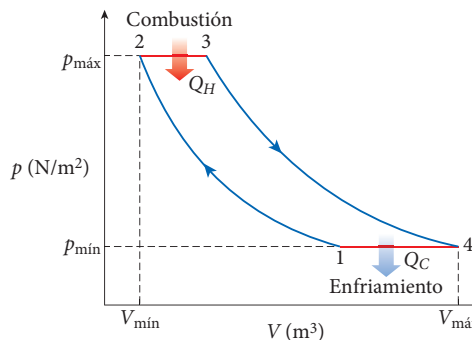
c) ¿Cuál sería la eficiencia máxima del motor si fuera capaz de funcionar entre el máximo y el mínimo de temperaturas?



••20.40 Los motores de las turbinas de gas, como las de las aeronaves de propulsión a chorro, operan en un ciclo termodinámico conocido como el ciclo de Brayton. El ciclo básico de Brayton, como se muestra en la figura, consiste de dos procesos adiabáticos —la compresión y expansión de un gas a través de la turbina— y de dos procesos isobáricos. El calor es transferido al gas durante la combustión en un proceso de presión constante (trayecto del punto 2 al punto 3) y removido del gas en un intercambio térmico durante el proceso de presión constante (trayecto del punto 4 al punto 1). El parámetro clave para este ciclo es la proporción de la presión, definida como, $r_p = p_{\text{máx}}/p_{\text{mín}} \equiv p_2/p_1$, y éste es el único parámetro necesario para calcular la eficiencia del motor de Brayton.

a) Determine una expresión para la eficiencia.

b) Calcule la eficiencia de un motor de Brayton que utiliza un gas diatómico y tiene una proporción de presión de 10.0.



Secciones 20.6 y 20.7

20.41 Uno de los extremos de una barra de metal está en contacto con el depósito térmico a 700. K, y el otro extremo está en contacto con un depósito térmico a 100. K. La barra de metal y los depósitos forman un sistema cerrado. Si 8 500. J son conducidos de un extremo al otro de la barra uniformemente (sin que cambie la temperatura de la barra), ¿cuál es el cambio en la entropía del sistema en a) cada depósito, b) la barra y c) el sistema?

20.42 La entropía de un estado macroscópico está dada por $S = k_B \ln w$, donde k_B es la constante de Boltzmann y w es el número de posibles estados microscópicos. Calcule el cambio de la entropía cuando n moles de un gas ideal experimentan libre expansión para llenar el volumen entero de una caja después de que la barrera entre las dos mitades de la caja se quitó.

20.43 Se envía una propuesta para un motor nuevo que estará funcionando entre 400. K y 300. K.

- a) ¿Cuál es la máxima eficiencia teórica del motor?
- b) ¿Cuál es el cambio total de la entropía por ciclo si el motor funciona a su eficiencia máxima?

20.44 Un bloque de 10.0 kg inicialmente se desliza a 10.0 m/s en una superficie plana rugosa y a la larga se detiene. Si el bloque se enfría a temperatura ambiente, que es de 27.0 °C, ¿cuál es el cambio en la entropía del sistema?

20.45 Suponga que un átomo con un volumen V_A está dentro de un contenedor con volumen V . El átomo puede ocupar cualquier posición dentro de su volumen. Para este simple modelo, el número de estados disponibles para el átomo se da por V/V_A . Ahora suponga que el mismo átomo está dentro de un contenedor con volumen $2V$. ¿Cuál será el cambio de entropía?

•**20.46** Un gas ideal está encerrado en un cilindro con un pistón móvil en la parte superior. Las paredes del cilindro están aisladas, para que el calor no pueda salir ni entrar. Al inicio el gas ocupa el volumen V_1 y la presión p_1 y la temperatura T_1 . El pistón se mueve entonces de manera muy rápida al volumen de $V_2 = 3V_1$. Este proceso ocurre tan rápidamente que el gas encerrado no realiza ningún trabajo. Encuentre p_2 , T_2 y el cambio de la entropía del gas.

•**20.47** Los electrones tienen una propiedad llamada giratoria que puede ser tanto hacia arriba como hacia abajo, de manera análoga como una moneda puede ser cara o cruz. Considere cinco electrones. Calcule la entropía, $S_{5arriba}$, para el estado donde los giros de los cinco electrones van hacia arriba. Calcule la entropía, $S_{3arriba}$, para el estado donde tres giros van hacia arriba y dos van hacia abajo.

•**20.48** Se toma una barra de hierro de 0.545 kg de un fogón a 1 000.0 °C y se deja caer dentro de 10.00 kg de agua a 22.0 °C. Suponiendo que no se pierde ninguna energía en forma de calor a los alrededores mientras el agua y la barra alcanzan su temperatura final, determine el total del cambio de entropía del sistema de agua-barra.

••**20.49** Si la Tierra se trata como un cuerpo negro esférico de un radio de 6 371 km, que absorbe el calor del Sol a una proporción dada por la constante solar (1 370 W/m²) e inmerso en un espacio con una temperatura aproximada de $T_{sp} = 50.0$ K, irradia calor de regreso al espacio a una temperatura en equilibrio de 278.9 K. (Esto es un refinamiento leve del modelo en el capítulo 18.) Estime la proporción en la cual la Tierra gana entropía en este modelo.

••**20.50** Suponga que una persona metabolice 2 000 kcal/día.

- a) Con una temperatura corporal de 37.0 °C y una temperatura ambiente de 20.0 °C, ¿cuál es la eficiencia máxima (Carnot) con la cual la persona puede trabajar?
- b) Si la persona pudiera trabajar con esa eficiencia, ¿a qué tasa, en watts, tendrían que deshacerse de los desechos de calor al medio ambiente?
- c) Con un área de piel de 1.50 m², una temperatura de piel a 27.0 °C, y una efectiva emisividad de $e = 0.600$, ¿a qué tasa *neto* irradia esta persona calor de los 20.0 °C que lo rodean?

d) El resto de los desechos de calor necesitan ser removidos evaporando agua, ya sea como sudoración o desde los pulmones. A temperatura corporal, el calor latente de vaporización del agua es de 575 cal/g. ¿A qué tasa, en gramos por hora, pierde agua esta persona?

e) Estime la tasa a la que la persona gana entropía. Suponga que toda la evaporación requerida del agua sucede en los pulmones, a una temperatura interna del cuerpo de 37.0 °C.

Problemas adicionales

20.51 Una fuente de energía no contaminante es la energía geotérmica, del calor del interior de la Tierra. Estime la eficiencia máxima de un motor térmico funcionando entre el centro de la Tierra y la superficie de la Tierra (use la tabla 17.1).

20.52 En algunos de los ciclos termodinámicos discutidos en este capítulo, una intersección es isotérmica y una curva es adiabática. Para un gas ideal, ¿por qué factor es la curva adiabática más profunda que la isotérmica?

20.53 Los motores de combustión interna en los automóviles de hoy operan con el ciclo de Otto. La eficiencia de este ciclo, $\epsilon_{Otto} = 1 - r^{1-\gamma}$, como se deriva en este capítulo, depende de la proporción de la compresión, $r = V_{max}/V_{min}$. Incrementar la eficiencia de un motor Otto puede hacerse al aumentar la proporción de compresión. Esto, a su vez, requiere combustible con una valoración de octanos más alta, para evitar la propia combustión de una mezcla de combustible y aire. La tabla que sigue muestra algunos valores de octanos y la proporción máxima de compresión que el motor debe tener antes de que la propia combustión llegue (de golpe).

Valoración en octanos del combustible	Máxima proporción de compresión sin golpear
91	8.5
93	9.0
95	9.8
97	10.5

Calcule la máxima eficiencia teórica de un motor de combustión interna funcionando en cada uno de estos cuatro tipos de gasolina y el porcentaje de incremento en la eficiencia entre usar combustible con un grado de octanos de 91 y usar un combustible con un grado de octanos de 97.

20.54 Considere un acondicionador de aire para habitación usando un ciclo de Carnot a su máxima eficiencia teórica y operando entre una temperatura de 18 °C (dentro de la habitación) y 35 °C (fuera de la habitación). Por cada 1.00 J de calor que fluye fuera de la habitación hacia el acondicionador de aire:

- a) ¿Cuánto calor fluye fuera del aire acondicionado hacia el exterior de la habitación?
- b) Aproximadamente, ¿por cuánto disminuye la entropía de la habitación?
- c) Aproximadamente, ¿por cuánto se incrementa la entropía del exterior de la habitación?

20.55 Suponga que le toma 0.0700 J de energía para calentar una muestra de 1.00 g de mercurio de 10.000 °C a 10.500 °C y como la capacidad de calentamiento del mercurio es constan-

te, con cambios insignificantes de volumen como función de temperatura. Encuentre el cambio en la entropía si esta muestra es calentada de los 10. °C a 100 °C.

20.56 ¿Cuál es la mínima cantidad de trabajo que se necesita para extraer 500.0 J de calor de un objeto sólido a una temperatura de 27.0 °C mientras suelta calor a un depósito de altas temperaturas con una temperatura de 100.0 °C?

20.57 Considere un sistema que consiste en tirar un dado de seis caras. ¿Qué ocurre con la entropía de ese sistema si se le suma un dado adicional? ¿Se duplica? ¿Qué pasa con la entropía si el número de dados es de tres?

20.58 Un inventor sostiene que ha creado un motor impulsado por agua con una eficiencia de 0.200 que opera entre depósitos térmicos a 4 °C y a 20. °C. ¿Sería esta una reclamación válida?

20.59 Si el nitrógeno líquido es hervido lentamente —esto es, en forma reversible— para transformarlo en gas nitrógeno con una presión $P = 100.0$ kPa, su entropía aumenta por $\Delta S = 72.1$ J/(mol K). El calor latente de la vaporización del nitrógeno en su temperatura de ebullición en esta presión es $L_{\text{vap}} = 5.568$ kJ/mol. Usando estos datos, calcule la temperatura de ebullición del nitrógeno a esta presión.

20.60 Un automóvil de 1 200 kg que viaja a 30.0 m/s choca contra una pared en un día cálido (27 °C). ¿Cuál es el cambio de entropía total?

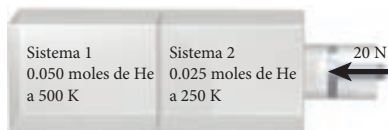
•20.61 Un motor enfriado por agua produce 1 000. W de potencia. El agua entra al bloque del motor a 15.0 °C y sale a 30.0 °C. La proporción del flujo de agua es de 100. L/h. ¿Cuál es la eficiencia del motor?

•20.62 Encuentre el cambio neto de la entropía cuando 100.0 g de agua a 0 °C se añaden a 100.0 g de agua a 100.0 °C.

•20.63 Una planta de energía de carbón produce 3 000. MW de energía térmica, lo cual se usa para hervir agua y producir vapor supersaturado a 300. °C. Este vapor de alta presión mueve una turbina produciendo 1 000. MW de energía eléctrica. Al final del proceso, el vapor es enfriado a 30.0 °C y reciclado.

a) ¿Cuál es la posible eficiencia máxima de la planta?
 b) ¿Cuál es la eficiencia real de la planta?
 c) Para enfriar el vapor, agua del río corre a través del condensador a una proporción de $4.00 \cdot 10^7$ gal/h. Si el agua entra al condensador a 20.0 °C, ¿cuál es su temperatura de salida?

•20.64 Dos compartimientos de igual volumen de una caja están unidos por una fina pared como se enseña en la figura. El compartimiento de la izquierda está lleno con 0.0500 moles de gas helio a 500. K, y el compartimiento de la derecha contiene 0.0250 moles de gas helio a 250. K. El compartimiento de la derecha también tiene un pistón al cual se le aplica una fuerza de 20.0 N.



a) Si se quita la pared que divide los compartimientos, ¿cuál será la temperatura final del sistema?
 b) ¿Cuánto calor se va a transferir del compartimiento de la izquierda al de la derecha?

c) ¿Cuál será el desplazamiento del pistón debido a esta transferencia o calor?

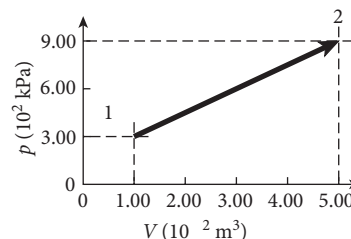
d) ¿Qué fracción del calor será convertida a trabajo?

•20.65 Un volumen de 6.00 L de gas ideal monoatómico originalmente a 400. K y presión de 3.00 atm (llamado estado 1), experimenta el siguiente proceso, todo hecho de manera reversible:

- 1 → 2 expansión isotérmica a $V_2 = 4V_1$
- 2 → 3 compresión isobárica
- 3 → 1 compresión adiabática a su estado original

Encuentre el cambio en la entropía para cada proceso.

•20.66 El proceso mostrado en el diagrama pV se realiza en 3.00 moles de gas monoatómico. Determine la cantidad de calor de entrada para este proceso.



•20.67 1.00 mol del gas ideal monoatómico con una presión de 4 atm y volumen de 30.0 L es expandido isotérmicamente a una presión de 1.00 atm y un volumen de 120.0 L. Después, es comprimido a una presión constante hasta que su volumen es de 30.0 L, y entonces su presión se incrementa a un volumen constante de 30.0 L. ¿Cuál es la eficiencia del ciclo de este motor térmico?

••20.68 Dos cilindros, A y B, tienen diámetros internos iguales y pistones de masa insignificante conectados por una barra rígida. Los pistones pueden moverse libremente. La barra es un tubo corto con una válvula, que está inicialmente cerrada (vea la figura).



El cilindro A y su pistón están térmicamente aislados, y el cilindro B está en contacto térmico con un termostato, el cual tiene una temperatura de $\theta = 27.0$ °C. Al inicio, el pistón del cilindro A está fijo y dentro del cilindro hay una masa $m = 0.320$ kg, de argón a una presión más alta que la presión atmosférica. Dentro del cilindro B hay una masa de oxígeno a presión atmosférica normal. Cuando el pistón del cilindro A se libera, se mueve muy lentamente, y en equilibrio, el volumen del argón en el cilindro A es ocho veces mayor, y la densidad del oxígeno ha incrementado por un factor de 2. El termostato recibe calor $Q' = 7.479 \cdot 10^4$ J.

- a) Basado en la teoría cinética de un gas ideal, muestre que el proceso termodinámico que está teniendo lugar en el cilindro A satisface $TV^{2/3} = \text{constante}$.
- b) Calcule p , V y T del argón en sus estados inicial y final.
- c) Calcule la presión final de la mezcla de los gases si la válvula de la barra se abre.

La masa molar del argón es $\mu = 39.95$ g/mol.

Apéndice A

Matemáticas Primer

1. Álgebra	A-1
1.1 Lo básico	A-1
1.2 Exponentes	A-2
1.3 Logaritmos	A-2
1.4 Ecuaciones lineales	A-3
2. Geometría	A-3
2.1 Formas geométricas en dos dimensiones	A-3
2.2 Formas geométricas en tres dimensiones	A-3
3. Trigonometría	A-3
3.1 Triángulos rectángulos	A-3
3.2 Triángulos generales	A-5
4. Cálculo	A-6
4.1 Derivadas	A-6
4.2 Integrales	A-6
5. Números complejos	A-7
Ejemplo A.1 Conjunto de Mandelbrot	A-8

Notación:

Las letras a , b , c , x y y representan números reales.

Las letras i , j , m y n representan números enteros.

Las letras griegas α , β y γ representan ángulos, que se miden en radianes.

1. Álgebra

1.1 Lo básico

Factores:

$$ax + bx + cx = (a + b + c)x \quad (\text{A.1})$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad (\text{A.2})$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad (\text{A.3})$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2 \quad (\text{A.4})$$

Ecuación cuadrática:

Una ecuación de la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (\text{A.5})$$

Para valores dados de a , b y c tiene las dos soluciones:

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (\text{A.6})$$

y

$$x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Las soluciones de esta ecuación cuadrática se denominan *raíces*. Las raíces son los números reales si $b^2 \geq 4ac$.

1.2 Exponentes

Si a es un número real, a^n es el producto de a por sí mismo n veces:

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ factores}} \quad (\text{A.7})$$

El número n se denomina *exponente*. No obstante, un exponente no tiene que ser un número positivo o un entero. Cualquier número real x puede usarse como exponente.

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x} \quad (\text{A.8})$$

$$a^0 = 1 \quad (\text{A.9})$$

$$a^1 = a \quad (\text{A.10})$$

Raíces:

$$a^{1/2} = \sqrt{a} \quad (\text{A.11})$$

$$a^{1/n} = \sqrt[n]{a} \quad (\text{A.12})$$

Multiplicación y división:

$$a^x a^y = a^{x+y} \quad (\text{A.13})$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \quad (\text{A.14})$$

$$(a^x)^y = a^{xy} \quad (\text{A.15})$$

1.3 Logaritmos

El logaritmo es la función inversa de la función exponencial de la sección previa:

$$y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a y \quad (\text{A.16})$$

La notación $\log_a y$ indica el logaritmo de y con respecto a la base a . Puesto que las funciones exponencial y logaritmo son inversas entre sí, también podemos escribir la identidad como:

$$x = \log_a(a^x) = a^{\log_a x} \quad (\text{para cualquier base } a) \quad (\text{A.17})$$

Las dos bases de uso más común son la base 10, la base de los logaritmos comunes, y la base e , la base de los logaritmos naturales. El valor numérico de e es

$$e = 2.718281828 \dots \quad (\text{A.18})$$

Base 10:

$$y = 10^x \Leftrightarrow x = \log_{10} y \quad (\text{A.19})$$

Base e :

$$y = e^x \Leftrightarrow x = \ln y \quad (\text{A.20})$$

El libro sigue la convención de usar \ln para indicar el logaritmo con respecto a la base e .

Las reglas para calcular con logaritmos se concluyen a partir de las reglas para calcular con exponentes:

$$\log(ab) = \log a + \log b \quad (\text{A.21})$$

$$\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b \quad (\text{A.22})$$

$$\log(a^x) = x \log a \quad (\text{A.23})$$

$$\log 1 = 0 \quad (\text{A.24})$$

Puesto que estas reglas son válidas para cualquier base, se ha omitido el subíndice que indica la base.

1.4 Ecuaciones lineales

La forma general de una ecuación lineal es

$$y = ax + b \tag{A.25}$$

donde a y b son constantes. La gráfica de y contra x es una línea recta; la pendiente de esta recta es a , y b es la ordenada al origen. Vea la figura A.1.

La pendiente de la recta puede calcularse al escribir dos valores diferentes, x_1 y x_2 , en la ecuación de la recta y calcular los valores resultantes, y_1 y y_2 :

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \tag{A.26}$$

Si $a = 0$, entonces la recta es horizontal: si $a > 0$, entonces la recta crece cuando x crece, como muestra el ejemplo de la figura A.1; si $a < 0$, entonces la recta cae cuando x crece.

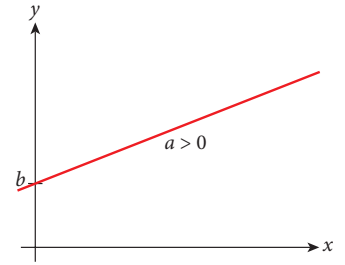


FIGURA A.1 Representación gráfica de una ecuación lineal.

2. Geometría

2.1 Formas geométricas en dos dimensiones

La figura A.2 enumera el área, A , y la longitud del perímetro o circunferencia, C , de objetos bidimensionales comunes.

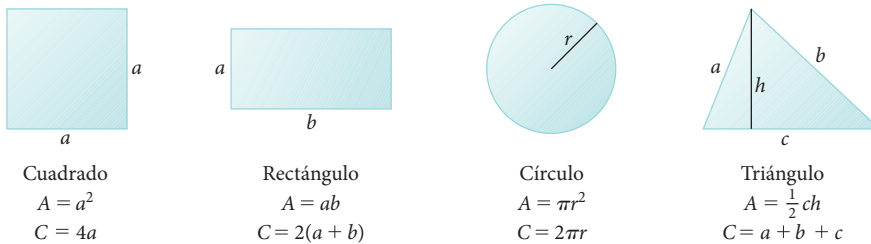


FIGURA A.2 Área, A , y longitud del perímetro, C , del cuadrado, rectángulo, círculo y triángulo.

2.2 Formas geométricas en tres dimensiones

La figura A.3 muestra el volumen, V , y el área superficial, A , de objetos tridimensionales comunes.

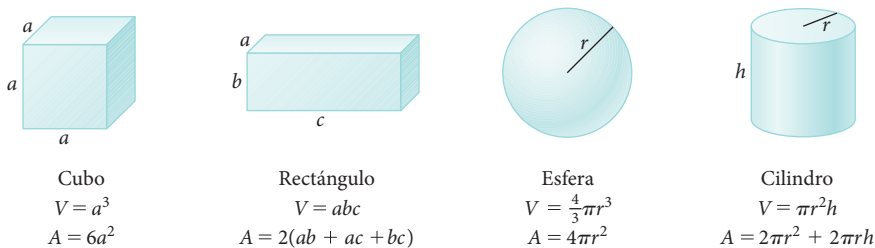


FIGURA A.3 Volumen, V , y área superficial, A , de objetos tridimensionales comunes.

3. Trigonometría

Resulta importante observar que a partir de ahora todos los ángulos deben medirse en radianes.

3.1 Triángulos rectángulos

Un triángulo rectángulo es un triángulo que contiene un ángulo recto; es decir, un ángulo que mide exactamente 90° ($\pi/2$ rad) (indicado por el pequeño cuadrado en la figura A.4). La hipotenusa es el lado opuesto al ángulo de 90° . Por convención, la hipotenusa se indica con la letra c .

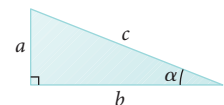


FIGURA A.4 Definición de las longitudes de los lados, a , b , c y los ángulos del triángulo rectángulo.

Teorema de Pitágoras:

$$a^2 + b^2 = c^2 \tag{A.27}$$

Definición de las funciones trigonométricas (vea la figura A.5):

$$\text{sen } \alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} \tag{A.28}$$

$$\text{cos } \alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} \tag{A.29}$$

$$\text{tan } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha} = \frac{a}{b} \tag{A.30}$$

$$\text{cot } \alpha = \frac{\text{cos } \alpha}{\text{sen } \alpha} = \frac{1}{\text{tan } \alpha} = \frac{b}{a} \tag{A.31}$$

$$\text{csc } \alpha = \frac{1}{\text{sen } \alpha} = \frac{c}{a} \tag{A.32}$$

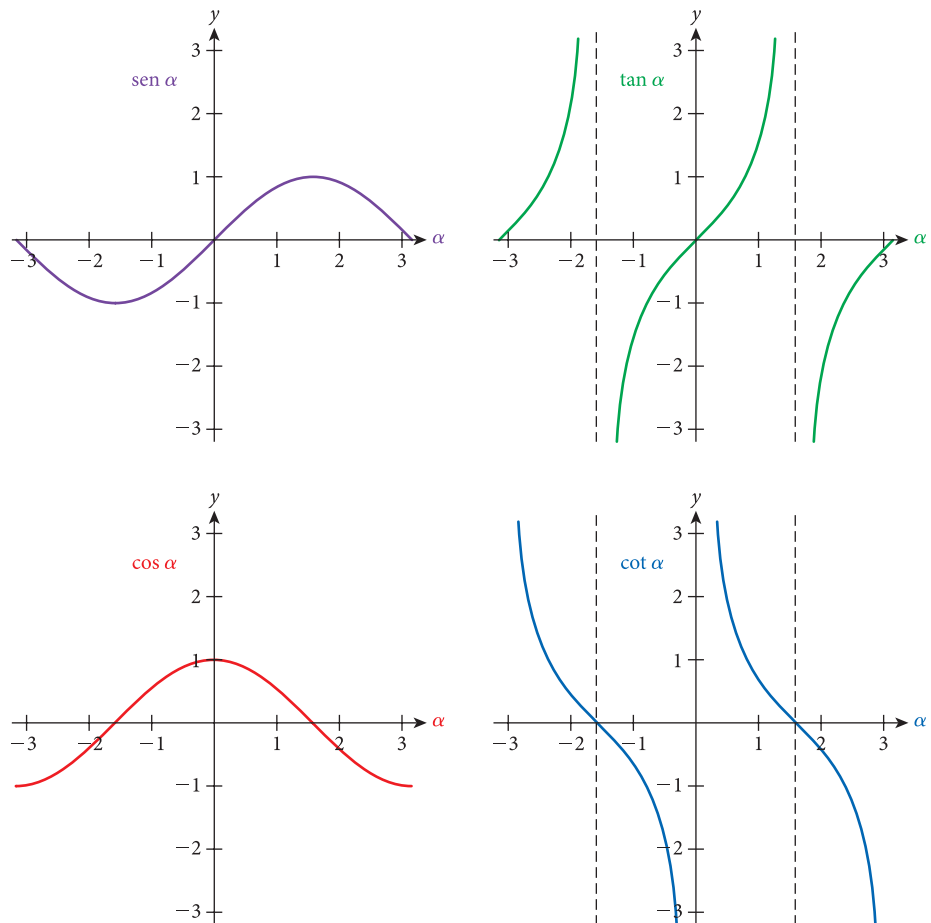
$$\text{sec } \alpha = \frac{1}{\text{cos } \alpha} = \frac{c}{b} \tag{A.33}$$

Las funciones trigonométricas inversas (en este libro se usa la notación sen^{-1} , cos^{-1} , etcétera):

$$\text{sen}^{-1} \frac{a}{c} \equiv \text{arcsen} \frac{a}{c} = \alpha \tag{A.34}$$

$$\text{cos}^{-1} \frac{b}{c} \equiv \text{arccos} \frac{b}{c} = \alpha \tag{A.35}$$

FIGURA A.5 Las funciones trigonométricas sen, cos, tan y cot.



$$\tan^{-1} \frac{a}{b} \equiv \arctan \frac{a}{b} = \alpha \quad (\text{A.36})$$

$$\cot^{-1} \frac{b}{a} \equiv \operatorname{arccot} \frac{b}{a} = \alpha \quad (\text{A.37})$$

$$\csc^{-1} \frac{c}{a} \equiv \operatorname{arccsc} \frac{c}{a} = \alpha \quad (\text{A.38})$$

$$\sec^{-1} \frac{c}{b} \equiv \operatorname{arcsec} \frac{c}{b} = \alpha \quad (\text{A.39})$$

Todas las funciones trigonométricas son periódicas:

$$\operatorname{sen}(\alpha + 2\pi) = \operatorname{sen} \alpha \quad (\text{A.40})$$

$$\operatorname{cos}(\alpha + 2\pi) = \operatorname{cos} \alpha \quad (\text{A.41})$$

$$\tan(\alpha + \pi) = \tan \alpha \quad (\text{A.42})$$

$$\cot(\alpha + \pi) = \cot \alpha \quad (\text{A.43})$$

Otras relaciones entre funciones trigonométricas:

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{cos}^2 \alpha = 1 \quad (\text{A.44})$$

$$\operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen} \alpha \quad (\text{A.45})$$

$$\operatorname{cos}(-\alpha) = \operatorname{cos} \alpha \quad (\text{A.46})$$

$$\operatorname{sen}(\alpha \pm \pi/2) = \pm \operatorname{cos} \alpha \quad (\text{A.47})$$

$$\operatorname{sen}(\alpha \pm \pi) = -\operatorname{sen} \alpha \quad (\text{A.48})$$

$$\operatorname{cos}(\alpha \pm \pi/2) = \mp \operatorname{sen} \alpha \quad (\text{A.49})$$

$$\operatorname{cos}(\alpha \pm \pi) = -\operatorname{cos} \alpha \quad (\text{A.50})$$

Fórmulas de suma:

$$\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{sen} \alpha \operatorname{cos} \beta \pm \operatorname{cos} \alpha \operatorname{sen} \beta \quad (\text{A.51})$$

$$\operatorname{cos}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{cos} \alpha \operatorname{cos} \beta \mp \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta \quad (\text{A.52})$$

Aproximación de ángulo pequeño:

$$\operatorname{sen} \alpha \approx \alpha - \frac{1}{6} \alpha^3 + \dots \quad (\text{para } |\alpha| \ll 1) \quad (\text{A.53})$$

$$\operatorname{cos} \alpha \approx 1 - \frac{1}{2} \alpha^2 + \dots \quad (\text{para } |\alpha| \ll 1) \quad (\text{A.54})$$

Para ángulos pequeños, para $|\alpha| \ll 1$, a menudo es aceptable usar las aproximaciones de ángulos pequeños $\operatorname{cos} \alpha = 1$ y $\operatorname{sen} \alpha = \tan \alpha = \alpha$.

3.2 Triángulos generales

La suma de los tres ángulos de cualquier triángulo es π radianes (vea la figura A.6):

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi \quad (\text{A.55})$$

Ley de los cosenos:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \operatorname{cos} \gamma \quad (\text{A.56})$$

(Ésta es una generalización del teorema de Pitágoras para el caso en que el ángulo γ tenga un valor distinto de 90° , o $\pi/2$ rads.)

Ley de los senos:

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen} \beta}{b} = \frac{\operatorname{sen} \gamma}{c} \quad (\text{A.57})$$

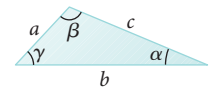


FIGURA A.6 Definición de los lados y ángulos de un triángulo general.

4. Cálculo

4.1 Derivadas

Polinomios:

$$\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1} \quad (\text{A.58})$$

Funciones trigonométricas:

$$\frac{d}{dx} \text{sen}(ax) = a \cos(ax) \quad (\text{A.59})$$

$$\frac{d}{dx} \cos(ax) = -a \text{sen}(ax) \quad (\text{A.60})$$

$$\frac{d}{dx} \tan(ax) = \frac{a}{\cos^2(ax)} \quad (\text{A.61})$$

$$\frac{d}{dx} \cot(ax) = -\frac{a}{\text{sen}^2(ax)} \quad (\text{A.62})$$

Exponenciales y logaritmos:

$$\frac{d}{dx} e^{ax} = ae^{ax} \quad (\text{A.63})$$

$$\frac{d}{dx} \ln(ax) = \frac{1}{x} \quad (\text{A.64})$$

$$\frac{d}{dx} a^x = a^x \ln a \quad (\text{A.65})$$

Regla del producto:

$$\frac{d}{dx} (f(x)g(x)) = \left(\frac{df(x)}{dx} \right) g(x) + f(x) \left(\frac{dg(x)}{dx} \right) \quad (\text{A.66})$$

Regla de la cadena:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} \quad (\text{A.67})$$

4.2 Integrales

Todas las integrales indefinidas tienen una constante de integración, c .

Polinomiales:

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c \quad (\text{para } n \neq -1) \quad (\text{A.68})$$

$$\int x^{-1} dx = \ln|x| + c \quad (\text{A.69})$$

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a} + c \quad (\text{A.70})$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}} dx = \ln|x + \sqrt{a^2 + x^2}| + c \quad (\text{A.71})$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \text{sen}^{-1} \frac{x}{|a|} + c \equiv \tan^{-1} \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} + c \quad (\text{A.72})$$

$$\int \frac{1}{(a^2 + x^2)^{3/2}} dx = \frac{1}{a^2} \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} + c \quad (\text{A.73})$$

$$\int \frac{x}{(a^2 + x^2)^{3/2}} dx = -\frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}} + c \quad (\text{A.74})$$

Funciones trigonométricas:

$$\int \operatorname{sen}(ax) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax) + c \quad (\text{A.75})$$

$$\int \cos(ax) dx = \frac{1}{a} \operatorname{sen}(ax) + c \quad (\text{A.76})$$

Exponenciales:

$$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + c \quad (\text{A.77})$$

5. Números complejos

Todos conocemos los números reales, que pueden disponerse a lo largo de una recta numérica en orden creciente, desde $-\infty$ hasta $+\infty$. Estos números reales están incrustados en un conjunto mucho mayor de números denominados *números complejos*. Los números complejos se definen en términos de su parte real y su parte imaginaria. El espacio de números complejos es un plano, en el cual los números reales constituyen un eje, identificado por $\Re(z)$ en la figura A.7. La parte imaginaria constituye el otro eje, identificado por $\Im(z)$ en la figura A.7. (Suele acostumbrarse usar las antiguas letras mayúsculas alemanas R e I para representar las partes real e imaginaria de los números complejos.)

Un número complejo z se define en términos de su parte real, x , su parte imaginaria, y , y la constante de Euler, i :

$$z = x + iy \quad (\text{A.78})$$

La constante de Euler se define como:

$$i^2 = -1 \quad (\text{A.79})$$

Tanto la parte real, $x = \Re(z)$, como la parte imaginaria, $y = \Im(z)$, de un número complejo son números reales. La suma, la resta, la multiplicación y la división de números complejos se definen en analogía con las mismas operaciones para números reales, con $i^2 = -1$:

$$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d) \quad (\text{A.80})$$

$$(a + ib) - (c + id) = (a - c) + i(b - d) \quad (\text{A.81})$$

$$(a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc) \quad (\text{A.82})$$

$$\frac{a + ib}{c + id} = \frac{(cd + bd) + i(bc - ad)}{c^2 + d^2}. \quad (\text{A.83})$$

Para todo número complejo z existe un conjugado complejo, z^* , que tiene la misma parte real, pero la parte imaginaria tiene signo opuesto:

$$z = x + iy \Leftrightarrow z^* = x - iy \quad (\text{A.84})$$

Podemos expresar las partes real e imaginaria de un número complejo en términos del número y su conjugado complejo:

$$\Re(z) = \frac{1}{2}(z + z^*) \quad (\text{A.85})$$

$$\Im(z) = \frac{1}{2}i(z^* - z). \quad (\text{A.86})$$

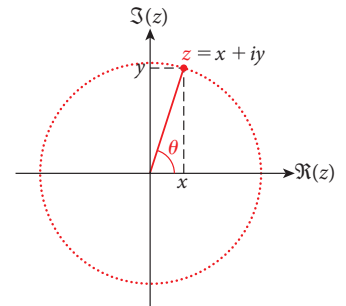


FIGURA A.7 El plano complejo. El eje horizontal se forma con la parte real de los números complejos y el eje vertical, con la parte imaginaria.

Justo como con un vector bidimensional, un número complejo $z = x + iy$, tiene la magnitud $|z|$ así como un ángulo θ con respecto al eje de los números reales positivos, como indica la figura A.7:

$$|z|^2 = zz^* \tag{A.87}$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{\Im(z)}{\Re(z)} = \tan^{-1} \frac{i(z^* - z)}{(z^* + z)} \tag{A.88}$$

Por lo tanto, podemos escribir el número complejo $z = x + iy$ en términos de la magnitud y el “ángulo de fase”:

$$z = |z|(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) \tag{A.89}$$

Una identidad interesante y más útil es la *fórmula de Euler*:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta \tag{A.90}$$

Con ayuda de esta identidad podemos escribir, para cualquier número complejo, z ,

$$z = |z|e^{i\theta} \tag{A.91}$$

Así, podemos elevar cualquier número complejo a cualquier potencia n :

$$z^n = |z|^n e^{in\theta} \tag{A.92}$$

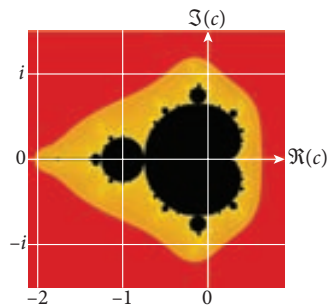


FIGURA A.8 Conjunto de Mandelbrot en el plano complejo.

EJEMPLO A.1 Conjunto de Mandelbrot

Podemos hacer buen uso de nuestro conocimiento de los números complejos y su multiplicación al examinar el *conjunto de Mandelbrot*, definido como el conjunto de todos los puntos c en el plano complejo para el cual la serie de iteraciones

$$z_{n+1} = z_n^2 + c, \quad \text{con } z_0 = c$$

no se va a infinito; es decir, para los cuales $|z_n|$ permanece finito para todas las iteraciones.

Esta prescripción de iteraciones es aparentemente simple. Por ejemplo, podemos ver que cualquier número para el cual $|c| > 2$ no puede pertenecer al conjunto de Mandelbrot. No obstante, si graficamos los puntos del conjunto de Mandelbrot en el plano complejo, surge un objeto excepcionalmente hermoso. En la figura A.8, los puntos negros forman parte del conjunto de Mandelbrot, y los puntos restantes están codificados según su color para indicar cuán rápido z_n se van al infinito.

Apéndice B

Masas de isótopos, energías de enlace y vidas medias

Sólo se enumeran isótopos cuya vida media es mayor que 1.

Z	N	Sím	m (uma)	B (MeV)	Espín	%	τ (s)	Z	N	Sím	m (uma)	B (MeV)	Espín	%	τ (s)
1	0	H	1.007825032	0.000	1/2+	99.985	estable	14	16	Si	29.9737702	8.521	0+	3.0872	estable
1	1	H	2.014101778	1.112	1+	0.0115	estable	14	17	Si	30.97536323	8.458	3/2+		9.44E+03
1	2	H	3.016049278	2.827	1/2+		3.89E+08	14	18	Si	31.97414808	8.482	0+		5.42E+09
2	1	He	3.016029319	2.573	1/2+	0.0001	estable	15	16	P	30.9737615	8.481	1/2+	100	estable
2	2	He	4.002603254	7.074	0+	100	estable	15	17	P	31.9739072	8.464	1+		1.23E+06
3	3	Li	6.0151223	5.332	1+	7.5	estable	15	18	P	32.9717253	8.514	1/2+		2.19E+06
3	4	Li	7.0160040	5.606	3/2-	92.41	estable	16	16	S	31.9720707	8.493	0+	94.93	estable
4	3	Be	7.0169292	5.371	3/2-		4.59E+06	16	17	S	32.97145876	8.498	3/2+	0.76	estable
4	5	Be	9.0121821	6.463	3/2-	100	estable	16	18	S	33.9678668	8.583	0+	4.29	estable
4	6	Be	10.0135337	6.498	0+		4.76E+13	16	19	S	34.9690322	8.538	3/2+		7.56E+06
5	5	B	10.01293699	6.475	3+	19.9	estable	16	20	S	35.96708076	8.575	0+	0.02	estable
5	6	B	11.00930541	6.928	3/2-	80.1	estable	16	22	S	37.9711634	8.449	0+		1.02E+04
6	6	C	12	7.680	0+	98.89	estable	17	18	Cl	34.9688527	8.520	3/2+	75.78	estable
6	7	C	13.00335484	7.470	1/2-	1.11	estable	17	19	Cl	35.9683069	8.522	2+		9.49E+12
6	8	C	14.0032420	7.520	0+		1.81E+11	17	20	Cl	36.9659026	8.570	3/2+	24.22	estable
7	7	N	14.003074	7.476	1+	99.632	estable	18	18	Ar	35.96754511	8.520	0+	0.3365	estable
7	8	N	15.0001089	7.699	1/2-	0.368	estable	18	19	Ar	36.966776	8.527	3/2+		3.02E+06
8	8	O	15.99491463	7.976	0+	99.757	estable	18	20	Ar	37.96273239	8.614	0+	0.0632	estable
8	9	O	16.999131	7.751	5/2+	0.038	estable	18	21	Ar	38.9643134	8.563	7/2-		8.48E+09
8	10	O	17.999163	7.767	0+	0.205	estable	18	22	Ar	39.9623831	8.595	0+	99.6	estable
9	9	F	18.0009377	7.632	1+		6.59E+03	18	23	Ar	40.9645008	8.534	7/2-		6.56E+03
9	10	F	18.99840322	7.779	1/2+	100	estable	18	24	Ar	41.963046	8.556	0+		1.04E+09
10	10	Ne	19.99244018	8.032	0+	90.48	estable	19	20	K	38.9637069	8.557	3/2+	93.258	estable
10	11	Ne	20.99384668	7.972	3/2+	0.27	estable	19	21	K	39.9639987	8.538	4-	0.0117	4.03E+16
10	12	Ne	21.9913855	8.080	0+	9.25	estable	19	22	K	40.9618254	8.576	3/2+	6.7302	estable
11	11	Na	21.9944368	7.916	3+		8.21E+07	19	23	K	41.962403	8.551	2-		4.45E+04
11	12	Na	22.9897697	8.111	3/2+	100	estable	19	24	K	42.960716	8.577	3/2+		8.03E+04
11	13	Na	23.9909633	8.063	4+		5.39E+04	20	20	Ca	39.96259098	8.551	0+	96.941	estable
12	12	Mg	23.9850419	8.261	0+	78.99	estable	20	21	Ca	40.9622783	8.547	7/2-		3.25E+12
12	13	Mg	24.9858370	8.223	5/2+	10	estable	20	22	Ca	41.9586183	8.617	0+	0.647	estable
12	14	Mg	25.9825930	8.334	0+	11.01	estable	20	23	Ca	42.95876663	8.601	7/2-	0.135	estable
12	16	Mg	27.9838767	8.272	0+		7.53E+04	20	24	Ca	43.9554811	8.658	0+	2.086	estable
13	13	Al	25.98689169	8.150	5+		2.33E+13	20	25	Ca	44.956186	8.631	7/2-		1.40E+07
13	14	Al	26.9815384	8.332	5/2+	100	estable	20	26	Ca	45.9536928	8.669	0+	0.004	estable
14	14	Si	27.97692653	8.448	0+	92.23	estable	20	27	Ca	46.9545465	8.639	7/2-		3.92E+05
14	15	Si	28.9764947	8.449	1/2+	4.6832	estable	20	28	Ca	47.9525335	8.666	0+	0.187	1.89E+26

(continúa)

(continuación)

Z	N	Sím	m (uma)	B (MeV)	Espín	%	τ (s)	Z	N	Sím	m (uma)	B (MeV)	Espín	%	τ (s)
21	22	Sc	42.9611507	8.531	7/2-		1.40E+04	28	31	Ni	58.9343516	8.737	3/2-		2.40E+12
21	23	Sc	43.9594030	8.557	2+		1.41E+04	28	32	Ni	59.93078637	8.781	0+	26.223	estable
21	24	Sc	44.9559102	8.619	7/2-	100	estable	28	33	Ni	60.93105603	8.765	3/2-	1.1399	estable
21	25	Sc	45.9551703	8.622	4+		7.24E+06	28	34	Ni	61.92834512	8.795	0+	3.6345	estable
21	26	Sc	46.9524080	8.665	7/2-		2.89E+05	28	35	Ni	62.9296729	8.763	1/2-		3.19E+09
21	27	Sc	47.952231	8.656	6+		1.57E+05	28	36	Ni	63.92796596	8.777	0+	0.9256	estable
22	22	Ti	43.9596902	8.533	0+		1.89E+09	28	37	Ni	64.9300880	8.736	5/2-		9.06E+03
22	23	Ti	44.9581243	8.556	7/2-		1.11E+04	28	38	Ni	65.92913933	8.739	0+		1.97E+05
22	24	Ti	45.9526295	8.656	0+	8.25	estable	29	32	Cu	60.9334622	8.715	3/2-		1.20E+04
22	25	Ti	46.9517638	8.661	5/2-	7.44	estable	29	34	Cu	62.92959747	8.752	3/2-	69.17	estable
22	26	Ti	47.9479471	8.723	0+	73.72	estable	29	35	Cu	63.9297679	8.739	1+		4.57E+04
22	27	Ti	48.9478700	8.711	7/2-	5.41	estable	29	36	Cu	64.9277929	8.757	3/2-	30.83	estable
22	28	Ti	49.9447921	8.756	0+	5.18	estable	29	38	Cu	66.9277503	8.737	3/2-		2.23E+05
23	25	V	47.9522545	8.623	4+		1.38E+06	30	32	Zn	61.93432976	8.679	0+		3.31E+04
23	26	V	48.9485161	8.683	7/2-		2.85E+07	30	34	Zn	63.9291466	8.736	0+	48.63	estable
23	27	V	49.9471609	8.696	6+	0.25	4.42E+24	30	35	Zn	64.929245	8.724	5/2-		2.11E+07
23	28	V	50.9439617	8.742	7/2-	99.75	estable	30	36	Zn	65.92603342	8.760	0+	27.9	estable
24	24	Cr	47.95403032	8.572	0+		7.76E+04	30	37	Zn	66.92712730	8.734	5/2-	4.1	estable
24	26	Cr	49.94604462	8.701	0+	4.345	4.10E+25	30	38	Zn	67.92484949	8.756	0+	18.75	estable
24	27	Cr	50.9447718	8.712	7/2-		2.39E+06	30	40	Zn	69.9253193	8.730	0+	0.62	estable
24	28	Cr	51.9405119	8.776	0+	83.789	estable	30	42	Zn	71.926858	8.692	0+		1.68E+05
24	29	Cr	52.9406513	8.760	3/2-	9.501	estable	31	35	Ga	65.93158901	8.669	0+		3.42E+04
24	30	Cr	53.9388804	8.778	0+	2.365	estable	31	36	Ga	66.9282049	8.708	3/2-		2.82E+05
25	27	Mn	51.9455655	8.670	6+		4.83E+05	31	37	Ga	67.92798008	8.701	1+		4.06E+03
25	28	Mn	52.9412947	8.734	7/2-		1.18E+14	31	38	Ga	68.9255736	8.725	3/2-	60.108	estable
25	29	Mn	53.9403589	8.738	3+		2.70E+07	31	40	Ga	70.9247013	8.718	3/2-	39.892	estable
25	30	Mn	54.9380471	8.765	5/2-	100	estable	31	41	Ga	71.9263663	8.687	3-		5.08E+04
25	31	Mn	55.9389094	8.738	3+		9.28E+03	31	42	Ga	72.92517468	8.694	3/2-		1.75E+04
26	26	Fe	51.948114	8.610	0+		2.98E+04	32	34	Ge	65.93384345	8.626	0+		8.14E+03
26	28	Fe	53.9396127	8.736	0+	5.845	estable	32	36	Ge	67.92809424	8.688	0+		2.34E+07
26	29	Fe	54.9382980	8.747	3/2-		8.61E+07	32	37	Ge	68.927972	8.681	5/2-		1.41E+05
26	30	Fe	55.93493748	8.790	0+	91.754	estable	32	38	Ge	69.92424	8.722	0+	20.84	estable
26	31	Fe	56.93539397	8.770	1/2-	2.119	estable	32	39	Ge	70.9249540	8.703	1/2-		9.88E+05
26	32	Fe	57.93327556	8.792	0+	0.282	estable	32	40	Ge	71.92207582	8.732	0+	27.54	estable
26	33	Fe	58.9348880	8.755	3/2-		3.85E+06	32	41	Ge	72.92345895	8.705	9/2+	7.73	estable
26	34	Fe	59.934072	8.756	0+		4.73E+13	32	42	Ge	73.92117777	8.725	0+	36.28	estable
27	28	Co	54.942003	8.670	7/2-		6.31E+04	32	43	Ge	74.92285895	8.696	1/2-		4.97E+03
27	29	Co	55.9398439	8.695	4+		6.68E+06	32	44	Ge	75.92140256	8.705	0+	7.61	estable
27	30	Co	56.936296	8.742	7/2-		2.35E+07	32	45	Ge	76.92354859	8.671	7/2+		4.07E+04
27	31	Co	57.935757	8.739	2+		6.12E+06	32	46	Ge	77.922853	8.672	0+		5.29E+03
27	32	Co	58.93319505	8.768	7/2-	100	estable	33	38	As	70.92711243	8.664	5/2-		2.35E+05
27	33	Co	59.9338222	8.747	5+		1.66E+08	33	39	As	71.92675228	8.660	2-		9.33E+04
27	34	Co	60.9324758	8.756	7/2-		5.94E+03	33	40	As	72.92382484	8.690	3/2-		6.94E+06
28	28	Ni	55.94213202	8.643	0+		5.25E+05	33	41	As	73.92392869	8.680	2-		1.54E+06
28	29	Ni	56.939800	8.671	3/2-		1.28E+05	33	42	As	74.92159648	8.701	3/2-	100	estable
28	30	Ni	57.9353462	8.732	0+	68.077	estable	33	43	As	75.92239402	8.683	2-		9.31E+04

Z	N	Sím	m (uma)	B (MeV)	Espín	%	$\tau(s)$	Z	N	Sím	m (uma)	B (MeV)	Espín	%	$\tau(s)$
33	44	As	76.92064729	8.696	3/2-		1.40E+05	38	50	Sr	87.9056143	8.733	0+	82.58	estable
33	45	As	77.92182728	8.674	2-		5.44E+03	38	51	Sr	88.9074529	8.706	5/2+		4.37E+06
34	38	Se	71.92711235	8.645	0+		7.26E+05	38	52	Sr	89.907738	8.696	0+		9.08E+08
34	39	Se	72.92676535	8.641	9/2+		2.57E+04	38	53	Sr	90.9102031	8.664	5/2+		3.47E+04
34	40	Se	73.92247644	8.688	0+	0.89	estable	38	54	Sr	91.9110299	8.649	0+		9.76E+03
34	41	Se	74.92252337	8.679	5/2+		1.03E+07	39	46	Y	84.91643304	8.628	(1/2)-		9.65E+03
34	42	Se	75.9192141	8.711	0+	9.37	estable	39	47	Y	85.914886	8.638	4-		5.31E+04
34	43	Se	76.91991404	8.695	1/2-	7.63	estable	39	48	Y	86.9108778	8.675	1/2-		2.88E+05
34	44	Se	77.91730909	8.718	0+	23.77	estable	39	49	Y	87.9095034	8.683	4-		9.21E+06
34	45	Se	78.9184998	8.696	7/2+		2.05E+13	39	50	Y	88.9058483	8.714	1/2-	100	estable
34	46	Se	79.9165213	8.711	0+	49.61	estable	39	51	Y	89.90715189	8.693	2-		2.31E+05
34	48	Se	81.9166994	8.693	0+	8.73	2.62E+27	39	52	Y	90.907305	8.685	1/2-		5.06E+06
35	40	Br	74.92577621	8.628	3/2-		5.80E+03	39	53	Y	91.9089468	8.662	2-		1.27E+04
35	41	Br	75.924541	8.636	1-		5.83E+04	39	54	Y	92.909583	8.649	1/2-		3.66E+04
35	42	Br	76.92137908	8.667	3/2-		2.06E+05	40	46	Zr	85.91647359	8.612	0+		5.94E+04
35	44	Br	78.91833709	8.688	3/2-	50.69	estable	40	47	Zr	86.91481625	8.624	(9/2)+		6.05E+03
35	46	Br	80.9162906	8.696	3/2-	49.31	estable	40	48	Zr	87.9102269	8.666	0+		7.21E+06
35	47	Br	81.9168047	8.682	5-		1.27E+05	40	49	Zr	88.908889	8.673	9/2+		2.83E+05
35	48	Br	82.915180	8.693	3/2-		8.64E+03	40	50	Zr	89.9047037	8.710	0+	51.45	estable
36	40	Kr	75.9259483	8.609	0+		5.33E+04	40	51	Zr	90.90564577	8.693	5/2+	11.22	estable
36	41	Kr	76.92467	8.617	5/2+		4.46E+03	40	52	Zr	91.9050401	8.693	0+	17.15	estable
36	42	Kr	77.9203948	8.661	0+	0.35	6.31E+28	40	53	Zr	92.9064756	8.672	5/2+		4.83E+13
36	43	Kr	78.920083	8.657	1/2-		1.26E+05	40	54	Zr	93.90631519	8.667	0+	17.38	estable
36	44	Kr	79.9163790	8.693	0+	2.25	estable	40	55	Zr	94.9080426	8.644	5/2+		5.53E+06
36	45	Kr	80.9165923	8.683	7/2+		7.22E+12	40	56	Zr	95.9082757	8.635	0+	2.8	1.23E+27
36	46	Kr	81.9134836	8.711	0+	11.58	estable	40	57	Zr	96.9109507	8.604	1/2+		6.08E+04
36	47	Kr	82.9141361	8.696	9/2+	11.49	estable	41	48	Nb			(9/2+)		6.84E+03
36	48	Kr	83.911507	8.717	0+	57	estable	41	48	Nb	88.9134955	8.617	(1/2)-		4.25E+03
36	49	Kr	84.9125270	8.699	9/2+		3.40E+08	41	49	Nb	89.911265	8.633	8+		5.26E+04
36	50	Kr	85.91061073	8.712	0+	17.3	estable	41	50	Nb	90.9069905	8.671	9/2+		2.14E+10
36	51	Kr	86.9133543	8.675	5/2+		4.57E+03	41	51	Nb	91.9071924	8.662	7+		1.09E+15
36	52	Kr	87.914447	8.657	0+		1.02E+04	41	52	Nb	92.90637806	8.664	9/2+	100	estable
37	44	Rb	80.918996	8.645	3/2-		1.65E+04	41	53	Nb	93.9072839	8.649	6+		6.40E+11
37	46	Rb	82.915110	8.675	5/2-		7.45E+06	41	54	Nb	94.9068352	8.647	9/2+		3.02E+06
37	47	Rb	83.91438482	8.676	2-		2.83E+06	41	55	Nb	95.9081001	8.629	6+		8.41E+04
37	48	Rb	84.9117893	8.697	5/2-	72.17	estable	41	56	Nb	96.9080971	8.623	9/2+		4.32E+03
37	49	Rb	85.91116742	8.697	2-		1.61E+06	42	48	Mo	89.9139369	8.597	0+		2.04E+04
37	50	Rb	86.9091835	8.711	3/2-	27.83	1.50E+18	42	50	Mo	91.9068105	8.658	0+	14.84	estable
38	42	Sr	79.92452101	8.579	0+		6.38E+03	42	51	Mo	92.90681261	8.651	5/2+		1.26E+11
38	44	Sr	81.918402	8.636	0+		2.21E+06	42	52	Mo	93.9050876	8.662	0+	9.25	estable
38	45	Sr	82.9175567	8.638	7/2+		1.17E+05	42	53	Mo	94.9058415	8.649	5/2+	15.92	estable
38	46	Sr	83.91342528	8.677	0+	0.56	estable	42	54	Mo	95.90467890	8.654	0+	16.68	estable
38	47	Sr	84.9129328	8.676	9/2+		5.60E+06	42	55	Mo	96.90602147	8.635	5/2+	9.55	estable
38	48	Sr	85.9092602	8.708	0+	9.86	estable	42	56	Mo	97.9054078	8.635	0+	24.13	estable
38	49	Sr	86.9088793	8.705	9/2+	7	estable	42	57	Mo	98.90771187	8.608	1/2+		2.37E+05

(continúa)

(continuación)

Z	N	Sím	m (uma)	B (MeV)	Espín	%	τ (s)	Z	N	Sím	m (uma)	B (MeV)	Espín	%	τ (s)
42	58	Mo	99.90747734	8.605	0+	9.63	3.78E+26	48	58	Cd	105.9064594	8.539	0+	1.25	estable
43	50	Tc	92.91024898	8.609	9/2+		9.90E+03	48	59	Cd	106.9066179	8.533	5/2+		2.34E+04
43	51	Tc	93.9096563	8.609	7+		1.76E+04	48	60	Cd	107.9041837	8.550	0+	0.89	estable
43	52	Tc	94.90765708	8.623	9/2+		7.20E+04	48	61	Cd	108.904982	8.539	5/2+		4.00E+07
43	53	Tc	95.907871	8.615	7+		3.70E+05	48	62	Cd	109.9030056	8.551	0+	12.49	estable
43	54	Tc	96.90636536	8.624	9/2+		1.33E+14	48	63	Cd	110.9041781	8.537	1/2+	12.8	estable
43	55	Tc	97.90721597	8.610	(6)+		1.32E+14	48	64	Cd	111.9027578	8.545	0+	24.13	estable
43	56	Tc	98.90625475	8.614	9/2+		6.65E+12	48	65	Cd	112.9044017	8.527	1/2+	12.22	2.93E+23
44	51	Ru	94.91041293	8.587	5/2+		5.91E+03	48	66	Cd	113.9033585	8.532	0+	28.73	estable
44	52	Ru	95.90759784	8.609	0+	5.54	estable	48	67	Cd	114.905431	8.511	1/2+		1.93E+05
44	53	Ru	96.9075547	8.604	5/2+		2.51E+05	48	68	Cd	115.9047558	8.512	0+	7.49	9.15E+26
44	54	Ru	97.90528713	8.620	0+	1.87	estable	48	69	Cd	116.9072186	8.489	1/2+		8.96E+03
44	55	Ru	98.9059393	8.609	5/2+	12.76	estable	49	60	In	108.9071505	8.513	9/2+		1.51E+04
44	56	Ru	99.90421948	8.619	0+	12.6	estable	49	61	In	109.9071653	8.509	7+		1.76E+04
44	57	Ru	100.9055821	8.601	5/2+	17.06	estable	49	62	In	110.90511	8.522	9/2+		2.42E+05
44	58	Ru	101.9043493	8.607	0+	31.55	estable	49	64	In	112.904061	8.523	9/2+	4.29	estable
44	59	Ru	102.9063238	8.584	3/2+		3.39E+06	49	66	In	114.9038785	8.517	9/2+	95.71	1.39E+22
44	60	Ru	103.9054301	8.587	0+	18.62	estable	50	60	Sn	109.9078428	8.496	0+		1.48E+04
44	61	Ru	104.9077503	8.562	3/2+		1.60E+04	50	62	Sn	111.9048208	8.514	0+	0.97	estable
44	62	Ru	105.9073269	8.561	0+		3.23E+07	50	63	Sn	112.9051734	8.507	1/2+		9.94E+06
45	54	Rh	98.9081321	8.580	1/2-		1.39E+06	50	64	Sn	113.9027818	8.523	0+	0.66	estable
45	55	Rh	99.90812155	8.575	1-		7.49E+04	50	65	Sn	114.9033424	8.514	1/2+	0.34	estable
45	56	Rh	100.9061636	8.588	1/2-		1.04E+08	50	66	Sn	115.9017441	8.523	0+	14.54	estable
45	57	Rh	101.9068432	8.577	2-		1.79E+07	50	67	Sn	116.9029517	8.510	1/2+	7.68	estable
45	58	Rh	102.9055043	8.584	1/2-	100	estable	50	68	Sn	117.9016063	8.517	0+	24.22	estable
45	60	Rh	104.9056938	8.573	7/2+		1.27E+05	50	69	Sn	118.9033076	8.499	1/2+	8.59	estable
46	54	Pd	99.90850589	8.564	0+		3.14E+05	50	70	Sn	119.9021966	8.505	0+	32.58	estable
46	55	Pd	100.9082892	8.561	(5/2+)		3.05E+04	50	71	Sn	120.9042369	8.485	3/2+		9.76E+04
46	56	Pd	101.9056077	8.580	0+	1.02	estable	50	72	Sn	121.9034401	8.488	0+	4.63	estable
46	57	Pd	102.9060873	8.571	5/2+		1.47E+06	50	73	Sn	122.9057208	8.467	11/2-		1.12E+07
46	58	Pd	103.9040358	8.585	0+	11.14	estable	50	74	Sn	123.9052739	8.467	0+	5.79	estable
46	59	Pd	104.9050840	8.571	5/2+	22.33	estable	50	75	Sn	124.907785	8.446	11/2-		8.33E+05
46	60	Pd	105.9034857	8.580	0+	27.33	estable	50	76	Sn	125.9076533	8.444	0+		3.15E+12
46	61	Pd	106.9051285	8.561	5/2+		2.05E+14	50	77	Sn	126.9103510	8.421	(11/2-)		7.56E+03
46	62	Pd	107.9038945	8.567	0+	26.46	estable	51	66	Sb	116.9048359	8.488	5/2+		1.01E+04
46	63	Pd	108.9059535	8.545	5/2+		4.93E+04	51	68	Sb	118.9039465	8.488	5/2+		1.37E+05
46	64	Pd	109.9051533	8.547	0+	11.72	estable	51	69	Sb	119.905072	8.476	8-		4.98E+05
46	66	Pd	111.9073141	8.521	0+		7.57E+04	51	70	Sb	120.9038180	8.482	5/2+	57.21	estable
47	56	Ag	102.9089727	8.538	7/2+		3.96E+03	51	71	Sb	121.9051754	8.468	2-		2.35E+05
47	57	Ag	103.9086282	8.536	5+		4.14E+03	51	72	Sb	122.9042157	8.472	7/2+	42.79	estable
47	58	Ag	104.9065287	8.550	1/2-		3.57E+06	51	73	Sb	123.9059375	8.456	3-		5.20E+06
47	60	Ag	106.905093	8.554	1/2-	51.839	estable	51	74	Sb	124.9052478	8.458	7/2+		8.70E+07
47	62	Ag	108.9047555	8.548	1/2-	48.161	estable	51	75	Sb	125.9072482	8.440	(8-)		1.08E+06
47	64	Ag	110.9052947	8.535	1/2-		6.44E+05	51	76	Sb	126.9069146	8.440	7/2+		3.33E+05
47	65	Ag	111.9070048	8.516	2(-)		1.13E+04	51	77	Sb	127.9091673	8.421	8-		3.24E+04
47	66	Ag	112.9065666	8.516	1/2-		1.93E+04	51	78	Sb	128.9091501	8.418	7/2+		1.58E+04

Z	N	Sím	m (uma)	B (MeV)	Espín	%	$\tau(s)$	Z	N	Sím	m (uma)	B (MeV)	Espín	%	$\tau(s)$
52	64	Te	115.9084203	8.456	0+		8.96E+03	55	74	Cs	128.9060634	8.416	1/2+		1.15E+05
52	65	Te	116.90864	8.451	1/2+		3.72E+03	55	76	Cs	130.9054639	8.415	5/2+		8.37E+05
52	66	Te	117.9058276	8.470	0+		5.18E+05	55	77	Cs	131.906430	8.406	2+		5.60E+05
52	67	Te	118.9064081	8.462	1/2+		5.77E+04	55	78	Cs	132.9054469	8.410	7/2+	100	estable
52	68	Te	119.9040202	8.477	0+	0.09	estable	55	79	Cs	133.9067134	8.399	4+		6.51E+07
52	69	Te	120.9049364	8.467	1/2+		1.45E+06	55	80	Cs	134.905972	8.401	7/2+		7.25E+13
52	70	Te	121.9030471	8.478	0+	2.55	estable	55	81	Cs	135.907307	8.390	5+		1.14E+06
52	71	Te	122.9042730	8.466	1/2+	0.89	1.89E+22	55	82	Cs	136.9070895	8.389	7/2+		9.48E+08
52	72	Te	123.9028180	8.473	0+	4.74	estable	56	70	Ba	125.9112502	8.380	0+		6.01E+03
52	73	Te	124.9044285	8.458	1/2+	7.07	estable	56	72	Ba	127.90831	8.396	0+		2.10E+05
52	74	Te	125.9033095	8.463	0+	18.84	estable	56	73	Ba	128.9086794	8.391	1/2+		8.03E+03
52	75	Te	126.905217	8.446	3/2+		3.37E+04	56	74	Ba	129.9063105	8.406	0+	0.106	estable
52	76	Te	127.9044631	8.449	0+	31.74	2.43E+32	56	75	Ba	130.9069308	8.399	1/2+		9.94E+05
52	77	Te	128.906596	8.430	3/2+		4.18E+03	56	76	Ba	131.9050562	8.409	0+	0.101	estable
52	78	Te	129.9062244	8.430	0+	34.08	8.51E+28	56	77	Ba	132.9060024	8.400	1/2+		3.32E+08
52	80	Te	131.9085238	8.408	0+		2.77E+05	56	78	Ba	133.9045033	8.408	0+	2.417	estable
53	67	I	119.9100482	8.424	2-		4.86E+03	56	79	Ba	134.9056827	8.397	3/2+	6.592	estable
53	68	I	120.9073668	8.442	5/2+		7.63E+03	56	80	Ba	135.9045701	8.403	0+	7.854	estable
53	70	I	122.9055979	8.449	5/2+		4.78E+04	56	81	Ba	136.905824	8.392	3/2+	11.232	estable
53	71	I	123.9062114	8.441	2-		3.61E+05	56	82	Ba	137.9052413	8.393	0+	71.698	estable
53	72	I	124.9046242	8.450	5/2+		5.13E+06	56	83	Ba	138.908836	8.367	7/2-		4.98E+03
53	73	I	125.9056242	8.440	2-		1.13E+06	56	84	Ba	139.91060	8.353	0+		1.10E+06
53	74	I	126.9044727	8.445	5/2+	100	estable	57	75	La	131.910110	8.368	2-		1.73E+04
53	76	I	128.9049877	8.436	7/2+		4.95E+14	57	76	La	132.908218	8.379	5/2+		1.41E+04
53	77	I	129.9066742	8.421	5+		4.45E+04	57	78	La	134.9069768	8.383	5/2+		7.02E+04
53	78	I	130.9061246	8.422	7/2+		6.93E+05	57	80	La	136.90647	8.382	7/2+		1.89E+12
53	79	I	131.9079945	8.406	4+		8.26E+03	57	81	La	137.9071068	8.375	5+	0.09	3.31E+18
53	80	I	132.9078065	8.405	7/2+		7.49E+04	57	82	La	138.9063482	8.378	7/2+	99.91	estable
53	82	I	134.91005	8.385	7/2+		2.37E+04	57	83	La	139.9094726	8.355	3-		1.45E+05
54	68	Xe	121.9085484	8.425	0+		7.24E+04	57	84	La	140.910958	8.343	(7/2+)		1.41E+04
54	69	Xe	122.908480	8.421	(1/2)+		7.49E+03	57	85	La	141.9140791	8.321	2-		5.46E+03
54	70	Xe	123.9058942	8.438	0+	0.09	estable	58	74	Ce	131.9114605	8.352	0+		1.26E+04
54	71	Xe	124.906398	8.431	(1/2)+		6.08E+04	58	75	Ce	132.911515	8.350	9/2-		1.76E+04
54	72	Xe	125.9042736	8.444	0+	0.09	estable	58	75	Ce	132.9115515	8.350	1/2+		5.83E+03
54	73	Xe	126.905184	8.434	1/2+		3.14E+06	58	76	Ce	133.9089248	8.366	0+		2.73E+05
54	74	Xe	127.9035313	8.443	0+	1.92	estable	58	77	Ce	134.9091514	8.362	1/2(+)		6.37E+04
54	75	Xe	128.9047794	8.431	1/2+	26.44	estable	58	78	Ce	135.907172	8.373	0+	0.185	estable
54	76	Xe	129.903508	8.438	0+	4.08	estable	58	79	Ce	136.9078056	8.367	3/2+		3.24E+04
54	77	Xe	130.9050824	8.424	3/2+	21.18	estable	58	80	Ce	137.9059913	8.377	0+	0.251	estable
54	78	Xe	131.9041535	8.428	0+	26.89	estable	58	81	Ce	138.9066466	8.370	3/2+		1.19E+07
54	79	Xe	132.905906	8.413	3/2+		4.53E+05	58	82	Ce	139.905434	8.376	0+	88.45	estable
54	80	Xe	133.9053945	8.414	0+	10.44	estable	58	83	Ce	140.908271	8.355	7/2-		2.81E+06
54	81	Xe	134.90721	8.398	3/2+		3.29E+04	58	84	Ce	141.909241	8.347	0+	11.114	1.58E+24
54	82	Xe	135.9072188	8.396	0+	8.87	2.93E+27	58	85	Ce	142.9123812	8.325	3/2-		1.19E+05
55	72	Cs	126.9074175	8.412	1/2+		2.25E+04	58	86	Ce	143.913643	8.315	0+		2.46E+07

(continúa)

(continuación)

Z	N	Sím	m (uma)	B (MeV)	Espín	%	τ (s)	Z	N	Sím	m (uma)	B (MeV)	Espín	%	τ (s)
59	78	Pr	136.910687	8.341	5/2+		4.61E+03	63	88	Eu	150.919848	8.239	5/2+	47.81	estable
59	80	Pr	138.9089384	8.349	5/2+		1.59E+04	63	89	Eu	151.921744	8.227	3-		4.27E+08
59	82	Pr	140.9076477	8.354	5/2+	100	estable	63	90	Eu	152.921229	8.229	5/2+	52.19	estable
59	83	Pr	141.910041	8.336	2-		6.88E+04	63	91	Eu	153.922976	8.217	3-		2.71E+08
59	84	Pr	142.9108122	8.329	7/2+		1.17E+06	63	92	Eu	154.92289	8.217	5/2+		1.50E+08
59	86	Pr	144.9145069	8.302	7/2+		2.15E+04	63	93	Eu	155.9247522	8.205	0+		1.31E+06
60	78	Nd	137.91195	8.325	0+		1.81E+04	63	94	Eu	156.9254236	8.200	5/2+		5.46E+04
60	80	Nd	139.90931	8.338	0+		2.91E+05	64	82	Gd	145.9183106	8.250	0+		4.17E+06
60	81	Nd	140.9096099	8.336	3/2+		8.96E+03	64	83	Gd	146.919090	8.243	7/2-		1.37E+05
60	82	Nd	141.907719	8.346	0+	27.2	estable	64	84	Gd	147.918110	8.248	0+		2.35E+09
60	83	Nd	142.90981	8.330	7/2-	12.2	estable	64	85	Gd	148.919339	8.239	7/2-		8.02E+05
60	84	Nd	143.910083	8.327	0+	23.8	7.22E+22	64	86	Gd	149.9186589	8.243	0+		5.64E+13
60	85	Nd	144.91257	8.309	7/2-	8.3	estable	64	87	Gd	150.9203485	8.231	7/2-		1.07E+07
60	86	Nd	145.913116	8.304	0+	17.2	estable	64	88	Gd	151.919789	8.233	0+	0.2	3.41E+21
60	87	Nd	146.916096	8.284	5/2-		9.49E+05	64	89	Gd	152.9217495	8.220	3/2-		2.09E+07
60	88	Nd	147.916889	8.277	0+	5.7	estable	64	90	Gd	153.9208623	8.225	0+	2.18	estable
60	89	Nd	148.920145	8.255	5/2-		6.22E+03	64	91	Gd	154.922619	8.213	3/2-	14.8	estable
60	90	Nd	149.920887	8.250	0+	5.6	3.47E+26	64	92	Gd	155.922122	8.215	0+	20.47	estable
61	82	Pm	142.9109276	8.318	5/2+		2.29E+07	64	93	Gd	156.9239567	8.204	3/2-	15.65	estable
61	83	Pm	143.912586	8.305	5-		3.14E+07	64	94	Gd	157.924103	8.202	0+	24.84	estable
61	84	Pm	144.9127439	8.303	5/2+		5.58E+08	64	95	Gd	158.9263861	8.188	3/2-		6.65E+04
61	85	Pm	145.914696	8.289	3-		1.74E+08	64	96	Gd	159.9270541	8.183	0+	21.86	estable
61	86	Pm	146.9151339	8.284	7/2+		8.27E+07	65	82	Tb	146.9240446	8.207	(1/2+)		6.12E+03
61	87	Pm	147.9174746	8.268	1-		4.64E+05	65	83	Tb	147.9242717	8.204	2-		3.60E+03
61	88	Pm	148.91833	8.262	7/2+		1.91E+05	65	84	Tb	148.9232459	8.210	1/2+		1.48E+04
61	89	Pm	149.92098	8.244	(1-)		9.65E+03	65	85	Tb	149.9236597	8.206	(2)-		1.25E+04
61	90	Pm	150.921207	8.241	5/2+		1.02E+05	65	86	Tb	150.9230982	8.209	1/2(+)		6.34E+04
62	80	Sm	141.9151976	8.286	0+		4.35E+03	65	87	Tb	151.9240744	8.202	2-		6.30E+04
62	82	Sm	143.911998	8.304	0+	3.07	estable	65	88	Tb	152.9234346	8.205	5/2+		2.02E+05
62	83	Sm	144.913407	8.293	7/2-		2.94E+07	65	89	Tb	153.9246862	8.197	0(+)		7.74E+04
62	84	Sm	145.913038	8.294	0+		3.25E+15	65	90	Tb	154.9235052	8.203	3/2+		4.60E+05
62	85	Sm	146.914894	8.281	7/2-	14.99	3.34E+18	65	91	Tb	155.924744	8.195	3-		4.62E+05
62	86	Sm	147.914819	8.280	0+	11.24	2.21E+23	65	92	Tb	156.9240212	8.198	3/2+		2.24E+09
62	87	Sm	148.91718	8.263	7/2-	13.82	6.31E+22	65	93	Tb	157.9254103	8.189	3-		5.68E+09
62	88	Sm	149.9172730	8.262	0+	7.38	estable	65	94	Tb	158.9253431	8.189	3/2+	100	estable
62	89	Sm	150.919929	8.244	5/2-		2.84E+09	65	95	Tb	159.9271640	8.177	3-		6.25E+06
62	90	Sm	151.9197282	8.244	0+	26.75	estable	65	96	Tb	160.9275663	8.174	3/2+		5.94E+05
62	91	Sm	152.922097	8.229	3/2+		1.67E+05	66	86	Dy	151.9247140	8.193	0+		8.57E+03
62	92	Sm	153.9222053	8.227	0+	22.75	estable	66	87	Dy	152.9257647	8.186	7/2(-)		2.30E+04
62	94	Sm	155.9255279	8.205	0+		3.38E+04	66	88	Dy	153.9244220	8.193	0+		9.46E+13
63	82	Eu	144.9162652	8.269	5/2+		5.12E+05	66	89	Dy	154.9257538	8.184	3/2-		3.56E+04
63	83	Eu	145.91720	8.262	4-		3.97E+05	66	90	Dy	155.9242783	8.192	0+	0.06	estable
63	84	Eu	146.916742	8.264	5/2+		2.08E+06	66	91	Dy	156.9254661	8.185	3/2-		2.93E+04
63	85	Eu	147.91815	8.254	5-		4.71E+06	66	92	Dy	157.924405	8.190	0+	0.1	estable
63	86	Eu	148.917930	8.254	5/2+		8.04E+06	66	93	Dy	158.925736	8.182	3/2-		1.25E+07
63	87	Eu	149.9197018	8.241	5(-)		1.16E+09	66	94	Dy	159.925194	8.184	0+	2.34	estable

Z	N	Sím	m (uma)	B (MeV)	Espín	%	$\tau(s)$	Z	N	Sím	m (uma)	B (MeV)	Espín	%	$\tau(s)$
66	95	Dy	160.926930	8.173	5/2+	18.91	estable	70	106	Yb	175.942571	8.064	0+	12.76	estable
66	96	Dy	161.926795	8.173	0+	25.51	estable	70	107	Yb	176.9452571	8.050	9/2+		6.88E+03
66	97	Dy	162.928728	8.162	5/2-	24.9	estable	70	108	Yb	177.9466467	8.043	0+		4.43E+03
66	98	Dy	163.9291712	8.159	0+	28.18	estable	71	98	Lu	168.937649	8.086	7/2+		1.23E+05
66	99	Dy	164.93170	8.144	7/2+		8.40E+03	71	99	Lu	169.9384722	8.082	0+		1.74E+05
66	100	Dy	165.9328032	8.137	0+		2.94E+05	71	100	Lu	170.93791	8.085	7/2+		7.12E+05
67	94	Ho	160.9278548	8.163	7/2-		8.93E+03	71	101	Lu	171.9390822	8.078	4-		5.79E+05
67	96	Ho	162.9287303	8.157	7/2-		1.44E+11	71	102	Lu	172.938927	8.079	7/2+		4.32E+07
67	98	Ho	164.9303221	8.147	7/2-	100	estable	71	103	Lu	173.940334	8.071	(1)-		1.04E+08
67	99	Ho	165.9322842	8.135	0-		9.63E+04	71	104	Lu	174.94077	8.069	7/2+	97.41	estable
67	100	Ho	166.933127	8.130	7/2-		1.12E+04	71	105	Lu	175.9426824	8.059	7-	2.59	1.29E+18
68	90	Er	157.9298935	8.148	0+		8.24E+03	71	106	Lu	176.9437550	8.053	7/2+		5.82E+05
68	92	Er	159.92908	8.152	0+		1.03E+05	71	108	Lu	178.9473274	8.035	7/2(+)		1.65E+04
68	93	Er	160.93	8.146	3/2-		1.16E+04	72	98	Hf	169.939609	8.071	0+		5.76E+04
68	94	Er	161.928775	8.152	0+	0.14	estable	72	99	Hf	170.940492	8.066	7/2+		4.36E+04
68	95	Er	162.9300327	8.145	5/2-		4.50E+03	72	100	Hf	171.9394483	8.072	0+		5.90E+07
68	96	Er	163.929198	8.149	0+	1.61	estable	72	101	Hf	172.940513	8.066	1/2-		8.50E+04
68	97	Er	164.930726	8.140	5/2-		3.73E+04	72	102	Hf	173.940044	8.069	0+	0.16	6.31E+22
68	98	Er	165.9302900	8.142	0+	33.61	estable	72	103	Hf	174.9415024	8.061	5/2-		6.05E+06
68	99	Er	166.932046	8.132	7/2+	22.93	estable	72	104	Hf	175.941406	8.061	0+	5.26	estable
68	100	Er	167.9323702	8.130	0+	26.78	estable	72	105	Hf	176.9432207	8.052	7/2-	18.6	estable
68	101	Er	168.9345881	8.117	1/2-		8.12E+05	72	106	Hf	177.9436988	8.049	0+	27.28	estable
68	102	Er	169.935461	8.112	0+	14.93	estable	72	107	Hf	178.9458161	8.039	9/2+	13.62	estable
68	103	Er	170.938026	8.098	5/2-		2.71E+04	72	108	Hf	179.94655	8.035	0+	35.08	estable
68	104	Er	171.9393521	8.090	0+		1.77E+05	72	109	Hf	180.9490991	8.022	1/2-		3.66E+06
69	94	Tm	162.9326500	8.125	1/2+		6.52E+03	72	110	Hf	181.9505541	8.015	0+		2.84E+14
69	96	Tm	164.932433	8.126	1/2+		1.08E+05	72	111	Hf	182.9535304	8.000	(3/2-)		3.84E+03
69	97	Tm	165.9335541	8.119	2+		2.77E+04	72	112	Hf	183.9554465	7.991	0+		1.48E+04
69	98	Tm	166.9328516	8.123	1/2+		7.99E+05	73	100	Ta	172.94354	8.044	5/2-		1.13E+04
69	99	Tm	167.9341728	8.115	3+		8.04E+06	73	101	Ta	173.944256	8.040	3(+)		3.78E+03
69	100	Tm	168.934212	8.114	1/2+	100	estable	73	102	Ta	174.9437	8.044	7/2+		3.78E+04
69	101	Tm	169.9358014	8.106	1-		1.11E+07	73	103	Ta	175.944857	8.039	1-		2.91E+04
69	102	Tm	170.936426	8.102	1/2+		6.05E+07	73	104	Ta	176.9444724	8.041	7/2+		2.04E+05
69	103	Tm	171.9384	8.091	2-		2.29E+05	73	105	Ta	177.9457782	8.034	7-		8.50E+03
69	104	Tm	172.9396036	8.084	1/2+		2.97E+04	73	106	Ta	178.94593	8.034	7/2+		5.74E+07
70	94	Yb	163.9344894	8.109	0+		4.54E+03	73	107	Ta	179.9474648	8.026	1+	0.012	2.93E+04
70	96	Yb	165.9338796	8.112	0+		2.04E+05	73	108	Ta	180.9479958	8.023	7/2+	99.988	estable
70	98	Yb	167.9338969	8.112	0+	0.13	estable	73	109	Ta	181.9501518	8.013	3-		9.89E+06
70	99	Yb	168.9351871	8.104	7/2+		2.77E+06	73	110	Ta	182.9513726	8.007	7/2+		4.41E+05
70	100	Yb	169.934759	8.107	0+	3.04	estable	73	111	Ta	183.954008	7.994	(5-)		3.13E+04
70	101	Yb	170.936323	8.098	1/2-	14.28	estable	74	102	W	175.945634	8.030	0+		9.00E+03
70	102	Yb	171.9363777	8.097	0+	21.83	estable	74	103	W	176.946643	8.025	(1/2-)		8.10E+03
70	103	Yb	172.938208	8.087	5/2-	16.13	estable	74	104	W	177.9458762	8.029	0+		1.87E+06
70	104	Yb	173.9388621	8.084	0+	31.83	estable	74	106	W	179.9467045	8.025	0+	0.12	estable
70	105	Yb	174.941273	8.071	7/2-		3.62E+05	74	107	W	180.9481972	8.018	9/2+		1.05E+07

(continúa)

(continuación)

Z	N	Sím	m (uma)	B (MeV)	Espín	%	τ (s)	Z	N	Sím	m (uma)	B (MeV)	Espín	%	τ (s)
74	108	W	181.9482042	8.018	0+	26.5	estable	78	109	Pt	186.960587	7.941	3/2-		8.46E+03
74	109	W	182.950223	8.008	1/2-	14.31	estable	78	110	Pt	187.9593954	7.948	0+		8.81E+05
74	110	W	183.9509312	8.005	0+	30.64	estable	78	111	Pt	188.9608337	7.941	3/2-		3.91E+04
74	111	W	184.9534193	7.993	3/2-		6.49E+06	78	112	Pt	189.9599317	7.947	0+	0.014	2.05E+19
74	112	W	185.9543641	7.989	0+	28.43	estable	78	113	Pt	190.9616767	7.939	3/2-		2.47E+05
74	113	W	186.9571605	7.975	3/2-		8.54E+04	78	114	Pt	191.961038	7.942	0+	0.782	estable
74	114	W	187.9584891	7.969	0+		6.00E+06	78	115	Pt	192.9629874	7.934	1/2-		1.58E+09
75	106	Re	180.9500679	8.004	5/2+		7.16E+04	78	116	Pt	193.9626803	7.936	0+	32.967	estable
75	107	Re	181.9512101	7.999	7+		2.31E+05	78	117	Pt	194.9647911	7.927	1/2-	33.832	estable
75	107	Re			2+		4.57E+04	78	118	Pt	195.9649515	7.927	0+	25.242	estable
75	108	Re	182.9508198	8.001	5/2+		6.05E+06	78	119	Pt	196.9673402	7.916	1/2-		7.16E+04
75	109	Re	183.9525208	7.993	3-		3.28E+06	78	120	Pt	197.9678928	7.914	0+	7.163	estable
75	110	Re	184.952955	7.991	5/2+	37.4	estable	78	122	Pt	199.9714407	7.899	0+		4.50E+04
75	111	Re	185.9549861	7.981	1-		3.21E+05	78	124	Pt	201.97574	7.881	0+		1.56E+05
75	112	Re	186.9557531	7.978	5/2+	62.6	1.37E+18	79	112	Au	190.9637042	7.925	3/2+		1.14E+04
75	113	Re	187.9581144	7.967	1-		6.13E+04	79	113	Au	191.964813	7.920	1-		1.78E+04
75	114	Re	188.959229	7.962	5/2+		8.75E+04	79	114	Au	192.9641497	7.924	3/2+		6.35E+04
76	105	Os	180.953244	7.983	1/2-		6.30E+03	79	115	Au	193.9653653	7.919	1-		1.37E+05
76	106	Os	181.9521102	7.990	0+		7.96E+04	79	116	Au	194.9650346	7.921	3/2+		1.61E+07
76	107	Os	182.9531261	7.985	9/2+		4.68E+04	79	117	Au	195.9665698	7.915	2-		5.33E+05
76	108	Os	183.9524891	7.989	0+	0.02	estable	79	118	Au	196.9665687	7.916	3/2+	100	estable
76	109	Os	184.9540423	7.981	1/2-		8.09E+06	79	119	Au	197.9682423	7.909	2-		2.33E+05
76	110	Os	185.9538382	7.983	0+	1.59	6.31E+22	79	120	Au	198.9687652	7.907	3/2+		2.71E+05
76	111	Os	186.9557505	7.974	1/2-	1.96	estable	80	112	Hg	191.9656343	7.912	0+		1.75E+04
76	112	Os	187.9558382	7.974	0+	13.24	estable	80	113	Hg	192.9666654	7.908	3/2-		1.37E+04
76	113	Os	188.9581475	7.963	3/2-	16.15	estable	80	114	Hg	193.9654394	7.915	0+		1.64E+10
76	114	Os	189.958447	7.962	0+	26.26	estable	80	115	Hg	194.9667201	7.909	1/2-		3.79E+04
76	115	Os	190.9609297	7.951	9/2-		1.33E+06	80	116	Hg	195.9658326	7.914	0+	0.15	estable
76	116	Os	191.9614807	7.948	0+	40.78	estable	80	117	Hg	196.9672129	7.909	1/2-		2.34E+05
76	117	Os	192.9641516	7.936	3/2-		1.08E+05	80	118	Hg	197.966769	7.912	0+	9.97	estable
76	118	Os	193.9651821	7.932	0+		1.89E+08	80	119	Hg	198.9682799	7.905	1/2-	16.87	estable
77	107	Ir	183.957476	7.959	5-		1.11E+04	80	120	Hg	199.968326	7.906	0+	23.1	estable
77	108	Ir	184.956698	7.964	5/2-		5.18E+04	80	121	Hg	200.9703023	7.898	3/2-	13.18	estable
77	109	Ir	185.9579461	7.958	5+		5.99E+04	80	122	Hg	201.970643	7.897	0+	29.86	estable
77	109	Ir			2-		7.20E+03	80	123	Hg	202.9728725	7.887	5/2-		4.03E+06
77	110	Ir	186.9573634	7.962	3/2+		3.78E+04	80	124	Hg	203.9734939	7.886	0+	6.87	estable
77	111	Ir	187.9588531	7.955	1-		1.49E+05	81	114	Tl	194.9697743	7.891	1/2+		4.18E+03
77	112	Ir	188.9587189	7.956	3/2+		1.14E+06	81	115	Tl	195.9704812	7.888	2-		6.62E+03
77	113	Ir	189.960546	7.948	(4)+		1.02E+06	81	116	Tl	196.9695745	7.893	1/2+		1.02E+04
77	114	Ir	190.960594	7.948	3/2+	37.3	estable	81	117	Tl	197.9704835	7.890	2-		1.91E+04
77	115	Ir	191.962605	7.939	4(+)		6.38E+06	81	118	Tl	198.969877	7.894	1/2+		2.67E+04
77	116	Ir	192.9629264	7.938	3/2+	62.7	estable	81	119	Tl	199.9709627	7.890	2-		9.42E+04
77	117	Ir	193.9650784	7.928	1-		6.89E+04	81	120	Tl	200.9708189	7.891	1/2+		2.62E+05
77	118	Ir	194.9659796	7.925	3/2+		9.00E+03	81	121	Tl	201.9721058	7.886	2-		1.06E+06
78	107	Pt	184.960619	7.940	9/2+		4.25E+03	81	122	Tl	202.9723442	7.886	1/2+	29.524	estable
78	108	Pt	185.9593508	7.947	0+		7.20E+03	81	123	Tl	203.9738635	7.880	2-		1.19E+08

Z	N	Sím	m (uma)	B (MeV)	Espín	%	$\tau(s)$	Z	N	Sím	m (uma)	B (MeV)	Espín	%	$\tau(s)$
81	124	Tl	204.9744275	7.878	1/2+	70.476	estable	88	138	Ra	226.0254098	7.662	0+		5.05E+10
82	116	Pb	197.972034	7.879	0+		8.64E+03	88	140	Ra	228.0310703	7.642	0+		1.81E+08
82	117	Pb	198.9729167	7.876	3/2-		5.40E+03	88	142	Ra	230.0370564	7.622	0+		5.58E+03
82	118	Pb	199.9718267	7.882	0+		7.74E+04	89	135	Ac	224.0217229	7.670	0-		1.04E+04
82	119	Pb	200.9728845	7.878	5/2-		3.36E+04	89	136	Ac	225.0232296	7.666	(3/2-)		8.64E+05
82	120	Pb	201.9721591	7.882	0+		1.66E+12	89	137	Ac	226.0260981	7.656	(1-)		1.06E+05
82	121	Pb	202.9733905	7.877	5/2-		1.87E+05	89	138	Ac	227.0277521	7.651	3/2-		6.87E+08
82	122	Pb	203.9730436	7.880	0+	1.4	4.42E+24	89	139	Ac	228.0310211	7.639	3(+)		2.21E+04
82	123	Pb	204.9744818	7.874	5/2-		4.83E+14	89	140	Ac	229.0330152	7.633	(3/2+)		3.78E+03
82	124	Pb	205.9744653	7.875	0+	24.1	estable	90	137	Th	227.0277041	7.647	3/2+		1.62E+06
82	125	Pb	206.9758969	7.870	1/2-	22.1	estable	90	138	Th	228.0287411	7.645	0+		6.03E+07
82	126	Pb	207.9766521	7.867	0+	52.4	estable	90	139	Th	229.0317624	7.635	5/2+		2.49E+11
82	127	Pb	208.9810901	7.849	9/2+		1.17E+04	90	140	Th	230.0331338	7.631	0+		2.38E+12
82	128	Pb	209.9841885	7.836	0+		7.03E+08	90	141	Th	231.0363043	7.620	5/2+		9.18E+04
82	130	Pb	211.9918975	7.804	0+		3.83E+04	90	142	Th	232.0380553	7.615	0+	100	4.43E+17
83	118	Bi	200.977009	7.855	9/2-		6.48E+03	90	144	Th	234.0436012	7.597	0+		2.08E+06
83	119	Bi	201.9777423	7.852	5+		6.19E+03	91	137	Pa	228.0310514	7.632	(3+)		7.92E+04
83	120	Bi	202.976876	7.858	9/2-		4.23E+04	91	138	Pa	229.0320968	7.630	(5/2+)		1.30E+05
83	121	Bi	203.9778127	7.854	6+		4.04E+04	91	139	Pa	230.0345408	7.622	(2-)		1.50E+06
83	122	Bi	204.9773894	7.857	9/2-		1.32E+06	91	140	Pa	231.035884	7.618	3/2-	100	1.03E+12
83	123	Bi	205.9784991	7.853	6+		5.39E+05	91	141	Pa	232.0385916	7.609	(2-)		1.13E+05
83	124	Bi	206.9784707	7.854	9/2-		9.95E+08	91	142	Pa	233.0402473	7.605	3/2-		2.33E+06
83	125	Bi	207.9797422	7.850	(5)+		1.16E+13	91	143	Pa	234.0433081	7.595	4+		2.41E+04
83	126	Bi	208.9803987	7.848	9/2-	100	estable	91	148	Pa	239.05726	7.550	(3/2)(-)		6.37E+03
83	127	Bi	209.9841204	7.833	1-		4.33E+05	92	138	U	230.0339398	7.621	0+		1.80E+06
83	129	Bi	211.9912857	7.803	1(-)		3.63E+03	92	139	U	231.0362937	7.613	(5/2)		3.63E+05
84	120	Po	203.9803181	7.839	0+		1.27E+04	92	140	U	232.0371562	7.612	0+		2.17E+09
84	121	Po	204.9812033	7.836	5/2-		5.98E+03	92	141	U	233.0396352	7.604	5/2+		5.01E+12
84	122	Po	205.9804811	7.841	0+		7.60E+05	92	142	U	234.0409521	7.601	0+	0.0055	7.74E+12
84	123	Po	206.9815932	7.837	5/2-		2.09E+04	92	143	U	235.0439299	7.591	7/2-	0.72	2.22E+16
84	124	Po	207.9812457	7.839	0+		9.14E+07	92	144	U	236.045568	7.586	0+		7.38E+14
84	125	Po	208.9824304	7.835	1/2-		3.22E+09	92	145	U	237.0487302	7.576	1/2+		5.83E+05
84	126	Po	209.9828737	7.834	0+		1.20E+07	92	146	U	238.0507882	7.570	0+	99.275	1.41E+17
85	122	At	206.9857835	7.814	9/2-		6.48E+03	92	148	U	240.056592	7.552	0+		5.08E+04
85	123	At	207.98659	7.812	6+		5.87E+03	93	141	Np	234.042895	7.590	(0+)		3.80E+05
85	124	At	208.9861731	7.815	9/2-		1.95E+04	93	142	Np	235.0440633	7.587	5/2+		3.42E+07
85	125	At	209.9871477	7.812	5+		2.92E+04	93	143	Np	236.0465696	7.579	(6-)		4.86E+12
85	126	At	210.9874963	7.811	9/2-		2.60E+04	93	143	Np			1(-)		8.10E+04
86	124	Rn	209.9896962	7.797	0+		8.71E+03	93	144	Np	237.0481734	7.575	5/2+		6.75E+13
86	125	Rn	210.9906005	7.794	1/2-		5.26E+04	93	145	Np	238.0509464	7.566	2+		1.83E+05
86	136	Rn	222.0175777	7.694	0+		3.30E+05	93	146	Np	239.052939	7.561	5/2+		2.04E+05
86	138	Rn	224.02409	7.671	0+		6.41E+03	93	147	Np	240.0561622	7.550	(5+)		3.72E+03
88	135	Ra	223.0185022	7.685	3/2+		9.88E+05	94	140	Pu	234.0433171	7.585	0+		3.17E+04
88	136	Ra	224.0202118	7.680	0+		3.16E+05	94	142	Pu	236.046058	7.578	0+		9.01E+07
88	137	Ra	225.0236116	7.668	1/2+		1.29E+06	94	143	Pu	237.0484097	7.571	7/2-		3.91E+06

(continúa)

(continuación)

Z	N	Sím	m (uma)	B (MeV)	Espín	%	τ (s)	Z	N	Sím	m (uma)	B (MeV)	Espín	%	τ (s)
94	144	Pu	238.0495599	7.568	0+		2.77E+09	97	151	Bk	248.073086	7.491	(6+)		2.84E+08
94	145	Pu	239.0521634	7.560	1/2+		7.60E+11	97	151	Bk			1(-)		8.53E+04
94	146	Pu	240.0538135	7.556	0+		2.07E+11	97	152	Bk	249.0749867	7.486	7/2+		2.76E+07
94	147	Pu	241.0568515	7.546	5/2+		4.53E+08	97	153	Bk	250.0783165	7.476	2-		1.16E+04
94	148	Pu	242.0587426	7.541	0+		1.18E+13	98	148	Cf	246.0688053	7.499	0+		1.29E+05
94	149	Pu	243.0620031	7.531	7/2+		1.78E+04	98	149	Cf	247.0710006	7.493	(7/2+)		1.12E+04
94	150	Pu	244.0642039	7.525	0+		2.55E+15	98	150	Cf	248.0721849	7.491	0+		2.88E+07
94	151	Pu	245.0677472	7.514	(9/2-)		3.78E+04	98	151	Cf	249.0748535	7.483	9/2-		1.11E+10
94	152	Pu	246.0702046	7.507	0+		9.37E+05	98	152	Cf	250.0764061	7.480	0+		4.12E+08
94	153	Pu	247.07407	7.494	1/2+		1.96E+05	98	153	Cf	251.0795868	7.470	1/2+		2.83E+10
95	142	Am	237.049996	7.561	5/2(-)		4.39E+03	98	154	Cf	252.0816258	7.465	0+		8.34E+07
95	143	Am	238.0519843	7.556	1+		5.87E+03	98	155	Cf	253.0851331	7.455	(7/2+)		1.54E+06
95	144	Am	239.0530245	7.554	5/2-		4.28E+04	98	156	Cf	254.0873229	7.449	0+		5.23E+06
95	145	Am	240.0553002	7.547	(3-)		1.83E+05	98	157	Cf	255.091046	7.438	(9/2+)		5.04E+03
95	146	Am	241.0568291	7.543	5/2-		1.36E+10	99	150	Es	249.076411	7.474	7/2(+)		6.12E+03
95	147	Am	242.0595492	7.535	1-		5.77E+04	99	151	Es	250.078612	7.469	(6+)		3.10E+04
95	148	Am	243.0613811	7.530	5/2-		2.32E+11	99	151	Es			1(-)		7.99E+03
95	149	Am	244.0642848	7.521	(6-)		3.64E+04	99	152	Es	251.0799921	7.466	(3/2-)		1.19E+05
95	150	Am	245.0664521	7.515	(5/2+)		7.38E+03	99	153	Es	252.0829785	7.457	(5-)		4.07E+07
96	142	Cm	238.0530287	7.548	0+		8.64E+03	99	154	Es	253.0848247	7.453	7/2+		1.77E+06
96	143	Cm	239.054957	7.543	(7/2-)		1.04E+04	99	155	Es	254.088022	7.444	(7+)		2.38E+07
96	144	Cm	240.0555295	7.543	0+		2.33E+06	99	156	Es	255.0902731	7.438	(7/2+)		3.44E+06
96	145	Cm	241.057653	7.537	1/2+		2.83E+06	99	157	Es			(8+)		2.74E+04
96	146	Cm	242.0588358	7.534	0+		1.41E+07	100	151	Fm	251.081575	7.457	(9/2-)		1.91E+04
96	147	Cm	243.0613891	7.527	5/2+		9.18E+08	100	152	Fm	252.0824669	7.456	0+		9.14E+04
96	148	Cm	244.0627526	7.524	0+		5.71E+08	100	153	Fm	253.0851852	7.448	1/2+		2.59E+05
96	149	Cm	245.0654912	7.516	7/2+		2.68E+11	100	154	Fm	254.0868542	7.445	0+		1.17E+04
96	150	Cm	246.0672237	7.511	0+		1.49E+11	100	155	Fm	255.0899622	7.436	7/2+		7.23E+04
96	151	Cm	247.0703535	7.502	9/2-		4.92E+14	100	156	Fm	256.0917731	7.432	0+		9.46E+03
96	152	Cm	248.0723485	7.497	0+		1.07E+13	100	157	Fm	257.0951047	7.422	(9/2+)		8.68E+06
96	153	Cm	249.0759534	7.486	1/2+		3.85E+03	101	155	Md	256.094059	7.420	(0-,1-)		4.69E+03
96	154	Cm	250.078357	7.479	0+		3.06E+11	101	156	Md	257.0955414	7.418	(7/2-)		1.99E+04
97	146	Bk	243.0630076	7.517	(3/2-)		1.62E+04	101	157	Md	258.0984313	7.410	(8-)		4.45E+06
97	147	Bk	244.0651808	7.511	(1-)		1.57E+04	101	157	Md	256.09360		(1-)		3.60E+03
97	148	Bk	245.0663616	7.509	3/2-		4.27E+05	101	158	Md	259.100509	7.405	(7/2-)		5.76E+03
97	149	Bk	246.0686729	7.503	2(-)		1.56E+05	101	159	Md	260.103652	7.396			2.40E+06
97	150	Bk	247.0703071	7.499	(3/2-)		4.35E+10	103	159	Lr	262.109634	7.374			1.30E+04

Apéndice C

Propiedades de los elementos

Z	Número de carga (número de protones en el núcleo = número de electrones)
ρ	Densidad de masa a temperatura (20 °C = 293.15 K) y presión (1 atmósfera) normales
m	Peso atómico estándar (masa media de un átomo, promedio ponderado de abundancia de las masas de isótopos)
$T_{\text{fusión}}$	Temperatura del punto de fusión (punto de transición entre la fase sólida y la fase líquida) a presión de 1 atm
$T_{\text{ebullición}}$	Temperatura del punto de ebullición (punto de transición entre la fase líquida y la fase gaseosa) a presión de 1 atm
L_m	Calor de derretimiento/fusión
L_v	Calor de vaporización
E_1	Energía de ionización (energía necesaria para retirar el electrón con enlace más débil)

Z	Sím	Nombre	Configuración electrónica	$\rho(\text{g/cm}^3)$	$m(\text{g/mol})$	$T_{\text{fusión}}(\text{K})$	$T_{\text{ebullición}}(\text{K})$	$L_m(\text{kJ/mol})$	$L_v(\text{kJ/mol})$	$E_1(\text{eV})$
1	H	Hidrógeno _{gas}	1s ¹	8.988 · 10 ⁻⁵	1.00794	14.01	20.28	0.117	0.904	13.5984
2	He	Helio _{gas}	1s ²	1.786 · 10 ⁻⁴	4.002602	—	4.22	—	0.0829	24.5874
3	Li	Litio	[He]2s ¹	0.534	6.941	453.69	1 615	3.00	147.1	5.3917
4	Be	Berilio	[He]2s ²	1.85	9.012182	1 560	2 742	7.895	297	9.3227
5	B	Boro	[He]2s ² 2p ¹	2.34	10.811	2 349	4 200	50.2	480	8.2980
6	C	Carbono _{grafito}	[He]2s ² 2p ²	2.267	12.0107	3 800	4 300	117	710.9	11.2603
7	N	Nitrógeno _{gas}	[He]2s ² 2p ³	1.251 · 10 ⁻³	14.0067	63.1526	77.36	0.72	5.56	14.5341
8	O	Oxígeno _{gas}	[He]2s ² 2p ⁴	1.429 · 10 ⁻³	15.9994	54.36	90.20	0.444	6.82	13.6181
9	F	Flúor _{gas}	[He]2s ² 2p ⁵	1.7 · 10 ⁻³	18.998403	53.53	85.03	0.510	6.62	17.4228
10	Ne	Neón _{gas}	[He]2s ² 2p ⁶	9.002 · 10 ⁻⁴	20.1797	24.56	27.07	0.335	1.71	21.5645
11	Na	Sodio	[Ne]3s ¹	0.968	22.989770	370.87	1 156	2.60	97.42	5.1391
12	Mg	Magnesio	[Ne]3s ²	1.738	24.3050	923	1 363	8.48	128	7.6462
13	Al	Aluminio	[Ne]3s ² 3p ¹	2.70	26.981538	933.47	2 792	10.71	294.0	5.9858
14	Si	Silicio	[Ne]3s ² 3p ²	2.3290	28.0855	1 687	3 538	50.21	359	8.1517
15	P	Fósforo _{blanco}	[Ne]3s ² 3p ³	1.823	30.973761	317.3	550	0.66	12.4	10.4867
16	S	Azufre	[Ne]3s ² 3p ⁴	1.92–2.07	32.065	388.36	717.8	1.727	45	10.3600
17	Cl	Cloro	[Ne]3s ² 3p ⁵	3.2 · 10 ⁻³	35.453	171.6	239.11	6.406	20.41	12.9676
18	Ar	Argón	[Ne]3s ² 3p ⁶	1.784 · 10 ⁻³	39.948	83.80	87.30	1.18	6.43	15.7596
19	K	Potasio	[Ar]4s ¹	0.89	39.0983	336.53	1 032	2.4	79.1	4.3407

(continúa)

(continuación)

Z	Sím	Nombre	Configuración electrónica	$\rho(\text{g/cm}^3)$	$m(\text{g/mol})$	$T_{\text{fusión}}(\text{K})$	$T_{\text{ebullición}}(\text{K})$	$L_m(\text{kJ/mol})$	$L_v(\text{kJ/mol})$	$E_1(\text{eV})$
20	Ca	Calcio	[Ar]4s ²	1.55	40.078	1 115	1 757	8.54	154.7	6.1132
21	Sc	Escandio	[Ar]3d ¹ 4s ²	2.985	44.955910	1 814	3 109	14.1	332.7	6.5615
22	Ti	Titanio	[Ar]3d ² 4s ²	4.506	47.867	1 941	3 560	14.15	425	6.8281
23	V	Vanadio	[Ar]3d ³ 4s ²	6.0	50.9415	2 183	3 680	21.5	459	6.7462
24	Cr	Cromo	[Ar]3d ⁵ 4s ¹	7.19	51.9961	2 180	2 944	21.0	339.5	6.7665
25	Mn	Manganeso	[Ar]3d ⁵ 4s ²	7.21	54.938049	1 519	2 334	12.91	221	7.4340
26	Fe	Hierro	[Ar]3d ⁶ 4s ²	7.874	55.845	1 811	3 134	13.81	340	7.9024
27	Co	Cobalto	[Ar]3d ⁷ 4s ²	8.90	58.933200	1 768	3 200	16.06	377	7.8810
28	Ni	Níquel	[Ar]3d ⁸ 4s ²	8.908	58.6934	1 728	3 186	17.48	377.5	7.6398
29	Cu	Cobre	[Ar]3d ¹⁰ 4s ¹	8.94	63.546	1 357.77	2 835	13.26	300.4	7.7264
30	Zn	Cinc	[Ar]3d ¹⁰ 4s ²	7.14	65.409	692.68	1 180	7.32	123.6	9.3942
31	Ga	Galio	[Ar]3d ¹⁰ 4s ² 4p ¹	5.91	69.723	302.9146	2 477	5.59	254	5.9993
32	Ge	Germanio	[Ar]3d ¹⁰ 4s ² 4p ²	5.323	72.64	1 211.40	3 106	36.94	334	7.8994
33	As	Arsénico	[Ar]3d ¹⁰ 4s ² 4p ³	5.727	74.92160	1 090	887	24.44	34.76	9.7886
34	Se	Selenio	[Ar]3d ¹⁰ 4s ² 4p ⁴	4.28-4.81	78.96	494	958	6.69	95.48	9.7524
35	Br	Bromo _{líquido}	[Ar]3d ¹⁰ 4s ² 4p ⁵	3.1028	79.904	265.8	332.0	10.571	29.96	11.8138
36	Kr	Kriptón _{gas}	[Ar]3d ¹⁰ 4s ² 4p ⁶	3.749 · 10 ⁻³	83.798	115.79	119.93	1.64	9.08	13.9996
37	Rb	Rubidio	[Kr]5s ¹	1.532	85.4678	312.46	961	2.19	75.77	4.1771
38	Sr	Estroncio	[Kr]5s ²	2.64	87.62	1 050	1 655	7.43	136.9	5.6949
39	Y	Itrio	[Kr]4d ¹ 5s ²	4.472	88.90585	1 799	3 609	11.42	365	6.2173
40	Zr	Circonio	[Kr]4d ² 5s ²	6.52	91.224	2 128	4 682	14	573	6.6339
41	Nb	Niobio	[Kr]4d ⁴ 5s ¹	8.57	92.90638	2 750	5 017	30	689.9	6.7589
42	Mo	Molibdeno	[Kr]4d ⁵ 5s ¹	10.28	95.94	2 896	4 912	37.48	617	7.0924
43	Tc	Tecnecio	[Kr]4d ⁵ 5s ²	11	(98)	2 430	4 538	33.29	585.2	7.28
44	Ru	Rutenio	[Kr]4d ⁷ 5s ¹	12.45	101.07	2 607	4 423	38.59	591.6	7.3605
45	Rh	Rodio	[Kr]4d ⁸ 5s ¹	12.41	102.90550	2 237	3 968	26.59	494	7.4589
46	Pd	Paladio	[Kr]4d ¹⁰	12.023	106.42	1 828.05	3 236	16.74	362	8.3369
47	Ag	Plata	[Kr]4d ¹⁰ 5s ¹	10.49	107.8682	1 234.93	2 435	11.28	250.58	7.5762
48	Cd	Cadmio	[Kr]4d ¹⁰ 5s ²	8.65	112.411	594.22	1 040	6.21	99.87	8.9938
49	In	Indio	[Kr]4d ¹⁰ 5s ² 5p ¹	7.31	114.818	429.7485	2 345	3.281	231.8	5.7864
50	Sn	Estaño _{blanco}	[Kr]4d ¹⁰ 5s ² 5p ²	7.365	118.710	505.08	2 875	7.03	296.1	7.3439
51	Sb	Antimonio	[Kr]4d ¹⁰ 5s ² 5p ³	6.697	121.760	903.78	1 860	19.79	193.43	8.6084
52	Te	Telurio	[Kr]4d ¹⁰ 5s ² 5p ⁴	6.24	127.60	722.66	1 261	17.49	114.1	9.0096
53	I	Yodo	[Kr]4d ¹⁰ 5s ² 5p ⁵	4.933	126.90447	386.85	457.4	15.52	41.57	10.4513
54	Xe	Xenón _{gas}	[Kr]4d ¹⁰ 5s ² 5p ⁶	5.894 · 10 ⁻³	131.293	161.4	165.03	2.27	12.64	12.1298
55	Cs	Cesio	[Xe]6s ¹	1.93	132.90545	301.59	944	2.09	63.9	3.8939
56	Ba	Bario	[Xe]6s ²	3.51	137.327	1 000	2 170	7.12	140.3	5.2117
57	La	Lantano	[Xe]5d ¹ 6s ²	6.162	138.9055	1 193	3 737	6.20	402.1	5.5769
58	Ce	Cerio	[Xe]4f ¹ 5d ¹ 6s ²	6.770	140.116	1 068	3 716	5.46	398	5.5387
59	Pr	Praseodimio	[Xe]4f ³ 6s ²	6.77	140.90765	1 208	3 793	6.89	331	5.473
60	Nd	Neodimio	[Xe]4f ⁴ 6s ²	7.01	144.24	1 297	3 347	7.14	289	5.5250
61	Pm	Prometeo	[Xe]4f ⁵ 6s ²	7.26	(145)	1 315	3 273	7.13	289	5.582

Z	Sím	Nombre	Configuración electrónica	$\rho(\text{g/cm}^3)$	$m(\text{g/mol})$	$T_{\text{fusión}}(\text{K})$	$T_{\text{ebullición}}(\text{K})$	$L_m(\text{kJ/mol})$	$L_v(\text{kJ/mol})$	$E_1(\text{eV})$
62	Sm	Samario	$[\text{Xe}]4f^6 6s^2$	7.52	150.36	1 345	2 067	8.62	165	5.6437
63	Eu	Europio	$[\text{Xe}]4f^7 6s^2$	5.264	151.964	1 099	1 802	9.21	176	5.6704
64	Gd	Gadolinio	$[\text{Xe}]4f^7 5d^1 6s^2$	7.90	157.25	1 585	3 546	10.05	301.3	6.1498
65	Tb	Terbio	$[\text{Xe}]4f^9 6s^2$	8.23	158.92534	1 629	3 503	10.15	293	5.8638
66	Dy	Disproσιο	$[\text{Xe}]4f^{10} 6s^2$	8.540	162.500	1 680	2 840	11.06	280	5.9389
67	Ho	Holmio	$[\text{Xe}]4f^{11} 6s^2$	8.79	164.93032	1 734	2 993	17.0	265	6.0215
68	Er	Erbio	$[\text{Xe}]4f^{12} 6s^2$	9.066	167.259	1 802	3 141	19.90	280	6.1077
69	Tm	Tulio	$[\text{Xe}]4f^{13} 6s^2$	9.32	168.93421	1 818	2 223	16.84	247	6.1843
70	Yb	Iterbio	$[\text{Xe}]4f^{14} 6s^2$	6.90	173.04	1 097	1 469	7.66	159	6.2542
71	Lu	Lutecio	$[\text{Xe}]4f^{14} 5d^1 6s^2$	9.841	174.967	1 925	3 675	22	414	5.4259
72	Hf	Hafnio	$[\text{Xe}]4f^{14} 5d^2 6s^2$	13.31	178.49	2 506	4 876	27.2	571	6.8251
73	Ta	Tantalio	$[\text{Xe}]4f^{14} 5d^3 6s^2$	16.69	180.9479	3 290	5 731	36.57	732.8	7.5496
74	W	Tungsteno	$[\text{Xe}]4f^{14} 5d^4 6s^2$	19.25	183.84	3 695	5 828	52.31	806.7	7.8640
75	Re	Renio	$[\text{Xe}]4f^{14} 5d^5 6s^2$	21.02	186.207	3 459	5 869	60.3	704	7.8335
76	Os	Osmio	$[\text{Xe}]4f^{14} 5d^6 6s^2$	22.61	190.23	3 306	5 285	57.85	738	8.4382
77	Ir	Iridio	$[\text{Xe}]4f^{14} 5d^7 6s^2$	22.56	192.217	2 739	4 701	41.12	563	8.9670
78	Pt	Platino	$[\text{Xe}]4f^{14} 5d^9 6s^1$	21.45	195.078	2 041.4	4 098	22.17	469	8.9588
79	Au	Oro	$[\text{Xe}]4f^{14} 5d^{10} 6s^1$	19.3	196.96655	1 337.33	3 129	12.55	324	9.2255
80	Hg	Mercurio _{líquido}	$[\text{Xe}]4f^{14} 5d^{10} 6s^2$	13.534	200.59	234.32	629.88	2.29	59.11	10.4375
81	Tl	Talio	$[\text{Xe}]4f^{14} 5d^{10} 6s^2 6p^1$	11.85	204.3833	577	1 746	4.14	165	6.1082
82	Pb	Plomo	$[\text{Xe}]4f^{14} 5d^{10} 6s^2 6p^2$	11.34	207.2	600.61	2 022	4.77	179.5	7.4167
83	Bi	Bismuto	$[\text{Xe}]4f^{14} 5d^{10} 6s^2 6p^3$	9.78	208.98038	544.7	1 837	11.30	151	7.2855
84	Po	Polonio	$[\text{Xe}]4f^{14} 5d^{10} 6s^2 6p^4$	9.320	(209)	527	1 235	13	102.91	8.414
85	At	Astatino	$[\text{Xe}]4f^{14} 5d^{10} 6s^2 6p^5$?	(210)	?	?	?	?	?
86	Rn	Radón	$[\text{Xe}]4f^{14} 5d^{10} 6s^2 6p^6$	$9.73 \cdot 10^{-3}$	(222)	202	211.3	3.247	18.10	10.7485
87	Fr	Francio	$[\text{Rn}]7s^1$	1.87	(223)	~300	~950	~2	~65	4.0727
88	Ra	Radio	$[\text{Rn}]7s^2$	5.5	(226)	973	2 010	8.5	113	5.2784
89	Ac	Actinio	$[\text{Rn}]6d^1 7s^2$	10	(227)	1 323	3 471	14	400	5.17
90	Th	Torio	$[\text{Rn}]6d^2 7s^2$	11.7	232.0381	2 115	5 061	13.81	514	6.3067
91	Pa	Protactinio	$[\text{Rn}]5f^2 6d^1 7s^2$	15.37	231.03588	1 841	~4 300	12.34	481	5.89
92	U	Uranio	$[\text{Rn}]5f^3 6d^1 7s^2$	19.1	238.02891	1 405.3	4 404	9.14	417.1	6.1941
93	Np	Neptunio	$[\text{Rn}]5f^4 6d^1 7s^2$	20.45	(237)	910	4 273	3.20	336	6.2657
94	Pu	Plutonio	$[\text{Rn}]5f^6 7s^2$	19.816	(244)	912.5	3 505	2.82	333.5	6.0260
95	Am	Americio	$[\text{Rn}]5f^7 7s^2$	12	(243)	1 449	2 880	14.39	238.5	5.9738
96	Cm	Curio	$[\text{Rn}]5f^7 6d^1 7s^2$	13.51	(247)	1 613	3 383	~15	?	5.9914
97	Bk	Berkelio	$[\text{Rn}]5f^9 7s^2$	~14	(247)	1 259	?	?	?	6.1979
98	Cf	Californio	$[\text{Rn}]5f^{10} 7s^2$	15.1	(251)	1 173	1 743	?	?	6.2817
99	Es	Einsteinio	$[\text{Rn}]5f^{11} 7s^2$	8.84	(252)	1 133	?	?	?	6.42
100	Fm	Fermio	$[\text{Rn}]5f^{12} 7s^2$?	(257)	1 800	?	?	?	6.50
101	Md	Mendelevio	$[\text{Rn}]5f^{13} 7s^2$?	(258)	1 100	?	?	?	6.58
102	No	Nobelio	$[\text{Rn}]5f^{14} 7s^2$?	(259)	?	?	?	?	6.65

(continúa)

(continuación)

Z	Sím	Nombre	Configuración electrónica	$\rho(\text{g/cm}^3)$	$m(\text{g/mol})$	$T_{\text{fusión}}(\text{K})$	$T_{\text{ebullición}}(\text{K})$	$L_m(\text{kJ/mol})$	$L_v(\text{kJ/mol})$	$E_1(\text{eV})$
103	Lr	Laurencio	$[\text{Rn}]5f^{14} 7s^2 7p^1$?	(262)	?	?	?	?	4.9
104	Rf	Rutherfordio	$[\text{Rn}]5f^{14} 6d^2 7s^2$?	(261)	?	?	?	?	6
105	Db	Dubnio	$[\text{Rn}]5f^{14} 6d^3 7s^2$?	(262)	?	?	?	?	?
106	Sg	Seaborgio	$[\text{Rn}]5f^{14} 6d^4 7s^2$?	(266)	?	?	?	?	?
107	Bh	Bohrio	$[\text{Rn}]5f^{14} 6d^5 7s^2$?	(264)	?	?	?	?	?
108	Hs	Hassio	$[\text{Rn}]5f^{14} 6d^6 7s^2$?	(277)	?	?	?	?	?
109	Mt	Meitnerio	$[\text{Rn}]5f^{14} 6d^7 7s^2$?	(276)	?	?	?	?	?
110	Ds	Darmstadtium	$*[\text{Rn}]5f^{14} 6d^9 7s^1$?	(281)	?	?	?	?	?
111	Rg	Roentgenio	$*[\text{Rn}]5f^{14} 6d^9 7s^2$?	(280)	?	?	?	?	?
112			$*[\text{Rn}]5f^{14} 6d^{10} 7s^2$?	(285)	?	?	?	?	?
113			$*[\text{Rn}]5f^{14} 6d^{10} 7s^2 7p^1$?	(284)	?	?	?	?	?
114			$*[\text{Rn}]5f^{14} 6d^{10} 7s^2 7p^2$?	(289)	?	?	?	?	?
115			$*[\text{Rn}]5f^{14} 6d^{10} 7s^2 7p^3$?	(288)	?	?	?	?	?
116			$*[\text{Rn}]5f^{14} 6d^{10} 7s^2 7p^4$?	(293)	?	?	?	?	?
118			$*[\text{Rn}]5f^{14} 6d^{10} 7s^2 7p^6$?	(294)	?	?	?	?	?

*Pronosticado.

(Isótopo con mayor vida)

Respuestas de problemas y preguntas seleccionadas

Capítulo 1: Vista general

Opción múltiple

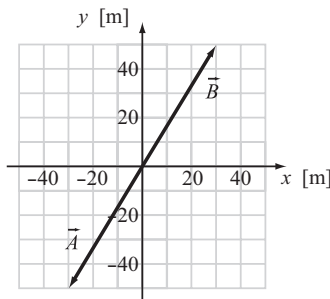
1.1 c). 1.3 d). 1.5 a). 1.7 b). 1.9 c).

Problemas

1.29 a) Tres. b) Cuatro. c) Uno. d) Seis. e) Uno. f) Dos. g) Tres.
 1.31 6.34. 1.33 $1 \cdot 10^{-7}$ cm. 1.35 $1.94822 \cdot 10^6$ pulgadas 1.37 $1 \cdot 10^6$ mm. 1.39 $1 \mu\text{Pa}$. 1.41 2420 cm^2 . 1.43 $356\,000 \text{ km} = 221\,000$ millas; $407\,000 \text{ km} = 253\,000$ millas. 1.45 $x_{\text{total}} = 5 \cdot 10^{-1} \text{ m}$; $x_{\text{prom}} = 9 \cdot 10^{-2} \text{ m}$. 1.47 120 miliestadios/microfortnight. 1.49 76 veces la superficie del área de la Tierra. 1.51 1.56 barriles equivalen a $1.10 \cdot 10^4$ pulgadas cúbicas. 1.53 a) $V_S = 1.41 \times 10^{27} \text{ m}^3$. b) $V_E = 1.08 \times 10^{21} \text{ m}^3$. c) $\rho_S = 1.41 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$. d) $\rho_E = 5.52 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$. 1.55 100 cm. 1.57 $\Delta x = 21.8 \text{ m}$ y $\Delta y = 33.5 \text{ m}$. 1.59 $\vec{A} = 2.5\hat{x} + 1.5\hat{y}$
 $\vec{B} = 5.5\hat{x} - 1.5\hat{y}$
 $\vec{C} = -6\hat{x} - 3\hat{y}$
 1.61 (2, -3). 1.63 $\vec{D} = 2\hat{x} - 3\hat{y}$. 1.65 $\vec{A} = 65.0\hat{x} + 37.5\hat{y}$, $\vec{B} = -56.7\hat{x} + 19.5\hat{y}$, $\vec{C} = -15.4\hat{x} - 19.7\hat{y}$,
 $\vec{D} = 80.2\hat{x} - 40.9\hat{y}$. 1.67 3.27 km. 1.69 $\vec{D} = -15\sqrt{2}\hat{x} + (32 + 15\sqrt{2})\hat{y} - 3\hat{z}$,
 $|\vec{D}| = 57$ pasos. 1.71 $f = 16^\circ$, $\alpha = 41^\circ$ y $\theta = 140^\circ$.

Problemas adicionales

1.73 $2 \cdot 10^8$. 1.75 $|\vec{A}| = 58.3 \text{ m}$, $|\vec{B}| = 58.3 \text{ m}$. 1.77



$|\vec{A}| = 58.3 \text{ m}$, $|\vec{B}| = 58.3 \text{ m}$.

1.79 63.7 m en -57.1° o 303° (ángulos equivalentes). 1.81 $\vec{A} = 63.3$ en 68.7° ; $\vec{B} = 175$ en -59.0° . 1.83 446 en 267° . 1.85 a) $1.70 \cdot 10^3$ en 295.9° . b) $1.61 \cdot 10^3$ en 292° . 1.87 $1.00 \cdot 10^3 \text{ N}$. 1.89 a) 125 millas. b) 240° o -120° (desde el eje x positivo o E). c) 167 millas. 1.91 3.79 km a 21.9° W de N. 1.93 $5.62 \cdot 10^7 \text{ km}$. 1.95 9 630 pulgadas. 1.97 $1.4 \cdot 10^{11} \text{ m}$, 18° desde el Sol.

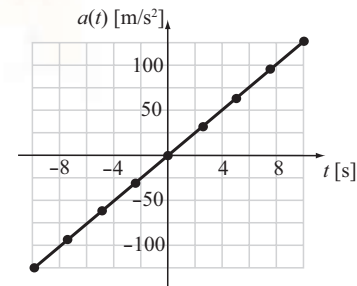
Capítulo 2: Movimiento en una línea recta

Opción múltiple

2.1 e). 2.3 c). 2.5 e). 2.7 d). 2.9 a).

Problemas

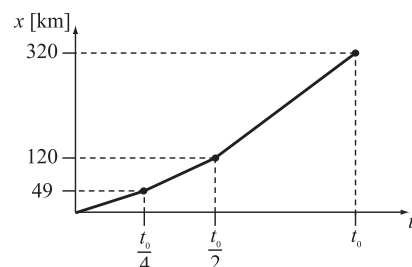
2.25 Distancia = 66.0 m; desplazamiento = 30.0 km hacia el sur. 2.27 0 m/s. 2.29 a) 4.0 m/s. b) -0.20 m/s . c) 1.4 m/s. d) 2 : 1. e) $[-5, -4]$, $[1, 2]$ y $[4, 5]$. 2.31 4.0 m/s. 2.33 rapidez media: 40.0 m/s; velocidad media: 34.0 m/s. 2.35 2.4 m/s^2 en dirección hacia atrás. 2.37 10.0 m/s^2 . 2.39 $-1.0 \cdot 10^2 \text{ m/s}^2$. 2.41 a) 650 m/s. b) 0.66 s y -0.98 s . c) 8.3 m/s^2 . d)



2.43 $-1\,200 \text{ cm}$. 2.45 $x = 23 \text{ m}$. 2.47 $x = 18 \text{ m}$. 2.49 a) En $t = 4.00 \text{ s}$, el desplazamiento es 20.0 m/s. En $t = 14.0 \text{ s}$, el desplazamiento es 12.0 m/s. b) 232 m. 2.51 a) 17.7 s. b) -1.08 m/s^2 . 2.53 33.3 m/s. 2.55 20.0 m. 2.57 a) 2.50 m/s. b) 10.0 m. 2.59 a) 5.1 m/s. b) 3.8 m. 2.61 2.33 s. 2.63 $v_{\perp y} = \sqrt{gy}$. 2.65 a) 16 s. b) 0.84 m/s^2 . 2.67 a) 61.3 m. b) 7.83 s. 2.69 a) 0.97 s. b) $t_M = 1.6t_E$. c) 4.6 m. 2.71 29 m/s. 2.73 a) 3.52 s. b) 0.515 s.

Problemas adicionales

2.75 395 m. 2.77 2.85 s. 2.79 40.0 ms. 2.81 a) 33 m. b) -2.4 m/s^2 . 2.83 Los trenes chocan. 2.85 570 m. 2.87 290 m/s. 2.89 a) 2.46 m/s^2 . b) 273 m. 2.91 a) $v = 1.7 \cos(0.46t/s - 0.31) \text{ m/s} - 0.2 \text{ m/s}$, $a = (-0.80 \text{ sen}(0.46t/s - 0.31) \text{ m/s}^2)$. b) 0.67 s, 7.5 s, 14 s, 21 s y 28 s. 2.93 a) 18 horas. b)



2.95 a) 37.9 m/s. b) -26.8 m/s. c) 1.13 s. 2.97 693 m.

Capítulo 3: Movimiento en dos y tres dimensiones

Opción múltiple

3.1 c). 3.3 d). 3.5 c). 3.7 a). 3.9 a). 3.11 a). 3.13 a).

Problemas

3.33 2.8 m/s. 3.35 3.06 km 67.5° al norte del este. 3.37 a) 174 m.
b) 21.8 m/s, 44.6° al norte del oeste. 3.39 30.0 m/s horizontalmente y 19.6 m/s verticalmente. 3.41 4.69 s. 3.43 4:1. 3.45 a) 7.3 m.
b) 9.1 m/s. 3.47 6.61 m. 3.49 a) 60 m. b) 75° . c) 31 m.
3.51 inicial: 24.6 m/s en 47.3° ; final: 20.2 m/s en 34.3° . 3.53 81 m/s.
3.55 3.47 m/s. 3.57 5. 3.59 a) 62.0 m/s. b) 62.3 m/s. 3.61 14.3 s.
3.63 3.94 m/s. 3.65 a) 17.7° . b) 7.62 s. c) 0° . d) 7.26 s.
e) $(0.0001\hat{x} + 5.33\hat{y})$ m/s. 3.67 95.4 m/s.

Problemas adicionales

3.69 26.0 m/s. 3.71 25° al norte del este. 3.73 helicóptero: 14.9 m/s; caja: 100. m/s. 3.75 37.7 m/s en 84.1° arriba de la horizontal. 3.77 7.
3.79 9.07 s. 3.81 1.00 m/s². 3.83 2.7 s. 3.85 a) 19 m. b) 2.0 s. 3.87 No.
Después que el ladrón alcanza un desplazamiento horizontal de 5.5 m, ha caído 8.4 desde el primer techo y no puede llegar al segundo techo. 3.89 a) sí. b) 49.0 m/s a 57.8° sobre la horizontal.
3.91 9.2 m/s. 3.93 8.87 km antes del blanco; 0.180 s venta de oportunidad. 3.95 a) 77.4 m/s a 50° por abajo de la horizontal.
b) 178 m. c) 63.4 m/s a 38° por abajo de la horizontal.

Capítulo 4: Fuerza

Opción múltiple

4.1 d). 4.3 d). 4.5 a). 4.7 c). 4.9 a). 4.11 b).

Problemas

4.23 a) 0.167 N. b) 0.102 kg. 4.25 229 lb. 4.27 4.32 m/s².
4.29 a) 21.8 N. b) 14.0 N. c) 7.84 N. 4.31 183 N. 4.33 a) 1.1 m/s².
b) 4.4 N. 4.35 $m_3 = 0.050$ kg; $\theta = 220^\circ$. 4.37 a) 441 N. b) 531 N.
4.39 a) 2.60 m/s². b) 0.346 N. 4.41 49.2° . 4.43 a) 471 N. b) 377 N.
4.45 Izquierda: 44 N; hacia la derecha: 57 N. 4.47 0.69 m/s² hacia abajo. 4.49 280 N. 4.51 807 N. 4.53 85.0 m. 4.55 5.84 N.
4.57 a) 300 N. b) 500 N. c) Inicialmente la fuerza de fricción es 506 N. Después que el refrigerador se pone en movimiento, la fuerza de fricción es la energía cinética del refrigerador, 407 N. 4.59 18 m/s.
4.61 2.30 m/s². 4.63 4.56 m/s².

Problemas adicionales

4.65 a) 4.22 m/s². b) 26.7 m. 4.67 a) 59 N. b) 77 N.
4.69 2.45 m/s². 4.71 a) 243 N. b) 46.4 N. c) 3.05 m/s.
4.73 1.40 m/s². 4.75 6 760 N. 4.77 a) 30 N. b) 0.75. 4.79 9.2° .
4.81 a) $1.69 \cdot 10^{-5}$ kg/m. b) 0.0274 N. 4.83 a) 18.6 N.
b) $a_1 = 6.07$ m/s²; $a_2 = 2.49$ m/s². 4.85 1.72 m/s².
4.87 a) $a_1 = 5.2$ m/s²; $a_2 = 3.4$ m/s². b) 35 N. 4.89 a) 32.6° .
b) 243 N. 4.91 a) 3.34 m/s². b) 6.57 m/s².

Capítulo 5: Energía cinética, trabajo y potencia

Opción múltiple

5.1 c). 5.3 b). 5.5 e). 5.7 c). 5.9 b).

Problemas

5.15 a) $4.50 \cdot 10^3$ J. b) $1.80 \cdot 10^2$ J. c) $9.00 \cdot 10^2$ J. 5.17 $4.38 \cdot 10^6$ J.
5.19 $v = 12.0$ m/s. 5.21 $3.50 \cdot 10^3$ J. 5.23 -9.52 m/s. 5.25 7.85 J.
5.27 $5.41 \cdot 10^2$ J. 5.29 1.25 J. 5.31 $\mu = 0.123$. 5.33 44 m/s. 5.35 16 J.
5.37 a) $W = 1.60 \cdot 10^3$ J. b) $v_f = 56.6$ m/s. 5.39 $2.40 \cdot 10^4$ N/m.
5.41 17.6 m/s. 5.43 3.43 m/s. 5.45 $2.00 \cdot 10^6$ W; la potencia entregada por el automóvil. 5.46 $F = 1\,990$ kN. 5.47 450 W. 5.49 $3.33 \cdot 10^4$ J.

Problemas adicionales

5.51 9.12 kJ. 5.53 42 kW = 56 hp. 5.55 63 hp. 5.57 44 m/s.
5.59 5.1 m/s. 5.61 25 N. 5.63 366 kJ. 5.65 $v_f = 23.9$ m/s en la dirección de F_1 . 5.67 35.3° .

Capítulo 6: Energía potencial y conservación de la energía

Opción múltiple

6.1 a). 6.3 e). 6.5 d). 6.7 d). 6.9 a).

Problemas

6.27 29 J. 6.29 0.0869 J. 6.31 $1.93 \cdot 10^6$ J. 6.33 12 J. 6.35 a) $F(y) = 2by - 3ay^2$. b) $F(y) = -cU_0 \cos(cy)$. 6.37 9.90 m/s. 6.39 19 m/s.
6.41 a) 8.7 J. b) 18 m/s. 6.43 28.0 m/s. 6.45 a) 1.20 J. b) 0 J.
6.47 a) 3.89 J. b) 2.79 m/s. 6.49 5.37 m/s. 6.51 16.9 kJ. 6.53 39 kJ.
6.55 7.65 J. 6.57 a) 8.92 m/s. b) 4.07 m/s. c) -8.92 J. 6.59 $x = 42$ m, $y = 24$ m. 6.61 a) 13.0 m/s. b) 12.2 m/s. c) $2.00 \cdot 10^{-1}$ m; 6.70 m.

Problemas adicionales

6.63 $41.0 \cdot 10^4$ J. 6.65 $2.0 \cdot 10^8$ J. 6.67 521 J. 6.69 1.6 m. 6.71 3.8 m/s.
6.73 8.85 m/s. 6.75 $1.27 \cdot 10^2$ m. 6.77 2.21 kJ. 6.79 a) $-1.02 \cdot 10^{-1}$ J (pérdida por fricción). b) 138 N/m. 6.81 a) 12.5 J. b) 3.13; 9.38 J. c) 12.5 J. d) por un factor de 1/4. e) por un factor de 1/4. 6.83 $E_{\text{nuevo}} = 2.50$ J, $v_{\text{máx},2} = 2.24$ m/s, $A_2 = 22.4$ cm. 6.85 a) $\frac{v}{\mu_{\text{kg}}}$. b) $\frac{v^2}{2\mu_{\text{kg}}}$. c) $mv^2/2$. d) $-mv^2/2$. 6.87 a) 667 J. b) 667 J. c) 667 J. d) 0 J. e) 0 J.

Capítulo 7: Cantidad de movimiento y colisiones

Opción múltiple

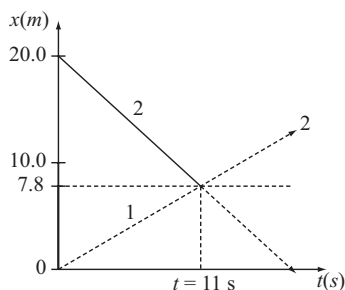
7.1 b). 7.3 b), d). 7.5 e). 7.7 c). 7.9 c).

Problemas

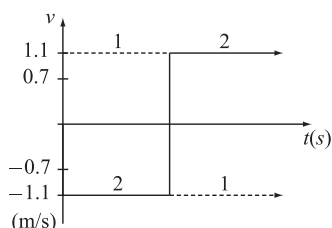
7.21 a) 1.5. b) 1.0. 7.23 $p_x = 3.51$ kg m/s, $p_y = 5.61$ kg m/s.
7.25 30 500 N, 0.874 s. 7.27 a) 675 N s opuesto a v. b) 625 N s opuesto a v. c) 136 kg m/s opuesto a v. 7.29 0.0144 m/s; 2.42 m/s; 10.4 m/s; 773 meses. 7.31 a) $3.15 \cdot 10^9$ m/s. b) $5.50 \cdot 10^7$ m/s. 7.33 a) -810 m/s. b) 43.0 km. 7.35 4.77 m/s. 7.37 -0.22 m/s. 7.39 1.26 m/s. 7.41 21.4 m/s a un ángulo de 41.4° por arriba de la horizontal.

7.43 -34.5 km/s . 7.45 $v_B = 0.433 \text{ m/s}$, $v_A = -1.30 \text{ m/s}$.

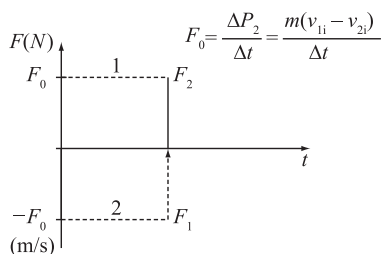
7.47 Posición-tiempo:



Velocidad-tiempo:



Fuerza-tiempo:



7.49 $3.94 \cdot 10^4 \text{ m/s}$. 7.51 0.930 m/s ; -23.8° . 7.53 $v_{1f} = 582 \text{ m/s}$ en la dirección y positiva, y $v_{2f} = 416 \text{ m/s}$ en 36.2° por abajo del eje x positivo. 7.55 Betty: 206 J; Sally: 121 J; la razón K_f/K_i no es igual a uno, de modo que la colisión es inelástica. 7.57 6.0 m/s . 7.59 automóvil más pequeño: -48.2 g ; automóvil más grande: 16.1 g . 7.61 42.0 m/s . 7.63 7.00 m/s .

7.65

Objeto	h_i [cm]	h_f [cm]	ϵ
Pelota de práctica de golf	85.0	62.6	0.858
Pelota de tenis	85.0	43.1	0.712
Bola de billar	85.0	54.9	0.804
Pelota de balón mano	85.0	48.1	0.752
Pelota de madera	85.0	30.9	0.603
Cojinete de acero	85.0	30.3	0.597
Canica de vidrio	85.0	36.8	0.658
Bola de cintas elásticas	85.0	58.3	0.828
Pelotas de plástico duras huecas	85.0	40.2	0.688

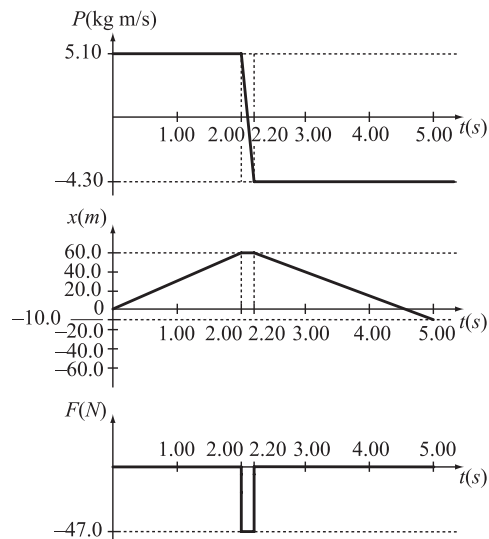
7.67 40.7° . 7.69 0.675 m . 7.71 $\epsilon = 0.688$, $K_f/K_i = 0.605$.

Problemas adicionales

7.73 a) 0.63 m/s . b) No. 7.75 1.79 s . 7.77 $2.99 \cdot 10^5 \text{ m/s}$. 7.79 -0.190 m/s . 7.81 La fuerza promedio es $52\,400 \text{ N}$; 97.0 g . 7.83 30.0 kg m/s . 7.85 El vector de cantidad de movimiento de la formación es $0.0865 \text{ kg m/s } \hat{x} + 3.05 \text{ kg m/s } \hat{y}$. El pájaro de 115 g debe tener una velocidad de 26.5 m/s a 1.63° al este del norte. 7.87 a) La distancia entre la

primera bola y el boliche es 2.0 m y la distancia entre la segunda bola y el boliche es 1.7 m . b) La distancia entre la primera bola y el boliche es 0.98 m y la distancia entre la segunda bola y el boliche es 0.76 m . 7.89 La velocidad es $2v_0$ en dirección 10° por debajo de la horizontal. 7.91 15.9° .

7.93



7.95 Por lo menos cuatro llaves; llave maestra: 0.12 m/s ; teléfono: 0.92 m/s . 7.97 22 m/s a 0.22° a la derecha de la dirección inicial. 7.99 1.37 N ; 0.20 s . 7.101 a) $(-14.9 \text{ m/s}) \hat{x}$. b) $E_{\text{mec},f} = E_{\text{mec},i} = 14.1 \text{ kJ}$. 7.103 a) 1.73 m/s . b) 106° . 7.105 $1.16 \cdot 10^{-25} \text{ kg}$ de germanio.

Capítulo 8: Sistemas de partículas y objetos extendidos

Opción múltiple

8.1 c). 8.3 d). 8.5 e). 8.7 b). 8.9 b). 8.11 a).

Problemas

8.25 a) $4\,670 \text{ km}$. b) $742\,200 \text{ km}$. 8.27 $(-0.500 \text{ m}, -2.00 \text{ m})$. 8.29 a) $2.5 \hat{x} \text{ m/s}$. b) Antes de la colisión, $\vec{v}'_1 = 1.5 \hat{x} \text{ m/s}$ y $\vec{v}'_2 = -2.5 \hat{x} \text{ m/s}$. Después de la colisión, $\vec{v}'_1 = -1.5 \hat{x} \text{ m/s}$ y $\vec{v}'_2 = 2.5 \hat{x} \text{ m/s}$ con respecto al centro de masa. 8.31 a) -0.769 m/s (hacia la izquierda). b) 0.769 m/s (hacia la derecha). c) -1.50 m/s (hacia la izquierda). d) 1.77 m/s (hacia la derecha). 8.33 $0.00603c$. 8.35 126 N en dirección de la velocidad del agua. 8.37 a) $J_{\text{espec}, \text{juguete}} = 81.6 \text{ s}$. b) $J_{\text{espec}, \text{quím}} = 408 \text{ s}$, $J_{\text{espec}, \text{juguete}} = 0.200 J_{\text{espec}, \text{quím}}$. 8.39 5.52 h . 8.41 a) $11\,100 \text{ kg/s}$. b) $1.63 \cdot 10^4 \text{ m/s}$. c) 88.4 m/s^2 . 8.43 $(16.9 \text{ cm}, 17.3 \text{ cm})$. 8.45 $(6.67 \text{ cm}, 11.5 \text{ cm})$. 8.47 0.29 m . 8.49 $\frac{11x_0}{9}$.

Problemas adicionales

8.51 $6.5 \cdot 10^{-11} \text{ m}$. 8.53 0.14 pies lejos de la dirección en que dispara el cañón. 8.55 a) 0.87 m/s . b) 55 J . 8.57 9 m/s horizontalmente. 8.59 4.1 km/s . 8.61 a) 2.24 m/s^2 . b) 32.4 m/s^2 . c) $3\,380 \text{ m/s}$. 8.63 $(12.0 \text{ cm}, 5.00 \text{ cm})$. 8.65 $\left(\frac{6a}{8+\pi}, \frac{(4+3\pi)a}{8+\pi} \right)$.

8.67 69.3 s. 8.69 a) $(-5.0\hat{i} + 12\hat{j})$ kg m/s. b) $(4.0\hat{i} + 6.0\hat{j})$ kg m/s. c) $(-9.0\hat{i} + 6.0\hat{j})$ kg m/s. 8.71 88.2 N.

Capítulo 9: Movimiento circular

Opción múltiple

9.1 d). 9.3 b). 9.5 c). 9.7 c). 9.9 a). 9.11 a).

Problemas

9.27 $\frac{\pi}{2}$ rad \approx 1.57 rad. 9.29 $3.07 \cdot 10^6$ m a 13.94° por debajo de la superficie de la Tierra. 9.31 a) $\alpha = 0.697$ rad/s². b) $\theta = 8.72$ rad. 9.33 $\Delta d_{12} = 4.8$ m, $\Delta d_{23} = 3.6$ m. 9.35 a) $v_A = 266.44277$ m/s, $v_B = 266.44396$ m/s, están hacia el Este en la dirección de rotación de la Tierra $\Delta v = 1.19$ mm/s. b) $1.19 \cdot 10^{-4}$ rad/s. c) 14.6 (horas). d) En el Ecuador no hay diferencia entre las velocidades A y B, de modo que el periodo es $T_R = \infty$. Esto significa que el péndulo no rota 9.37 $\alpha = -6.54$ rad/s². 9.39 -4.8 rad/s². 9.41 a) $\omega_3 = 0.209$ rad/s. b) $v = 0.200$ m/s. c) $\omega_1 = 2.00$ rad/s²; $\omega_2 = 0.400$ rad/s². d) $\alpha_2 = 2.00 \cdot 10^{-2}$ rad/s²; $\alpha_3 = 1.00 \cdot 10^{-2}$ rad/s². 9.43 a) 7.0 rad/s. b) 2.5 rad/s. c) $-2.5 \cdot 10^{-3}$ rad/s². 9.45 a) $\Delta\theta = 2.72$ rad. b) $a = 3.20$ m/s², $v = 8.53$ m/s; posición del punto: $-0.456\hat{x} + 0.206\hat{y}$. 9.47 6 mg.

9.49 $\Delta t = \sqrt{\frac{2g}{\mu\alpha^2}}$. 9.51 9.4 m/s. 9.53 13.2°.

9.55 a) $v_{\text{cero fricción}} = \sqrt{\frac{Rg \sin\theta}{\cos\theta}} = \sqrt{Rg \tan\theta}$. b) $v_{\text{mín}} =$

$$\sqrt{\frac{Rg(\sin\theta - \mu_s \cos\theta)}{\cos\theta + \mu_s \sin\theta}}$$

c) $v_{\text{cero fricción}} = 62.6$ m/s, $v_{\text{mín}} = 26.3$ m/s y $v_{\text{máx}} = 149$ m/s.

Problemas adicionales

9.57 a) 0.52 rad/s. b) $\alpha = -0.087$ rad/s². c) $a_t = 0.79$ m/s². 9.59 a) 54.3 revoluciones. b) 12.1 rev/s. 9.61 $\alpha = -0.105$ rad/s²; $\Delta\theta = 1.89 \cdot 10^4$ rad. 9.63 4.2 rotaciones. 9.65 $5.93 \cdot 10^{-3}$ m/s². 9.67 a) 32.6 s⁻¹. b) -2.10 s⁻². c) 278 m. 9.69 $N = -80.3$ N. 9.71 a) $a_c = 62.5$ m/s²; $F_c = 5.00 \cdot 10^3$ N. b) $w = 5790$ N. 9.73 48 m. 9.75 a) $\alpha = 0.471$ rad/s². b) $a_c = 39.1$ m/s² y $\alpha = 0.471$ rad/s². c) $a = 39.1$ m/s² en $\theta = 1.90^\circ$. 9.77 a) $v = 5.10$ m/s. b) $T = 736$ N.

Capítulo 10: Rotación

Opción múltiple

10.1 b). 10.3 b). 10.5 c). 10.7 c). 10.9 b). 10.11 b). 10.13 e). 10.15 c).

Problemas

10.35 $1.12 \cdot 10^3$ kg m². 10.37 a) La esfera sólida llega primero al fondo. b) El cubo de hielo se desplaza más rápido que la bola sólida en la base del plano inclinado. c) 4.91 m/s. 10.41 5.0 m. 10.43 8.07 m/s². 10.45 a) 2.17 N m. b) 52.7 rad/s. c) 219 J. 10.47 a) $7.27 \cdot 10^{-2}$ kg m². b) 2.28 s. 10.49 a) $t_{\text{lanzamiento}} = 7.7$ s. b) 5.4 m/s. c) $t_{\text{lanzamiento}} = 7.7$ s, 5.4 m/s. 10.51 3.30 rad/s². 10.53 a) 0.577 m. b) 0.184 m. 10.55 a) 6.0 rad/s². b) 150 N m. c) 1900 rad. d) 280 kJ. e) 280 kJ. 10.57 a) $9.704 \cdot 10^{37}$ kg m². b) $3.7 \cdot 10^{24}$ kg m². c) $1.2 \cdot 10^{18}$ kg m². d) $1.2 \cdot 10^{-20}$.

10.59 $\omega = \frac{5J(R-h)^2}{2MR^3}$. b) $h_0 = \left(\frac{8 - \sqrt{44}}{10} \right) R$.

10.61 a) 0.150 rad/s. b) 0.900 m/s. 10.63 0.195 rad/s.

Problemas adicionales

10.65 $E = 1.01 \cdot 10^7$ J, $\tau = 17300$ N m. 10.67 a) $1.95 \cdot 10^{-46}$ kg m². b) $2.06 \cdot 10^{-21}$ J. 10.69 29.2 rad/s. 10.71 11.0 m/s. 10.73 0.34 kg m². 10.75 $3.80 \cdot 10^4$ s. 10.77 a) 260 kg. b) -15 N m. c) 3.6 revoluciones. 10.79 $c = 0.38$.

Capítulo 11: Equilibrio estático

Opción múltiple

11.1 c). 11.3 b). 11.5 a). 11.7 c).

Problemas

11.23 $\frac{1000L - 800x_1}{2x_2}$ N. 11.25 368 N cada una. 11.27 42.1 N en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj. 11.29 a) $6m_1g$. b) 7/5. 11.31 287 N; 939 N. 11.33 las fuerzas son: 740 N sobre el extremo más alejado de los ladrillos, 1200 N sobre el extremo más cercano a los ladrillos. Ambas fuerzas son hacia arriba.

11.37 a) $\frac{mgl^2}{L\sqrt{L^2 + l^2}}$. b) T. c) $\frac{T\sqrt{L^2 + l^2}}{l}$.

11.39 88.5 N. 11.41 29 N. 11.43 $T = 2450$ N; $F_{by} = 8070$ N; $F_{bx} = 1220$ N. 11.45 $m = 25.5$ kg. 11.47 0.25. 11.49 32.0° . 11.51 a) El soporte derecho aplica una fuerza hacia arriba de 133 N. El soporte izquierdo aplica una fuerza hacia arriba de 279 N. b) 2.14 m desde el extremo izquierdo de la tabla. 11.53 a) 0.206 m. b) 0.088 m. 11.55 $d = 3.14$ m. 11.57 inestable: $x_0 = 0$; estable: $x = \pm b$. 11.59 La persona A puede permanecer de pie en el extremo alejado de la tabla sin inclinarla.

Problemas adicionales

11.61 $x_m = 2.54$ m. 11.63 27.0° . 11.65 $X = 2.74$ m. 11.67 $M_1 = 0.689$ kg. 11.69 a) $T_r = 2.0 \cdot 10^2$ N; $T_c = 330$ N. b) $f = 690$ N. 11.71 $m_1 = 0.030$ kg, $m_2 = 0.030$ kg, $m_3 = 0.096$ kg. 11.73 99.6 N en la cadena derecha y 135 N en la cadena izquierda. 11.75 a) 61 N. b) 13° por arriba de la horizontal.

Capítulo 12: Gravitación

Opción múltiple

12.1 a). 12.3 c). 12.5 c). 12.7 e). 12.9 a). 12.11 c).

Problemas

12.27 3.46 mm.

12.29 $x = \frac{L}{1 + \sqrt{\frac{M_2}{M_1}}}$.

12.31 $4.36 \cdot 10^{-8}$ N en la dirección y positiva. 12.33 El peso del objeto sobre el nuevo planeta es $\sqrt[3]{2}$ del peso del objeto sobre la superficie de la Tierra. 12.35 a) 3190 km. b) 0.055%. 12.37 1.00. 12.39 $\sqrt{2}$. 12.43 2.5 km. 12.45 a) $4.72 \cdot 10^{-5}$ m/s. b) $1.07 \cdot 10^{-7}$ J. 12.47 7140 s = 1.98 horas.

12.49 a) $E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r}$. b) $E = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r}$.

c) $r_{\text{mín}} = \frac{-GMm + \sqrt{G^2M^2m^2 + \frac{2L^2E}{m}}}{2E}$;

$r_{\text{máx}} = \frac{-GMm - \sqrt{G^2M^2m^2 + \frac{2L^2E}{m}}}{2E}$.

$$d) a = -\frac{GMm}{2E} \text{ y } e = \sqrt{1 + \frac{2L^2 E}{G^2 M^2 m^3}}$$

12.51 7.51 km/s, 5 920 s. 12.53 antes: 7 770 m/s, después: 8 159 m/s.
12.55 a) 5.908 km. b) 2.954 km. c) 8.872 mm. 12.57 a) $3.132 \cdot 10^9$ J.
b) $3.121 \cdot 10^9$ J.

Problemas adicionales

12.59 La fuerza sobre la Luna debida al Sol es $4.38 \cdot 10^{20}$ N hacia el Sol. La fuerza sobre la Luna debida a la Tierra es $1.98 \cdot 10^{20}$ N hacia la Luna. La fuerza total sobre la Luna es $2.40 \cdot 10^{20}$ N hacia el Sol.
12.61 $2.94 \cdot 10^{-7}$ N. La relación de las fuerzas de la bola al peso de la bola pequeña es $4.11 \cdot 10^{-8} : 1$. 12.63 $2.45 \cdot 10^{10}$ J. 12.65 $2.02 \cdot 10^7$ m.
12.67 a) 9.67 m/s^2 . b) 30.1° por arriba de la horizontal. c) $45.0^\circ = \frac{\pi}{4}$ radianes. 12.69 a) crece por 3.287%. b) decrece por 3.287%.
12.71 $1.9890 \cdot 10^{30}$ kg. 12.73 a) $6 \cdot 10^4$ m/s, lo cual es muy rápido. La velocidad alrededor del Ecuador de la Tierra es 120 veces menor.
b) $2.66 \cdot 10^{12} \text{ m/s}^2$. c) $2.71 \cdot 10^{11}$ veces mayor que en la Tierra. d) $3.30 \cdot 10^6$. e) $1.89 \cdot 10^6$ m. 12.75 Para la nueva órbita, la distancia en el perihelio es $6.72 \cdot 10^3$ km, la distancia en el afelio es $1.09 \cdot 10^4$ km, y el periodo orbital es $8.23 \cdot 10^3 \text{ s} = 2.28$ horas.

Capítulo 13: Sólidos y fluidos

Opción múltiple

13.1 a). 13.3 d). 13.5 $F_3 < F_1 < F_2$. 13.7 d). 13.9 e). 13.11 b).

Problemas

13.23 $1.3 \cdot 10^{22}$. 13.25 0.08 mm. 13.27 0.3 m. 13.29 densidad: $1.06 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$; presión: $1.10 \cdot 10^8 \text{ Pa}$. 13.31 294 mm. 13.33 a) 20.8 cm. b) 21.7 cm. c) 24.4 cm. 13.35 6 233 m. 13.37 1.13 m. 13.39 monedas de 10 centavos. 13.41 a) 9 320 N. b) 491 N. c) 49.1 N.
13.43 $1.17 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3$. 13.45 a) 46.7 N. b) 4.76 kg. c) 0.779 m/s^2 .
13.47 a) 1.088 $\cdot 10^6$ N. b) $9.242 \cdot 10^5$, que es un incremento de 17.75% si se usa hidrógeno en lugar de helio. 13.49 $9.81 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$. 13.51 a) $2.00 \text{ m}^3/\text{s}$. b) 609 m/s^2 . c) $5 610 \text{ m/s}^2$. 13.53 La velocidad del agua en la válvula es 4.5 m/s y la velocidad de una gota de agua a partir del reposo es 4.4 m/s. 13.55 a) $v_2 = 20.5 \text{ m/s}$. b) $p_2 = 95.0 \text{ kPa}$. c) $h = 2.14 \text{ m}$. 13.57 $2.15 \cdot 10^{-7} \text{ m}^3$.

Problemas adicionales

13.59 32 700 N. 13.61 a) 10.4 N. b) El agua de mar es ligeramente más densa que el agua dulce ($1 030 \text{ kg/m}^3$ contra $1 000 \text{ kg/m}^3$), de modo que la presión dentro del barril aumentaría ligeramente en comparación con el caso del agua dulce. El corcho saldría del barril poco antes que éste estuviera lleno. 13.63 12.5 m/s. 13.65 a) 0.683 g/cm^3 . b) 0.853 g/cm^3 . 13.67 1.32 MPa. 13.69 a) 250. m/s. b) 14.6 kPa. c) 585 kN. 13.71 14.16 m/s. 13.73 0.39. 13.75 176 kPa.

Capítulo 14: Oscilaciones

Opción múltiple

14.1 c). 14.3 b). 14.5 b). 14.7 a). 14.9 $\omega_a > \omega_b > \omega_c > \omega_d = \omega_e$. 14.11 b).

Problemas

14.21 125 N/m. 14.23 20. Hz. 14.25 a) $k = 19.5 \text{ N/m}$. b) La frecuencia es 1.41 Hz.
14.27 $f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{h}}$.

14.29 $A = 2.35 \text{ cm}$. 14.31 a) $T = 2.01 \text{ s}$. b) $T = 1.82 \text{ s}$. c) $T = 2.26 \text{ s}$.
d) No hay periodo, o bien, $T = \infty$. 14.33 $T = 1.10 \text{ s}$. 14.35 a) $x = L/\sqrt{12}$.

b) $x = 0$. 14.37 a) $I = \frac{43}{30} ML^2$. b) $T = 2\pi \sqrt{\frac{86L}{45g}}$. c) 52 cm.

14.39 a) $x(0) = 1.00 \text{ m}$; $v(0) = 2.72 \text{ m/s}$; $a(0) = -2.47 \text{ m/s}^2$.

b) $K(t) = (2.5)\pi^2 \cos^2\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{6}\right)$. c) $t = 1.67 \text{ s}$. 14.41 a) 4.0 J. b) 1.9 m/s.

14.43 a) $x_{\text{máx}} = 2.82 \text{ m}$. b) $t = 0.677 \text{ s}$.

14.45 a) $r_0 = \left(\frac{2A}{B}\right)^{1/6}$. b) $\omega = \frac{3}{\sqrt{m}} \left(\frac{4B^7}{A^4}\right)^{1/6}$.

14.47 17 s. 14.49 1.82 s. 14.51 a) $k = 126 \text{ N/m}$. b) $v_{\text{máx}} = 12.6 \text{ m/s}$. c) $t_f = 34.3 \text{ s}$. 14.53 a) 0.15 m. b) 2.0 m. c) 0.039 m. 14.55 La amplitud de oscilación de la masa es máxima a una frecuencia de 2.0 s^{-1} con una amplitud de 0.43 m. A una frecuencia de 15 s^{-1} , la amplitud es la mitad del máximo.

Problemas adicionales

14.57 $x = \frac{x_{\text{máx}}}{\sqrt{2}}$.

14.59 a) $x(t) = (1.00 \text{ m})\text{sen}[(1.00 \text{ rad/s})t]$. b) $x(t) = (1.12 \text{ m})\text{sen}[(1.00 \text{ rad/s})t + 0.464 \text{ rad}]$. 14.61 $1.0 \cdot 10^3 \text{ N/m}$. 14.63 8.8 m/s^2 . 14.65 $n = 561$; $t = 1 126 \text{ s}$. 14.67 $f = 2.23 \text{ Hz}$. 14.69 $Q = 4.10 \cdot 10^3$. 14.71 5 060 s.

14.73 a) $T = 2 \int_{-A}^A \left[\frac{c}{2m} (A^4 - x^4) \right]^{-1/2} dx$. (b) El periodo es inversamente

proporcional a A. c) $T = BA^{(1-\alpha/2)}$, donde B es una constante. El periodo es proporcional a $A^{(1-\alpha/2)}$.

Capítulo 15: Ondas

Opción múltiple

15.1 a). 15.3 c). 15.5 d). 15.7 a).

Problemas

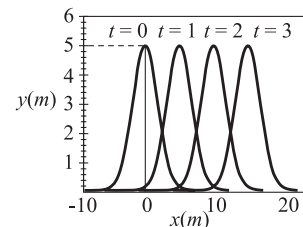
15.17 El tiempo de resolución en el aire es $t_{\text{máx}} = 0.20 \text{ m}/(343 \text{ m/s}) = 5.83 \cdot 10^{-4} \text{ s}$. El tiempo de resolución en el agua es $t_{\text{máx}} = 0.20 \text{ m}/(1 500 \text{ m/s}) = 1.33 \cdot 10^{-4} \text{ s}$. Si una persona sólo puede resolver una diferencia de tiempo de $5.83 \cdot 10^{-4} \text{ s}$, no son capaces de distinguir una diferencia de tiempo de $1.33 \cdot 10^{-4} \text{ s}$.

15.19 a) 0.00200 m. b) 6.37 ondas. c) 127 ciclos. d) 0.157 m.
e) 20 m/s. 15.21 a) La fuerza sobre el primer resorte es: $F_1 = k(-2x_1 + x_2)$. En forma semejante, la fuerza sobre el último resorte es: $F_n = k(x_{n-1} - 2x_n)$. La fuerza que actúa sobre la segunda partícula a la partícula $n - 1$ obedece: $F_2 = k(x_{j-1} - 2x_j + x_{j+1})$.

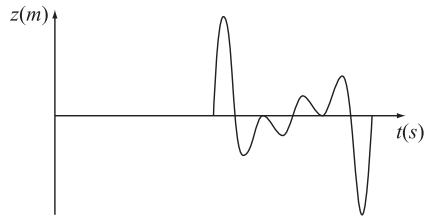
b) $2\omega \text{ sen}\left(\frac{K\pi}{2(n+1)}\right)$, para $K = 1, \dots, n$. 15.23 $y(x,t) = (8.91 \text{ mm})$

$\text{sen}(10.5 \text{ m}^{-1}x - 100.\pi t + 2.68)$. 15.25 a) 52.4 m^{-1} . b) 0.100 s.
c) 62.8 s^{-1} . d) 1.20 m/s. e) $\pi/6$. 15.27 2.30 veces más largo. 15.29 El sonido en el aire llega a Alice 0.255 segundos antes que el sonido del cable.

15.31 b)



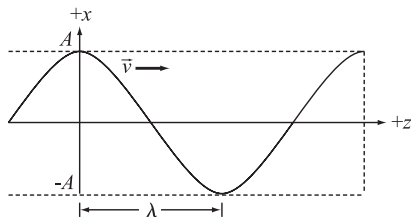
- 15.33 280 km. 15.35 360. W. 15.37 a) 419 Hz. b) 1.03 m/s².
 15.39 a) 170 m/s. b) 87 Hz. 15.41 720 N.
 15.43 $f(x,t) = (1.00 \text{ cm})\sin((20.0 \text{ m}^{-1})x + (150. \text{ s}^{-1})t)$, $g(x,t) = (1.00 \text{ cm})\sin((20.0 \text{ m}^{-1})x - (150. \text{ s}^{-1})t)$; 7.50 m/s.
 15.45



$z(t)$ no depende de la ubicación de las fuentes de onda en las orillas de la piscina.

Problemas adicionales

- 15.49 a) 69.2 Hz. b) 54.7 Hz. 15.51 a) 80.0 ms. b) 7.85 m/s.
 c) 617 m/s². 15.53 136 m/s. 15.55 0.0627. 15.57 $f_2 = f_1$; $v_2 = v_1/\sqrt{3}$;
 $\lambda_2 = \lambda_1/\sqrt{3}$. 15.59 a) 1.27 Hz. b) 1.60 m/s. c) 0.26 N.
 15.61 $v = 410. \text{ m/s}$; $v_{\text{máx}} = 6.43 \text{ m/s}$. 15.63 310 Hz.
 15.65 a)



- b) 100. m/s. c) 31.4 rad/m. d) 300. N.
 e) $D(z,t) = (0.0300 \text{ m})\cos(10.0\pi \text{ rad/m})x - 2\pi \text{ rad})(500. \text{ s}^{-1})t$.

Capítulo 16: Sonido

Opción múltiple

- 16.1 b). 16.3 c). 16.5 c). 16.7 a). 16.9 b).

Problemas

- 16.21 172 m. 16.23 a) 343 m/s. b) 20 °C. 16.25 $1.0 \cdot 10^{20} \text{ N/m}^2$; este valor es aproximadamente nueve órdenes de magnitud mayor que el valor real. Las ondas de luz son oscilaciones electromagnéticas que para su transmisión no requieren el movimiento de las moléculas del vidrio, o del éter hipotético. 16.27 6.32 Pa. 16.29 $6.2 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2$.
 16.31 2 810 m. 16.33 0.700 m. 16.35 -20.0 m. 16.37 a) 0.34 W/m².
 b) 120 dB. c) 0.046 m. 16.39 a) 2.2°. b) 10°. 16.41 a) 33 m/s. b) 1 300 Hz. 16.43 a) 50.3°. b) 26.8 km. 16.45 a) 900 Hz. b) 30 m/s. c) 17 m.
 16.47 0.78 m. 16.49 8.20 cm. 16.51 7.1 kHz.

Problemas adicionales

- 16.53 425 Hz. 16.55 2.26 s.
 16.57

Nota	Frecuencia (Hz)	Longitud (m)
Sol 4	392	0.438
La 4	440	0.390
Si 4	494	0.347
Fa 5	698	0.246
Do 6	1 046	0.164

- 16.59 80.0 dB. 16.61 6.00 m/s. 16.63 37 Hz. 16.65 109 Hz.

16.67 a) En el caso del módulo de Young, $\delta p(x,t) = Y \frac{\partial}{\partial x} \delta x(x,t)$.

En el caso del módulo de compresibilidad, $\delta p(x,t) = B \frac{\partial}{\partial x} \delta x(x,t)$.

b) $\delta p(x,t) = -B \frac{\partial}{\partial x} A \cos(\kappa x - \omega t) = B \kappa A \sin(\kappa x - \omega t)$;

la amplitud de la presión para el caso del módulo de Young es $\delta p_{\text{máx}} = Y \kappa A$ así como el caso del módulo de compresibilidad es $\delta p_{\text{máx}} = B \kappa A$. 16.69 $P_{0,00} = 2.87 \cdot 10^{-5} \text{ Pa}$, $P_{120.} = 28.7 \text{ Pa}$, $A_{0,00} = 1.11 \cdot 10^{-11} \text{ m}$, $A_{120.} = 1.11 \cdot 10^{-5} \text{ m}$.

Capítulo 17: Temperatura

Opción múltiple

- 17.1 a). 17.3 c). 17.5 d). 17.7 a). 17.9 c).

Problemas

- 17.23 -21.8 °C. 17.25 -89.4 °C. 17.27 a) 190 K. b) -110 °F.
 17.29 574.59 °F = 574.59 K. 17.31 7 780 kg/m³. 17.33 Resultado:
 250 °C. 17.35 4.1 mm. 17.37 115 °C. 17.39 3.0 m. 17.41 23 horas y
 59.4 minutos. 17.43 180 °C. 17.45 $L = 0.16 \text{ m}$. 17.47 $3.4 \cdot 10^{-2} \text{ mm}$.
 17.49 46 μm hacia abajo. 17.51 $\beta(T = 20.0 \text{ °C}) = 1.82 \cdot 10^{-4}/\text{°C}$.

Problemas adicionales

- 17.53 300 cm³. 17.55 0.204 L. 17.57 10. mm. 17.59 1.5 mm.
 17.61 6.8 mm. 17.63 10. °C. 17.65 0.30%. 17.67 9 kN.
 17.69 $\beta = 6.00 \cdot 10^{-6} \text{ °C}$. 17.71 a) 97.2 Hz. b) 93.7 Hz. c) 97.1 Hz.

Capítulo 18: Calor y la primera ley de la termodinámica

Opción múltiple

- 18.1 d). 18.3 b). 18.5 a). 18.7 b). 18.9 f).

Problemas

- 18.23 a) $9.8 \cdot 10^4 \text{ J}$. b) Si el cuerpo convierte 100% de la energía alimenticia en energía mecánica, entonces el número de rosquillas necesario es 0.094. El cuerpo suele convertir sólo 30% de la energía consumida. Esto corresponde a 0.31 de una rosquilla. 18.25 40. J.
 18.27

Material	Calor específico (KJ/kgK)	Densidad (g/cm ³)	Temperatura final °C
Plomo	0.129	11.34	22.684
Cobre	0.386	8.94	22.290
Acero	0.448	7.85	22.284
Aluminio	0.900	2.375	22.468
Vidrio	0.840	2.5	22.476
Hielo	2.22	0.9167	22.491
Agua	4.19	1.00	22.239
Vapor	2.01	$5.974 \cdot 10^{-4}$	8 350

- 18.29 280 K. 18.31 25 800 J. 18.33 130 J/(kg K); el ladrillo está hecho de plomo. 18.35 32.4 °C. 18.37 330 g. 18.39 20 000 s; 2 090 s.
 18.41 a) Nada del agua hierve. b) El aluminio se solidifica por completo. c) 45 °C. d) No, no es posible sin el calor específico del aluminio en su fase líquida. 18.43 291 g. 18.45 384 W/(m K). 18.47 5 780 K. 18.49 86.0 s. 18.51 1.8 kW. 18.53 a) 592 W/m². b) 224 K.

18.55 a) $f = 5.88 \cdot 10^{10}$ THz/K. b) $3.53 \cdot 10^{14}$ Hz. c) $1.608 \cdot 10^{11}$ Hz.
d) $1.76 \cdot 10^{13}$ Hz.

Problemas adicionales

18.57 $11 \text{ ft}^2 \text{ }^\circ\text{F h/BTU}$. 18.59 4.2 K. 18.61 $2.0 \cdot 10^{-2} \text{ W/(m K)}$.
18.63 $6.0 \cdot 10^2 \text{ W/m}^2$. 18.65 a) $7.00 \text{ }^\circ\text{C}$. b) $0.00 \text{ }^\circ\text{C}$. 18.67 $3.99 \cdot 10^{13} \text{ W}$.
18.69 87.1:1. 18.71 a) $4.0 \cdot 10^6 \text{ J}$. b) \$12.

Capítulo 19: Gases ideales

Opción múltiple

19.1 a). 19.3 c). 19.5 a). 19.7 b). 19.9 d).

Problemas

19.25 342 kPa. 19.27 a) 260 kPa. b) 8.8%. 19.29 374 K. 19.31 354 m/s.
19.33 416 kPa. 19.35 699 L. 19.37 200. kPa. 19.39 2.16 cm.
19.41 a) $3.77 \cdot 10^{-17} \text{ Pa}$. b) 260. m/s. c) 261 km. 19.43 La velocidad rcm del $^{235}\text{UF}_6$ es 1.01 veces la del $^{238}\text{UF}_6$. 19.45 28.1 kPa. 19.47
a) He: $6.69 \cdot 10^{-21} \text{ J}$; N: $1.12 \cdot 10^{-20} \text{ J}$. b) He: volumen constante: 12.5 J/(mol K) ; presión constante: 20.8 J/(mol K) ; N: volumen constante: 20.8 J/(mol K) ; N: presión constante: 29.1 J/(mol K) .
c) $\gamma_{\text{He}} = 5/3$; $\gamma_{\text{N}_2} = 7/5$. 19.49 41.6 J. 19.51 92.3 J. 19.53 a) $4.72 \cdot 10^4$ kPa. b) 189 K. 19.55 37.6 atm; 826 K. 19.57 $Q_{12} = W_{12} = 2.53 \text{ kJ}$, $W_{23} = -0.776 \text{ kJ}$, $Q_{23} = -1.94 \text{ kJ}$, $W_{31} = -1.16 \text{ kJ}$, $Q_{31} = 0$.

$$19.59 \text{ a) } \rho(h) = \rho_0 \left(1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma} \cdot \frac{Mgh}{RT_0} \right)^{\frac{1}{\gamma - 1}}; T(h) = T_0 - \frac{\gamma - 1}{\gamma} \cdot \frac{Mgh}{R}$$

b) 5.39 km, 241 K; 7.27 km, 222 K. c) 5 950 m, 293.2 K.
19.61 a) 469 m/s. b) 1 750 m/s. 19.63 Velocidad rcm: 700. m/s; velocidad media: 644 m/s.

Problemas adicionales

19.65 83.1 J. 19.67 a) $8.39 \cdot 10^{23}$ átomos. b) $6.07 \cdot 10^{-21} \text{ J}$.
c) 1 350 m/s. 19.69 a) $3.2 \cdot 10^5 \text{ Pa}$. b) 410 cm^2 . 19.71 2.16 m/mol, probablemente gas hidrógeno. 19.73 a) 17 kJ. b) 1.5 kPa. 19.75 12.2 atm. 19.77 $2 \cdot 10^{-21} \text{ J}$; la energía sólo depende de la temperatura, no de la identidad del gas. 19.79 0.560 L.

Capítulo 20: La segunda ley de la termodinámica

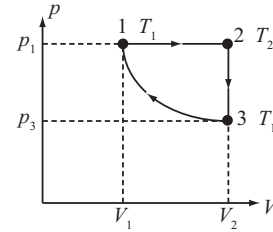
Opción múltiple

20.1 d). 20.3 a). 20.5 c). 20.7 d). 20.9 a).

Problemas

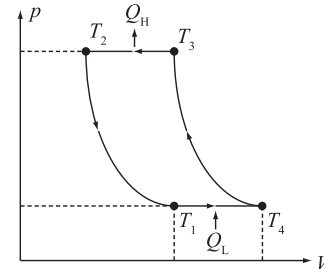
20.23 $\Delta t = 96.5 \text{ s}$.

20.25 a)



b) $W_{12} = -90.0 \text{ J}$, $Q_{12} = -225 \text{ J}$, $W_{23} = 0 \text{ J}$, $Q_{23} = 135 \text{ J}$, $W_{31} = 49.4 \text{ J}$ y $Q_{31} = 49.4 \text{ J}$. c) $\epsilon = 0.180$.

20.27 a)



b) $K = (T_4 - T_1)/(T_3 - T_2 - T_4 + T_1)$. 20.29 a) 0.7000. b) 1 430 J.
c) $Q_L = 430. \text{ J}$. 20.31 1%. 20.33 eficiencia: 0.33; $T_2 : T_1 = 2 : 3$.
20.35 48 cal. 20.37 $r = 1.75$. 20.39 a) $p_1 = 101 \text{ kPa}$, $V_1 = 1.20 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$; $T_1 = 586 \text{ K}$, $p_2 = 507 \text{ kPa}$, $V_2 = 1.20 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$; $T_2 = 2 930 \text{ K}$, $p_3 = 101 \text{ kPa}$, $V_3 = 6.00 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$; $T_3 = 2 930 \text{ K}$. b) $\epsilon = 0.288$.
c) $\epsilon_{\text{máx}} = 0.800$. 20.41 a) $\Delta S_H = -12.1 \text{ J/K}$, $\Delta S_L = 85.0 \text{ J/K}$.
b) $\Delta S_{\text{exacto}} = 0 \text{ J/K}$ (no cambia en entropía). c) $\Delta S_{\text{sistema}} = 72.9 \text{ J/K}$.
20.43 a) $\epsilon = 0.250$. b) 0. 20.45 $k_B \ln 2$. 20.47 $S_{5 \text{ arriba}} = 0$ (exacto); $S_{3 \text{ arriba}} = 3.18 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$. 20.49 $5.936 \cdot 10^{14} \text{ W/K}$.

Problemas adicionales

20.51 0.96. 20.53 5.96%. 20.55 $\Delta S = 0.0386 \text{ J/K}$. 20.57 Para dos dados se duplica la entropía y para tres dados, se triplica. 20.59 77.2 K. 20.61 $\epsilon = 1.00$. 20.63 a) $\epsilon_{\text{máx}} = 0.471$. b) $\epsilon = 0.333$. c) $T_f = 31.4 \text{ }^\circ\text{C}$.
20.65 $\Delta S_{\text{adiabática}} = 0$ (exacto), $\Delta S_{\text{isóbara}} = -4.51 \text{ J/K}$, $\Delta S_{\text{isoterma}} = 4.51 \text{ J/K}$. 20.67 $\epsilon = 0.253$.

Créditos

Fotografías

Acerca de los autores

Fotografía cortesía de Okemos Studio of Photography.

El gran panorama

Figura 1: © M. F. Crommie, C. P. Lutz, y D. M. Eigler, IBM Almaden Research Center Visualization Lab, <http://www.almaden.ibm.com/vis/stm/images/stm15.jpg>. Imagen reproducida con permiso de IBM Research, Almaden Research Center. Prohibida su reproducción sin autorización; **2:** © M. Feig, Michigan State University; **3a-b:** colaboración de STAR, Brookhaven National Laboratory; **4:** © CERN; **5:** © Vol. 54 PhotoDisc/Getty Images RF; **6:** Andrew Fruchter (STScI) *et al.*, WFPC2, HST, NASA.

Capítulo 1

Figura 1.1: NASA/JPL-Caltech/L. Allen (Harvard Smithsonian CfA); **1.3:** © Digital Vision/Getty Images RF; **1.4:** © fotografía reproducida con permiso de BIPM; **1.5:** cortesía NASA/ JPL-Caltech; **1.6:** cortesía del National Institute of Standards and Technology; **1.7a:** © Gemini Observatory-GMOS Team; **1.7b:** © BananaStock/PunchStock RF; **1.7c:** Dr. Fred Murphy, 1975, Centers for Disease Control and Prevention; **1.8c:** © Hans Gelderblom/Stone/Getty Images; **1.8d:** © Wolfgang Bauer; **1.8e:** © Edmond Van Hoorick/ Getty Images RF; **1.8f:** © Digital Vision/Getty Images RF; **1.8g:** © Gemini Observatory-GMOS Team; **1.8h:** NASA, ESA, y The Hubble Heritage Team (STScI/AURA); Hubble Space Telescope ACS; STScI-PRC05-20; **p. 23:** © Stockbyte/ PunchStock RF; **p. 34:** NASA.

Capítulo 2

Figura 2.1: © Royalty-Free/Corbis; **2.2a-b:** © W. Bauer y G. D. Westfall; **2.8:** © Ted Foxx/ Alamy RF; **2.9:** © Ryan McVay/Getty Images RF; **2.17:** © Larry Caruso/WireImage/Getty Images; **2.18, 2.20:** © W. Bauer y G. D. Westfall; **2.21:** © Royalty-Free/Corbis; **2.31-p. 65:** © W. Bauer y G. D. Westfall.

Capítulo 3

Figura 3.1: © TerryOakley/ThePictureSource; **3.3a-c:** © W. Bauer y G. D. Westfall; **3.6:** © David Madison/Photographer's Choice/Getty Images; **3.7, 3.9:** © W. Bauer y G. D. Westfall; **3.13:** © Rim Light/PhotoLink/Getty Images RF; **3.15, 3.18, 3.19:** © W. Bauer y G. D. Westfall; **3.21-3.22:** © Edmond Van Hoorick/Getty Images RF.

Capítulo 4

Figura 4.1: NASA; **4.2a:** © Dex Image/Corbis RF; **4.2b:** © Richard McDowell/Alamy; **4.2c:** fotografía de Lynn Betts, USDA Natural Resources Conservation Service; **4.3a:** © PhotoDisc/Getty Images RF; **4.3b:** © W. Cody/Corbis; **4.3c:** © Boston Globe/David L. Ryan/Landov; **4.4:** © W. Bauer y G. D. Westfall; **4.5a:** © Radius Images/Alamy RF; **4.5c:** © The McGraw-Hill Companies, Inc./Joe DeGrandis, fotógrafo; **4.5d:** © W. Bauer y G. D. Westfall; **4.5e:** © Brand X Pictures/PunchStock RF; **4.5f:** © W. Bauer y G. D. Westfall; **4.5g:** R. Stockli, A. Nelson, F. Hasler, NASA/GSFC/NOAA/USGS; **4.6-4.8:** © W. Bauer y G. D. Westfall; **4.9:** © Tim Graham/Getty Images; **4.11a-b:** © Ryan McVay/ Getty Images RF; **4.15a, 4.16a-d, 4.20:** © W. Bauer y G. D. Westfall; **4.21a:** © Digital Vision/ Getty Images RF; **4.21b:** © Brand X Pictures/ JupiterImages RF; **4.22:** utilizada con permiso de D. J. Spaanderman, ingeniero. FOM Institute for Atomic and Molecular Physics, Kruislaan 407, 1098 SJ Amsterdam, Holanda.

Capítulo 5

Figura 5.1: NASA/Goddard Space Flight Center Scientific Visualization Studio; **5.2:** © Malcolm Fife/Getty Images RF; **5.3a:** © Bettmann/Corbis; **5.3b:** © Mike Goldwater/Alamy; **5.4a:** © RoyaltyFree/Corbis; **5.4b:** © Geostock/Getty Images RF; **5.5b:** © Cre8tive Studios/Alamy RF; **5.5c:** © Creatas/PunchStock RF; **5.5d:** © Royalty-Free/ Corbis; **5.5e:** © General Motors Corp. utilizada con permiso, GM Media Archives; **5.5f:** cortesía de National Nuclear Security Administration, Nevada Site Office; **5.5g:** © Royalty-Free/Corbis; **5.5h:** NASA, ESA, J. Hester y A. Loll (Arizona State University); **5.16a-c:** © W. Bauer y G. D. Westfall.

Capítulo 6

Figura 6.1, 6.10, 6.11, 6.13a-d, 6.16: © W. Bauer y G. D. Westfall; **6.20:** © Royalty-Free/Corbis; **6.22:** © W. Bauer y G. D. Westfall; **p. 203:** © The Texas Collection, Baylor University, Waco, Texas.

Capítulo 7

Figura 7.1: © Getty Images RF; **7.2a-d:** © Sandia National Laboratories/Getty Images RF; **7.5:** reproducida con permiso de News-Gazette, Inc. El permiso no implica endoso; **7.6:** © Photron; **7.7:** © W. Bauer y G. D. Westfall; **p. 215:** © Photron; **7.9a-c, 7.13a-b:** © W. Bauer y G. D. Westfall; **7.19:** © Delacroix/The Bridgeman Art Library/Getty Images; **p. 240 (pelota de golf):** © Stockdisc/PunchStock RF; **p. 240 (pelota de basquetbol):** © PhotoLink/Getty Images RF.

Capítulo 8

Figura 8.1: NASA; **8.9:** © AP Photo; **8.10a-b:** © W. Bauer y G. D. Westfall; **8.11:** © Boeing; **8.14, 8.22a:** © W. Bauer y G. D. Westfall; **8.22b:** © Comstock Images/Alamy RF; **p. 274:** © W. Bauer y G. D. Westfall.

Capítulo 9

Figura 9.1: © EAA fotografía de Craig VanderKolk; **9.2:** © Royalty-Free/Corbis; **9.7a-b:** © Baokang Bi, Michigan State University; **9.8:** © The McGraw-Hill Companies, Inc./Mark Dierker, fotógrafo; **9.9:** © W. Bauer y G. D. Westfall; **9.13:** © Andrew Meehan; **9.14a-d, 9.15:** © W. Bauer y G. D. Westfall; **9.17:** © RoyaltyFree/Corbis; **9.25:** © Patrick Reddy/Getty Images.

Capítulo 10

Figura 10.1: © DreamPictures/Stone/Getty Images; **10.2a:** © Stock Trek/Getty Images RF; **10.2b:** © Gemini Observatory-GMOS Team; **10.13, 10.14, 10.16a-d:** © W. Bauer y G. D. Westfall; **10.17-10.18:** © The McGraw-Hill Companies, Inc./Mark Dierker, fotógrafo; **10.23-10.24:** © W. Bauer y G. D. Westfall; **10.26, 10.28a-b:** © The McGraw-

Hill Companies, Inc./Mark Dierker, fotógrafo; **10.29:** © Don Farrall/Getty Images RF; **10.30a-c:** © Otto Greule Jr./Allsport/Getty Images; **10.31:** © T. Bollenbach; **p. 341 (arriba):** © Mark Thompson/Getty Images; **10.33:** © Royalty-Free/Corbis; **10.35:** © W. Bauer y G. D. Westfall.

Capítulo 11

Figura 11.1a: © Digital Vision/Alamy RF; **11.1b:** © Guillaume Paumier/Wikimedia Commons; **11.1c:** © Skyscraper Source Media Inc. <http://Skyscraper-Page.com>; **11.2-11.6a, 11.8a, 11.12a-b:** © W. Bauer y G. D. Westfall; **11.13:** © Scott Olson/Getty Images; **11.14a-b:** © W. Bauer y G. D. Westfall; **11.20:** © Segway, Inc.; **p. 376 (arriba):** © W. Bauer y G. D. Westfall; **p. 376 (abajo):** © Creatas Images/JupiterImages RF; **p. 378 (izquierda)-(derecha):** © W. Bauer y G. D. Westfall.

Capítulo 12

Figura 12.1: © JAXA/NHK; **12.2:** © NASA/JPLCaltech/S. Stolovy (SSC/Caltech); **12.3, 12.7, 12.13a-b:** NASA; **12.14:** U.S. Geological Survey; **12.20:** cortesía de Prof. Andrea Ghez (UCLA); **12.22:** NASA; **12.27:** © Vera Rubin; **12.28a-b:** cortesía de NASA, ESA, M. J. Jee y H. Ford (Johns Hopkins University); **12.29:** X-ray: NASA/CXC/CfA/M.Markevitch *et al.*; Optical: NASA/STScI, Magellan/U.Arizona/D.Clowe *et al.*; Lensing Map: NASA/STScI; ESO WFI, Magellan/U. Arizona/D. Clowe *et al.*

Capítulo 13

Figura 13.1: © Science Source/Photo Researchers, Inc.; **13.2b:** © Royalty-Free/Corbis; **13.2d:** © Image Source/Getty Images RF; **13.5a:** © PhotoLink/Getty Images RF; **13.5b:** © Don Farrall/Getty Images RF; **13.6a:** © C. Borland/PhotoLink/Getty Images RF; **13.6b:** © BananaStock/PunchStock RF; **13.6c:** © Comstock Images/Alamy RF; **13.14:** © W. Bauer y G. D. Westfall; **13.15, 13.19, 13.24a:** © Royalty-Free/Corbis; **13.25a-c:** © W. Bauer y G. D. Westfall; **13.26:** © PhotoLink/Getty Images RF; **13.27a-d, 13.29a:** © W. Bauer y G. D. Westfall; **13.29b:** © Don Farrall/Getty Images RF; **13.29c, 13.31, 13.35:** © W. Bauer y G. D. Westfall; **13.37a-b:** © SHOTFILE/Alamy RF; **13.38:** © The McGraw-Hill Companies, Inc./ Ken Karp, fotógrafo; **13.40:** © W. Bauer y G. D. Westfall; **13.44:** © Siede Preis/Getty Images RF; **13.45:** © Royalty-Free/Corbis; **13.46a:** © Kim Steele/Getty Images RF; **13.46b:** © W. Bauer y G. D. Westfall; **13.47:** © *The Astrophysical Journal*, Fryer & Warren 2002 (Apj, 574, L65) reproducida con permiso de la AAS.

Capítulo 14

Figura 14.1a: © W. Bauer y G. D. Westfall; **14.1b:** cortesía del National Institute of Standards and Technology; **14.2-14.3, 14.12, 14.14a, 14.18a-b, 14.24:** © W. Bauer y G. D. Westfall; **14.29:** © University of Washington Libraries, Special Collections, UW 21422.

Capítulo 15

Figura 15.1: © Matt King/Getty Images; **15.2:** © Don Farrall/Getty Images RF; **15.4:** © W. Bauer y G. D. Westfall; **15.11a:** © Ingram Publishing/Alamy RF; **15.11b:** imagen cortesía de Cornell University; **15.17:** NOAA/PMEL/Center for Tsunami Research; **15.26a-d:** © W. Bauer y G. D. Westfall; **p. 512:** cortesía Vera Sazonova y Paul McEuen; **15.28a-c, p. 513a-c (abajo):** © W. Bauer y G. D. Westfall; **15.29:** M. F. Crommie, C. P. Lutz, y D. M. Eigler, IBM Almaden Research Center Visualization Lab, <http://www.almaden.ibm.com/vis/stm/images/stm15.jpg>. Imagen reproducida con permiso de IBM Research, Almaden Research Center. Prohibida su reproducción sin autorización; **15.30a-d:** imágenes cortesía de LIGO Laboratory, con apoyo de National Science Foundation; **15.31:** Henze/ NASA; **15.33a:** © W. Bauer y G. D. Westfall.

Capítulo 16

Figura 16.1: © Kristy McDonald/AP Photo; **16.3:** © Royalty-Free/Corbis; **16.5:** © R. Morely/PhotoLink/Getty Images RF; **16.7:** © Steve Allen/Getty Images RF; **16.8:** © Arnold Song y Jose Iriarte-Diaz; **16.11:** fotografía de Petty Officer 3rd Class John Hyde, U.S. Navy; **16.15, 16.19a-b:** © W. Bauer y G. D. Westfall; **16.20:** cortesía de Wake Radiology; **16.22:** cortesía de U.S. Nuclear Regulatory Commission; **16.23:** © PhotoLink/Getty Images RF; **16.24:** © Stockbyte/Getty Images RF; **16.25:** © W. Bauer y G. D. Westfall; **16.27:** © Annie Reynolds/PhotoLink/Getty Images RF.

Capítulo 17

Figura 17.1: © Antonio Fernandez Sanchez; **17.4a:** © Royalty-Free/Corbis; **17.4b:** © W. Bauer y G. D. Westfall; **17.4c:** © Digital Vision/Getty Images RF; **17.4d:** The STAR Experiments, Brookhaven National Laboratory; **17.4e:** © MSU National Superconducting Cyclotron Laboratory; **17.4f:** NASA/WMAP Science Team; **17.4g:** NOAA; **17.4h:** © ITER; **17.6:** © Siede Preis/Getty Images RF; **17.7a-b:** © Janis Research Co., Inc. www.janis.com; **17.8:** © H. Mark Helfer/NIST; **17.9:** © ITER; **17.11:** © Michigan Department of Transportation Photography Unit; **17.13a-c, 17.14, 17.16a-d:** © W. Bauer y G. D. Westfall; **17.19, 17.23:** NASA/WMAP Science Team.

Capítulo 18

Figura 18.1: © Kirk Treakle/Alamy; **18.8:** © Jed Jacobsohn/Getty Images; **18.11:** © W. Bauer y G. D. Westfall; **18.12:** NASA, ESA y J. Hester (ASU); **18.14:** © Skip Brown/National Geographic/Getty Images; **18.16a:** © W. Bauer y G. D. Westfall; **18.16b:** © Owens Corning PINK Fiberglass Insulation; **18.18:** NASA; **18.19a-b:** NASA Glenn Research Center; **18.20:** NASA Goddard Space Flight Center, Visible Earth; **18.23:** cortesía de www.EnergyEfficientSolutions.com; **18.25a-b:** NASA/IPAC/Caltech; **18.27:** © David J. Green technology/Alamy RF.

Capítulo 19

Figura 19.1: © image 100/PunchStock RF; **19.8, 19.9:** © W. Bauer y G. D. Westfall; **19.14a:** © PhotoDisc/Getty Images RF; **19.21a:** Brookhaven National Laboratory; **19.24:** The Hubble Heritage Team (AURA/STScI/NASA).

Capítulo 20

Figura 20.1a: © Frans Lemmens/Getty Images; **20.1b:** © Keith Kent/Photo Researchers, Inc.; **20.4a:** © Royalty Free/Corbis; **20.5a:** © PhotoDisc/PunchStock RF; **20.7, 20.10:** © W. Bauer y G. D. Westfall; **20.12:** © Markus Matzel/Peter Arnold, Inc.

Iconografía

Capítulo 4

Figura 4.22: figura utilizada con permiso de D. J. Spaanderman, ingeniero. FOM Institute for Atomic and Molecular Physics, Kruislaan 407, 1098 SJ Amsterdam, Holanda.

Capítulo 7

Figura 7.16: basada en información de DZero collaboration y Fermi National Accelerator Laboratory, oficina de educación.

Capítulo 17

Figura 17.4: RHIC figura cortesía de Brookhaven National Laboratory. Crédito de la imagen de la radiación del fondo cósmico de microondas: NASA/WMAP Science Team. ITER machine © ITER Organization; **Figura 17.20:** información compilada por National Oceanic and Atmospheric Administration, Brohan *et al.*, *J. Geophys. Res.*, 111, D12106 (2006); **Figura 17.21:** información del núcleo de hielo de Vostok, J.R. Petit *et al.*, *Nature* 399, 429-436 (1999); **Problema 17.49:** figura y problema basados en V.A. Henneken *et al.*, *J. Micromech. Microeng.* 16 (2006) S107-S115; **Problema 17.50:** figura y problema basados en V.A. Henneken *et al.*, *J. Micromech. Microeng.* 16 (2006) S107-S115.

Capítulo 18

Figura 18.26: (a) Concentración del dióxido de carbono en la atmósfera de 1832 a 2004. Mediciones desde 1832 a 1978 donde se utilizaron los núcleos (centros) de hielos de la Antártida: con base en información de D.M. Etheridge, L.P. Steele, R.L. Langenfelds, R.J. Francey, J.-M. Barnola y V.I. Morgan, 1998. Las mediciones de 1959 a 2004 se llevaron a la atmósfera en Mauna Loa, Hawai: con información de C.D. Keeling y T.P. Whorf, 2005; (b) Registros históricos del dióxido de carbono de Law Dome DE08, DE08-2, y DSS, *Trends: A Compendium of Data on Global Change*, Carbon Dioxide Information Analysis Center, Oak Ridge National Laboratory, Estados Unidos. Department of Energy, Oak Ridge, Tenn., Estados Unidos. Concentraciones del

dióxido de carbono de 420,000 años, extraídos de núcleos de hielo de la Antártida con información de J.M. Barnola, *et al.*, 2003.

Capítulo 19

Figura 19.21 (b) y (c): información cortesía de STAR collaboration.

Capítulo 20

Figura 20.13: información de la imagen cortesía de Steve Chu, secretario de energía estadounidense.

Apéndice B

Fuentes de información: David R. Lide (ed.), Norman E. Holden en *CRC Handbook of Chemistry and Physics*, 85a. edición, versión en línea. CRC Press. Boca Raton, Florida (2005). Sección 11, tabla de isótopos.

Apéndice C

Fuentes de información: <http://physics.nist.gov/PhysRefData/PerTable/periodic-table.pdf>
<http://www.wikipedia.org/andGeneralic,Eni.°EniG>.

Periodic Table of the Elements.” 31 de marzo de 2008. KTF-Split. <<http://www.periodni.com/>>.

Tablas al final del libro

Constantes fundamentales de National Institute of Standards and Technology, <http://physics.nist.gov/constants>.

Otras constantes útiles de National Institute of Standards and Technology, <http://physics.nist.gov/constants>.

Índice

A

- Acción y reacción, pares de fuerzas de, 109
- Aceleración, 36, 73, 108, 459
 - angular, 286, 313, 335
 - constante, 294
 - centrífuga, 293
 - centrípeta, 287-289, 313, 388
 - constante
 - ecuaciones cinemáticas del movimiento con, 48
 - movimiento lineal con, 294
 - gravitacional, 289
 - instantánea, 43
 - lineal, 313
 - media, 43
 - por la fuerza de gravedad, 51
 - radial, 286
 - tangencial, 286, 313
- Acelerador
 - protón-antiprotón, 226
 - protón-protón, 226
- Aceleradores de partículas, 541
- Acondicionador de aire, 652
- Acoplamiento
 - longitudinal, 494
 - transversal, 494
- Afelio, 396
- Agujero negro, 382, 389, 399
- Aire
 - densidad del, 122
 - resistencia del, 83
- Aislamiento térmico, 599
- Ajuste
 - de eficiencia energética a las estaciones, 653
 - dinámico de estabilidad, 369, 370
- Alcance
 - de un proyectil, 78
 - definición de, 79
 - máximo de un proyectil ideal, 79
- Altas energías, colisiones de partículas a, 226
- Altura máxima de un proyectil, 78
- Ambiente con temperatura, 582
- Amortiguador de masa, 355
- Amortiguamiento, 470
 - cero, límite de, 476
 - constante de, 470
 - crítico, 473-475
 - fuerza de, 173, 470
 - grande, 473, 474
 - pequeño, 471, 473-475
 - límite de, 476
 - rapidez angular de, 474
 - valores pequeños de la constante de, 470
- Amplitud de
 - la oscilación, 457, 496
 - un resorte, 181
- Angstrom Å, 418
- Ángulo
 - azimutal, 260
 - de ataque, 437
 - de fase, 458, 459
 - de Mach, 541
 - polar, 260
- Antimateria, 1
- Antinodo(s), 510, 543
- Antiprotones, 637
- Ansatz, 471, 473, 474
- Ápice de la trayectoria, 77
- Aproximación de ángulos pequeños, 465, 469, 480
- Aristóteles, 108
- Armónico, el, 511
- Arquímedes, 430
 - método de, 430, 432
- Asistencia gravitacional, técnica de, 394
- Atmósfera
 - energía térmica en la, 582
 - terrestre, 623, 636
- Átomo(s), 418, 420
 - diámetro de un, 418
 - estructura electrónica del, 420
 - ionizados, sistema de, 420
 - propiedades químicas de un, 420
 - subestructura de los, 418
- Atractor punto, 480
- Automóviles híbridos, 662
- Ausencia de calor, 557
- Avión supersónico, 542

B

- Backspin (giro hacia atrás), 438
- Barómetro de mercurio, 426
- Barrera radiante, 602
- Bel (B), 529
- Big Bang, 406, 419, 559, 573, 672
- Billar de Sinai, sistemas de, 228
- Biomasa, 141, 142
- Bomba de calor, 653
 - coeficiente de desempeño de una, 653
 - máximo coeficiente de desempeño de una, 656
- Brazo de palanca, 327
 - de longitud cero, 356
- Buckminsterfulereno, moléculas de, 123
- Buckyballs*, 123
- Buckyesferas*, 419
- Búsqueda por ondas gravitacionales, 514

C

- Caballo de potencia (hp), 158
- Cadena
 - del cálculo diferencial e integral, regla de la, 153
 - regla de la, 285
- Caída libre, 51
 - del proyectil, 76
- Cálculo diferencial e integral, regla de la cadena del, 153
- Calidad de un oscilador, 476
- Calentamiento
 - de la tierra, 571
 - global, 9, 600, 603
- Calor, 178, 212, 220, 557, 582. *Véase también*
 - Energía térmica
 - ablativo, escudo de, 599
 - definición de, 583
 - específico, 589, 590
 - molar, 590
 - molar específico con
 - presión constante, 628
 - volumen constante, 627, 628

- negativo, 584
- positivo, 584
- protección pasiva del, 599
- Calor latente de
 - fusión, 592, 593, 594
 - vaporización, 592, 593
 - del agua, 596
- Caloría, 583, 584
 - alimenticia (Cal), 144
 - de la comida, 584
 - definición de, 583
- Calorímetro, 591
- Cambio(s)
 - de fase, 592
 - de líquido a gas, 561
 - de frecuencia, 535
 - de momento
 - definición de, 208
 - física del, 208
 - en la energía interna de un sistema cerrado, 586
 - en la entropía, 669-671
 - de un sistema, 666
 - en la velocidad, 36, 73
 - en momento, 247
- Camino libre medio de un gas, 638, 639
- Cancelación activa de ruido, 535
- Cantidad
 - escalar, 24
 - vectorial, 24
- Cantidades
 - angulares, 293
 - lineales, 293
- Caos, 480
 - ciencia del, 229
 - cuántico, 513
 - física del, 228
 - teoría del, 229
- Capacidad calorífica, 589, 590
 - unidades para la, 589
- Carrera de
 - admisión, 658
 - compresión, 658
 - escape, 658
 - potencia, 658
- Categorización de la eficiencia energética (EER, por sus siglas en inglés), 653
- Celdas fotovoltaicas, 142
- Centrifugadoras de gas, 288
- Centro
 - de gravedad, 248
 - de momento, 252
 - geométrico, 263
- Centro de masa, 36, 247, 264
 - de un conjunto de objetos, 250
 - de un objeto
 - bidimensional, 264
 - unidimensional, 265
 - definición de, 247
- ímpetu del, 251, 252
- rapidez lineal del, 313
- rotación alrededor del, 256
- segunda ley de Newton para el, 251, 252
- superposición del movimiento del, 256
- Cero absoluto de temperatura, 558
- Ciclo de
 - Atkinson, 663
 - motor de, 663
 - Carnot, 654
 - diesel, 662
 - Otto, 658
 - eficiencia del, 659
 - motor de, 663
- Ciencia
 - de la complejidad, 3
 - del caos, 229
- Cifras significativas, 10
 - número de, 10
 - reglas sobre el uso de, 10
- Cinemática, 36
- Cinturón de Kuiper, 385, 386
- Coefficiente de
 - arrastre, 122
 - desempeño de
 - un refrigerador, 653
 - una bomba de calor, 653
 - dilatación
 - adiabática, 630, 631
 - lineal, 564
 - volumétrica, 569
 - fricción estática, 119
 - restitución, 227
- Coefficiente de expansión
 - lineal, 564
 - volumétrica, 569
 - para el agua, 570
- Cogeneración, 657
- Colisión
 - elástica, 211, 216, 252, 253
 - definición de, 212
 - elasticidad de una, 227
 - inelástica, 210, 252
 - parcialmente inelástica, 252
 - totalmente inelástica, 210, 220, 252
- Colisionador de Iones Pesados Relativistas en Brookhaven, 445
- Colisiones
 - bidimensionales, 216
 - de partículas a altas energías, 226
 - entre iones pesados de núcleos de oro, 637
 - entre objetos, 206
 - parcialmente inelásticas, 227
 - tridimensionales, 216
 - ultrarelativistas de iones pesados, 16
- Componentes
 - de un vector de desplazamiento, 25
 - método de, 26
- Compresión, 101, 421, 525, 585
 - de las ondas sonoras, 536
 - proceso de, 562
 - proporción de, 659
- Computadora cuántica, 2
- Concepto de (l)
 - entropía, 666
 - estabilidad, 366
 - estados microscópicos, 670
 - fuerza neta, 105
 - inercia, 108
 - momento angular, 400
 - potencia, 157
 - temperatura, 557
- Condensados de Bose-Einstein, 1, 421, 594
- Condición
 - 1 para el equilibrio estático, 355
 - 2 para el equilibrio estático, 356
- Condiciones iniciales, dependencia sensible a las, 480
- Conducción, 596
- Conductividad térmica, 596
 - unidades para la, 596
- Conjunto
 - de objetos, centro de masa de un, 250
 - ortonormal de vectores, 147
- Cono de Mach, 541
- Conservación
 - básica de la energía, 588
 - de la energía, 394
 - cinética, ecuación para, 212
 - ley de, 173, 178
 - mecánica total, 467
 - energética de la primera ley de la termodinámica, 664
 - leyes de la, 8
 - tercera ley de, 338
- Conservación del momento, 206, 226
 - angular, 339, 400
 - ley de, 338
 - ley de, 211
 - lineal
 - principio de, 211
 - total, ley de, 210
 - total, ley de, 220
- Constante
 - aditiva, 174
 - de aceleración gravitatoria, 382, 388, 389, 391
 - de amortiguamiento, 470
 - valores pequeños de la, 470
 - de arrastre, 121, 122
 - de Boltzmann, 619, 624, 670
 - de gravitación universal, 383
 - de Planck, 343
 - de resorte, 185, 456, 458, 467
 - de Stefan-Boltzmann, 602
 - del resorte, 154
 - de la fuerza gravitacional, 391
 - universal de los gases, 617
- Consumo de energía, 141

- Contacto térmico, 563
 Convección, 582, 596, 599
 Convención de notación, 11
 Coordenada(s)
 cartesianas, 280, 281
 integral de volumen en, 261
 sistema de, 24, 72, 259, 261
 sistema tridimensional de, 72
 cilíndricas, 260, 261, 316, 317
 esféricas, 260, 261, 318
 integral de volumen en, 261
 ortogonales, sistema tridimensional de, 259, 261
 polares, 280, 281
 para el movimiento circular, 280
 radial, 318
 sistema tridimensional de, 24
 unidimensionales, sistema de, 24
- Corriente
 alterna, 456
 del golfo, 600
- Corte, 421
- Cosmología heliocéntrica, 395
- Cuanto de
 momento angular, 343
planck del momento angular, 343
- Cresta de onda, 493
- Cristal de cuarzo, 456
- Cuark *top*, 226
- Cuarta ley empírica de los gases, 617
- Cuerda(s)
 sin masa, 109, 112, 115
 teorías de, 514
- Cuerpo(s)
 en flotación, 430
 extensos, rotación de, 313
 negro, 602
 rígido, 337
- Curvas
 balísticas, 83
 de energía potencial, 191
- Curvatura, 190
 negativa, 190
 positiva, 190
- D**
- Decibel (dB), 529
- Definición de
 alcance de un proyectil, 79
 calor, 583
 caloría, 583
 cambio de momento, 208
 centro de masa, 247
 colisión elástica, 212
 distancia, 42
 energía, 142
 cinética, 143, 144
- fuerza, 102
 conservativa, 171
 gas, 615
 longitud, 14
 momento, 206
 angular, 335
 momento, 252, 258
 trabajo, 145
 vector de aceleración, 43
 viscosidad, 442
- Definición macroscópica de temperatura, 558
- Deformación, 220, 421
 unitaria, 421
- Deformaciones de los sólidos, 421
- Demonio de Laplace, 229
- Densidad
 de masa, 259, 315
 de un objeto, 248
 lineal, 265
 del agua, 425
 del aire, 122, 428
- Dependencia sensible a las condiciones iniciales, 480
- Depósito térmico, 652, 654, 656, 664
- Desaceleración de un objeto, 44
- Desmagnetización nuclear adiabática, 562
- Desplazamiento, 37
 angular, 281, 332
 Doppler, 536
 lineal, 281
 vector de, 24, 148
- Detectores de ondas gravitacionales, 514
- Diagrama de
 cuerpo libre, 106
 esfuerzo-deformación, 424
- Diagramas pV , 585
- Diamante, 419
- Diámetro de un átomo, 418
- Diferencia de temperatura, 557
- Difusión, 600
- Dilatación térmica, 563
- Dimensiones, 73
- Dinámica, 101
 de fluidos, 418
 de las colisiones, 211
 no lineal, 2, 480
- Dióxido de carbono, 604
- Dirección de un vector, 23, 25
- Dispositivo de ultrasonido Doppler, 540
- Distancia, 38
 definición de, 42
- Distribución de
 decaimiento en el tiempo de ley de potencias, 229
 energía cinética de
 Maxwell, 636
 Maxwell-Boltzmann, 636
- rapidez de
 Maxwell, 634, 635
 Maxwell-Boltzmann, 634
- Dos
 dimensiones, trayectoria de un proyectil en, 76
 vectores, producto escalar de, 146
- Drives* (golpes de larga distancia), 438
- E**
- Ecuación
 de Bernoulli, 435, 436-439, 440
 de continuidad, 435, 439, 444
 de onda, 498
 de Stefan-Boltzmann, 602
 diferencial, 457
 parcial, 499
 para conservación de la energía cinética, 212
- Ecuaciones cinemáticas del movimiento con aceleración constante, 48
- Efecto(s)
 Bernoulli, 436-438
 de arrastre, 81
 de compresión-descompresión, 437
 de desechos de energía, 654
 de disminución de la rapidez, 470
 de dispersión, 638
 de invernadero, 604
 de la gravedad, 81
 de retroceso, 253, 256
 de umbral, 630
 Doppler, 536, 562
 para ondas de ultrasonido, 539
 fotoeléctrico, 1
 invernadero, 572
 Magnus, 438
 mariposa, 2
- Eficiencia
 de los motores térmicos, 650
 de un motor, 652
 diesel, 662
 del ciclo de Otto, 659
 del motor de Carnot, 654-656
 energética, 141
 a las estaciones, ajuste de, 653
 máxima de una planta de energía eléctrica, 657
- Eje(s)
 de rotación, 284, 314
 paralelos, teorema de los, 320
- Einstein, Albert, 1
- Elasticidad de
 sólidos, 526
 una colisión, 227
- Electrón-volt (eV), 144, 626
- Electrones, 343, 420
- Elipse, 396
 excentricidad de la, 396

- semieje
 - mayor de la, 396
 - menor de la, 396
 - Elongación máxima de un resorte, 181
 - Emissiones de gas de invernadero, 660
 - Emisividad, 602
 - Empuje del cohete, 258
 - Energía
 - conservación de la, 394
 - consumo de, 141
 - de biomasa, 664
 - de deformación, 186
 - de la onda, 505
 - de vibración, 186
 - definición de, 142
 - dentro de un sistema aislado, 177
 - efectos de desechos de, 654
 - eléctrica, 142, 186
 - fuentes de, 169
 - eólica, 664
 - geotérmica, 664
 - interna
 - de excitación, 172, 173, 220
 - del sistema, 583
 - nuclear, plantas convencionales de, 142
 - oscura, 407, 574, 672
 - pérdida de, 475, 476
 - potencial, 141, 169, 170, 172, 190, 292
 - bidimensional, 367
 - curvas de, 191
 - gravitacional, 169, 170, 174, 391, 392
 - principio de equipartición de, 628
 - química, 141, 173, 186
 - solar, 141, 142, 664
 - térmica, 141, 173 178, 557, 583. *Véase también* Calor
 - en la atmósfera, 582
 - transferencia de, 652
 - total, 177, 187, 190, 292
 - transferencia de, 583
 - unidad de, 143
 - y calor combinado (ECC), 657
 - Energía cinética, 141, 143, 172, 190, 292
 - de la partícula alfa, 226
 - de movimiento lineal, 322
 - de rotación, 314, 322, 340
 - de un objeto en movimiento, 314
 - de un satélite, 402
 - definición de, 143, 144
 - del objeto, 392
 - ecuación para conservación de la, 212
 - final, 222
 - inicial, 222
 - media de moléculas de aire, 626
 - media del gas ideal, 624
 - teorema del trabajo y la, 149, 150
 - total inicial, 222
 - total final, 222
 - Energía mecánica, 141
 - definición de, 177
 - ley de conservación de la, 177, 178
 - total, 467
 - conservación de la, 467
 - Enfriamiento con láser, 562
 - Entropía, 650, 654, 666
 - cambio de la, 669-671
 - concepto de, 666
 - de un sistema, cambio en la, 666
 - del universo, 672
 - Enunciación de
 - Clausius para la segunda ley de la termodinámica, 665
 - Kelvin-Planck sobre la segunda ley de la termodinámica, 664
 - Equilibrio
 - dinámico, 107
 - estabilidad de una situación de, 366
 - estable, 366
 - estático, 107, 355-356
 - sobre un plano inclinado, 298
 - indiferente, 367
 - inestable, 367
 - marginalmente estable, 367
 - metaestable, 191
 - procesos de, 651
 - térmico, 557, 563, 582, 651, 666
 - termodinámico, 650
 - Escala(s)
 - de longitud
 - para objetos, 14
 - típicas, 444
 - de temperatura
 - Celsius, 558
 - Fahrenheit, 558
 - Kelvin, 558
 - de velocidad típicas, 444
 - humanas de tiempo, 16
 - logarítmica para medir las intensidades del sonido, 529
 - Escudo de calor ablativo, 599
 - Esfuerzo
 - cortante, 421
 - de ruptura, 424
 - desviatorio, 421
 - en tensión, 421
 - hidrostático, 421
 - último, 424
 - Espacio
 - de fase, 479
 - unidimensional, 24
 - Esperanza de vida, 16
 - Espumas, 421
 - Estabilidad
 - ajuste dinámico de, 369, 370
 - concepto de, 366
 - de una estructura, 366
 - de una situación de equilibrio, 366
 - Estado(s)
 - de la materia, 592
 - gaseoso, 592, 594
 - líquido, 592, 594
 - microscópicos, concepto de, 670
 - sólido, 592, 594
 - vinculados, 191
 - Esterradián, 12
 - Estiramiento, 421
 - Estrategia para resolver problemas, 17
 - Estrella
 - de neutrones, 339, 340
 - masiva, 339
 - Estructura
 - electrónica del átomo, 420
 - estabilidad de una, 366
 - Excentricidad de
 - cero, 396
 - la elipse, 396
 - Exceso de presión, 525
 - Excitación, energía interna de, 220
 - Expansión, 585
 - adiabática, 655
 - de Taylor, 176
 - libre, 589
 - volumétrica para el agua, coeficiente de, 570
 - Expansión térmica, 563
 - del agua, 569
 - lineal, 564
 - superficial, 567
 - volumétrica, 569
 - Explosión de supernova, 339
 - Explosiones de supernovas, 419
 - Exponente, 9
- ## F
- Factores
 - de conversión para las unidades de energía, 583
 - que afectan al movimiento de proyectiles reales, 83
 - Fase(s)
 - de la materia, 592
 - de la onda, 497
 - espacio de, 479
 - Femtómetro (fm), 15
 - Física
 - atómica y nuclear, 192
 - cuántica, relación de incertidumbre en la, 229
 - de los gases, 615
 - de ondas, 514
 - de partículas, 105, 226
 - del cambio de momento, 208
 - del caos, 228
 - nuclear, 105
 - principios de simetría de la, 8
 - Fisión nuclear, 142

- Fluido(s), 420, 425
 compresibles, 427
 en movimiento, 418, 434
 en reposo, 425
 ideal, 434
 incompresible, 427, 428
 no viscoso, 434
 viscosidad de un, 442
 volumen del, 442
- Flujo
 de aire, 418
 incompresible, 434
 laminar, 434, 444
 a turbulento, transición de, 434, 444
 línea de, 434
 no laminar, 434
 no rotacional, 434
 turbulento, 434, 444
- Flyrid*, 340
- Forma de la resonancia, 478
- Fórmula(s) de
 conversión entre las diversas escalas de temperatura, 560
 Einstein, 142
 presión barométrica, 427
 suma trigonométrica, 510
- Fotones, 343
- Fracción molar, 623
- Frecuencia(s), 284, 461
 angular, 284, 496, 497
 de la pulsación, 535
 de oscilación del microchip, 605
 de resonancia, 511
 en las estructuras arquitectónicas, 478
 de un péndulo, 465
 del sonido, 532, 536
 fundamental, 511
- Frenos regenerativos, 663
- Frente de onda, 496
- Fricción, 102, 108
 cinética, 118
 coeficiente de, 118, 126
 fuerza de, 119
 magnitud de la fuerza de, 118
 estática, 118, 296, 297, 298
 coeficiente de, 119
 magnitud de la fuerza de, 119
 fuerza de, 108, 118, 119, 172
- Fuente(s)
 coherentes de sonido, 533
 de energía eléctrica, 169
 supersónica, 541
- Fuerza(s)
 central, 400
 centrífuga, 291, 293
 centrípeta, 289-291, 397
 cero, 154
 conservativa, 171
 definición de, 171
 trabajo realizado por una, 171, 173
 conservativas, 148
 de acción y reacción, pares de, 109
 de amortiguamiento, 173, 470
 de arrastre, 121, 437
 de compresión, 103
 de contacto, 101
 de Coulomb, 293, 389
 de flotación, 430
 de fricción, 297, 298
 de gravedad, 291, 293, 297, 298, 382, 389, 391
 aceleración por la, 51
 de la resistencia del aire, 173
 de reposición, 154
 de resorte, 102, 153, 176, 456
 definición de, 102
 deformante, 421
 electromagnética, 102
 externa neta, 108
 externas, sistema sin, 211
 fundamentales de la naturaleza, 102, 382
 gravitacional, 102, 105, 149
 constante del resorte de la, 391
 vector de, 103
 interatómicas, 421
 internas, 109
 lineales de reposición, 154
 media, 208, 209
 molecular, 175
 multiplicador de, 112
 neta, 105, 106, 107
 cero, 357
 concepto de, 105
 trabajo neto hecho por una, 148
 no conservativa, 171, 173
 normal, 102, 106
 nuclear
 débil, 102
 fuerte, 102
 redirección de, 115
 restauradora, 456
 superposición de las, 384
 tipos de, 101-103
 trabajo realizado por una, 332
 vector de, 148
- Fuerza de fricción, 102, 108, 118, 119, 149, 172, 437
 cinética, 119
 magnitud de la, 118
 estática, magnitud de la, 119
 velocidad lineal de la, 122
- Fullerenos*, 419
- Función
 cuadrática del tiempo, 47
 lineal del tiempo, 47
- Funcionamiento en ciclo del motor, 652
- Funciones trigonométricas, teorema de suma para, 534
- Fusión, 592
 calor latente de, 592, 593
 de hidrógeno en helio, 562, 563
- ITER, reactor de, 562, 563
 nuclear, 142
 en el centro del Sol, 638
 proceso de, 562
- ## G
- Galileo, 108
- Gas, 420
 definición de, 615
 ideal, 615
 energía cinética media del, 624
 teoría cinética de un, 615
 mol de un, 616
 moléculas de, 615
 presión de un, 615
 volumen de un, 615
- Gases
 constante universal de los, 617
 de invernadero, 604
 diatómicos, 627
 ideales, ley de los, 617-620, 622
 monoatómicos, 626
 nobles, 626
 poliatómicos, 627
 propiedades macroscópicas de los, 623
- Geles, 421
- Giróscopos, 338
- Global Positioning System* (GPS), 14
- Grado(s), 281
 celsius (°C), 559
- Grados de libertad, 628, 670
 de rotación, 628, 629
 de traslación, 628, 629
 internos, 629
 vibratorias, 630
- Gráficas de presión contra volumen, 585
- Grafito, 419
- Gran Colisionador de Hadrones, 4
- Granjas solares, 142
- Gravedad, 102
- ## H
- Helio líquido, 562
- Hertz (Hz), 284
- Hipótesis de Milankovitch, 572
- Hooke, Robert, 154
- ## I
- Ímpetu
 del centro de masa, 251, 252
 relativo de un objeto, 252
- Impulso, 208
- Incompresibilidad de los líquidos, 420, 426, 427
- Inercia rotacional, 314

- Inflexión, punto de, 191
 Instrumentos de viento, 543
 Integración, orden de, 261
 Integral
 - de volumen en coordenadas
 - cartesianas, 261
 - esféricas, 261
 - tridimensional de volumen, 259, 260, 261, 315
- Integrales multidimensionales, 260
 Intensidad
 - de una onda, 506, 529
 - subjettiva sonora, 532
- Interacción
 - electromagnética, 382
 - electrostática, 123
 - gravitacional, 102
 - entre dos masas puntuales, 382, 387
- Intercambio de momentos de los objetos, 214
 Interferencia
 - constructiva, 509, 533
 - de dos ondas en el tiempo, 534
 - de ondas, 509
 - destruictiva, 509, 533, 535
 - espacial de ondas sonoras, 533
- Iones pesados, colisiones ultrarrelativistas de, 16
 Isoterma, 589
 Isótopos, 420
- J**
- Joule, 143, 583
 Joules por kelvin, 589
- K**
- Kelvin (K), 559
 Kilocaloría, 584
 Kilogramo (kg), 11
- L**
- Laplace, Pierre-Simon, 229
 Large Hadron Collider (LHC), 226
 Leibniz, Gottfried, 106
 Lentes gravitacionales, 5, 405
 Ley cero de la termodinámica, 558, 563
 Ley de(l)
 - Avogadro, 616, 617, 618, 622
 - Boyle, 616, 618-620
 - Charles, 616, 618-620
 - cuadrado inverso para las intensidades de una onda esférica, 506
 - Dalton, 622
 - Gauss, 389
 - Gay-Lussac, 617, 619
 - gravitación de Newton, 383, 390, 391
 - Hagen-Poiseuille, 443
 - Hooke, 154, 176, 391
 - la fuerza para la fuerza de un resorte, 457
 - la inercia, 108
 - los gases ideales, 617-620, 622
 - Mariotte, 616
 - potencias, distribución de decaimiento en el tiempo de, 229
 - Snell, 59
- Ley de conservación
 - de la energía, 173, 178, 435, 467, 582
 - mecánica, 177, 178
 - de momento, 211
 - del momento total, 256
 - para el momento angular, 178
 - para el momento lineal, 178
 - para la carga neta, 178
 - primera, 178
- Ley de conservación del momento
 - angular, 338, 397
 - para el movimiento planetario, 400
 - lineal total, 210
 - total, 220
- Leyes
 - de conservación, 178
 - de Kepler, 395, 397
 - de la conservación, 8
 - del movimiento, 101
 - de Newton, 104
 - planetario, 395
- LIGO (*Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory*), 514
- Límite(s)
 - de amortiguamiento
 - cero, 476
 - pequeño, 476
 - de elasticidad del resorte, 154
 - de proporcionalidad, 424
 - del continuo, 496
 - del oído humano, 532
 - elástico, 421
- Línea(s)
 - de flujo de un fluido, 444
 - velocidad a lo largo de una, 73
- Líquido, 420
- Longitud
 - de onda, 496, 497, 511, 533
 - de la radiación electromagnética, 573
 - definición de, 14
 - del arco, 282, 313
- Luz, 493
 - velocidad de la, 15
- M**
- Magnetorresistencia gigante, 2
 Magnitud
 - de la fuerza de fricción estática, 119
 - de la velocidad angular, 293
 - de un vector, 23
 - del momento, 207
 - angular, 336
 - de torsión, 327
- Mano derecha, regla de la, 72
 Manómetro, 426
 - de tubo abierto, 427
- Mantis, 9
 Máquina de Atwood, 116, 331, 334
 Masa, 15, 104, 105
 - atómica
 - número de, 420
 - unidad de, 225
 - de un conjunto de objetos, centro de, 250
 - de un objeto, 104
 - densidad de, 248
 - densidad de, 315
 - gravitacional, 104
 - inercial, 104, 108
 - lineal, densidad de, 265
 - terrestre, 388
- Materia
 - en estado granular, 594
 - luminosa, 405
 - no luminosa, 405
 - ordinaria, 574
 - oscura, 5, 16, 405, 574, 672
 - invisible, 406
- Mayores temperaturas medidas, 559
 Máximo coeficiente de desempeño de una
 - bomba de calor, 656
- Mecánica, 36
 Medición, 9
 - de la temperatura, 558, 563
- Medio granular, 420
 Megatón de TNT (Mt), 144
 Menores temperaturas medidas, 559
 Método(s) de
 - Arquímedes, 430, 432
 - componentes, 26
 - elementos finitos, 513
- Metro (m), 11
 Metrología, 14
 Micrómetro, 15
 Microscopio de barrido de efecto túnel, 3, 514
 Microsiglo, 16
 Milímetros de mercurio (mmHg), 427
 Misión WMAP, 406
 Modelado hidrodinámico, 445
 Modelos por computadora, 418, 445
 Módulo
 - de compresibilidad, 526, 527
 - de corte, 422
 - de elasticidad, 421, 422
 - de rigidez, 422
 - de Young, 422, 423, 424, 526, 527
 - elástico, 526
 - volumétrico, 422
- Mol, 419
 - de un gas, 616

- Moléculas de
aire, energía cinética media de, 626
buckminsterfulereno, 123
gas, 615
- Momento(s), 206
cero, 214
conservación del, 206, 226
de inercia, 314-321, 335, 340
de los objetos, intercambio de, 214
del objeto, vector de, 216
definición de, 206
cambio de, 208
física del cambio de, 208
ley de conservación de, 211
lineal, 206, 207
principio de conservación del, 211
total, ley de la conservación del, 210
magnitud del, 207
total, ley de conservación del, 220
vector del, 206
vectores
finales de, 211, 212
iniciales de, 211, 212
- Momento angular, 207, 335-340
concepto de, 400
conservación del, 339, 400
cuanto de, 343
Plank del, 343
definición de, 335
ley de conservación del, 397
magnitud del, 336
- Momento de torsión, 340, 356
antihorario, 328, 332, 357, 360
horario, 328, 332, 357, 360
neto, 328
cero, 357
externo, 337
regla de la mano derecha para el, 327
trabajo realizado por un, 332
- Momento, 251
cambios en, 247
centro de, 252
definición de, 252, 258
- Motor
de Carnot, 654, 665
eficiencia del, 654-656
proceso termodinámico del, 654
de ciclo
de Atkinson, 663
de Otto, 663
de combustión interna de cuatro ciclos, 658
diesel, eficiencia de un, 662
ideal, 654
térmico, 652
- Motores
diesel, 662
térmicos, eficiencia de los, 650
- Movimiento
bidimensional, 36, 72, 73-75
browniano, 1
caótico, 228, 480
circular, 298
coordenadas polares para el, 280
de un objeto, 280
de Newton, leyes del, 104
de onda en una cuerda, 500
de proyectil, 72
de proyectiles reales, factores que afectan al, 83
de rodadura, 322
de rotación, segunda ley de Newton para el, 328
de traslación, 36
del centro de masa, superposición del, 256
en un plano, 36
leyes del, 101
lineal
con aceleración constante, 294
energía cinética de, 322
no amortiguado, 472
ondulatorio, 493
oscilatorio, 456, 459
pendular, 291
periódico, 456
repetitivo, 456
sin rotación, 36
sinusoidal, 458
tridimensional, 74
unidimensional, 36, 37
- Movimiento armónico
amortiguado, 470-472
forzado, 477
simple, 456, 457, 459
- Muerte térmica, 672
- Multiplicación
con notación científica, 9
de un vector por un
escalar negativo, 27
escalar positivo, 27
- Multiplicador de fuerzas, 112
- N**
- Nanociencia, 3, 513
Nanotecnología, 3, 123, 419, 513
Nanotubo de carbono, 419
National Institute of Standards and Technology (NIST), 14
Naturaleza, fuerzas fundamentales de la, 102
Neutrones, 343
Newton (N), 104
Newton, Isaac, 101, 106
Nitrógeno líquido, 562
Nivel de sonido relativo, 530
Nodo(s), 510, 543
Notación
científica, 9
división con, 10
multiplicación con, 9
de componente, 27
- Núcleos
atómicos, rapidez del sonido en, 541
de oro, colisiones entre iones pesados de, 637
- Número(s)
adimensional puro, 444
de Avogadro, 419, 616, 617, 627, 672
de cifras significativas, 10
de masa atómica, 420
de moléculas de Avogadro, 670, 671
de onda, 497
de Reynolds, 444
Mach, 542
muy grandes, 9
muy pequeños, 9
- O**
- Objeto(s)
bidimensional, centro de masa de un, 264
centro de masa de un conjunto de, 250
colisiones entre, 206
densidad de masa de un, 248
desaceleración de un, 44
en movimiento
con velocidad constante, 107
energía cinética de un, 314
en reposo, 107
energía cinética del, 392
ímpetu relativo de un, 252
masa de un, 104
movimiento circular de un, 280
puntual, 36
ubicación puntual de un, 36
unidimensional, centro de masa de un, 265
temperatura de un, 557
vector de momento del, 216
- Ola del estadio, 494
- Onda(s), 493
bidimensionales, 502
circulares, 493, 502
de compresión, 504
de interferencia, 510
de presión, 504
longitudinal, 513
de puerto, 503
de radio, 493
de superficie, 503
de ultrasonido, 529
efecto Doppler para, 539
electromagnéticas, 493
transmisión de, 602
en agua, 494
en círculos concéntricos, 502
en esferas, 502
en una cuerda, 526
esférica(s), 502
tridimensional, 503

- estacionaria(s), 510, 511
 - en cuerdas tensas, 510
 - unidimensionales, 510
 - expansivas, 541
 - gravitacionales, 514
 - búsqueda por, 514
 - longitud de, 496, 497
 - longitudinal, 495
 - luminosas, 493
 - P* primarias, 504
 - planas, 503
 - S* secundarias, 504
 - sinusoidal, 496, 497
 - sísmicas, 494, 495, 504
 - sonora(s), 493, 494, 513, 525
 - interferencia espacial de, 533
 - resonante, 543
 - superposición de pulsos de, 508
 - transversal, 495
 - transversales, 504
 - tridimensionales, 502, 533
 - unidimensionales, 502
 - Orden de integración, 261
 - Órbita(s)
 - geostacionaria, 403
 - geosincrónicas, 403
 - Oscilación
 - amplitud de la, 496
 - armónica sin amortiguamiento, 479
 - del microchip, frecuencia de, 605
 - Oscilaciones, 493
 - forzadas, 477
 - Oscilador
 - calidad de un, 476
 - sobreamortiguado, 473
 - Osciladores acoplados, 494
 - Oxígeno líquido, 562
- P**
- Paquetes de ondas gaussianas, 508
 - Pares de fuerzas de acción y reacción, 109
 - Partícula(s), 288
 - a altas energías, colisiones de, 226
 - alfa, 192, 225, 226
 - energía cinética de la, 226
 - de Higgs, 105
 - física de, 226
 - puntual, 36, 247, 252
 - sistema de, 336
 - Pascal, 425
 - Pascales segundos (Pa s), 442
 - Patrones de interferencia, 509
 - Pelota de béisbol, 438
 - Péndulo
 - balístico, 221
 - cónico, 290
 - Pensamiento precientífico, 8, 9
 - Pérdida de
 - energía, 475, 476
 - sensibilidad del oído humano, 532
 - Perihelio, 396
 - Periodicidad de la función seno, 460
 - Periodo(s), 460
 - de rotación, 284
 - de un péndulo, 465
 - glaciar, 572
 - interglaciares, 572
 - Perturbaciones, 190
 - Peso
 - aparente, 430
 - del objeto, 103
 - Pie-libra por segundo (ft lb/s), 158
 - Piones, 637
 - Planetas enanos, 385
 - Plano
 - de simetría, 263
 - inclinado
 - equilibrio estático sobre un, 298
 - problemas de, 115
 - movimiento en un, 36
 - Planta
 - de energía eléctrica, eficiencia máxima de una, 657
 - internacional con reactor de fusión nuclear ITER, 142
 - Plantas convencionales de energía nuclear, 142
 - Plasma, 420, 563, 593, 594
 - de quart-gluones, 637
 - Polea, 112
 - sin masa, 109, 112, 115
 - Posición, 459
 - de un objeto, 37
 - vector de, 37
 - Potencia
 - concepto de, 157
 - de una onda, 506
 - media, 157, 159
 - transmitida por una onda, 507
 - por unidades de área, 529
 - unidad SI de, 158
 - Potencial
 - de *Lennard-Jones*, 175, 176
 - gravitacional de la tierra, 395
 - Pozo de potencial, 191, 192
 - Precesión, 341, 342
 - rapidez angular de, 342
 - Predictibilidad a largo plazo, 229
 - Presas hidroeléctricas, 169
 - Presión, 425
 - absoluta, 426
 - atmosférica, 426, 427
 - constante, calor molar específico con, 628
 - de un gas, 615
 - manométrica, 426
 - de un gas, 427
 - parcial, 622
 - Primer armónico, 511
 - Primera ley
 - de conservación, 178
 - de la termodinámica, 582, 586-588, 650, 652, 653
 - de Kepler, 396
 - de Newton, 107, 329, 355, 356, 425
 - empírica de los gases, 616
 - Principio(s) de
 - Arquímedes, 430
 - conservación del momento lineal, 211
 - equipartición de energía, 628
 - interferencia de ondas luminosas, 514
 - Pascal, 428
 - simetría de la física, 8
 - superposición, 383, 384, 508, 509, 535
 - Problemas
 - de plano inclinado, 115
 - de proyectil ideal, 144
 - estrategia para resolver, 17
 - Fermi, 23
 - Proceso(s)
 - a presión constante, 589
 - a temperatura constante, 589
 - a volumen constante, 588
 - adiabático, 588, 630, 631
 - de compresión, 562
 - de ecolocación, 529
 - de fusión nuclear, 562
 - de sedimentación, 288
 - de volumen constante, 658
 - dependientes de la trayectoria, 585
 - en trayectoria cerrada, 588
 - isobáricos, 589
 - isocóricos, 588, 658
 - isotérmico, 589, 622, 631
 - en un diagrama pV , trayectoria de un, 589
 - Proceso termodinámico, 584
 - del motor de Carnot, 654
 - ideal, 657
 - irreversible, 650-651
 - reversible, 650-651
 - Producto(s)
 - de cruz, 327
 - de diferenciación, regla del, 207, 258
 - para la diferenciación, regla de, 286
 - punto, 146
 - regla de los, 287, 336
 - vectorial, 327
 - Producto escalar, 327
 - de dos vectores, 146
 - de un vector por sí mismo, 147
 - para vectores unitarios, 147
 - propiedad conmutativa del, 146
 - propiedad distributiva del, 147, 148
 - Propiedad
 - aditiva del trabajo, 148
 - conmutativa de la suma, 25
 - vectorial, 25
 - del producto escalar, 146

- distributiva del producto escalar, 147, 148
 - lineal, 508
 - Propiedades
 - macroscópicas de los gases, 623
 - químicas de un átomo, 420
 - Proporción de compresión, 659
 - Propulsión electromagnética, 257
 - Protección
 - pasiva del calor, 599
 - térmica, sistema de, 599
 - Protones, 343, 420
 - Proyectil
 - al moverse, rotación del, 83
 - alcance de un, 78
 - altura máxima de un, 78
 - definición de alcance de un, 79
 - en dos dimensiones, trayectoria de un, 76
 - movimiento de, 72
 - Proyectil ideal, 74
 - alcance máximo de un, 79
 - movimiento de, 74
 - problemas de, 144
 - Proyectiles reales, factores que afectan al movimiento de, 83
 - Proyecto Avogadro, 14
 - Pruebas de túnel de viento, 418
 - Puente de
 - arco, 103
 - suspensión, 103
 - Pulsación, 534
 - Punto(s)
 - de congelación, 594
 - del agua, 563
 - de ebullición, 592
 - de equilibrio, 190
 - estable, 190
 - inestable, 190
 - de fluencia, 424
 - de fractura, 424
 - de fusión, 592
 - de inflexión, 191
 - de silla, 367
 - pivote, 356, 358
 - representación cartesiana de, 25
 - triple del agua, 563
 - temperatura del, 563
 - Pulsares, 340
- Q**
- Quema de combustibles fósiles, 572
 - Quimoluminiscencia, 563
- R**
- Radar Doppler, 540
 - Radiación, 596, 602
 - Cherenkov, 541
 - de fondo de microondas, 672
 - del fondo cósmico de microondas, 573
 - electromagnética, 141, 573
 - longitud de onda de la, 573
 - infrarroja, 602
 - solar, 141
 - Radián, 12
 - Radianes, 281
 - por segundo, 284, 458
 - Raíz media cuadrática, rapidez de la, 624, 626, 634, 635
 - Rango(s)
 - de longitud de onda del oído humano, 532
 - de temperaturas, 557
 - dinámico, 530
 - Rapidez, 40, 42, 77
 - de escape, 635, 636
 - de la luz, 526, 527
 - de la media cuadrática, 634
 - de la onda, 525, 526
 - de la raíz media cuadrática, 624, 626, 634, 635
 - de Maxwell, distribución de, 634, 635
 - de Maxwell-Boltzmann, distribución de, 634
 - efecto de disminución de la, 470
 - lineal, 287
 - del centro de masa, 313
 - Mach
 - 1, 542
 - 2, 542
 - media, 42
 - terminal, 121, 122
 - Rapidez angular, 287, 313, 457
 - de amortiguamiento, 474
 - de precesión, 342
 - de rotación, 342
 - resonante, 478
 - Rapidez del sonido, 526, 527
 - en diferentes materiales, 527
 - en fluidos, 526
 - en núcleos atómicos, 541
 - Rarefacción, 525
 - Reacción, tiempo finito de, 53
 - Reacciones
 - endotérmicas, 141
 - exotérmicas, 141
 - Reactor de fusión ITER, 562, 563
 - Reconocimiento de sonidos
 - Recursión, relación de, 257
 - Redirección de fuerzas, 115
 - Reducción de presión, 525
 - Reduccionismo, 418
 - Reflexión de(l)
 - ondas, 501
 - sonido, 529
 - Refrigerador, 652
 - de Carnot, 656, 666
 - de dilución, 562
 - Región prohibida, 191
 - Regla(s)
 - BAC-CAB para un producto vectorial doble, 328
 - de la cadena, 285
 - del cálculo diferencial e integral, 153
 - para la diferenciación, 500
 - de la mano derecha, 72, 284
 - para el momento de torsión, 327
 - para el vector de momento angular, 336, 337
 - de los productos, 287, 336
 - de productos para la diferenciación, 286
 - de 3 segundos para las tormentas eléctricas, 527
 - de 5 segundos para las tormentas eléctricas, 527
 - del producto de diferenciación, 207, 258
 - sobre el uso de cifras significativas, 10
 - Relación de
 - corte, 662
 - incertidumbre en la física cuántica, 229
 - recursión, 257
 - Reloj
 - atómico, 14
 - óptico, 14
 - Relojes
 - atómicos, 456
 - de cristal de cuarzo, 456
 - Reposición
 - fuerza de, 154
 - fuerzas lineales de, 154
 - Representación
 - cartesiana de
 - puntos, 25
 - un vector, 25
 - de imágenes por ultrasonido, 529, 539
 - Resistencia
 - a la tracción, 424
 - del aire, 52, 72, 83, 121
 - fuerza de la, 173
 - térmica, 596
 - Resonancia, forma de la, 478
 - Resorte
 - amplitud de un, 181
 - constante del, 154, 185
 - elongación máxima de un, 181
 - fuerza de, 153, 176
 - límite de elasticidad del, 154
 - Restitución, coeficiente de, 227
 - Resultante de vectores, 25
 - Reticula rígida, 421
 - Retroceso
 - continuo, 254
 - efecto de, 253, 256
 - Retrogiro, 84
 - Rodadura, movimiento de, 322
 - Rotación, 217
 - alrededor del centro de masa, 256
 - antihoraria, 357
 - de cuerpos extensos, 313

- del proyectil al moverse, 83
 - energía cinética de, 322, 340
 - grados de libertad de, 628, 629
 - inferior, 84
 - horaria, 357
 - lateral, 84
 - periodo de, 284
 - rapidez angular de, 342
- S**
- Satélite(s)
 - energía cinética de un, 402
 - geosincrónico, 403
 - geostacionarios, 400, 402
 - Sedimentación, proceso de, 288
 - Segunda ley
 - de la termodinámica, 650, 654, 664
 - de Kepler, 396
 - de Newton, 107, 108, 149, 207, 291, 296, 355
 - para el centro de masa, 251, 252
 - para el movimiento de rotación, 328
 - para movimiento lineal, 329
 - empírica de los gases, 616
 - Segundo armónico, 511
 - Segundo(s), 11
 - Semieje
 - mayor de la elipse, 396
 - menor de la elipse, 396
 - Sidespin* (giro hacia los lados), 438
 - Simetría
 - de la física, principios de, 8
 - plano de, 263
 - Sismología de reflexión, 505
 - Sistema
 - aislado, 177, 211
 - energía dentro de un, 177
 - cerrado, 586
 - cambio en la energía interna de un, 586
 - con temperatura, 582
 - de átomos ionizados, 420
 - de billar de Sinai, 228
 - de coordenadas
 - cartesianas, 24, 72, 259, 261
 - unidimensionales, 24
 - de partículas, 336
 - momento angular total del, 336
 - de protección térmica, 599
 - de unidades SI, 11, 12
 - desordenado, 670
 - inglés de unidades, 11
 - internacional de unidades (SI), 11, 12
 - MKSA, 11
 - ordenado, 670
 - sin fuerzas externas, 211
 - Solar, 385
 - tiempo de *Poincaré* de un, 651
 - tridimensional de coordenadas, 24
 - cartesianas, 72
 - ortogonales, 259, 261
 - Sobreamortiguamiento, 473
 - Sólido(s) 420
 - deformaciones de los, 421
 - Solución de onda, 508
 - Sonido(s), 212, 525
 - de alta frecuencia, 535
 - fuentes coherentes de, 533
 - reconocimiento de, 525
 - relativo, 530
 - Sonómetro, 530
 - Spin, 343
 - Subamortiguamiento, 471
 - Sublimación, 593
 - Suma
 - propiedad conmutativa de la, 25
 - vectorial
 - gráfica, 26
 - propiedad conmutativa de la, 25
 - Sumideros de calor pasivos, 605
 - Superposición
 - de las fuerzas, 384
 - de pulsos de onda, 508
 - del movimiento del centro de masa, 256
 - principio de, 383, 384, 508, 509
 - Sustentación, 437
- T**
- Tabla periódica de los elementos, 419
 - Tasa de flujo másico, 435
 - unidad de la, 435
 - Técnica de asistencia gravitacional, 394
 - Teléfonos de *touch-tone*, 543
 - Telescopio Espacial Hubble, 338, 400
 - Témpanos de hielo, 431
 - Temperatura(s), 582
 - ambiente con, 582
 - concepto de, 557
 - de cero absoluto, 558
 - de fondo del universo, 573
 - de un objeto, 557
 - del punto triple del agua, 563
 - diferencia de, 557
 - medición de la, 558, 563
 - rangos de, 557
 - sistema con, 582
 - superficial promedio de la tierra, 571, 604
 - Tensión, 101, 421
 - de la cuerda, 291, 526
 - en la cuerda, 109
 - esfuerzo en, 421
 - Teorema
 - de Carnot, 656, 665
 - de equipartición, 624, 629
 - de los ejes paralelos, 320
 - de Pitágoras, 28
 - de recurrencia de Poincaré, 651
 - de suma para funciones trigonométricas, 534
 - de Torricelli, 440
 - del trabajo y la energía, 186, 187
 - del trabajo y la energía cinética, 149, 150, 333
 - para el momento de torsión constante, 333
 - del valor medio, 319
 - fundamental del cálculo diferencial e integral, 46
- Teoría(s)
- cinética, 624
 - del gas ideal, 615, 623
 - cuántica, 229
 - de cuerdas, 5, 514
 - de todo, 5
 - de la relatividad, 1
 - general de Einstein, 514
 - del caos, 229
 - geocéntrica, 395
- Tercera ley
- de conservación, 338
 - de Kepler, 397
 - de la termodinámica, 559
 - de Newton, 107, 108, 211, 220, 252, 253, 383
 - empírica de los gases, 617
- Termistores, 563
- Termodinámica, 141, 557
 - conservación energética de la primera ley de la, 664
 - enunciación de
 - Clausius para la segunda ley de la, 665
 - Kelvin-Planck sobre la segunda ley de la, 664
- Termómetro, 558
 - bimetálico, 563
 - de expansión de mercurio, 558, 563
 - primario, 563
 - secundario, 563
- Termopares, 563
- Termosfera, 636
- Tevatron* de *Fermilab*, 226
- Thumper-trucks*, 505
- Tiempo, 16
 - de *Poincaré* de un sistema, 651
 - escalas humanas de, 16
 - finito de reacción, 53
 - función
 - cuadrática del, 47
 - lineal del, 47
 - interferencia de dos ondas en el, 534
 - recurrente de *Poincaré*, 651
- Tipos de fuerzas, 101-103
- Tiras bimetálicas, 563
- Topspin* (giro hacia delante), 438
- Tormentas circulares, 582
- Torr, 425
- Torsión
 - antihorarios, momentos de, 357, 360
 - horarios, momentos de, 357, 360
 - momento de, 327, 328, 332, 335, 356
 - neto cero, momento de, 357

- Trabajo
 definición de, 145
 negativo, 145, 586
 neto hecho por una fuerza neta, 148
 positivo, 145, 586
 propiedad aditiva del, 148
 y la energía
 cinética, teorema del, 149, 150
 teorema del, 186, 187
- Trabajo realizado por
 un momento de torsión, 332
 una fuerza, 332
 conservativa, 171, 173
- Transferencia de energía, 583
 térmica, 591, 596, 652
- Transición de flujo laminar a turbulento, 434, 444
- Transiciones de fase, 592
- Transmisión de ondas electromagnéticas, 602
- Transporte
 de energía por ondas, 502
 humano *Segway*, 370
- Traslación, grados de libertad de, 629
- Trayectoria
 ápice de la, 77
 cerrada, 171, 585
 de un proceso isotérmico en un diagrama pV , 589
 de un proyectil en dos dimensiones, 76
 procesos dependientes de la, 585
- Tribología, 123
- Trigeneración, 658
- Tsunami, 503
- Tubo
 abierto, 543
 de Venturi, 439
 semiabierto, 543
- Túnel de viento, 418
 pruebas de, 418
- Tunneling*, 192
- U**
- Ubicación puntual de un objeto, 36
- Ultracentrifugadora, 288
- Ultrasonido
 efecto Doppler de, 540
 ondas de, 529
 representación de imágenes por, 529, 539
- Umbral del oído humano, 529, 532
- Unidad
 año luz, 15
 astronómica, 15
 de aceleración, 103
 de energía, 143, 583
 de fuerza, 103
 de la tasa de flujo másico, 435
 de masa, 103
 atómica, 225
- de presión, 425
 de velocidad angular, 284
 de viscosidad, 442
 del momento de torsión, 327
 kilowatt-hora (kWh), 158
 poiseuille (Pl), 442
 segundos inversos, 284
 SI de potencia, 158
 térmica británica (BTU), 583
- Unidades
 de ángulo, 12
 sólido, 12
 de energía, factores de conversión para las, 583
 de la intensidad, 529
 deducidas, 12
 sistema inglés de, 11
 métricas, 11
 para la capacidad calorífica, 589
 para la conductividad térmica, 596
 SI deducidas, 12
 básicas, 11, 12
 sistema internacional de, 11, 12
- Uso subterráneo de explosivos, 505
- V**
- Valor absoluto
 de la velocidad, 77
 de un vector, 77
 del vector de desplazamiento, 38
- Valor medio, teorema del, 319
- Valores pequeños de la constante de amortiguamiento, 470
- Vapor de agua, 604
- Variable
 de integración, 153
 muda, 152
 de integración, 153
- Variación de presión, 525
- Vector
 axial, 327
 con un escalar positivo, multiplicación de un, 27
 de aceleración, definición de, 43
 de desplazamiento, 24, 37, 148
 componentes de un, 25
 valor absoluto del, 38
 de fuerza, 148
 gravitacional, 103
 de posición, 37
 del momento, 206
 angular, regla de la mano derecha para el, 336, 337
 del objeto, 216
 dirección de un, 23, 25
 inverso, 25, 26
 magnitud de un, 23
- negativo, 25
 por sí mismo, producto escalar de un, 147
 por un escalar negativo, multiplicación de un, 27
 radial unitario, 281, 287
 representación cartesiana de un, 25
 revertido, 25
 tangencial unitario, 281, 285, 287
 valor absoluto de un, 77
 velocidad, 206
- Vectores, 23
 conjunto ortonormal de, 147
 coplanares, 111
 finales de momento, 211, 212
 iniciales de momento, 211, 212
 ortogonales, 28, 146
 entre sí, 147
 resultante de, 25
 unitarios, 27, 147
 producto escalar para, 147
- Velocidad, 40, 459
 a lo largo de una línea, 73
 angular, 283, 284, 285, 335, 496
 media, 283
 unidad de, 284
 cambio en la, 36, 73
 constante, objeto en movimiento con, 107
 de derrame, 440
 de escape, 393
 mínima, 393
 de la luz, 15
 de onda en una cuerda, 500
 en dos o más dimensiones, 73
 instantánea, 40
 lineal, 284, 285
 de la fuerza de fricción, 122
 media, 40
 relativa, 84-85, 213, 220
 valor absoluto de la, 77
- Vibración, 220
- Vibraciones, 173
 mecánicas, 494
- Viscosidad
 de un fluido, 434, 442
 definición de, 442
 unidad de, 442
- Volumen
 constante, calor molar específico con, 627, 628
 de un gas, 615
 del fluido, 442
 integral tridimensional de, 259, 260, 261
- W**
- Watt (W), 158
- World Wide Web (www), 2

Constantes numéricas

Constantes fundamentales		
Nombre	Símbolo	Valor
Velocidad de la luz en el vacío	c	$2.99792458 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$
Carga elemental	e	$1.602176487(40) \cdot 10^{-19} \text{ C}$
Constante universal gravitatoria	G	$6.67428(67) \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$
Constante de Planck	h	$6.62606896(33) \cdot 10^{-34} \text{ J s}$
Constante de Boltzmann	k_B	$1.3806504(24) \cdot 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$
Número de Avogadro	N_A	$6.02214179(30) \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Constante universal de los gases	R	$8.314472(15) \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$
Masa de un electrón	m_e	$9.10938215(45) \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
Masa de un protón	m_p	$1.672621637(83) \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Masa de un neutrón	m_n	$1.674927211(84) \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Permeabilidad magnética del espacio libre	μ_0	$4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N A}^{-2}$
Permitividad eléctrica del espacio libre	$\epsilon_0 = 1/(\mu_0 c^2)$	$8.854187817... \cdot 10^{-12} \text{ N A}^{-2}$
Constante de Stefan-Boltzmann	σ	$5.760400(40) \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$

Fuente: National Institute of Standards and Technology, <http://physics.nist.gov/constants>. Los números en paréntesis muestran la incertidumbre en los dígitos finales del número citado. Por ejemplo, 6.67428(67) significa 6.67428 ± 0.00067 . Los valores que se muestran sin incertidumbres son exactos.

Otras constantes útiles		
Nombre	Símbolo	Valor
Aceleración estándar debida a la gravedad	g	9.81 m s^{-2}
Presión atmosférica estándar a 20 °C	atm	$1.01325 \cdot 10^5 \text{ Pa}$
Volumen de gas ideal a 0 °C y 1 atm		22.413996(39) litro/mol
Equivalente mecánico del calor		4.186 J/cal
Unidad de masa atómica	u	1.660538782(83) kg
Electrón-volt	eV	$1.602176487(40) \cdot 10^{-19} \text{ J}$
Equivalente energético de unidad de masa atómica	$u c^2$	931.494028(23) MeV
Equivalente energético de masa electrónica	$m_e c^2$	0.510998910(13) MeV
Equivalente energético de masa protónica	$m_p c^2$	938.272013(23) MeV
Equivalente energético de masa neutrónica	$m_n c^2$	939.565346(23) MeV
Constante de Planck dividida entre 2π	\hbar	$1.054571628(53) \cdot 10^{-34} \text{ J s}$
Constante de Planck dividida entre 2π por c	$\hbar c$	197.3269631(49) MeV fm
Radio de Bohr	a_0	$0.52917720859(36) \cdot 10^{-10} \text{ m}$

Fuente: National Institute of Standards and Technology, <http://physics.nist.gov/constants>. Los números en paréntesis muestran la incertidumbre en los dígitos finales del número citado. Por ejemplo, 6.67428(67) significa 6.67428 ± 0.00067 . Los valores que se muestran sin incertidumbres son exactos.

Factores de conversión de unidades

Longitud

1 m = 100 cm = 1 000 mm = $10^6 \mu\text{m}$ = 10^9 nm
1 km = 1 000 m = 0.6214 mi
1 m = 3.281 ft = 39.37 in
1 cm = 0.3937 in
1 in = 2.54 cm (exactamente)
1 ft = 30.48 cm (exactamente)
1 yd = 91.44 cm (exactamente)
1 mi = 5 280 ft = 1.609344 km (exactamente)
1 Angstrom = 10^{-10} m = 10^{-8} cm = 0.1 nm
1 milla náutica = 6 080 ft = 1.152 mi
1 año-luz = $9.461 \cdot 10^{15} \text{ m}$

Área

1 m² = 10^4 cm^2 = 10.76 ft²
1 cm² = 0.155 in²
1 in² = 6.452 cm²
1 ft² = 144 in² = 0.0929 m²
1 hectárea = 2.471 acres = 10 000 m²
1 acre = 0.4047 hectáreas = 43 560 ft²
1 mi² = 640 acres
1 yd² = 0.8361 m²

Volumen

1 litro = 1 000 cm³ = 10^{-3} m^3 = 0.03531 ft³ = 61.02 in³ =
33.81 onzas fluidas
1 ft³ = 0.02832 m³ = 28.32 litros = 7.477 galones
1 galón = 3.788 litros
1 cuarto de galón = 0.9463 litro

Tiempo

1 min = 60 s
1 h = 3 600 s
1 día = 86 400 s
1 semana = 604 800 s
1 año = $3.156 \cdot 10^7 \text{ s}$

Ángulos

1 rad = 57.30° = $180^\circ/\pi$
1° = 0.01745 rad = $(\pi/180)$ rad
1 rev = 360° = 2π rad
1 rev/min (rpm) = 0.1047 rad/s = 6°/s

Rapidez

1 milla por hora (mph) = 0.4470 m/s = 1.466 ft/s =
1.609 km/h
1 m/s = 2.237 mph = 3.281 ft/s
1 km/h = 0.2778 m/s = 0.6214 mph
1 ft/s = 0.3048 m/s
1 nudo = 1.151 mph = 0.5144 m/s

Aceleración

1 m/s² = 100 cm/s² = 3.281 ft/s²
1 cm/s² = 0.01 m/s² = 0.03281 ft/s²
1 ft/s² = 0.3048 m/s² = 30.48 cm/s²

Masa

1 kg = 1 000 g = 0.0685 slug
1 slug = 14.95 kg
1 kg tiene un peso de 2.205 lb cuando $g = 9.807 \text{ m/s}^2$
1 lb tiene una masa de 0.4546 kg cuando $g = 9.807 \text{ m/s}^2$

Fuerza

1 N = 0.2248 lb
1 lb = 4.448 N
1 piedra = 14 lb = 62.27 N

Presión

1 Pa = 1 N/m² = $1.450 \cdot 10^{-4} \text{ lb/in}^2$ = 0.209 lb/ft²
1 atm = $1.013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ = 101.3 kPa = 14.7 lb/in² = 2 117 lb/ft² =
760 mm Hg = 29.92 in Hg
1 lb/in² = 6 895 Pa
1 lb/ft² = 47.88 Pa
1 mm Hg = 1 torr = 133.3 Pa
1 bar = 10^5 Pa = 100 kPa

Energía

1 J = 0.239 cal
1 cal = 4.186 J
1 Btu = 1 055 J = 252 cal
1 kW·h = $3.600 \cdot 10^6 \text{ J}$
1 ft·lb = 1.356 J
1 eV = $1.602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$

Potencia

1 W = 1 J s
1 hp = 746 W = 0.746 kW = 550 ft·lb/s
1 Btu/h = 0.293 W
1 GW = 1 000 MW = $1.0 \cdot 10^9 \text{ W}$
1 kW = 1.34 hp

Temperatura

Fahrenheit a Celsius: $T_C = \frac{5}{9}(T_F - 32^\circ \text{F})$
Celsius a Fahrenheit: $T_F = \frac{9}{5}T_C + 32^\circ \text{C}$
Celsius a Kelvin: $T_K = T_C + 273.15^\circ \text{C}$
Kelvin a Celsius: $T_C = T_K - 273.15 \text{ K}$

