

Polytechnic University of Puerto Rico – Orlando Campus
ME 3140 – Intermediate Fluid Mechanics

Homework #10

Instructor: Dr. Joaquín Valencia

Estudiante: Antonio Pérez

ID: 158655

Fecha de entrega: 24 de enero de 2026

Problema 1. Turbina Pelton – potencia máxima disponible

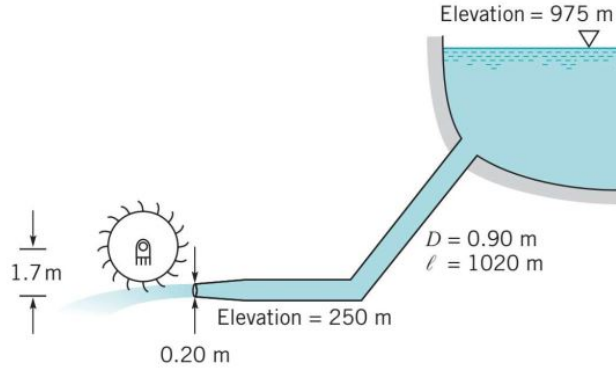


Figure 1.

Figura 1: Sistema embalse-penstock-turbina.

Enunciado (redactado a partir de la figura)

Un embalse alimenta una turbina Pelton mediante un penstock de diámetro $D = 0,900$ m y longitud $\ell = 1020,000$ m. La elevación del nivel libre del embalse es $975,000$ m y la elevación a la entrada de la turbina es $250,000$ m. El chorro sale por una boquilla de diámetro $D_j = 0,200$ m. Se indica un *factor de fricción efectivo* (penstock + válvulas + pérdidas relacionadas) $f = 0,032$. Determinar el caudal real y la potencia máxima disponible en la turbina (modelo ideal Pelton).

Tabla de variables iniciales

Variable	Valor (SI)	Descripción
z_{embalse}	975,000 m	Elevación del nivel libre del embalse
z_{turbina}	250,000 m	Elevación a la entrada de turbina
H_{gross}	725,000 m	Head bruto: $z_{\text{embalse}} - z_{\text{turbina}}$
D	0,900 m	Diámetro del penstock
ℓ	1020,000 m	Longitud del penstock
f	0,032	Factor efectivo de pérdidas (Darcy)
D_j	0,200 m	Diámetro de boquilla (jet)
ρ	998,200 kg/m ³	Densidad del agua
g	9,810 m/s ²	Gravedad

Tabla de fórmulas

ID	Fórmula	Uso
F1	$H_{\text{gross}} = z_{\text{embalse}} - z_{\text{turbina}}$	Head bruto disponible
F2	$A = \frac{\pi D^2}{4}$	Áreas de penstock y boquilla
F3	$h_L = f \left(\frac{\ell}{D} \right) \frac{V_p^2}{2g}$	Pérdida de carga (modelo efectivo)
F4	$H_{\text{gross}} = \frac{V_j^2}{2g} + h_L$	Energía entre embalse y salida de boquilla
F5	$Q = A_j V_j = A_p V_p$	Continuidad
F6	$P_{\text{máx}} = \frac{1}{2} \rho Q V_j^2$	Pelton ideal: máximo a $u = V_j/2$

Desarrollo (paso a paso)

Paso 1. Head bruto (F1)

$$H_{\text{gross}} = (975 - 250) \text{ m} = 725,000 \text{ m}$$

$$H_{\text{gross}} = 725,000 \text{ m}$$

Paso 2. Áreas (F2)

$$A_p = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi (0,90)^2}{4} = 0,636 \text{ m}^2, \quad A_j = \frac{\pi D_j^2}{4} = \frac{\pi (0,20)^2}{4} = 0,031 \text{ m}^2$$

$$A_p = 0,636 \text{ m}^2 \quad A_j = 3,142 \times 10^{-2} \text{ m}^2$$

Paso 3. Ecuación de energía con pérdidas (F3–F5)

Por continuidad:

$$V_j = \frac{Q}{A_j}, \quad V_p = \frac{Q}{A_p}$$

y por energía:

$$H_{\text{gross}} = \frac{V_j^2}{2g} + f \left(\frac{\ell}{D} \right) \frac{V_p^2}{2g} = \frac{1}{2g} \left[\left(\frac{Q}{A_j} \right)^2 + f \left(\frac{\ell}{D} \right) \left(\frac{Q}{A_p} \right)^2 \right]$$

Despejando Q :

$$Q = \sqrt{\frac{2gH_{\text{gross}}}{\left(\frac{1}{A_j^2} \right) + f \left(\frac{\ell}{D} \right) \left(\frac{1}{A_p^2} \right)}}$$

Sustituyendo:

$$Q = \sqrt{\frac{2(9,81)(725)}{\left(\frac{1}{0,031416^2} \right) + 0,032 \left(\frac{1020}{0,90} \right) \left(\frac{1}{0,6362^2} \right)}} = 3,591 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$Q = 3,591 \text{ m}^3/\text{s}$$

Paso 4. Velocidades y verificación de head

$$V_j = \frac{Q}{A_j} = \frac{3,591}{0,031416} = 114,340 \text{ m/s}, \quad V_p = \frac{Q}{A_p} = \frac{3,591}{0,6362} = 5,647 \text{ m/s}$$

$$h_L = f \left(\frac{\ell}{D} \right) \frac{V_p^2}{2g} = 0,032 \left(\frac{1020}{0,90} \right) \frac{(5,647)^2}{2(9,81)} = 58,830 \text{ m}$$

$$\frac{V_j^2}{2g} = \frac{(114,34)^2}{2(9,81)} = 666,170 \text{ m}$$

$$\text{Chequeo: } \frac{V_j^2}{2g} + h_L = 666,170 \text{ m} + 58,830 \text{ m} = 725,000 \text{ m} \approx H_{\text{gross}}$$

$$V_j = 114,340 \text{ m/s} \quad h_L = 58,830 \text{ m}$$

Paso 5. Potencia máxima disponible (Pelton ideal) (F6)

Para una Pelton ideal, la potencia extraída se maximiza cuando $u = V_j/2$ y:

$$P_{\text{máx}} = \frac{1}{2} \rho Q V_j^2 = \frac{1}{2} (998,2)(3,591)(114,34^2) = 2,341 \times 10^7 \text{ W}$$

$$P_{\text{máx}} = 2,340 \times 10^7 \text{ W} = 23,410 \text{ MW}$$

Nota:

El head se divide entre energía cinética del chorro ($V_j^2/2g$) y pérdidas h_L . Aquí, aunque el head bruto es grande, la boquilla pequeña limita el caudal y por tanto la potencia.

Ejercicio 2. Turbina Pelton: velocidad y potencia máxima (con $\eta = 80\%$)

Enunciado

Una turbina Pelton tiene radio $r = 1,830$ m. La velocidad del chorro es $V = 102,000$ m/s y el diámetro de la boquilla es $d = 0,100$ m. El cubo (bucket) desvía el chorro un ángulo de $165,000^\circ$. Si la eficiencia de la turbina es $\eta = 0,800$, encuentre:

- (a) la velocidad de rotación (rpm) para potencia máxima,
- (b) la potencia máxima producida.

Tabla de variables iniciales

Variable	Valor	Descripción
r	1,830 m	Radio de la rueda
V	102,000 m/s	Velocidad del chorro
d	0,100 m	Diámetro de boquilla
θ	$165,000^\circ$	Ángulo de desvío del chorro (turning angle)
β	$180^\circ - \theta = 15,000^\circ$	Ángulo efectivo de salida para componente tangencial
η	0,80	Eficiencia
ρ	$998,200 \text{ kg/m}^3$	Densidad del agua

Tabla de fórmulas

ID	Fórmula	Uso
F1	$Q = AV, \quad A = \frac{\pi d^2}{4}$	Caudal del chorro
F2	$u_{\text{máx}} = \frac{V}{2}$	Para potencia máxima (Pelton ideal)
F3	$\text{rpm} = \frac{2\pi r}{60}$	Conversión velocidad tangencial $\rightarrow$ rpm
F4	$P_{\text{máx,ideal}} = \rho Q(1 + \cos \beta) u(V - u)$	Potencia ideal con deflexión (sin pérdidas de $ V_r $)
F5	$P_{\text{máx}} = \eta P_{\text{máx,ideal}}$	Potencia real

Desarrollo

Paso 1. Caudal del chorro (F1)

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi (0,10)^2}{4} = 0,008 \text{ m}^2$$

$$Q = AV = (0,007854)(102) = 0,801 \text{ m}^3/\text{s}$$

Caudal: $Q = 0,801 \text{ m}^3/\text{s}$

Paso 2. Velocidad tangencial para potencia máxima (F2)

$$u_{\text{máx}} = \frac{V}{2} = \frac{102}{2} = 51,000 \text{ m/s}$$

Velocidad óptima: $u_{\text{máx}} = 51,000 \text{ m/s}$

Paso 3. rpm (F3)

$$\text{rpm} = \frac{u}{2\pi r} 60 = \frac{51}{2\pi(1,83)} 60 = 266,000 \text{ rpm}$$

(rpm para $P_{\text{máx}}$): $\text{rpm} \approx 266,000 \text{ rpm}$

Paso 4. Potencia máxima (F4–F5)

Con $\theta = 165,000^\circ \Rightarrow \beta = 180^\circ - \theta = 15,000^\circ$:

$$1 + \cos \beta = 1 + \cos(15^\circ) = 1,9659$$

$$P_{\text{máx,ideal}} = \rho Q(1 + \cos \beta) u(V - u) = (998,2)(0,801)(1,9659)(51)(102 - 51) = 4,082 \times 10^6 \text{ W}$$

$$P_{\text{máx}} = \eta P_{\text{máx,ideal}} = 0,80(4,082 \times 10^6) = 3,266 \times 10^6 \text{ W}$$

(Potencia máxima: $P_{\text{máx}} \approx 3,270 \text{ MW} \approx 3,200 \text{ MW}$

Ejercicio 3. Turbina Francis (flujo radial): β_2 , β_1 y head bruto

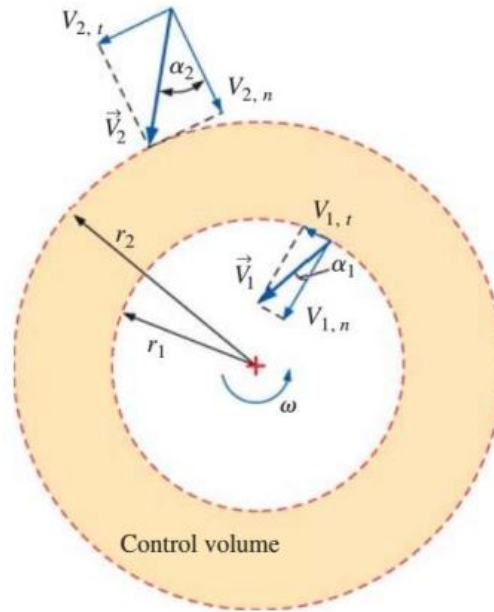


Figure 2

Figura 2: Volumen de control (turbina de flujo radial).

Enunciado

Para una turbina Francis se conocen: $r_2 = 2,000$ m, $r_1 = 1,300$ m, $b_2 = 0,850$ m, $b_1 = 2,100$ m, $\beta_2 = 71,400^\circ$, $\beta_1 = 15,300^\circ$, $n = 160,000$ rpm y $Q = 80,000$ m³/s. Usando el procedimiento de clase (continuidad $\rightarrow$ triángulos $\rightarrow$ Euler), calcular α_2 , α_1 , la potencia al eje (modelo ideal) y el head neto ideal.

Tabla de variables iniciales

Variable	Valor (SI)	Descripción
r_2, r_1	2,000 m, 1,300 m	Radio entrada/salida
b_2, b_1	0,850 m, 2,100 m	Anchos entrada/salida
β_2, β_1	71,400°, 15,300°	Ángulos de álabe (flujo relativo)
n	160,000 rpm	Velocidad de giro
Q	80,000 m ³ /s	Caudal
ρ	998,200 kg/m ³	Agua
g	9,810 m/s ²	Gravedad

Tabla de fórmulas (procedimiento de clase)

ID	Fórmula	Uso
G1	$Q = 2\pi r b V_n \Rightarrow V_n = \frac{Q}{2\pi r b}$	Continuidad en anillo (componente normal/radial)
G2	$\omega = \frac{2\pi n}{60}, U = \omega r$	Velocidad angular y periférica
G3	$\tan \beta = \frac{V_t}{U - V_t} \Rightarrow V_t = U - \frac{V_n}{\tan \beta}$	Triángulo de velocidades (usa β para hallar V_t)
G4	$\tan \alpha = \frac{V_t}{V_n}$	Ángulo absoluto del flujo (α desde radial)
G5	$\dot{W} = \rho Q (U_2 V_{2,t} - U_1 V_{1,t})$	Ecuación de Euler (turbina ideal)
G6	$H = \frac{\dot{W}}{\rho g Q}$	Head neto ideal

Desarrollo (paso a paso)

Paso 1. Componentes normales $V_{2,n}$ y $V_{1,n}$ (G1)

$$V_{2,n} = \frac{Q}{2\pi r_2 b_2} = \frac{80}{2\pi(2,0)(0,85)} = 7,490 \text{ m/s}$$
$$V_{1,n} = \frac{Q}{2\pi r_1 b_1} = \frac{80}{2\pi(1,3)(2,10)} = 4,664 \text{ m/s}$$
$$V_{2,n} = 7,490 \text{ m/s} \quad V_{1,n} = 4,664 \text{ m/s}$$

Paso 2. Velocidades periféricas U_2 y U_1 (G2)

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{2\pi(160)}{60} = 16,755 \text{ rad/s}$$
$$U_2 = \omega r_2 = (16,755)(2,0) = 33,510 \text{ m/s}, \quad U_1 = \omega r_1 = (16,755)(1,3) = 21,782 \text{ m/s}$$
$$\omega = 16,755 \text{ rad/s} \quad U_2 = 33,510 \text{ m/s} \quad U_1 = 21,782 \text{ m/s}$$

Paso 3. Componentes tangenciales $V_{2,t}$ y $V_{1,t}$ usando β (G3)

En el triángulo de velocidades (como en el ejemplo resuelto en clase), se usa:

$$\tan \beta = \frac{V_n}{U - V_t} \Rightarrow V_t = U - \frac{V_n}{\tan \beta}$$
$$V_{2,t} = U_2 - \frac{V_{2,n}}{\tan \beta_2} = 33,510 - \frac{7,490}{\tan(71,4^\circ)} = 30,990 \text{ m/s}$$
$$V_{1,t} = U_1 - \frac{V_{1,n}}{\tan \beta_1} = 21,782 - \frac{4,664}{\tan(15,3^\circ)} = 4,733 \text{ m/s}$$
$$V_{2,t} = 30,990 \text{ m/s} \quad V_{1,t} = 4,733 \text{ m/s}$$

Paso 4. Ángulos absolutos α_2 y α_1 (G4)

$$\alpha_2 = \arctan \left(\frac{V_{2,t}}{V_{2,n}} \right) = \arctan \left(\frac{30,990}{7,490} \right) = 76,410^\circ$$
$$\alpha_1 = \arctan \left(\frac{V_{1,t}}{V_{1,n}} \right) = \arctan \left(\frac{4,733}{4,664} \right) = 45,420^\circ$$
$$\alpha_2 = 76,410^\circ \quad \alpha_1 = 45,420^\circ$$

Paso 5. Potencia ideal y head neto ideal (Euler) (G5–G6)

$$\dot{W} = \rho Q (U_2 V_{2,t} - U_1 V_{1,t})$$
$$\dot{W} = (998,2)(80) [(33,510)(30,990) - (21,782)(4,733)] = 7,470 \times 10^7 \text{ W}$$
$$\dot{W} = 7,470 \times 10^7 \text{ W} = 74,700 \text{ MW}$$
$$H = \frac{\dot{W}}{\rho g Q} = \frac{7,470 \times 10^7}{(998,2)(9,81)(80)} = 95,350 \text{ m}$$
$$H = 95,350 \text{ m}$$

Nota:

Si $V_{2,t}$ es grande (flujo con *swirl* a la entrada) y $V_{1,t}$ es relativamente pequeño a la salida, entonces $U_2 V_{2,t} - U_1 V_{1,t} > 0$ y la turbina entrega potencia al eje, consistente con el signo de Euler.