

Polytechnic University of Puerto Rico – Orlando Campus
ME 3140 – Intermediate Fluid Mechanics

Homework N-04

Instructor: Dr. Joaquín Valencia

Estudiante: Antonio Pérez

ID: 158655

Fecha de entrega: 12 de enero de 2026

Problema 1. Turbina de impulso (Pelton) con pérdidas por fricción

Enunciado

Agua para accionar una rueda Pelton es suministrada por una tubería desde un lago. La pérdida por fricción en el penstock es importante; pérdidas menores despreciables.

- Determinar el diámetro de la boquilla D_1 que produce **máxima potencia**.
- Con las condiciones de (a), determinar **potencia máxima (hp)** y **rpm**.

Figura del problema (imagen adjunta)

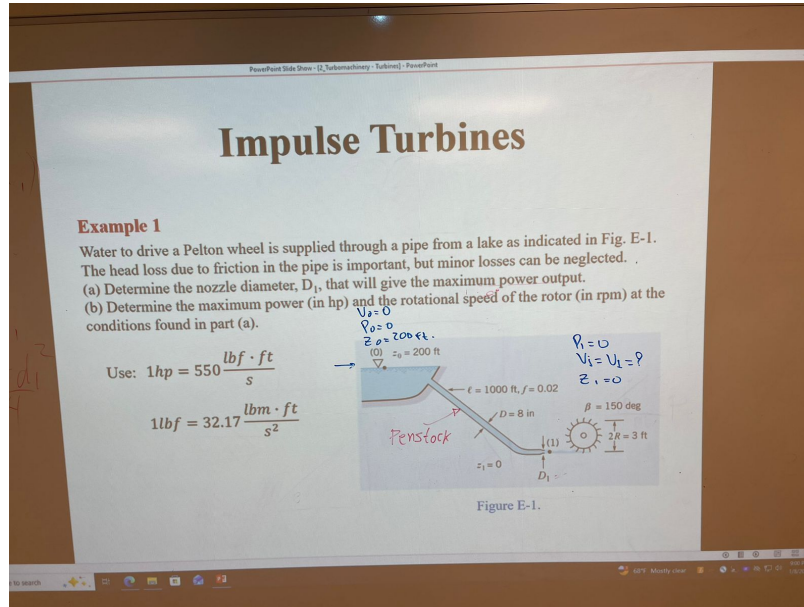


Figura 1: Impulse Turbines: penstock y boquilla D_1 .

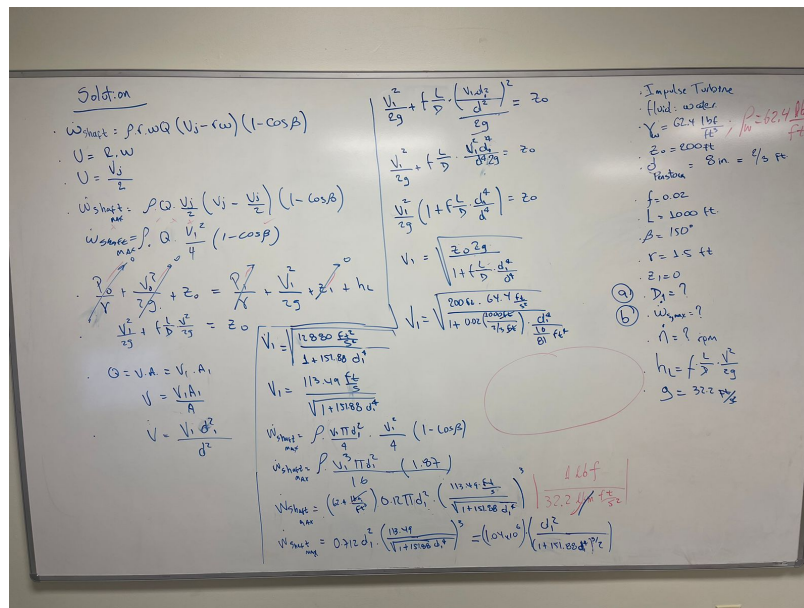


Figura 2: Impulse Turbines: penstock y boquilla D_1 .

$$\frac{d W_{shaft}}{d d_1} = \frac{1.04 \times 10^6 \left(\frac{(2d_1)(1+151.88d_1^4)^{3/4}}{(1+151.88d_1^4)^3} - \frac{2}{3} \frac{(1+151.88d_1^4)^{1/4}}{(1+151.88d_1^4)^3} \cdot 4(151.88d_1^3) \cdot d_1^2 \right)}{d_1^2} = 0$$

$$\frac{2d_1(1+151.88d_1^4)^{3/4}}{(1+151.88d_1^4)^3} = \frac{d_1(28(1+151.88d_1^4)^{1/4}}{2d_1^2} = 0$$

$$\frac{(1+151.88d_1^4)^{3/4}}{(1+151.88d_1^4)^3} = \frac{14}{d_1^2}$$

$$1 = \frac{303.76 d_1^4}{503.76} = 0.21 \text{ Ft.} \quad \text{Ans. (a)}$$

$$V_1 = \sqrt{\frac{12.830 \frac{\text{ft}^2}{\text{s}^2}}{1+151.88 d_1^4}}$$

$$V_1 = \frac{113.49 \frac{\text{ft}}{\text{s}}}{\sqrt{1+151.88 d_1^4}}$$

$$W_{shaft} = \rho \frac{V_1 \pi d_1^2}{4} \cdot \frac{V_1}{4} (1 - \cos \beta)$$

$$W_{shaft} = \rho \frac{V_1^2 \pi d_1^2}{4} (1.87)$$

$$W_{shaft} = \left(\frac{62.4 \text{ lbf}}{\text{ft}^3} \right) \cdot 0.02 \pi d_1^2 \cdot \left(\frac{113.49 \frac{\text{ft}}{\text{s}}}{\sqrt{1+151.88 d_1^4}} \right)^2 \cdot \left(\frac{1}{4} \right) \cdot (1.87)$$

$$W_{shaft} = 0.312 d_1^2 \cdot \left(\frac{12.830}{\sqrt{1+151.88 d_1^4}} \right)^2 = (0.0110) \left(\frac{d_1^2}{(1+151.88 d_1^4)^{3/2}} \right)$$

Impulse Turbine
 Fluid: water
 $\gamma_w = 62.4 \frac{\text{lbf}}{\text{ft}^3}$; $\rho_w = 62.4 \frac{\text{lbm}}{\text{ft}^3}$
 $z_0 = 200 \text{ ft}$
 $d = 8 \text{ in} = \frac{2}{3} \text{ ft}$
 $f = 0.02$
 $L = 1000 \text{ ft}$
 $\beta = 150^\circ$
 $r = 1.5 \text{ ft}$
 $z_1 = 0$
 (a) $D_1 = ?$
 (b) $W_{shaft} = ?$
 $\dot{Q} = ? \text{ rpm}$
 $h_L = f \frac{L}{D} \cdot \frac{V^2}{2g}$
 $g = 32.2 \frac{\text{ft}}{\text{s}^2}$

$A = d_1^2$
 $B = (1+151.88 d_1^4)^{3/2}$

Figura 3: Impulse Turbines: penstock y boquilla D_1 .

Tabla de variables

Variable	Valor	Descripción
γ_w	62.4 lbf/ft^3	Peso específico del agua
g	32.2 ft/s^2	Gravedad
ρ	γ_w / g	Densidad (slug/ft ³)
z_0	200 ft	Head disponible (lago a boquilla)
z_1	0	Referencia en boquilla
L	1000 ft	Longitud penstock
f	0.02	Darcy-Weisbach
d	8 in = $\frac{2}{3}$ ft	Diámetro penstock
D_1	?	Diámetro boquilla (óptimo)
V_j	?	Velocidad del chorro
V	?	Velocidad promedio en penstock
Q	?	Caudal volumétrico
β	150°	Ángulo de desvío del chorro
r	1.5 ft	Radio del rotor
U	$r\omega$	Velocidad tangencial del rotor
W_{shaft}	?	Potencia al eje
n	?	rpm

(a) Cálculo completo del diámetro óptimo D_1

Paso A1. Continuidad (relación V vs V_j)

Fórmula:

$$Q = VA = V_j A_1$$

$$A = \frac{\pi d^2}{4}, \quad A_1 = \frac{\pi D_1^2}{4}$$

Despeje:

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{V_j A_1}{A} = V_j \left(\frac{D_1^2}{d^2} \right)$$

Resultado (relación clave):

$$V = V_j \left(\frac{D_1^2}{d^2} \right)$$

Paso A2. Ecuación de energía (lago → boquilla) con fricción

(Se desprecia $V_0 \approx 0$, $p_0 = p_1 = \text{atm}$ y pérdidas menores.)

Fórmula:

$$z_0 = \frac{V_j^2}{2g} + h_f \quad \text{con} \quad h_f = f \frac{L}{d} \frac{V_j^2}{2g}$$

Sustitución de V :

$$h_f = f \frac{L}{d} \frac{1}{2g} \left[V_j^2 \left(\frac{D_1^4}{d^4} \right) \right]$$
$$\Rightarrow z_0 = \frac{V_j^2}{2g} \left[1 + f \frac{L}{d} \left(\frac{D_1^4}{d^4} \right) \right]$$

Despeje de V_j :

$$V_j = \sqrt{\frac{2gz_0}{1 + f \frac{L}{d} \left(\frac{D_1^4}{d^4} \right)}}$$

Definimos la constante:

$$K \equiv f \frac{L}{d} \frac{1}{d^4} = \frac{fL}{d^5} \quad \Rightarrow \quad V_j = \sqrt{\frac{2gz_0}{1 + KD_1^4}}$$

Resultado (forma útil): $V_j = \sqrt{\frac{2gz_0}{1 + KD_1^4}}, \quad K = \frac{fL}{d^5}$

Paso A3. Potencia de turbina de impulso y condición de máximo respecto a U

Fórmula (modelo ideal visto en clase):

$$\dot{W}_{shaft} = \rho Q (V_j - U) (1 - \cos \beta) U$$

Maximizando respecto a U :

$$\frac{d}{dU} [(V_j - U)U] = \frac{d}{dU} (V_j U - U^2) = V_j - 2U = 0 \Rightarrow U_{\max} = \frac{V_j}{2}$$

Resultado: $U_{\max} = \frac{V_j}{2}$

Sustituyendo $U_{\max}$ en $\dot{W}_{shaft}$:

$$\dot{W}_{shaft, \max} = \rho Q \left(V_j - \frac{V_j}{2} \right) (1 - \cos \beta) \left(\frac{V_j}{2} \right) = \rho Q \frac{V_j^2}{4} (1 - \cos \beta)$$

Resultado: $\dot{W}_{shaft, \max} = \rho Q \frac{V_j^2}{4} (1 - \cos \beta)$

Paso A4. Expresar $\dot{W}_{shaft, \max}$ como función de D_1

Fórmula:

$$Q = A_1 V_j = \frac{\pi D_1^2}{4} V_j$$

Sustitución en $\dot{W}_{shaft, \max}$:

$$\dot{W}_{shaft, \max} = \rho \left(\frac{\pi D_1^2}{4} V_j \right) \frac{V_j^2}{4} (1 - \cos \beta) = \underbrace{\left[\rho \frac{\pi}{16} (1 - \cos \beta) \right]}_C D_1^2 V_j^3$$
$$\Rightarrow \dot{W}_{shaft, \max}(D_1) \propto D_1^2 \left(\frac{2gz_0}{1 + KD_1^4} \right)^{3/2}$$

Función a maximizar (ignorando constantes positivas):

$$F(D_1) = D_1^2 (1 + KD_1^4)^{-3/2}$$

Paso A5. Maximización de $F(D_1)$ (derivada y condición óptima)

Fórmula:

$$\ln F = 2 \ln D_1 - \frac{3}{2} \ln(1 + KD_1^4)$$

Derivada:

$$\frac{d}{dD_1} (\ln F) = \frac{2}{D_1} - \frac{3}{2} \frac{4KD_1^3}{1 + KD_1^4} = 0$$

Despeje:

$$\frac{2}{D_1} = \frac{6KD_1^3}{1 + KD_1^4} \Rightarrow 2(1 + KD_1^4) = 6KD_1^4 \Rightarrow 2 = 4KD_1^4 \\ \Rightarrow D_1^4 = \frac{1}{2K}$$

Como $K = \frac{fL}{d^5}$:

$$D_1^4 = \frac{d^5}{2fL}$$

Resultado (condición óptima): $D_1 = \left(\frac{d^5}{2fL} \right)^{1/4}$

Paso A6. Sustitución numérica para D_1

Datos:

$$d = \frac{2}{3} \text{ ft}, \quad f = 0,02, \quad L = 1000 \text{ ft}$$

Sustitución:

$$d^5 = \left(\frac{2}{3} \right)^5 = \frac{32}{243} = 0,131687 \\ D_1^4 = \frac{0,131687}{2(0,02)(1000)} = \frac{0,131687}{40} = 0,00329218 \\ D_1 = (0,00329218)^{1/4} = 0,2396 \text{ ft}$$

Resultados: $D_1 \approx 0,240 \text{ ft}$

$D_1 \approx 2,88 \text{ in}$

(b) Potencia máxima (hp) y velocidad de rotación (rpm) usando D_1 óptimo

Paso B1. Calcular K y luego V_j

Fórmula:

$$K = \frac{fL}{d^5}$$

Sustitución:

$$K = \frac{(0,02)(1000)}{0,131687} = 151,88 \text{ ft}^{-4}$$

Resultado: $K \approx 151,88 \text{ ft}^{-4}$

Fórmula:

$$V_j = \sqrt{\frac{2gz_0}{1 + KD_1^4}}$$

Sustitución:

$$D_1 = 0,24 \text{ ft} \Rightarrow D_1^4 = (0,24)^4 = 0,00331776 \\ 1 + KD_1^4 = 1 + (151,88)(0,00331776) = 1,5039 \\ V_j = \sqrt{\frac{2(32,2)(200)}{1,5039}} = \sqrt{8567,7} = 92,54 \text{ ft/s}$$

Resultado: $V_j \approx 92,54 \text{ ft/s}$

Paso B2. Caudal Q

Fórmula:

$$A_1 = \frac{\pi D_1^2}{4}, \quad Q = A_1 V_j$$

Sustitución:

$$A_1 = \frac{\pi(0,24)^2}{4} = 0,04524 \text{ ft}^2 \\ Q = (0,04524)(92,54) = 4,187 \text{ ft}^3/\text{s}$$

Resultado: $Q \approx 4,19 \text{ ft}^3/\text{s}$

Paso B3. Velocidad óptima del rotor $U_{\text{máx}}$ y rpm

Fórmula:

$$U_{\text{máx}} = \frac{V_j}{2}, \quad \omega = \frac{U_{\text{máx}}}{r}, \quad n = \frac{\omega 60}{2\pi}$$

Sustitución:

$$U_{\text{máx}} = \frac{92,54}{2} = 46,27 \text{ ft/s}$$

$$\omega = \frac{46,27}{1,5} = 30,85 \text{ rad/s}$$

$$n = \frac{(30,85)(60)}{2\pi} = 294,6 \text{ rpm}$$

Resultados: $U_{\text{máx}} \approx 46,27 \text{ ft/s}$ $n \approx 295 \text{ rpm}$

Paso B4. Potencia máxima $\dot{W}_{shaft,\text{máx}}$ y conversión a hp

Fórmula:

$$\rho = \frac{\gamma_w}{g}, \quad \dot{W}_{shaft,\text{máx}} = \rho Q \frac{V_j^2}{4} (1 - \cos \beta)$$

$$1 \text{ hp} = 550 \frac{\text{ft} \cdot \text{lbf}}{\text{s}}$$

Sustitución:

$$\rho = \frac{62,4}{32,2} = 1,938 \text{ slug/ft}^3$$

$$1 - \cos \beta = 1 - \cos(150^\circ) = 1 - (-0,8660) = 1,8660$$

$$\dot{W}_{shaft,\text{máx}} = (1,938)(4,187) \left(\frac{92,54^2}{4} \right) (1,8660) = 3,24 \times 10^4 \frac{\text{ft} \cdot \text{lbf}}{\text{s}}$$

$$\dot{W}_{shaft,\text{máx}} = \frac{3,24 \times 10^4}{550} = 58,94 \text{ hp}$$

Resultados: $\dot{W}_{shaft,\text{máx}} \approx 3,24 \times 10^4 \text{ ft} \cdot \text{lbf/s}$ $\dot{W}_{shaft,\text{máx}} \approx 58,9 \text{ hp}$

Resumen final (Problema 1)

$$D_1 \approx 0,240 \text{ ft (2,88 in)} \quad V_j \approx 92,54 \text{ ft/s} \quad Q \approx 4,19 \text{ ft}^3/\text{s}$$

$$\dot{W}_{shaft,\text{máx}} \approx 58,9 \text{ hp} \quad n \approx 295 \text{ rpm}$$