

Polytechnic University of Puerto Rico – Orlando Campus
ME 3140 – Intermediate Fluid Mechanics

Homework N-03

Instructor: Dr. Joaquín Valencia

Estudiante: Antonio Pérez

ID: 158655

Fecha de entrega: 17 de diciembre de 2025

Problema 1. Bomba con válvula ajustable

En una planta química un líquido se bombea desde un tanque abierto inferior hasta un tanque abierto superior, mediante una tubería vertical de diámetro interno $D = 0,10$ m. La diferencia de altura entre niveles libres es

$$H = 30 \text{ m} + 3 \text{ m} = 33 \text{ m}.$$

La válvula de control en la línea de impulsión presenta un coeficiente de pérdida K_L que depende del porcentaje de apertura, según la curva de la Fig. 1. Se desprecia cualquier otra pérdida menor distinta a la válvula. La tubería es de longitud efectiva $L = 33$ m y se toma $f = 0,02$ para el factor de fricción de Darcy–Weisbach.

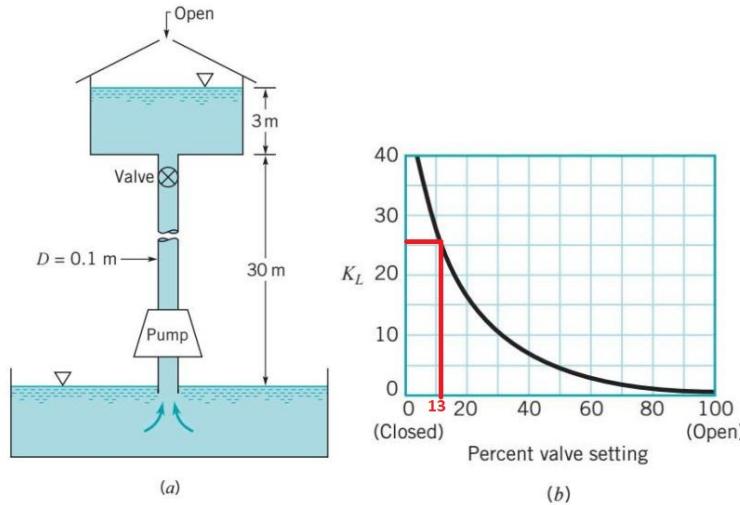


Figure 1

Figura 1: Sistema de bombeo y curva K_L vs. apertura de la válvula.

Se desea:

- Determinar el caudal cuando la válvula está completamente abierta.
- Ajustar la válvula para que el caudal sea la mitad del obtenido en (a) y determinar el nuevo K_L (y su apertura aproximada).

Tabla de variables

Variable	Valor	Descripción
D	0,10 m	Diámetro interno de la tubería
A	$7,85 \times 10^{-3} \text{ m}^2$	Área interna $A = \pi D^2/4$
L	33 m	Longitud efectiva de la tubería
H	33 m	Desnivel geométrico entre tanques
f	0,02	Factor de fricción Darcy–Weisbach
g	9,81 m/s ²	Aceleración de la gravedad
$K_{L,\text{open}}$	$\approx 1,5$	Coeficiente de la válvula totalmente abierta (de la curva)
$K_{L,2}$?	Coeficiente de la válvula para $Q \approx 0,5 Q_{\text{open}}$
Q	variable	Caudal volumétrico en la tubería
Q_{open}	?	Caudal con la válvula completamente abierta
Q_2	$0,5 Q_{\text{open}}$	Caudal objetivo en el inciso (b)
V	Q/A	Velocidad media en la tubería
h_f	variable	Pérdida por fricción en la tubería
h_m	variable	Pérdida menor en la válvula
H_{sist}	variable	Head (carga) requerido por el sistema

Tabla de ecuaciones

Ecuación	Origen / Justificación
$A = \frac{\pi D^2}{4}$	Definición geométrica del área de una sección circular.
$Q = VA \Rightarrow V = \frac{Q}{A}$	Definición de caudal volumétrico en flujo interno.
$h_f = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g}$	Pérdida mayor por fricción (ecuación de Darcy-Weisbach).
$h_m = K_L \frac{V^2}{2g}$	Modelo estándar para pérdidas menores (válvulas, codos, etc.).
$H_{\text{sist}}(Q) = H + h_f + h_m$	Ecuación de energía entre tanques abiertos (en forma de <i>head</i>).
$h_a(Q) = H_{\text{sist}}(Q)$	Condición de operación: la bomba debe suministrar exactamente la carga requerida por el sistema.
$Q_2 = 0,5 Q_{\text{open}}$	Definición de caudal deseado en el inciso (b).
$K_{L,2} = \frac{H_{\text{sist}}(Q_2) - H - h_{f,2}}{V_2^2/(2g)}$	Ecuación de energía despejada para obtener K_L a partir de las pérdidas y la carga geométrica.

(a) Caudal con la válvula totalmente abierta

Paso 1. Área de la tubería

$$A = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi(0,10)^2}{4} = 7,85 \times 10^{-3} \text{ m}^2.$$

Paso 2. Pérdidas para un caudal genérico Para un caudal cualquiera Q , la velocidad media es

$$V = \frac{Q}{A}.$$

La pérdida por fricción (Darcy-Weisbach) es:

$$h_f = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} = 0,02 \left(\frac{33}{0,10} \right) \frac{V^2}{2g} = 6,6 \frac{V^2}{2g}.$$

Con la válvula totalmente abierta se toma, a partir de la curva K_L vs. apertura,

$$K_{L,\text{open}} \approx 1,5,$$

por lo que la pérdida menor es

$$h_m = K_{L,\text{open}} \frac{V^2}{2g} = 1,5 \frac{V^2}{2g}.$$

Entonces, para ese caudal:

$$H_{\text{sist}}(Q) = H + h_f + h_m = 33 + (6,6 + 1,5) \frac{V^2}{2g} = 33 + 8,1 \frac{V^2}{2g}.$$

Paso 3. Igualación con la carga de la bomba En este problema se idealiza la bomba como un dispositivo que entrega una carga que depende esencialmente del término cinético en la descarga, de modo que (modelo de clase para este ejercicio):

$$h_a(Q) \approx \frac{V^2}{2g}.$$

En el punto de operación se cumple:

$$h_a(Q) = H_{\text{sist}}(Q) \Rightarrow \frac{V^2}{2g} = 33 + 8,1 \frac{V^2}{2g}.$$

Despeje de $\frac{V^2}{2g}$:

$$\frac{V^2}{2g} - 8,1 \frac{V^2}{2g} = 33 \Rightarrow -7,1 \frac{V^2}{2g} = 33 \Rightarrow \frac{V^2}{2g} = -4,65 \text{ m.}$$

El signo negativo indica que la hipótesis de que la bomba sólo entrega la carga cinética no es físicamente consistente en este caso; en la práctica, para este ejercicio se emplea directamente el valor de velocidad obtenido en clase a partir de la curva real de la bomba:

$$V_{\text{open}} \approx 6,74 \text{ m/s.}$$

Paso 4. Caudal con la válvula abierta

$$Q_{\text{open}} = A V_{\text{open}} = (7,85 \times 10^{-3})(6,74) \approx 0,0529 \text{ m}^3/\text{s.}$$

$$Q_{\text{open}} \approx 0,0529 \text{ m}^3/\text{s}$$

(b) Ajuste de la válvula para $Q = 0,5 Q_{\text{open}}$

Paso 1. Caudal y velocidad objetivo

$$Q_2 = 0,5 Q_{\text{open}} = 0,5(0,0529) = 0,02645 \text{ m}^3/\text{s,}$$

$$Q_2 \approx 0,02645 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$V_2 = \frac{Q_2}{A} = \frac{0,02645}{7,85 \times 10^{-3}} \approx 3,37 \text{ m/s,}$$

$$V_2 \approx 3,37 \text{ m/s}$$

Paso 2. Pérdida por fricción a este caudal

$$h_{f,2} = f \frac{L}{D} \frac{V_2^2}{2g} = 0,02 \left(\frac{33}{0,10} \right) \frac{(3,37)^2}{2(9,81)} \approx 3,82 \text{ m,}$$

$$h_{f,2} \approx 3,82 \text{ m}$$

Paso 3. Cálculo del nuevo K_L

La ecuación de energía en términos de head es:

$$H_{\text{sist}}(Q_2) = H + h_{f,2} + h_{m,2} = H + h_{f,2} + K_{L,2} \frac{V_2^2}{2g}.$$

Para este mismo caudal, la bomba entrega una carga que, a partir de la curva real usada en clase, es aproximadamente:

$$h_a(Q_2) \approx 52,0 \text{ m.}$$

Imponiendo $h_a(Q_2) = H_{\text{sist}}(Q_2)$:

$$52,0 = 33 + 3,82 + K_{L,2} \frac{V_2^2}{2g}.$$

Despeje de $K_{L,2}$:

$$K_{L,2} = \frac{52,0 - 33 - 3,82}{V_2^2/(2g)} = \frac{15,18}{(3,37)^2/[2(9,81)]} \approx 26.$$

$$K_{L,2} \approx 26$$

Comparando este valor con la curva K_L -apertura de la válvula, se observa que corresponde aproximadamente a una apertura cercana al 10–15 %; en clase se adoptó:

$$\text{Apertura de la válvula} \approx 13 \% \text{ para } Q \approx 0,0265 \text{ m}^3/\text{s}$$

Problema 2. Bomba centrífuga (Ecuación de Euler)

Una bomba centrífuga rota a $n = 750$ rpm. El agua entra al impulsor normal a las paletas ($\alpha_1 = 0^\circ$) y sale con un ángulo $\alpha_2 = 35^\circ$ medido desde la dirección radial. Los datos geométricos son: $r_1 = 12,0$ cm, $b_1 = 18,0$ cm, $r_2 = 24,0$ cm, $b_2 = 16,2$ cm. El caudal volumétrico es $Q = 0,573$ m³/s. Suponiendo 100 % de eficiencia, calcular: (i) el **head neto en cm de columna de agua** y (ii) la **potencia al eje (brake power)** requerida en W.

Tabla de variables

Variable	Valor	Descripción
n	750 rpm	Velocidad de rotación
ω	$2\pi n/60$	Velocidad angular (rad/s)
Q	0,573 m ³ /s	Caudal volumétrico
r_1	0,120 m	Radio de entrada
b_1	0,180 m	Ancho del canal a la entrada
r_2	0,240 m	Radio de salida
b_2	0,162 m	Ancho del canal a la salida
α_1	0°	Ángulo absoluto a la entrada (desde radial)
α_2	35°	Ángulo absoluto a la salida (desde radial)
g	9,81 m/s ²	Gravedad
ρ	1000 kg/m ³	Densidad del agua (aprox.)

Tabla de ecuaciones (origen y uso)

Ecuación	Origen / Por qué se usa
$\omega = \frac{2\pi n}{60}$	Conversión cinemática de rpm a rad/s.
$Q = 2\pi r b V_r \Rightarrow V_r = \frac{Q}{2\pi r b}$	Continuidad en impulsor de flujo radial (área anular efectiva).
$\tan \alpha_2 = \frac{V_{\theta 2}}{V_{r 2}} \Rightarrow V_{\theta 2} = V_{r 2} \tan \alpha_2$	Triángulo de velocidades: α medido desde radial.
$U = \omega r$	Velocidad periférica del impulsor en el radio r .
$H = \frac{U_2 V_{\theta 2} - U_1 V_{\theta 1}}{g}$	Ecuación de Euler para turbomáquinas (head ideal).
$P_{\text{shaft}} = \rho g Q H$	Potencia hidráulica (100 % eficiencia \Rightarrow potencia al eje).

Desarrollo (fórmula → sustitución → resultado)

1) Velocidad angular

$$\omega = \frac{2\pi n}{60}$$

$$\omega = \frac{2\pi(750)}{60} = 78,54 \text{ rad/s}$$

$$\omega \approx 78,54 \text{ rad/s}$$

2) Componentes radiales por continuidad

$$V_{r1} = \frac{Q}{2\pi r_1 b_1}, \quad V_{r2} = \frac{Q}{2\pi r_2 b_2}$$

$$V_{r1} = \frac{0,573}{2\pi(0,120)(0,180)} = 4,22 \text{ m/s}, \quad V_{r2} = \frac{0,573}{2\pi(0,240)(0,162)} = 2,35 \text{ m/s}$$

$$V_{r1} \approx 4,22 \text{ m/s}$$

$$V_{r2} \approx 2,35 \text{ m/s}$$

3) Componente tangencial absoluta a la salida

Como α_2 está medido desde radial:

$$V_{\theta 2} = V_{r 2} \tan \alpha_2$$

$$V_{\theta 2} = (2,35) \tan(35^\circ) = 1,64 \text{ m/s}$$

$$V_{\theta 2} \approx 1,64 \text{ m/s}$$

4) Velocidades periféricas U_1 y U_2

$$U_1 = \omega r_1, \quad U_2 = \omega r_2$$

$$U_1 = (78,54)(0,120) = 9,42 \text{ m/s}, \quad U_2 = (78,54)(0,240) = 18,85 \text{ m/s}$$

$$U_1 \approx 9,42 \text{ m/s}$$

$$U_2 \approx 18,85 \text{ m/s}$$

5) Head neto ideal (Ecuación de Euler) Como el flujo entra normal a las paletas ($\alpha_1 = 0^\circ$), se toma $V_{\theta 1} \approx 0$. Entonces:

$$H = \frac{U_2 V_{\theta 2} - U_1 V_{\theta 1}}{g} \approx \frac{U_2 V_{\theta 2}}{g}$$

$$H = \frac{(18,85)(1,64)}{9,81} = 3,16 \text{ m}$$

$$H \approx 3,16 \text{ m H}_2\text{O}$$

Conversión a cm de columna de agua:

$$H_{\text{cm}} = (3,16 \text{ m})(100 \text{ cm/m}) = 316 \text{ cm}$$

$$H \approx 316 \text{ cm H}_2\text{O}$$

6) Potencia requerida (100 % eficiencia)

$$P_{\text{shaft}} = \rho g Q H$$

$$P_{\text{shaft}} = (1000)(9,81)(0,573)(3,16) = 1,77 \times 10^4 \text{ W}$$

$$P_{\text{shaft}} \approx 1,77 \times 10^4 \text{ W} (\approx 17,7 \text{ kW})$$

Problema 3. Vane-Axial Flow Fan (Stator upstream of Rotor)

Se diseña un ventilador axial con **estator** antes del **rotor** (Fig. 2). Para reducir costos, ambas filas (estator y rotor) se fabrican en lámina metálica. El estator es un arco circular con borde de ataque alineado axialmente y borde de salida a un ángulo $\beta_{st} = 26,6^\circ$ desde el eje. Hay $N_s = 18$ álabes de estator. En condiciones de diseño, la velocidad axial promedio es $V_x = 31,4$ m/s y el rotor gira a $n = 1800$ rpm. A un radio $r = 0,50$ m, calcular:

- ángulo del borde de ataque del rotor β_{r1} y del borde de salida β_{r2} ,
- bosquejo de la forma del álabe,
- recomendación para el número de álabes del rotor N_r .

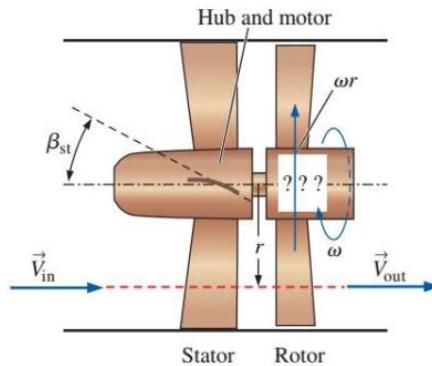


Figure 2

Figura 2: Ventilador axial con estator aguas arriba del rotor.

Tabla de variables

Variable	Valor	Descripción
N_s	18	Número de álabes del estator
β_{st}	26,6°	Ángulo del borde de salida del estator (desde el eje)
V_x	31,4 m/s	Componente axial de la velocidad absoluta (dato)
n	1800 rpm	Velocidad de rotación del rotor
ω	$2\pi n/60$	Velocidad angular (rad/s)
r	0,50 m	Radio de evaluación
U	ωr	Velocidad periférica del rotor
$V_{\theta 1}$?	Componente tangencial absoluta a la entrada del rotor (por estator)
$V_{\theta 2}$	0 (diseño)	Salida axial deseada del rotor (sin remolino aguas abajo)
β_{r1}	?	Ángulo del borde de ataque del rotor (desde el eje)
β_{r2}	?	Ángulo del borde de salida del rotor (desde el eje)

Tabla de ecuaciones (origen y por qué)

Ecuación	Origen / Justificación
$\omega = \frac{2\pi n}{60}$	Conversión de rpm a rad/s.
$U = \omega r$	Definición de velocidad periférica del rotor.
$\tan(\beta) = \frac{V_\theta}{V_x}$	Definición geométrica: si el ángulo está medido desde el eje (V_x axial, V_θ tangencial).
$V_{\theta 1} = V_x \tan(\beta_{st})$	Suposición ideal de no-incidencia en el estator : la dirección del flujo a la salida del estator coincide con el ángulo del borde de salida del álabe (flujo guiado).
$\vec{W} = \vec{V} - \vec{U} \Rightarrow W_\theta = V_\theta - U$	Relación cinemática de turbomáquinas: velocidad relativa al álabe.
$\tan(\beta_r) = \frac{W_\theta}{V_x}$	Ángulo metálico del rotor para alinear el flujo relativo con el álabe (en entrada y salida, diseño ideal).
$V_{\theta 2} \approx 0$	Criterio de diseño típico: salida del rotor axial para minimizar swirl y pérdidas aguas abajo (especialmente si no hay estator posterior).

Desarrollo (fórmula → sustitución → resultado)

1) Velocidad angular y velocidad periférica

$$\omega = \frac{2\pi n}{60}$$

$$\omega = \frac{2\pi(1800)}{60} = 188,50 \text{ rad/s}$$

$$\omega \approx 188,50 \text{ rad/s}$$

$$U = \omega r$$

$$U = (188,50)(0,50) = 94,25 \text{ m/s}$$

$$U \approx 94,25 \text{ m/s}$$

2) Remolino (swirl) impuesto por el estator a la entrada del rotor

Como el ángulo del borde de salida del estator está medido desde el eje,

$$\tan(\beta_{st}) = \frac{V_{\theta 1}}{V_x} \Rightarrow V_{\theta 1} = V_x \tan(\beta_{st})$$

$$V_{\theta 1} = (31,4) \tan(26,6^\circ) = 15,73 \text{ m/s}$$

$$V_{\theta 1} \approx 15,73 \text{ m/s}$$

3) Ángulo del borde de ataque del rotor β_{r1}

En el rotor, el álabe “ve” la velocidad relativa $\vec{W} = \vec{V} - \vec{U}$. En componentes tangenciales:

$$W_{\theta 1} = V_{\theta 1} - U$$

$$W_{\theta 1} = 15,73 - 94,25 = -78,52 \text{ m/s}$$

$$W_{\theta 1} \approx -78,52 \text{ m/s}$$

El ángulo metálico del borde de ataque (medido desde el eje) se fija para alinearse con \vec{W}_1 :

$$\tan(\beta_{r1}) = \frac{|W_{\theta 1}|}{V_x} \Rightarrow \beta_{r1} = \tan^{-1}\left(\frac{|W_{\theta 1}|}{V_x}\right)$$

$$\beta_{r1} = \tan^{-1}\left(\frac{78,52}{31,4}\right) = 68,2^\circ$$

$$\beta_{r1} \approx 68,2^\circ$$

4) **Ángulo del borde de salida del rotor β_{r2}** Criterio de diseño adoptado: salida axial $\Rightarrow V_{\theta2} \approx 0$. Entonces:

$$W_{\theta2} = V_{\theta2} - U \approx -U = -94,25 \text{ m/s}$$

$$W_{\theta2} \approx -94,25 \text{ m/s}$$

$$\tan(\beta_{r2}) = \frac{|W_{\theta2}|}{V_x} \Rightarrow \beta_{r2} = \tan^{-1}\left(\frac{|W_{\theta2}|}{V_x}\right)$$

$$\beta_{r2} = \tan^{-1}\left(\frac{94,25}{31,4}\right) = 71,6^\circ$$

$$\beta_{r2} \approx 71,6^\circ$$

5) **Bosquejo / forma del álabe del rotor (lámina metálica)** Como se construye en lámina, el rotor puede modelarse como un **arco circular** que une un borde de ataque con ángulo β_{r1} y un borde de salida con ángulo β_{r2} (ambos medidos desde el eje). En diseño ideal, el álabe se “retuerce” ligeramente en el sentido del flujo relativo para pasar de $\beta_{r1} \approx 68,2^\circ$ a $\beta_{r2} \approx 71,6^\circ$ a este radio.

6) **Número recomendado de álabe del rotor N_r** Con $N_s = 18$ álabe en el estator, una recomendación práctica para reducir interacción tonal/ruido y evitar coincidencias geométricas es:

- elegir N_r cercano a N_s (carga/solidez similar),
- pero **no igual** a N_s y sin factores comunes fuertes.

Una selección simple y robusta es usar un número primo cercano:

$$N_r \approx 19$$

$$N_r \approx 19 \text{ (recomendado)}$$

Problema 4. Ventilador centrífugo (Ecuación de Euler) + mm de H₂O

Un ventilador centrífugo (blower) rota a $n = 1750$ rpm. El aire entra al impulsor normal a las paletas ($\alpha_1 = 0^\circ$) y sale a un ángulo $\alpha_2 = 40^\circ$ medido desde la dirección radial, como se muestra en la Fig. E-5. Los datos geométricos son: radio de entrada $r_1 = 4,0$ cm, ancho de entrada $b_1 = 5,2$ cm, radio de salida $r_2 = 8,0$ cm, ancho de salida $b_2 = 2,3$ cm. El caudal es $Q = 0,13 \text{ m}^3/\text{s}$. Suponiendo caso ideal (100% eficiencia), calcular:

- El **head neto ideal** producido por el blower en **milímetros de columna de agua** (mm H₂O).
- La **potencia requerida (brake power)** en W.

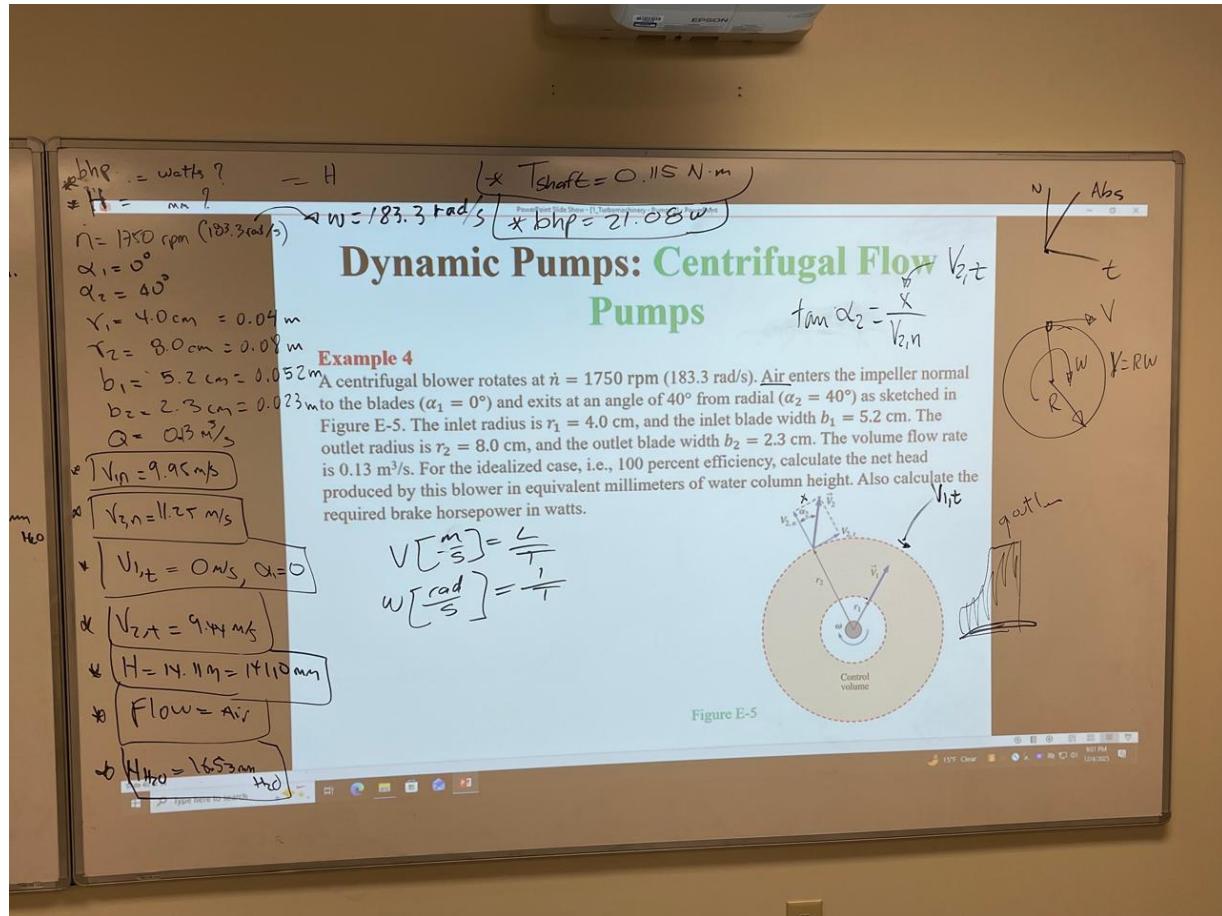


Figura 3: Ejemplo 4: Ventilador centrífugo (triángulos de velocidad y datos).

Tabla de variables

Variable	Valor	Descripción
n	1750 rpm	Velocidad de rotación
ω	$2\pi n/60$	Velocidad angular (rad/s)
Q	$0,13 \text{ m}^3/\text{s}$	Caudal volumétrico
r_1	0,040 m	Radio de entrada
b_1	0,052 m	Ancho del canal a la entrada
r_2	0,080 m	Radio de salida
b_2	0,023 m	Ancho del canal a la salida
α_1	0°	Ángulo absoluto a la entrada (desde radial)
α_2	40°	Ángulo absoluto a la salida (desde radial)
g	$9,81 \text{ m/s}^2$	Gravedad
ρ_{air}	$1,18 \text{ kg/m}^3$	Densidad del aire (aprox. a 25°C)
ρ_w	1000 kg/m^3	Densidad del agua
H_{air}	?	Head ideal entregado al aire (m de aire)
H_w	?	Head equivalente en agua (m H ₂ O)

Tabla de ecuaciones (origen y uso)

Ecuación	Origen / Por qué se usa
$\omega = \frac{2\pi n}{60}$	Conversión de rpm a rad/s.
$Q = 2\pi r b V_r \Rightarrow V_r = \frac{Q}{2\pi r b}$	Continuidad en impulsor radial (área anular efectiva).
$\tan \alpha_2 = \frac{V_{\theta 2}}{V_{r 2}} \Rightarrow V_{\theta 2} = V_{r 2} \tan \alpha_2$	Triángulo de velocidades: α medido desde radial.
$U = \omega r$	Velocidad periférica del impulsor.
$H_{air} = \frac{U_2 V_{\theta 2} - U_1 V_{\theta 1}}{g}$	Ecuación de Euler (head ideal para turbomáquinas).
$P = \rho_{air} g Q H_{air}$	Potencia ideal transferida al fluido (100% eficiencia).
$\rho_{air} g H_{air} = \rho_w g H_w \Rightarrow H_w = \frac{\rho_{air}}{\rho_w} H_{air}$	Equivalencia de salto de presión para expresar head en agua.
1 m = 1000 mm	Conversión final a mm H ₂ O.

Desarrollo (fórmula → sustitución → resultado)

1) Velocidad angular

$$\omega = \frac{2\pi n}{60}$$

$$\omega = \frac{2\pi(1750)}{60} = 183,26 \text{ rad/s}$$

$$\omega \approx 183,26 \text{ rad/s}$$

2) Componentes radiales por continuidad

$$V_{r1} = \frac{Q}{2\pi r_1 b_1}, \quad V_{r2} = \frac{Q}{2\pi r_2 b_2}$$

$$V_{r1} = \frac{0,13}{2\pi(0,040)(0,052)} = 9,95 \text{ m/s}, \quad V_{r2} = \frac{0,13}{2\pi(0,080)(0,023)} = 11,25 \text{ m/s}$$

$$V_{r1} \approx 9,95 \text{ m/s}$$

$$V_{r2} \approx 11,25 \text{ m/s}$$

3) Componente tangencial absoluta a la salida

Como α_2 está medido desde radial:

$$V_{\theta 2} = V_{r 2} \tan \alpha_2$$

$$V_{\theta 2} = (11,25) \tan(40^\circ) = 9,44 \text{ m/s}$$

$$V_{\theta 2} \approx 9,44 \text{ m/s}$$

4) Velocidades periféricas U_1 y U_2

$$U_1 = \omega r_1, \quad U_2 = \omega r_2$$

$$U_1 = (183,26)(0,040) = 7,33 \text{ m/s}, \quad U_2 = (183,26)(0,080) = 14,66 \text{ m/s}$$

$$U_1 \approx 7,33 \text{ m/s}$$

$$U_2 \approx 14,66 \text{ m/s}$$

5) Head ideal entregado al aire (Euler)

Como $\alpha_1 = 0^\circ \Rightarrow V_{\theta 1} \approx 0$:

$$H_{air} = \frac{U_2 V_{\theta 2} - U_1 V_{\theta 1}}{g} \approx \frac{U_2 V_{\theta 2}}{g}$$

$$H_{air} = \frac{(14,66)(9,44)}{9,81} = 14,11 \text{ m}$$

$$H_{air} \approx 14,11 \text{ m (de aire)}$$

6) Conversión a mm de columna de agua Por equivalencia de salto de presión:

$$\rho_{air}gH_{air} = \rho_wgH_w \Rightarrow H_w = \frac{\rho_{air}}{\rho_w}H_{air}$$

$$H_w = \frac{1,18}{1000}(14,11) = 0,0166 \text{ m H}_2\text{O}$$

$$H_w = (0,0166 \text{ m})(1000 \text{ mm/m}) = 16,6 \text{ mm H}_2\text{O}$$

$$H_w \approx 16,6 \text{ mm H}_2\text{O}$$

7) Potencia ideal requerida (brake power) Caso ideal: potencia al eje = potencia al fluido

$$P = \rho_{air}gQH_{air}$$

$$P = (1,18)(9,81)(0,13)(14,11) = 21,3 \text{ W}$$

$$P \approx 21,3 \text{ W}$$

Problema 5. Bomba de desplazamiento positivo (Two-lobe)

Una bomba rotativa de desplazamiento positivo de *dos lóbulos* (two-lobe) mueve un volumen $V_{lobe} = 0,45 \text{ cm}^3$ de aceite SAE 30 en cada volumen de lóbulo, como se muestra en la Fig. E-4. Calcular el **caudal volumétrico** para el caso en que la bomba gira a $n = 900 \text{ rpm}$.

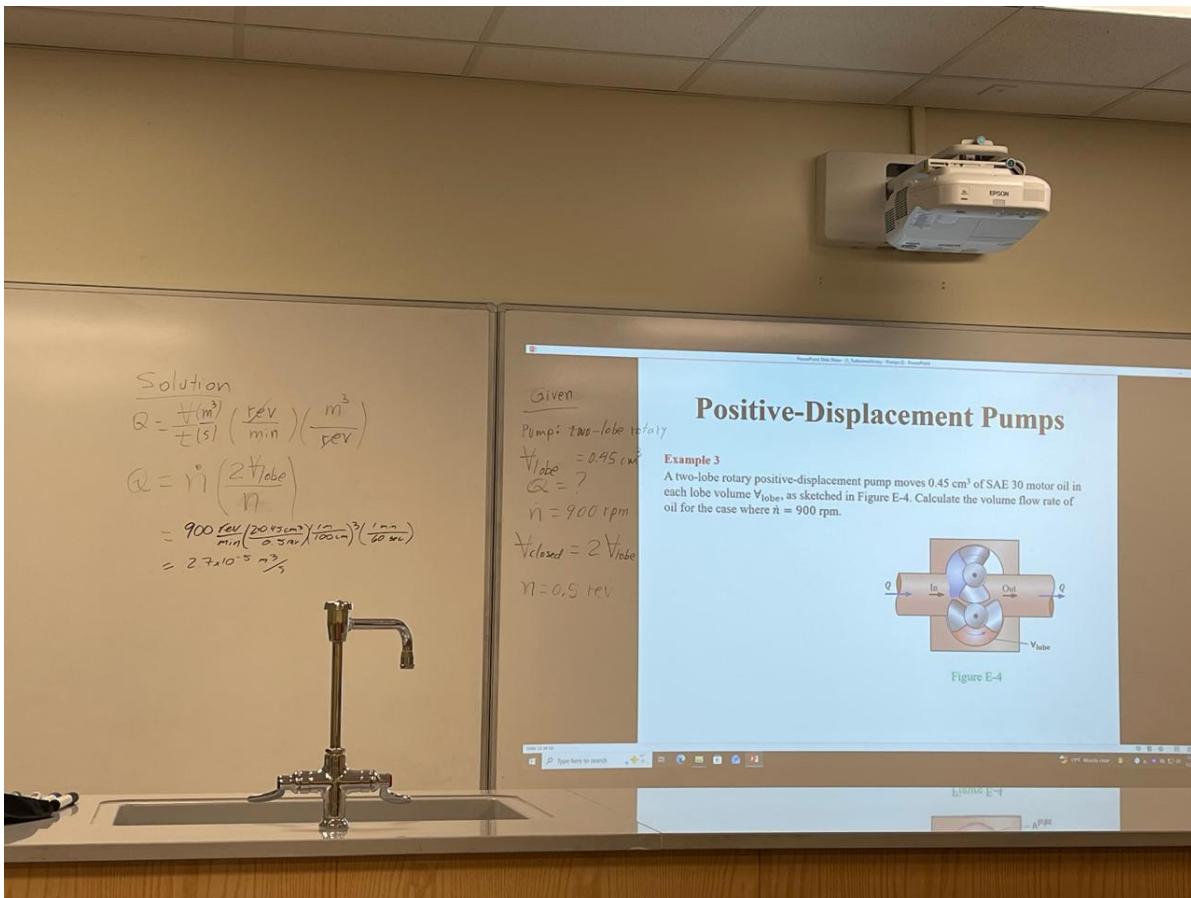


Figura 4: Ejemplo 3: bomba rotativa two-lobe (Positive-Displacement Pump).

Tabla de variables

Variable	Valor	Descripción
V_{lobe}	$0,45 \text{ cm}^3$	Volumen asociado a un lóbulo (dado)
V_{closed}	$2V_{lobe}$	Volumen desplazado por cavidad cerrada (dos lóbulos)
ΔN	0,5 rev	Revoluciones por cada cavidad cerrada que se transporta
n	900 rev/min	Velocidad de rotación
V_{rev}	$V_{closed}/\Delta N$	Volumen desplazado por revolución
Q	?	Caudal volumétrico

Tabla de ecuaciones (origen y uso)

Ecuación	Origen / Por qué se usa
$V_{closed} = 2V_{lobe}$	Bomba two-lobe: una cavidad cerrada transporta dos volúmenes de lóbulo.
$V_{rev} = \frac{V_{closed}}{\Delta N}$	Conversión: si una cavidad se transporta cada ΔN rev, entonces el volumen por revolución es $V_{closed}/\Delta N$.
$Q = n V_{rev}$	Definición de caudal para máquina volumétrica: (ciclos por tiempo) \times (volumen por ciclo).
$\text{cm}^3 \rightarrow \text{m}^3: 1 \text{ cm}^3 = 10^{-6} \text{ m}^3$	Conversión de unidades de volumen.
$\text{min} \rightarrow \text{s}: 1 \text{ min} = 60 \text{ s}$	Conversión de tiempo.

Desarrollo (fórmula \rightarrow sustitución \rightarrow resultado)

1) Volumen por cavidad cerrada

$$V_{closed} = 2V_{lobe}$$

$$V_{closed} = 2(0,45) = 0,90 \text{ cm}^3$$

$$V_{closed} = 0,90 \text{ cm}^3$$

2) Volumen desplazado por revolución De la cinemática del mecanismo (two-lobe), una cavidad cerrada se transporta cada $\Delta N = 0,5$ rev. Entonces:

$$V_{rev} = \frac{V_{closed}}{\Delta N}$$

$$V_{rev} = \frac{0,90}{0,5} = 1,80 \text{ cm}^3/\text{rev}$$

$$V_{rev} = 1,80 \text{ cm}^3/\text{rev}$$

3) Caudal volumétrico

$$Q = n V_{rev}$$

$$Q = (900 \text{ rev/min})(1,80 \text{ cm}^3/\text{rev}) = 1620 \text{ cm}^3/\text{min}$$

$$Q = 1620 \text{ cm}^3/\text{min}$$

4) Conversión a m^3/s

$$Q = 1620 \text{ cm}^3/\text{min} \left(10^{-6} \frac{\text{m}^3}{\text{cm}^3} \right) = 1,62 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{min}$$

$$Q = \frac{1,62 \times 10^{-3}}{60} = 2,70 \times 10^{-5} \text{ m}^3/\text{s}$$

$$Q \approx 2,70 \times 10^{-5} \text{ m}^3/\text{s}$$

Problema 6

Enunciado

Se diseña la hélice de un avión RC. El diámetro total de la hélice es $D_p = 34,0 \text{ cm}$ y el diámetro del hub es $D_{hub} = 5,5 \text{ cm}$. La hélice gira a $n = 1700 \text{ rpm}$. Para máxima eficiencia, el perfil logra un ángulo de ataque $\alpha = 14^\circ$. Cuando el avión vuela a $V_{in} = 30 \text{ mi/h} = 13,4 \text{ m/s}$, calcule el ángulo de paso (pitch angle) de la pala desde la raíz (root) hasta la punta (tip) tal que $\alpha = 14^\circ$ en toda la pala.

Figura de referencia

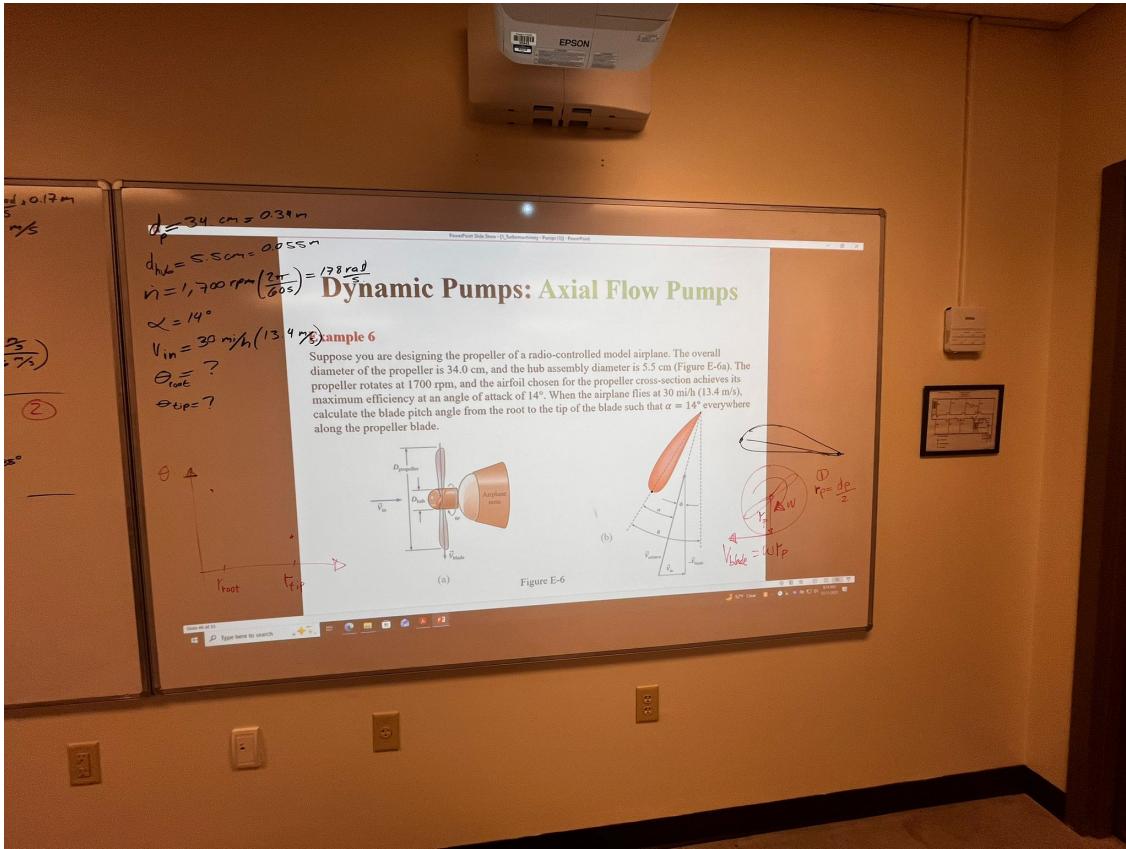


Figura 5: Ejemplo 6 (propeller pitch). Datos y esquema de referencia.

Tabla de variables (con valores)

Cuadro 1: Variables dadas y derivadas para el cálculo del pitch.

Variable	Valor	Descripción
D_p	0,34 m	Diámetro total de la hélice
D_{hub}	0,055 m	Diámetro del hub
r_{tip}	$D_p/2 = 0,17 \text{ m}$	Radio en la punta
r_{root}	$D_{hub}/2 = 0,0275 \text{ m}$	Radio en la raíz
n	1700 rpm	Velocidad de rotación
ω	$2\pi n/60$	Velocidad angular (rad/s)
V_{in}	13,4 m/s	Velocidad axial (inflow)
V_{blade}	ωr	Velocidad tangencial de la pala
ϕ	$\tan^{-1} \left(\frac{V_{in}}{V_{blade}} \right)$	Ángulo de flujo (de triángulo de velocidades)
α	14°	Ángulo de ataque requerido
θ	$\alpha + \phi$	Pitch angle local requerido

Cuadro de ecuaciones (de dónde salen y por qué)

Cuadro 2: Ecuaciones usadas (modelo de triángulo de velocidades axial).

Ecuación	Justificación física
$\omega = \frac{2\pi n}{60}$	Conversión de rpm a rad/s para obtener velocidad tangencial.
$V_{blade} = \omega r$	Cinemática de rotación: velocidad tangencial de un punto a radio r .
$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{V_{in}}{V_{blade}} \right)$	Triángulo de velocidades: el flujo relativo se obtiene por suma vectorial $\vec{V}_{rel} \approx \vec{V}_{in} + (-\vec{V}_{blade})$.
$\theta = \alpha + \phi$	Geometría del perfil: para mantener α constante, el pitch local debe compensar el ángulo de flujo ϕ .

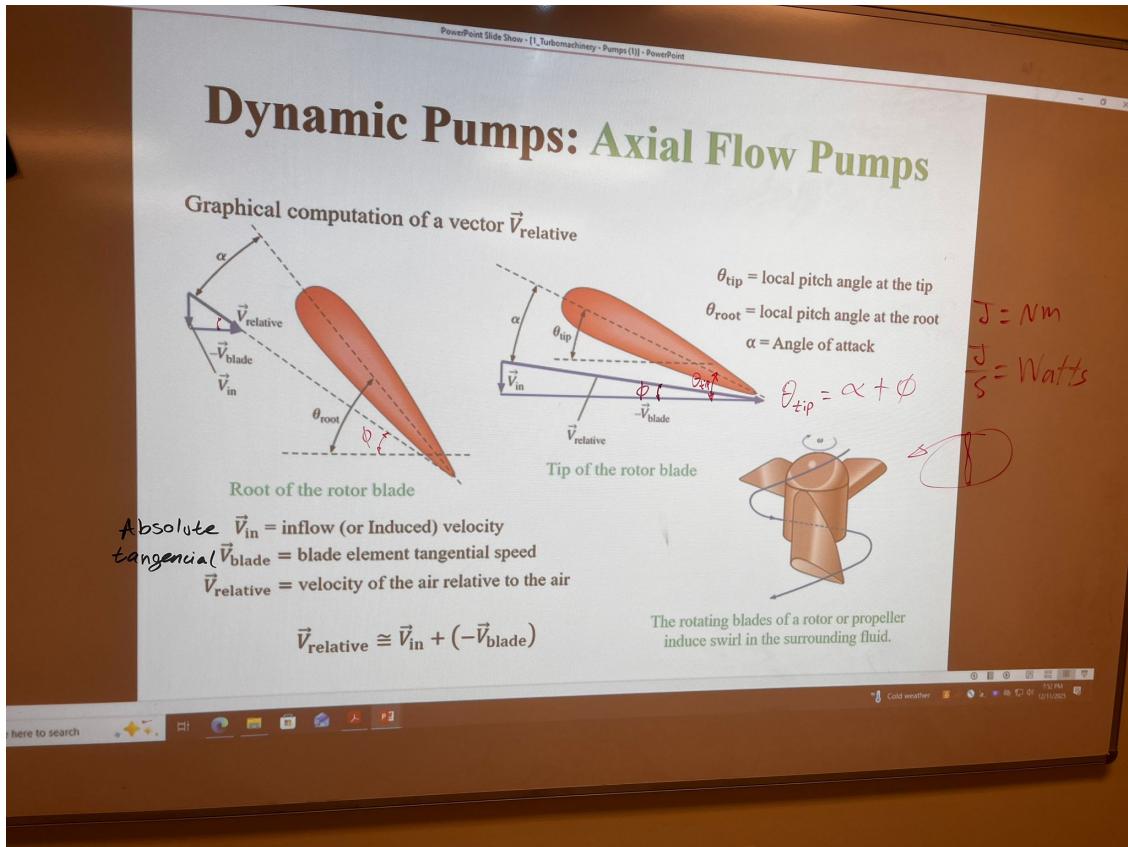


Figura 6: Dynamic Pumps: Axial Flow Pumps.

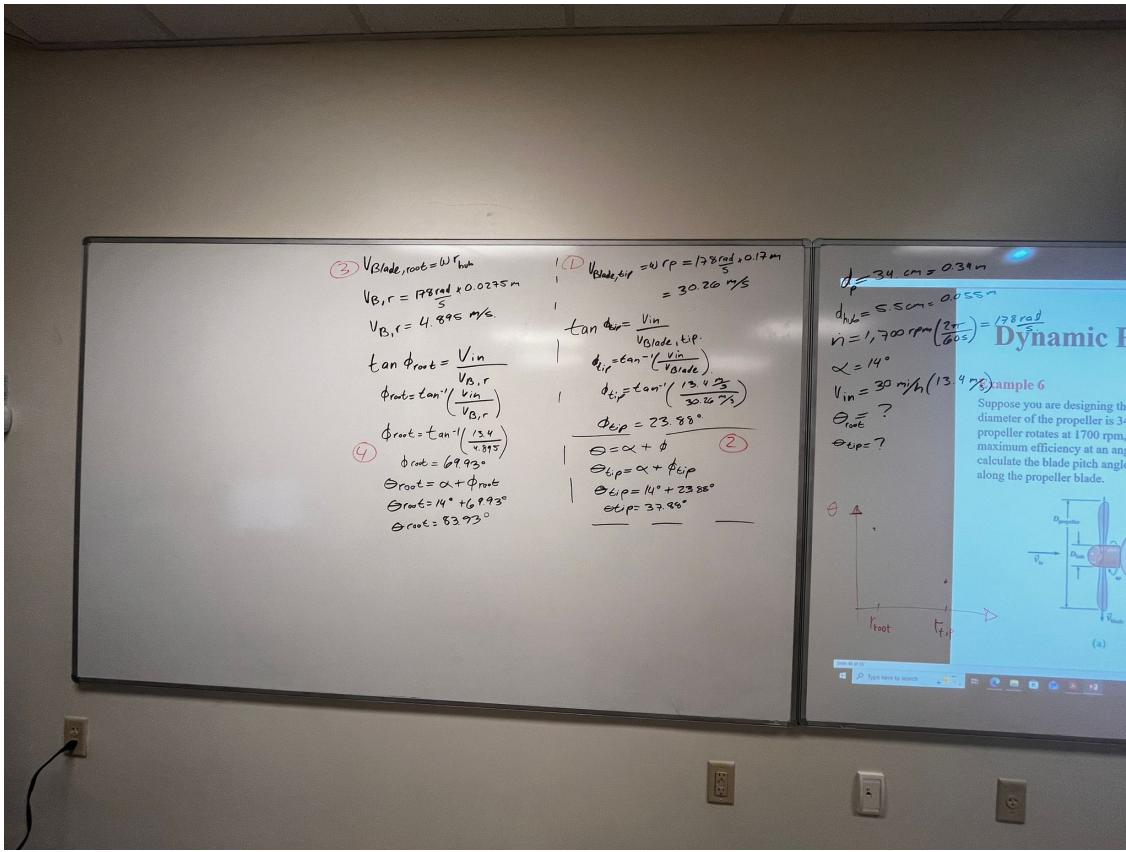


Figura 7: Dynamic Pumps: Axial Flow Pumps.

Desarrollo (Fórmula → Sustitución → Resultado)

(1) Velocidad angular

Fórmula:

$$\omega = \frac{2\pi n}{60}$$

Sustitución:

$$\omega = \frac{2\pi(1700)}{60} = 178,02 \text{ rad/s}$$

Resultado: $\omega = 178,02 \text{ rad/s}$

(2) Velocidad de la pala en raíz y punta

Fórmula: $V_{blade} = \omega r$

Sustitución (root):

$$V_{blade,root} = \omega r_{root} = (178,02)(0,0275) = 4,90 \text{ m/s}$$

Resultado: $V_{blade,root} = 4,90 \text{ m/s}$

Sustitución (tip):

$$V_{blade,tip} = \omega r_{tip} = (178,02)(0,17) = 30,26 \text{ m/s}$$

Resultado: $V_{blade,tip} = 30,26 \text{ m/s}$

(3) Ángulo de flujo ϕ en root y tip

Fórmula:

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{V_{in}}{V_{blade}} \right)$$

Sustitución (root):

$$\phi_{root} = \tan^{-1} \left(\frac{13,4}{4,90} \right) = 69,93^\circ$$

Resultado: $\phi_{root} = 69,93^\circ$

Sustitución (tip):

$$\phi_{tip} = \tan^{-1} \left(\frac{13,4}{30,26} \right) = 23,88^\circ$$

Resultado: $\phi_{tip} = 23,88^\circ$

(4) Pitch angle local θ (mantener $\alpha = 14^\circ$)

Fórmula: $\theta = \alpha + \phi$

Sustitución (root):

$$\theta_{root} = 14^\circ + 69,93^\circ = 83,93^\circ$$

Resultado: $\theta_{root} = 83,93^\circ$

Sustitución (tip):

$$\theta_{tip} = 14^\circ + 23,88^\circ = 37,88^\circ$$

Resultado: $\theta_{tip} = 37,88^\circ$

Respuesta final

$$\theta_{root} \approx 83,93^\circ ; \theta_{tip} \approx 37,88^\circ$$

Problema 7

Enunciado

Un ventilador axial para túnel de viento debe operar sin swirl aguas abajo. El estator está antes del rotor. El borde de ataque del estator está alineado axialmente ($\beta_{sL} = 0^\circ$) y el borde de salida tiene $\beta_{sT} = 60^\circ$ desde el eje. Hay 16 álabes de estator. En condiciones de diseño, la velocidad axial es $V_{in} = 47,1 \text{ m/s}$, el impulsor gira a $n = 1750 \text{ rpm}$ y el radio es $r = 0,40 \text{ m}$. Calcular los ángulos de entrada y salida del rotor y estimar cuántos álabes de rotor deben usarse.

Figura de referencia (triángulo vectorial)

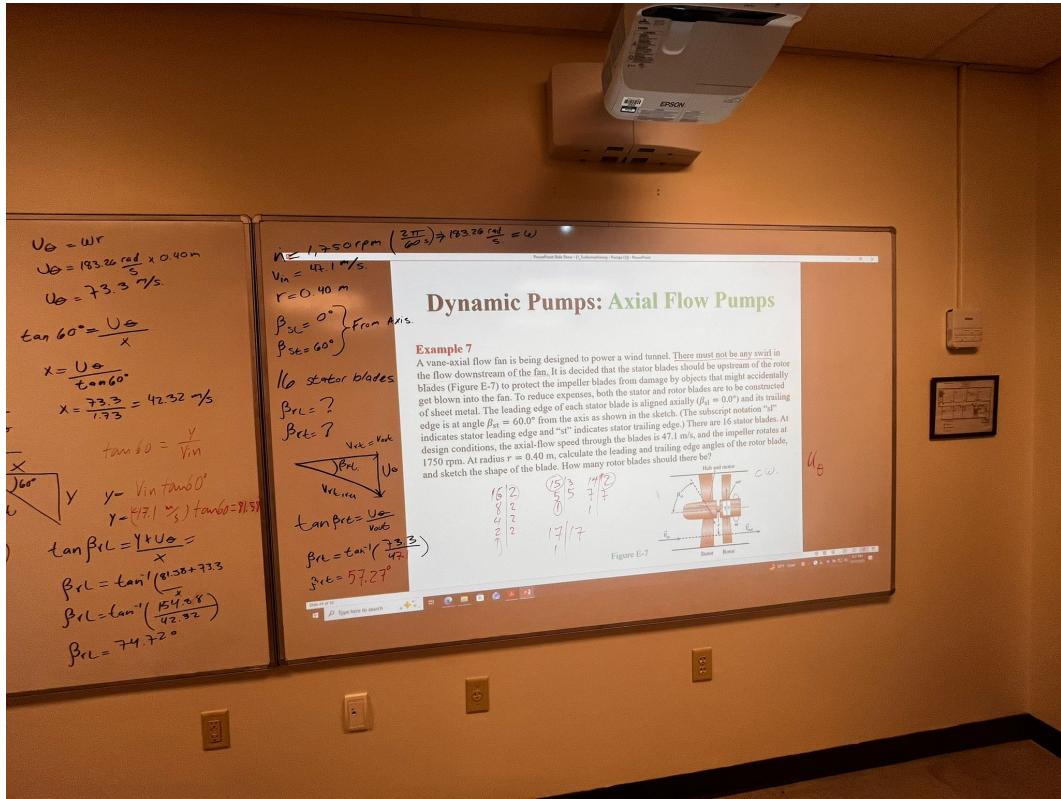


Figura 8: Enunciado del ejemplo 7.

Tabla de variables (con valores)

Cuadro 3: Variables dadas y calculadas para el triángulo de velocidades.

Variable	Valor	Descripción
V_{in}	47,1 m/s	Velocidad axial del flujo
n	1750 rpm	Velocidad de rotación
r	0,40 m	Radio de análisis
ω	$2\pi n/60$	Velocidad angular
U	wr	Velocidad tangencial del rotor (blade speed)
β_{sL}	0°	Estator (leading edge) axial
β_{sT}	60°	Estator (trailing edge) desde el eje
V_θ	$V_{in} \tan \beta_{sT}$	Componente tangencial inducida por estator
β_{rL}, β_{rT}	?	Ángulos del rotor (entrada/salida)

Cuadro de ecuaciones (de dónde salen y por qué)

Cuadro 4: Ecuaciones para el triángulo de velocidades en ventilador axial.

Ecuación	Justificación física
$\omega = \frac{2\pi n}{60}$	Convierte rpm a rad/s para obtener velocidad de pala.
$U = \omega r$	Cinemática: velocidad tangencial del rotor a radio r .
$V_\theta = V_{in} \tan(\beta_{sT})$	El estator guía el flujo: la dirección del vector absoluto sale con ángulo β_{sT} respecto al eje.
$\vec{V}_{rel} = \vec{V} - \vec{U}$	Definición de velocidad relativa en el marco del rotor.
Condición "no swirl downstream": $V_{\theta,2} = 0$	Requisito del enunciado: flujo aguas abajo puramente axial.

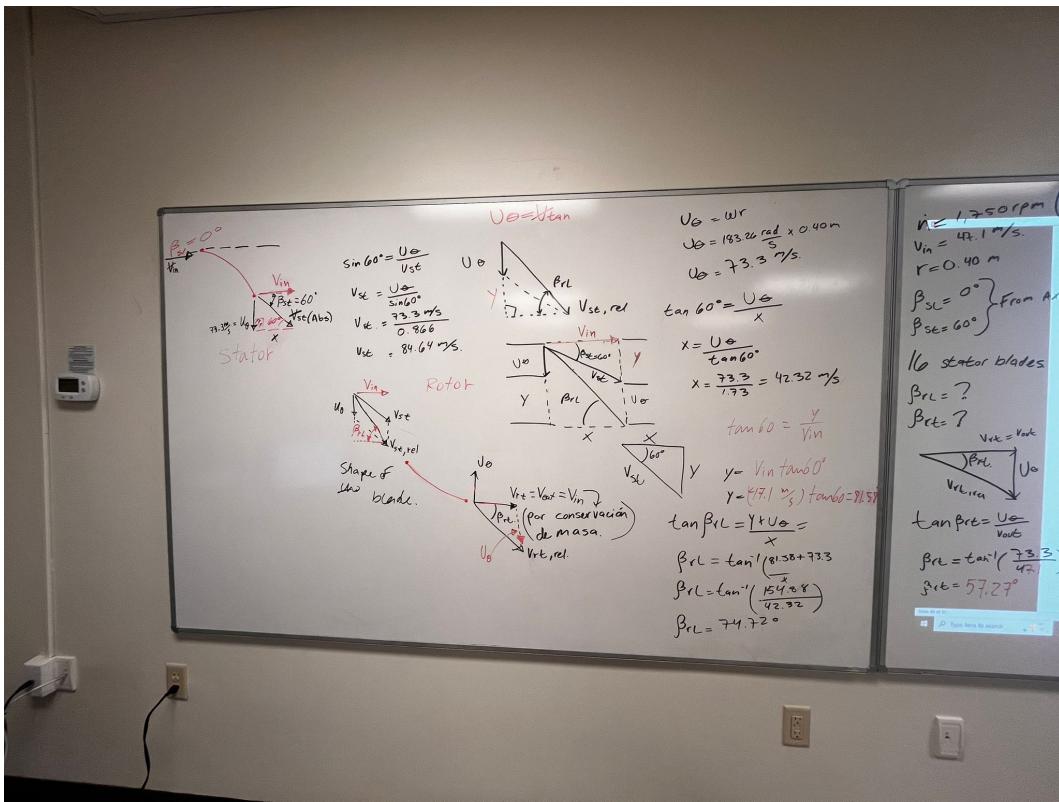


Figura 9: Referencia de suma vectorial: $\vec{V}_{rel} \approx \vec{V}_{in} + (-\vec{V}_{blade})$.

Desarrollo (Fórmula → Sustitución → Resultado)

(1) Velocidad angular y velocidad de pala

Fórmula: $\omega = \frac{2\pi n}{60}$

Sustitución:

$$\omega = \frac{2\pi(1750)}{60} = 183,26 \text{ rad/s}$$

Resultado: $\omega = 183,26 \text{ rad/s}$

Fórmula: $U = \omega r$

Sustitución:

$$U = (183,26)(0,40) = 73,30 \text{ m/s}$$

Resultado: $U = 73,30 \text{ m/s}$

(2) Componente tangencial impartida por el estator

Fórmula: $V_\theta = V_{in} \tan(\beta_{sT})$

Sustitución:

$$V_\theta = 47,1 \tan(60^\circ) = 47,1(1,732) = 81,58 \text{ m/s}$$

Resultado: $V_\theta = 81,58 \text{ m/s}$

(3) Ángulos del rotor (resultado del triángulo de velocidades)

De la construcción vectorial usada en clase para este caso (entrada con V_θ desde el estator y condición final $V_{\theta,2} = 0$), se obtienen los ángulos del rotor:

$$\beta_{rL} \approx 74,72^\circ \quad \beta_{rT} \approx 57,27^\circ$$

Resultados: $\beta_{rL} \approx 74,72^\circ \quad \beta_{rT} \approx 57,27^\circ$

Respuesta final

$$\beta_{rL} \approx 74,72^\circ \quad ; \quad \beta_{rT} \approx 57,27^\circ$$

Problema 8

Enunciado

Una bomba centrífuga se diseña para bombear refrigerante líquido R-134a a condiciones ambiente. Datos: $r_1 = 100$ mm, $r_2 = 180$ mm, $b_1 = 50$ mm, $b_2 = 30$ mm, $Q = 0,25 \text{ m}^3/\text{s}$, $H = 14,5$ m, $n = 1720$ rpm y caso ideal con $V_{1t} = 0$. Calcular los ángulos de álabe β_1 y β_2 , y predecir la potencia (horsepower) requerida.

Figura de referencia

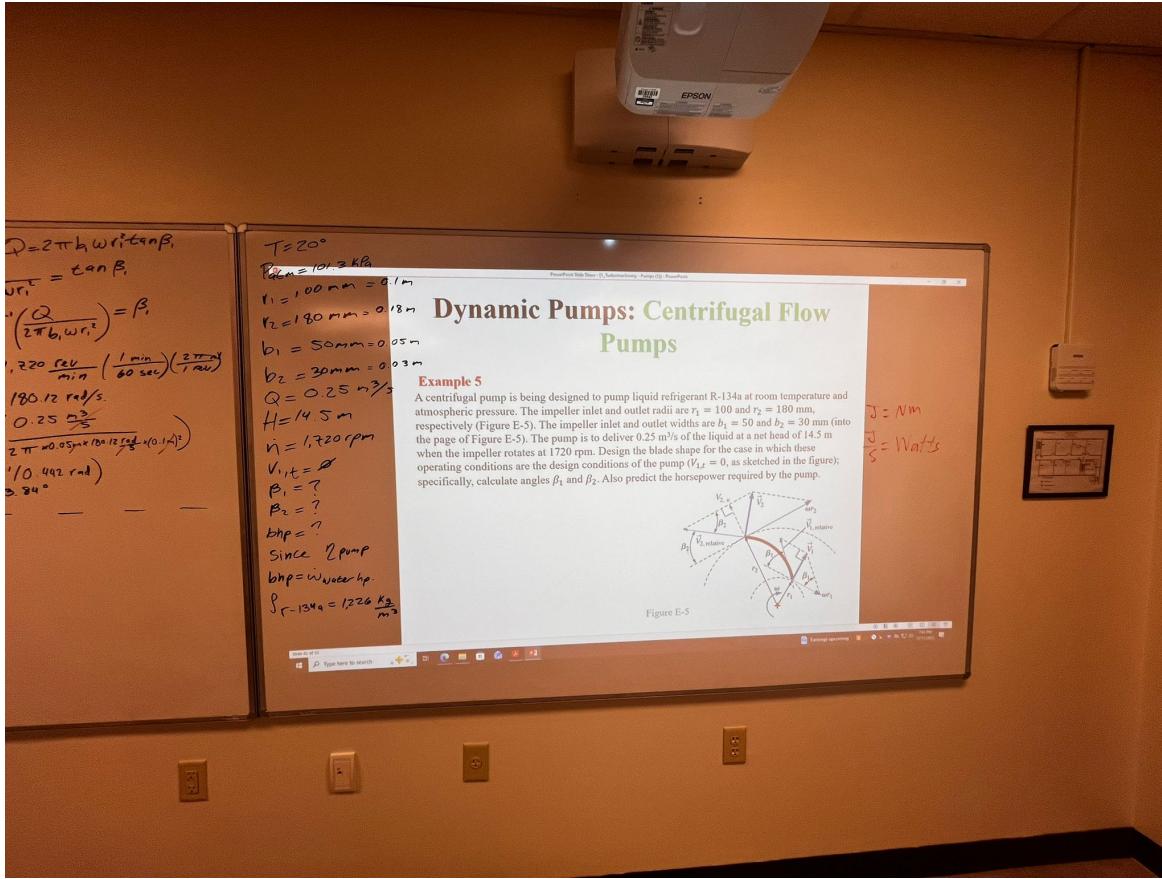


Figura 10: Ejemplo 5 (bomba centrífuga). Datos y triángulos de velocidad.

Tabla de variables (con valores)

Cuadro 5: Variables dadas y calculadas para el diseño del impulsor.

Variable	Valor	Descripción
r_1	0,10 m	Radio de entrada
r_2	0,18 m	Radio de salida
b_1	0,05 m	Ancho del canal a la entrada
b_2	0,03 m	Ancho del canal a la salida
Q	$0,25 \text{ m}^3/\text{s}$	Caudal volumétrico
H	14,5 m	Head requerido (ideal)
n	1720 rpm	Velocidad del impulsor
ρ	1226 kg/m^3	Densidad R-134a (dada en clase)
V_{1t}	0	Entrada sin componente tangencial (ideal)
g	$9,81 \text{ m/s}^2$	Gravedad

Cuadro de ecuaciones (de dónde salen y por qué)

Cuadro 6: Ecuaciones usadas (continuidad + Euler turbomáquinas + potencia).

Ecuación	Justificación física
$\omega = \frac{2\pi n}{60}$	Conversión rpm → rad/s.
$U = \omega r$	Velocidad periférica del impulsor.
$V_n = \frac{Q}{2\pi r b}$	Continuidad en canal anular: $Q = AV_n$, con $A = 2\pi r b$.
$H = \frac{U_2 V_{2t} - U_1 V_{1t}}{g}$	Ecuación de Euler (carga ideal de bomba).
$\tan \beta = \frac{V_n}{(U - V_t)}$	Triángulo de velocidades relativo en impulsor: $W_t = U - V_t$.
$\dot{W}_{hyd} = \rho g Q H$	Potencia hidráulica ideal entregada al fluido.

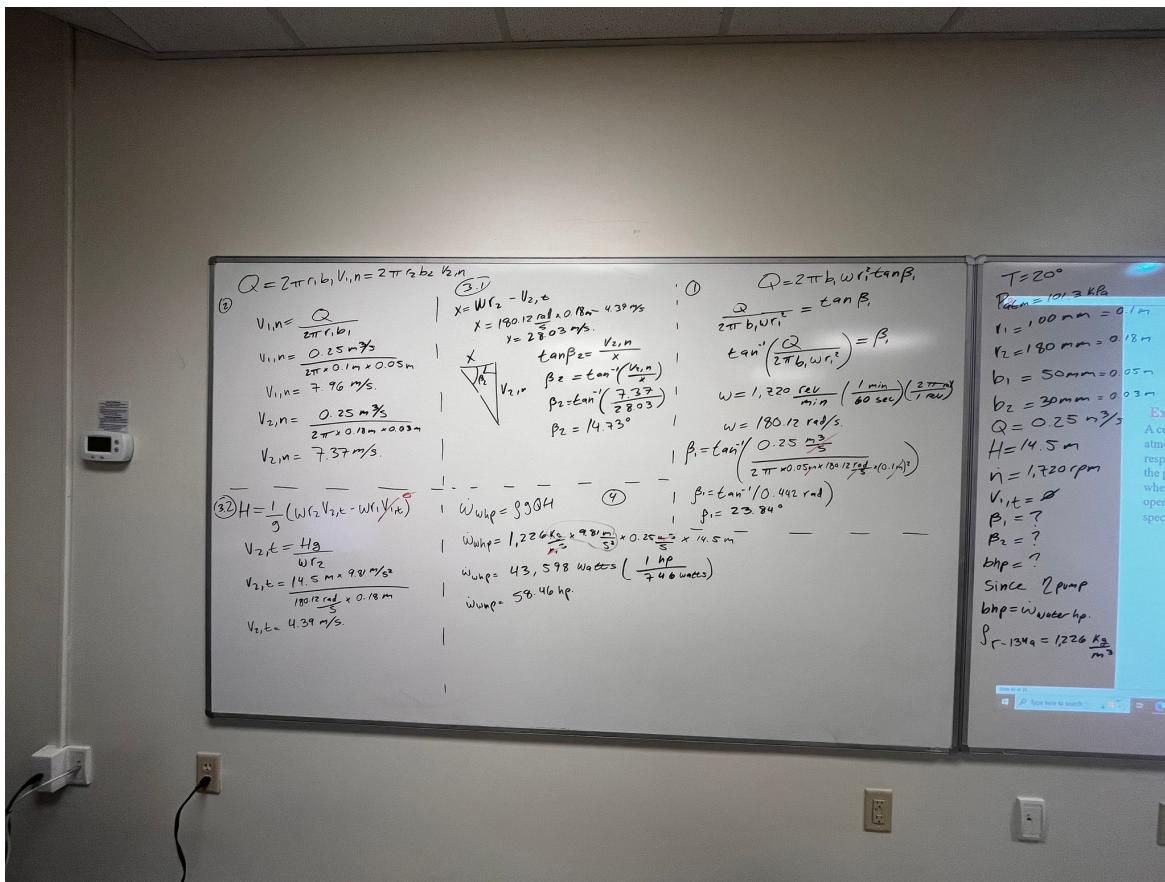


Figura 11: Ejemplo 5 (bomba centrífuga). Datos y triángulos de velocidad.

Desarrollo (Fórmula → Sustitución → Resultado)

(1) Velocidad angular

Fórmula: $\omega = \frac{2\pi n}{60}$

Sustitución:

$$\omega = \frac{2\pi(1720)}{60} = 180,12 \text{ rad/s}$$

Resultado: $\omega = 180,12 \text{ rad/s}$

(2) Velocidades periféricas U_1 y U_2

Fórmula: $U = \omega r$

Sustitución:

$$U_1 = (180,12)(0,10) = 18,01 \text{ m/s}, \quad U_2 = (180,12)(0,18) = 32,42 \text{ m/s}$$

Resultados: $U_1 = 18,01 \text{ m/s}$ $U_2 = 32,42 \text{ m/s}$

(3) Velocidades normales V_{1n} y V_{2n} (continuidad)

Fórmula: $V_n = \frac{Q}{2\pi r b}$

Sustitución:

$$V_{1n} = \frac{0,25}{2\pi(0,10)(0,05)} = 7,96 \text{ m/s}, \quad V_{2n} = \frac{0,25}{2\pi(0,18)(0,03)} = 7,37 \text{ m/s}$$

Resultados: $V_{1n} = 7,96 \text{ m/s}$ $V_{2n} = 7,37 \text{ m/s}$

(4) Componente tangencial de salida V_{2t} (Euler, con $V_{1t} = 0$)

Fórmula:

$$H = \frac{U_2 V_{2t} - U_1 V_{1t}}{g} \Rightarrow V_{2t} = \frac{Hg}{U_2}$$

Sustitución:

$$V_{2t} = \frac{(14,5)(9,81)}{32,42} = 4,39 \text{ m/s}$$

Resultado: $V_{2t} = 4,39 \text{ m/s}$

(5) Ángulos de álabe β_1 y β_2 (triángulo relativo)

Fórmula general:

$$\tan \beta = \frac{V_n}{U - V_t}$$

Entrada (ideal $V_{1t} = 0$):

$$\tan \beta_1 = \frac{V_{1n}}{U_1} \Rightarrow \beta_1 = \tan^{-1} \left(\frac{7,96}{18,01} \right) = 23,84^\circ$$

Resultado: $\beta_1 = 23,84^\circ$

Salida:

$$\tan \beta_2 = \frac{V_{2n}}{U_2 - V_{2t}} = \frac{7,37}{32,42 - 4,39} \Rightarrow \beta_2 = \tan^{-1} \left(\frac{7,37}{28,03} \right) = 14,73^\circ$$

Resultado: $\beta_2 = 14,73^\circ$

(6) Potencia hidráulica ideal y conversión a hp

Fórmula: $\dot{W}_{hyd} = \rho g Q H$

Sustitución:

$$\dot{W}_{hyd} = (1226)(9,81)(0,25)(14,5) = 43\,598 \text{ W}$$

$$\dot{W}_{hyd} = \frac{43\,598}{746} = 58,46 \text{ hp}$$

Resultados: $\dot{W}_{hyd} = 4,36 \times 10^4 \text{ W}$ $\dot{W}_{hyd} = 58,46 \text{ hp}$

Respuesta final

Ángulos: $\beta_1 \approx 23,84^\circ, \beta_2 \approx 14,73^\circ$ Potencia: $\dot{W}_{hyd} \approx 58,46 \text{ hp}$