

Polytechnic University of Puerto Rico – Orlando Campus
ME 3140 – Intermediate Fluid Mechanics

Homework N-01

Instructor: Dr. Joaquín Valencia

Student: Antonio Pérez

ID: 158655

Due date: November 25, 2025

Problem statement

A local ventilation system (hood and exhaust duct) is used to remove air and contaminants produced by a dry-cleaning operation (see Figure E-1). The duct is round and is constructed of galvanized steel with longitudinal seams and with joints every 30 in (0.76 m). The inner diameter (ID) of the duct is $D = 9.06$ in (0.230 m), and its total length is $L = 44.0$ ft (13.4 m). There are five CD3-9 elbows along the duct. The equivalent roughness height of this duct is 0.15 mm, and each elbow has a minor (local) loss coefficient of $K_L = C_0 = 0.21$. Note the notation C_0 for minor loss coefficient, commonly used in the ventilation industry (ASHRAE, 2001). To ensure adequate ventilation, the **minimum required volume flow rate** through the duct is $Q = 600$ cfm (cubic feet per minute), or $0.283 \text{ m}^3/\text{s}$ at 25°C . Literature from the hood manufacturer lists the hood entry loss coefficient as 1.3 based on duct velocity. When the damper is fully open, its loss coefficient is 1.8. A centrifugal fan with 9.0-in inlet and outlet diameters is available. If the flow is turbulent, assume that $\alpha = 1.05$. Its performance data are shown in Table E-1, as listed by the manufacturer.

- (a) Perform a hand calculation of the required head for $Q = 700$ cfm at 25°C . (45 pts)
- (b) Predict the operating point of this local ventilation system and draw a plot of required and available fan pressure rise as functions of volume flow rate. (45 pts)
- (c) Is the chosen fan adequate? Explain. (10 pts)

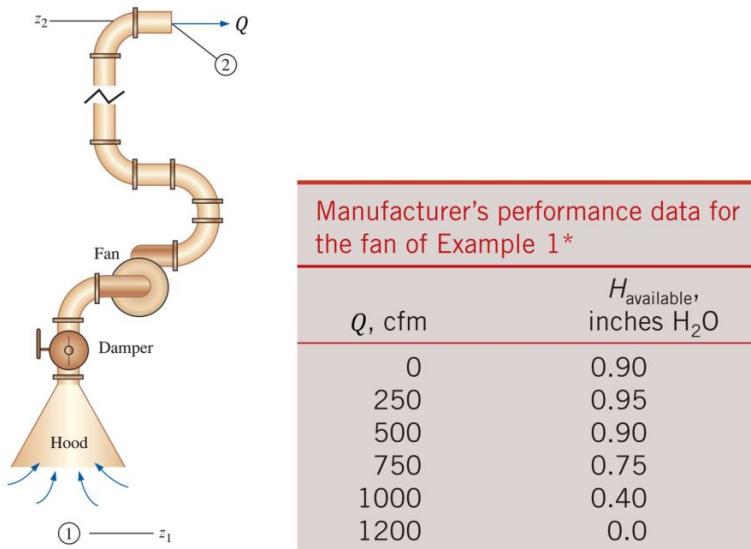


Figure E-1

Figura 1: Ventilation system geometry and fan performance table.

Ecuaciones empleadas

Cuadro 1: Ecuaciones de flujo interno y pérdidas de carga empleadas en la asignación.

Ecuación	Descripción
$A = \frac{\pi D^2}{4}$	Área interna del ducto.
$Q_{SI} = Q_{cfm} (4,7195 \times 10^{-4})$	Conversión de caudal de cfm a m^3/s .
$V = Q_{SI}/A$	Velocidad media del aire en el ducto.
$Re = \frac{\rho_{air} V D}{\mu_{air}}$	Número de Reynolds para flujo interno.
$\frac{\varepsilon}{D}$	Rugosidad relativa del ducto.
$f = f(Re, \varepsilon/D)$	Factor de fricción de Darcy–Weisbach (carta de Moody).
$h_r = \frac{P_2 - P_1}{\rho g} + \frac{\alpha_2 v_2^2 - \alpha_1 v_1^2}{2g} + (z_2 - z_1) + h_{L,\text{total}}$	Ecuación de energía (forma de Bernoulli extendida) entre la entrada del hood y la salida del ducto.
$h_{L,\text{total}} = [f \frac{L}{D} + \sum K_L] \frac{V^2}{2g}$	Pérdidas por fricción y pérdidas menores, expresadas en metros de aire.
$h_r(Q) = [\alpha + f(Q) \frac{L}{D} + \sum K_L] \frac{V(Q)^2}{2g}$	Head requerido por el sistema (forma simplificada usada en clase, con $P_1 \approx P_2$, $z_1 \approx z_2$ y diámetro constante).
$h_{H_2O} = h_r \frac{\rho_{air}}{\rho_{H_2O}}$	Conversión de metros de aire a metros de columna de agua.
$H(\text{in H}_2\text{O}) = \frac{h_{H_2O}}{0,0254}$	Conversión de metros de agua a pulgadas de columna de agua.
$H_{\text{fan}}(Q)$	Head disponible del ventilador (interpolación lineal de la tabla del fabricante).
$H_{\text{req}}(Q_{\text{op}}) = H_{\text{fan}}(Q_{\text{op}})$	Condición para el punto de operación del sistema ventilador–ducto.

Datos de entrada

Cuadro 2: Datos de entrada para el análisis del sistema de ventilación.

Variable	Valor	Descripción
T	25 °C	Temperatura del aire
ρ_{air}	1,184 kg/m ³	Densidad del aire (Tabla A-9)
μ_{air}	$1,849 \times 10^{-5}$ kg/(m s)	Viscosidad dinámica del aire
D	0,230 m	Diámetro interno del ducto
L	13,4 m	Longitud total del ducto
ε	0,15 mm	Rugosidad absoluta
Q_{\min}	600 cfm = 0.283 m ³ /s	Caudal mínimo requerido
Q_a	700 cfm = 0.330 m ³ /s	Caudal para el inciso (a)
$K_{L,\text{elbow}}$	0.21	Pérdida en cada codo CD3-9
N_{elbows}	5	Número de codos
$K_{L,\text{hood}}$	1.3	Coeficiente de entrada del hood
$K_{L,\text{damper}}$	1.8	Damper completamente abierto
$\sum K_L$	4.15	Pérdidas menores totales
α	1.05	Coeficiente cinético (flujo turbulento)
g	9,81 m/s ²	Aceleración de la gravedad
$\rho_{\text{H}_2\text{O}}$	998 kg/m ³	Densidad del agua (25°C)

Verificación a $Q = 600 \text{ cfm}$ (caudal mínimo requerido)

Para el caudal mínimo especificado de operación, $Q_{\min} = 600 \text{ cfm}$, se utiliza la misma expresión general del head requerido:

$$h_r(Q) = \left[\alpha + f(Q) \frac{L}{D} + \sum K_L \right] \frac{V(Q)^2}{2g}, \quad \alpha = 1,05.$$

Cuadro 3: Desarrollo del cálculo para $Q = 600$ cfm.

Paso	Fórmula	Sustitución numérica	Resultado
Caudal	$Q_{SI} = Q_{cfm}(4,7195 \times 10^{-4})$	$Q_{SI} = 600(4,7195 \times 10^{-4})$	$0,283 \text{ m}^3/\text{s}$
Área interna	$A = \frac{\pi D^2}{4}$	$A = \frac{\pi(0,230)^2}{4}$	$4,15 \times 10^{-2} \text{ m}^2$
Velocidad	$V = Q_{SI}/A$	$V = 0,283/0,0415$	$6,82 \text{ m/s}$
Reynolds	$Re = \frac{\rho V D}{\mu}$	$\frac{(1,184)(6,82)(0,230)}{1,849 \times 10^{-5}}$	$1,0 \times 10^5$
Rugosidad	ε/D	$0,00015/0,230$	$6,5 \times 10^{-4}$
Fricción (Moody)	$f = f(Re, \varepsilon/D)$	carta de Moody	0,021
Coeficiente global	$\alpha + f(L/D) + \sum K_L$	$1,05 + 0,021(58,3) + 4,15$	6,43
Término dinámico	$\frac{V^2}{2g}$	$\frac{(6,82)^2}{2(9,81)}$	2,37
Head en aire	$h_r = (\text{coef}) \frac{V^2}{2g}$	$h_r = 6,43(2,37)$	15,2 m
Head agua	$h_{H_2O} = h_r \frac{\rho_{air}}{\rho_{H_2O}}$	$15,2 \frac{1,184}{998}$	0,0180 m
Resultado final	$H = h_{H_2O}/0,0254$	$0,0180/0,0254$	$\approx 0,71 \text{ in H}_2\text{O}$

Paso 1: Conversión de caudal a unidades SI

$$Q_{SI} = 600(4,7195 \times 10^{-4}) = 0,283 \text{ m}^3/\text{s}$$

Paso 2: Área del ducto

$$A = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi(0,230)^2}{4} = 4,15 \times 10^{-2} \text{ m}^2$$

Paso 3: Velocidad del aire

$$V = \frac{0,283}{0,0415} = 6,82 \text{ m/s}$$

Paso 4: Número de Reynolds

$$Re = \frac{(1,184)(6,82)(0,230)}{1,849 \times 10^{-5}} \approx 1,0 \times 10^5$$

Paso 5: Rugosidad relativa

$$\frac{\varepsilon}{D} = 6,5 \times 10^{-4}$$

Paso 6: Factor de fricción

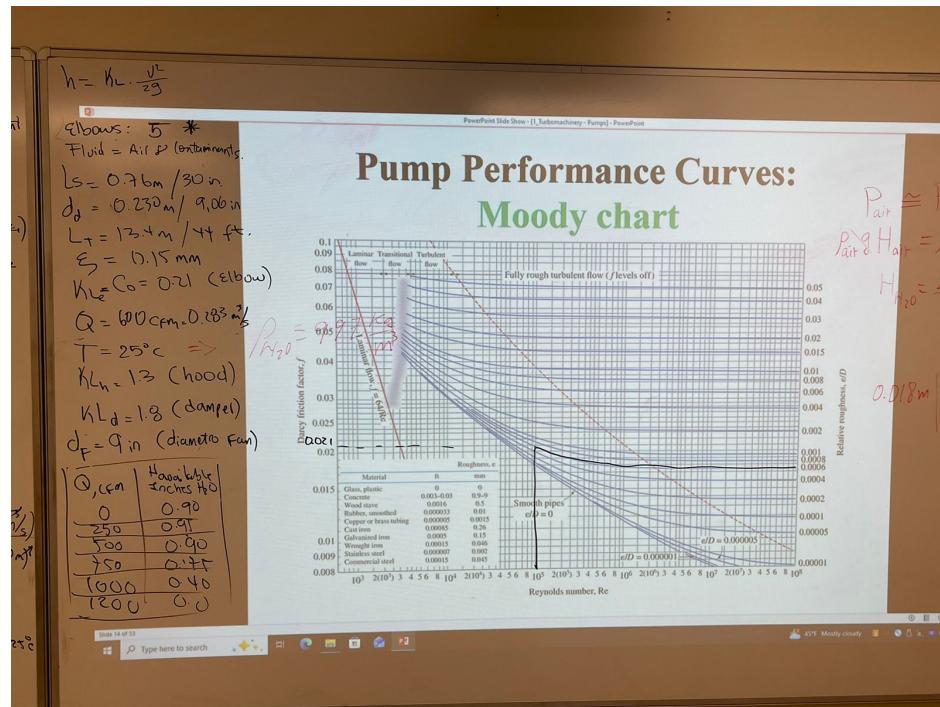


Figura 2: Carta de Moody empleada para la estimación del factor de fricción.

$$f \approx 0,021$$

Paso 7: Coeficiente global de pérdidas

$$\alpha + f \frac{L}{D} + \sum K_L = 1,05 + 0,021(58,3) + 4,15 = 6,43$$

Paso 8: Término dinámico

$$\frac{V^2}{2g} = \frac{(6,82)^2}{2(9,81)} = 2,37$$

Paso 9: Head requerido en aire

$$h_r = 6,43(2,37) = 15,2 \text{ m}$$

Paso 10: Conversión a metros de agua

$$h_{\text{H}_2\text{O}} = 15,2 \left(\frac{1,184}{998} \right) = 0,0180 \text{ m}$$

Paso 11: Conversión a pulgadas de agua

$$H = \frac{0,0180}{0,0254} = 0,71 \text{ in H}_2\text{O}$$

$$H_{\text{required}}(600 \text{ cfm}) = 0,71 \text{ in H}_2\text{O}$$

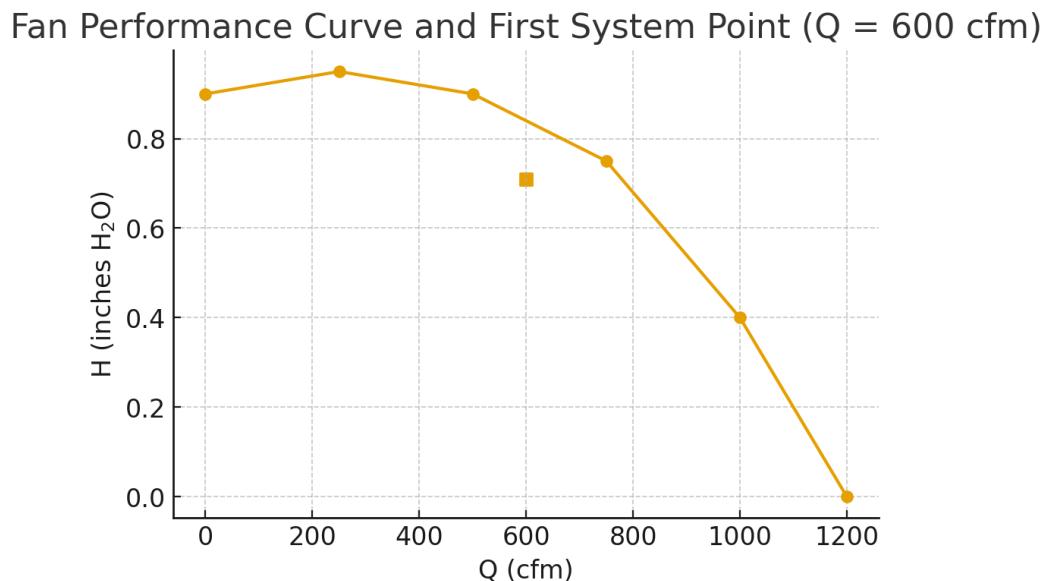


Figura 3: Fan performance curve and first system point at $Q = 600 \text{ cfm}$ and $H_{\text{required}} = 0,709 \text{ in H}_2\text{O}$.

Parte (a) – Cálculo del head requerido para $Q = 700 \text{ cfm}$ (con $\alpha = 1,05$)

Se aplica la ecuación de energía usada en clase, donde los términos de presión, elevación y diferencia de velocidades se anulan al tener el mismo diámetro en la sección de entrada y salida. El head requerido queda expresado como:

$$h_r(Q) = \left[\alpha + f(Q) \frac{L}{D} + \sum K_L \right] \frac{V(Q)^2}{2g}, \quad \alpha = 1,05.$$

Paso 1: Conversión de caudal a unidades SI

$$Q_{\text{SI}} = 700(4,7195 \times 10^{-4}) = 0,330 \text{ m}^3/\text{s}$$

Paso 2: Área interna del ducto

$$A = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi(0,230)^2}{4} = 4,15 \times 10^{-2} \text{ m}^2$$

Paso 3: Velocidad del aire

$$V = \frac{Q_{\text{SI}}}{A} = \frac{0,330}{0,0415} = 7,95 \text{ m/s}$$

Paso 4: Número de Reynolds

$$\text{Re} = \frac{(1,184)(7,95)(0,230)}{1,849 \times 10^{-5}} \approx 1,17 \times 10^5$$

Paso 5: Rugosidad relativa

$$\frac{\varepsilon}{D} = \frac{0,00015}{0,230} = 6,5 \times 10^{-4}$$

Paso 6: Factor de fricción (Moody)

$$f \approx 0,021$$

Paso 7: Coeficiente global de pérdidas

$$\frac{L}{D} = \frac{13,4}{0,230} = 58,3$$

$$\alpha + f \frac{L}{D} + \sum K_L = 1,05 + 0,021(58,3) + 4,15 = 6,423$$

Paso 8: Término dinámico

$$\frac{V^2}{2g} = \frac{(7,95)^2}{2(9,81)} = 3,22$$

Paso 9: Head requerido en aire

$$h_r = 6,423(3,22) = 20,70 \text{ m (aire)}$$

Paso 10: Conversión a metros de agua

$$h_{H_2O} = 20,70 \left(\frac{1,184}{998} \right) = 0,0246 \text{ m de agua}$$

Paso 11: Conversión a pulgadas de agua

$$H = \frac{0,0246}{0,0254} = 0,964 \text{ in H}_2\text{O}$$

$H_{\text{required}}(700 \text{ cfm}) = 0,964 \text{ in H}_2\text{O}$

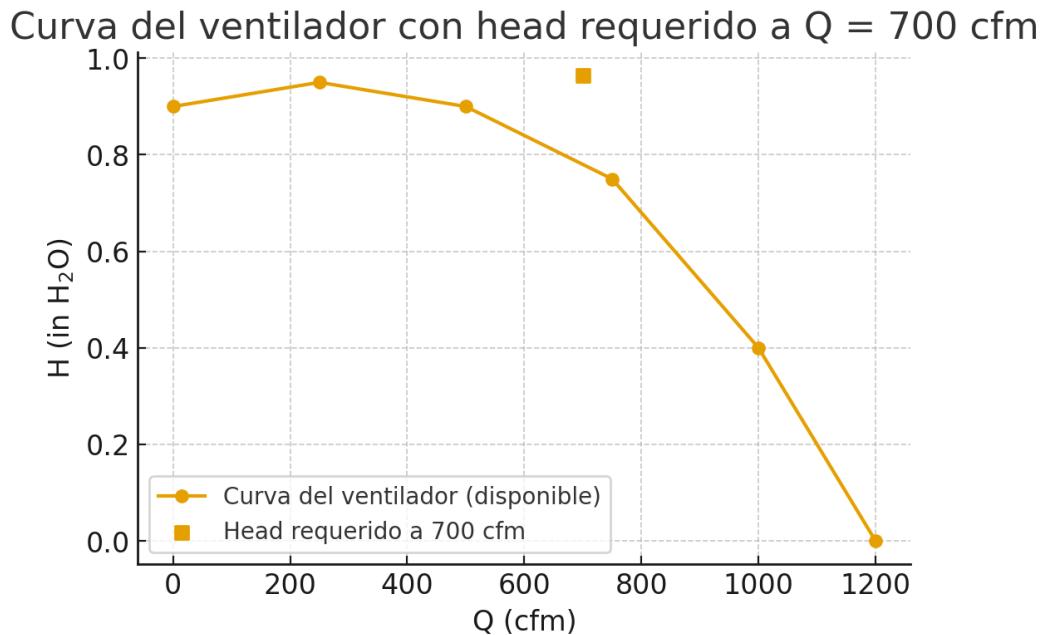


Figura 4: Head requerido para $Q = 700 \text{ cfm}$ comparado con la curva del ventilador.

Conclusión parcial

Del análisis comparativo se observa que, para $Q = 600$ cfm, el head requerido por el sistema ($\approx 0,71$ in H₂O) es menor que el head disponible del ventilador ($\approx 0,90$ in H₂O), por lo que el ventilador puede operar sin dificultad en ese punto. Sin embargo, al aumentar el caudal a $Q = 700$ cfm, el head requerido se incrementa hasta $\approx 0,96$ in H₂O, mientras que el ventilador únicamente puede suministrar $\approx 0,75$ in H₂O. Esto implica que el ventilador no es capaz de vencer las pérdidas del sistema a 700 cfm. En consecuencia, el caudal de 600 cfm se encuentra dentro de la capacidad del equipo, mientras que 700 cfm excede sus límites operativos.

Parte (b) – Curva del sistema y punto de operación

Modelo general

Para construir la curva del sistema se aplica, para cada valor de caudal Q , la misma expresión general utilizada en el inciso (a), consistente con el desarrollo de clase entre la entrada del hood (1) y la salida del ducto (2):

$$h_r(Q) = \left[\alpha + f(Q) \frac{L}{D} + \sum K_L \right] \frac{V(Q)^2}{2g}, \quad \alpha = 1,05,$$

donde:

- $V(Q) = Q_{SI}/A$ es la velocidad media del aire en el ducto,
- $A = \pi D^2/4$ es el área interna,
- $f(Q)$ es el factor de fricción de Darcy–Weisbach obtenido de la carta de Moody,
- $\sum K_L$ reúne las pérdidas menores (hood, damper y cinco codos).

En el rango de interés ($Q \approx 500$ –1000 cfm) el número de Reynolds se mantiene del orden de 10^5 y la rugosidad relativa ε/D es constante, de modo que el flujo permanece en la misma región turbulenta de la carta de Moody. Por ello se adopta $f(Q) \approx 0,021$ para todos los casos, tal como se hizo en el inciso (a).

El procedimiento clásico para cada caudal es:

1. Convertir el caudal a unidades SI:

$$Q_{SI} = Q_{cfm} (4,7195 \times 10^{-4}) \quad [\text{m}^3/\text{s}].$$

2. Calcular el área interna del ducto

$$A = \frac{\pi D^2}{4},$$

y la velocidad media

$$V = \frac{Q_{SI}}{A}.$$

3. Evaluar el número de Reynolds

$$\text{Re} = \frac{\rho_{\text{air}} V D}{\mu_{\text{air}}},$$

confirmar flujo turbulento y mantener $f \simeq 0,021$.

4. Determinar el coeficiente global de pérdidas

$$C = \alpha + f \frac{L}{D} + \sum K_L.$$

5. Calcular el head en aire

$$h_r = C \frac{V^2}{2g}.$$

6. Convertir a metros y luego a pulgadas de columna de agua:

$$h_{\text{H}_2\text{O}} = h_r \frac{\rho_{\text{air}}}{\rho_{\text{H}_2\text{O}}}, \quad H_{\text{req}} = \frac{h_{\text{H}_2\text{O}}}{0,0254} \quad [\text{in H}_2\text{O}].$$

Resultados numéricos punto a punto (método clásico)

Aplicando este procedimiento para varios valores representativos del caudal, resumidos en la Tabla 4, y utilizando $f \approx 0,021$, $L/D = 58,3$, $\sum K_L = 4,15$ y $\alpha = 1,05$, se obtienen los valores indicados en la Tabla 6. Los valores de $H_{\text{fan}}(Q)$ se determinan mediante interpolación lineal a partir de los datos del fabricante.

Cuadro 4: Caudales seleccionados para el cálculo del sistema.

Q (cfm)	500	600	650	700	800	900	1000
-----------	-----	-----	-----	-----	-----	-----	------

Cuadro 5: Manufacturer's fan performance data.

Q (cfm)	$H_{\text{available}}$ (in H_2O)
0	0.90
250	0.95
500	0.90
750	0.75
1000	0.40
1200	0.00

Se observa que para caudales bajos el ventilador entrega un head disponible muy superior al requerido, mientras que para caudales altos el head requerido del sistema supera ampliamente al disponible. Por tanto, el punto de operación debe ubicarse en la zona intermedia.

Determinación del punto de operación

El punto de operación ($Q_{\text{op}}, H_{\text{op}}$) se define por la condición de equilibrio entre la curva del sistema y la curva del ventilador:

$$H_{\text{req}}(Q_{\text{op}}) = H_{\text{fan}}(Q_{\text{op}}).$$

Cuadro 6: Head requerido del sistema (cálculo clásico con Darcy–Weisbach) y head disponible del ventilador.

Q (cfm)	Q_{SI} (m^3/s)	V (m/s)	h_r (m aire)	H_{req} (in H_2O)	H_{fan} (in H_2O)
500	0.236	5.69	10.9	0.50	0.90
600	0.283	6.82	15.2	0.71	0.84
650	0.307	7.39	17.8	0.84	0.81
700	0.330	7.95	20.7	0.96	0.78
800	0.378	9.07	27.0	1.26	0.68
900	0.425	10.2	34.2	1.59	0.54
1000	0.472	11.4	42.3	1.95	0.40

A partir de la Tabla 6 se aprecia que esta igualdad se produce entre $Q = 600$ y $Q = 650$ cfm, ya que:

$$H_{req}(600) < H_{fan}(600), \quad H_{req}(650) > H_{fan}(650).$$

En ese intervalo se aproximan ambas curvas por rectas:

$$H_{req}(Q) \approx 0,71 + \frac{0,84 - 0,71}{650 - 600}(Q - 600) = 0,71 + 0,0024(Q - 600),$$

$$H_{fan}(Q) \approx 0,84 + \frac{0,81 - 0,84}{650 - 600}(Q - 600) = 0,84 - 0,0006(Q - 600).$$

Al igualar ambas expresiones:

$$0,71 + 0,0024(Q_{op} - 600) = 0,84 - 0,0006(Q_{op} - 600),$$

$$0,0030(Q_{op} - 600) = 0,13 \Rightarrow Q_{op} - 600 \approx \frac{0,13}{0,0030} \approx 43,$$

$$Q_{op} \approx 643 \text{ cfm.}$$

Sustituyendo en cualquiera de las dos rectas:

$$H_{op} = H_{req}(Q_{op}) \approx 0,71 + 0,0024(643 - 600) \approx 0,814 \text{ in } \text{H}_2\text{O}.$$

$$Q_{op} \approx 643 \text{ cfm}, \quad H_{op} \approx 0,814 \text{ in } \text{H}_2\text{O}$$

Curva del ventilador vs curva del sistema (con $\alpha = 1.05$)

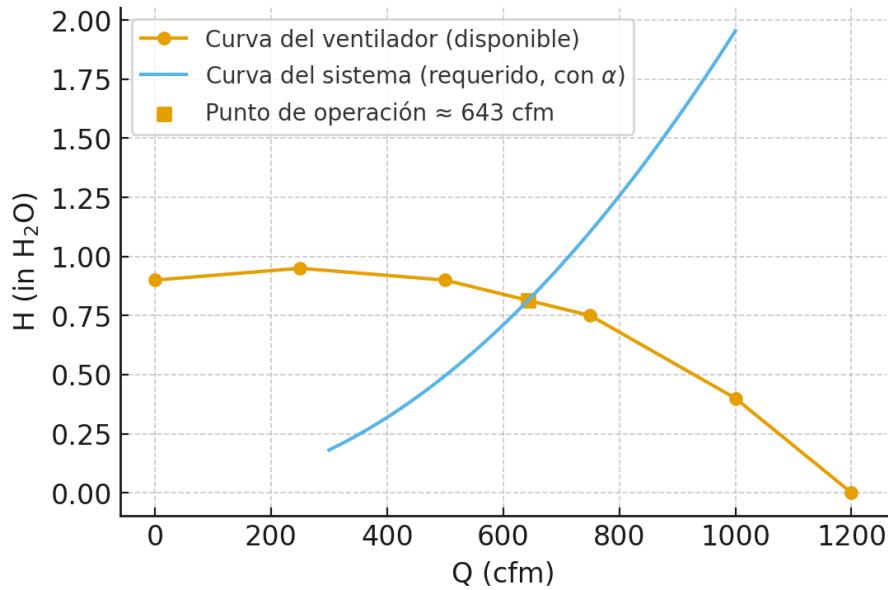


Figura 5: Curva del ventilador y curva del sistema obtenida punto a punto con Darcy–Weisbach. El punto de operación se localiza en $Q_{op} \approx 643$ cfm y $H_{op} \approx 0,814$ in H₂O.

Anexo A — Código Matlab para la generación de la Tabla del sistema

El siguiente script de MATLAB se utilizó para reproducir los valores de la Tabla 6. El programa calcula, para cada caudal Q , el head requerido del sistema $H_{req}(Q)$ mediante la expresión de Darcy–Weisbach (incluyendo $\alpha = 1,05$) y el head disponible del ventilador $H_{fan}(Q)$ a partir de los datos del fabricante.

```

1 % asignacion1.m
2 % Reproduce la tabla del sistema vs ventilador
3 % Q, Q_SI, V, h_r, H_req y H_fan
4
5 clear; clc;
6
7 % --- Propiedades físicas ---
8 rho_air = 1.184;           % kg/m^3 (aire a 25 C)
9 mu_air  = 1.849e-5;        % Pa*s
10 rho_w   = 998;             % kg/m^3
11 g       = 9.81;             % m/s^2
12
13 % --- Geometría del ducto ---
14 D       = 0.230;            % m
15 L       = 13.4;              % m
16 eps    = 0.00015;           % m
17 alpha   = 1.05;             % factor cínico
18
19 % --- Pérdidas locales ---

```

```

20 KL_elbow = 0.21;
21 N_elbows = 5;
22 KL_hood = 1.3;
23 KL_damper = 1.8;
24 K_sum = N_elbows*KL_elbow + KL_hood + KL_damper; % 4.15 approx
25
26 % --- Factor de fricci n (Moody) ---
27 f = 0.021;
28
29 % --- Curva del ventilador (fabricante) ---
30 Q_fan_data = [ 0 250 500 750 1000 1200 ]';
31 H_fan_data = [0.90 0.95 0.90 0.75 0.40 0.00 ]';
32
33 % --- Caudales evaluados ---
34 Q_cfm = [500 600 650 700 800 900 1000]';
35
36 % --- Conversi n unidades ---
37 cfm_to_m3s = 4.7195e-4;
38
39 % --- rea del ducto ---
40 A = pi*D^2/4;
41
42 % --- Clculos principales ---
43 Q_SI = Q_cfm * cfm_to_m3s;
44 V = Q_SI / A;
45 Re = rho_air .* V * D / mu_air;
46
47 Ccoef = alpha + f*(L/D) + K_sum;
48
49 h_r = Ccoef * (V.^2) / (2*g); % m de aire
50 h_water = h_r * (rho_air / rho_w); % m de agua
51 H_req = h_water / 0.0254; % pulgadas de H2O
52
53 % --- Head del ventilador ---
54 H_fan = interp1(Q_fan_data, H_fan_data, Q_cfm, 'linear');
55
56 % --- Impresi n en pantalla ---
57 fprintf('\nTabla: Head del sistema vs head del ventilador\n');
58 fprintf('-----\n');
59 fprintf(' Q(cfm) Q_SI(m^3/s) V(m/s) h_r(m-air) H_req(in) H_fan(in)\n');
60 fprintf('-----\n');
61 for k = 1:length(Q_cfm)
62     fprintf('%7.0f %11.3f %7.2f %10.1f %9.2f %9.2f\n', ...
63         Q_cfm(k), Q_SI(k), V(k), h_r(k), H_req(k), H_fan(k));
64 end
65 fprintf('-----\n');
66
67 % --- Punto de operaci n ---
68 [~, idx_op] = min(abs(H_req - H_fan));
69 Q_op = Q_cfm(idx_op);
70 H_op = H_req(idx_op);
71
72 fprintf('\nPunto de operaci n aproximado:\n');

```

```

73 | fprintf(' Q_op = %.1f cfm\n', Q_op);
74 | fprintf(' H_op = %.3f in H2O\n\n', H_op);

```

Listing 1: Script `asignacion1.m` para el cálculo de $H_{\text{req}}(Q)$ y $H_{\text{fan}}(Q)$.

Command Window					
Tabla: Head del sistema vs head del ventilador					
Q(cfm)	Q_SI(m^3/s)	V(m/s)	h_r(m-air)	H_req(in)	H_fan(in)
500	0.236	5.68	10.6	0.49	0.90
600	0.283	6.82	15.2	0.71	0.84
650	0.307	7.38	17.8	0.83	0.81
700	0.330	7.95	20.7	0.97	0.78
800	0.378	9.09	27.0	1.26	0.68
900	0.425	10.22	34.2	1.60	0.54
1000	0.472	11.36	42.2	1.97	0.40

Punto de operación aproximado:
Q _{op} = 650.0 cfm
H _{op} = 0.834 in H ₂ O

>> ⌘ + Shift + P to generate code with Copilot

Figura 6: Salida del Command Window de MATLAB mostrando la generación numérica de la Tabla del sistema y el cálculo del punto de operación ($Q_{\text{op}} = 650$ cfm, $H_{\text{op}} = 0,834$ in H₂O).

Parte (c) – ¿Es adecuado el ventilador seleccionado?

A partir de la intersección entre la curva del sistema y la curva del ventilador se obtiene un punto de operación aproximado de

$$Q_{\text{op}} \approx 650 \text{ cfm}, \quad H_{\text{op}} \approx 0,83 \text{ in H}_2\text{O},$$

valor que supera el caudal mínimo requerido por el problema ($Q_{\text{mín}} = 600$ cfm). Para $Q = 600$ cfm el sistema requiere aproximadamente $H_{\text{req}} \approx 0,71$ in H₂O, mientras que el ventilador es capaz de entregar cerca de 0,84 in H₂O; por lo tanto, existe un margen suficiente de presión estática para vencer las pérdidas del ducto y garantizar la ventilación mínima.

Por otro lado, para $Q = 700$ cfm el head requerido del sistema asciende a $H_{\text{req}} \approx 0,97$ in H₂O, mientras que la curva del ventilador sólo proporciona alrededor de 0,78 in H₂O, insuficiente para mantener dicho caudal. En consecuencia, el ventilador seleccionado es adecuado para cumplir la especificación original de diseño ($Q_{\text{mín}} = 600$ cfm), pero no sería capaz de operar de forma estable a 700 cfm.