Polytechnic University of Puerto Rico – Orlando Campus
ME 3140 – Intermediate Fluid Mechanics

Homework N-06

Instructor: Dr. Joaquín Valencia
Estudiante: Antonio Pérez
ID: 158655

Fecha de entrega: 14 de enero de 2026

Problema. Turbina de reacción (Francis) – Example 2

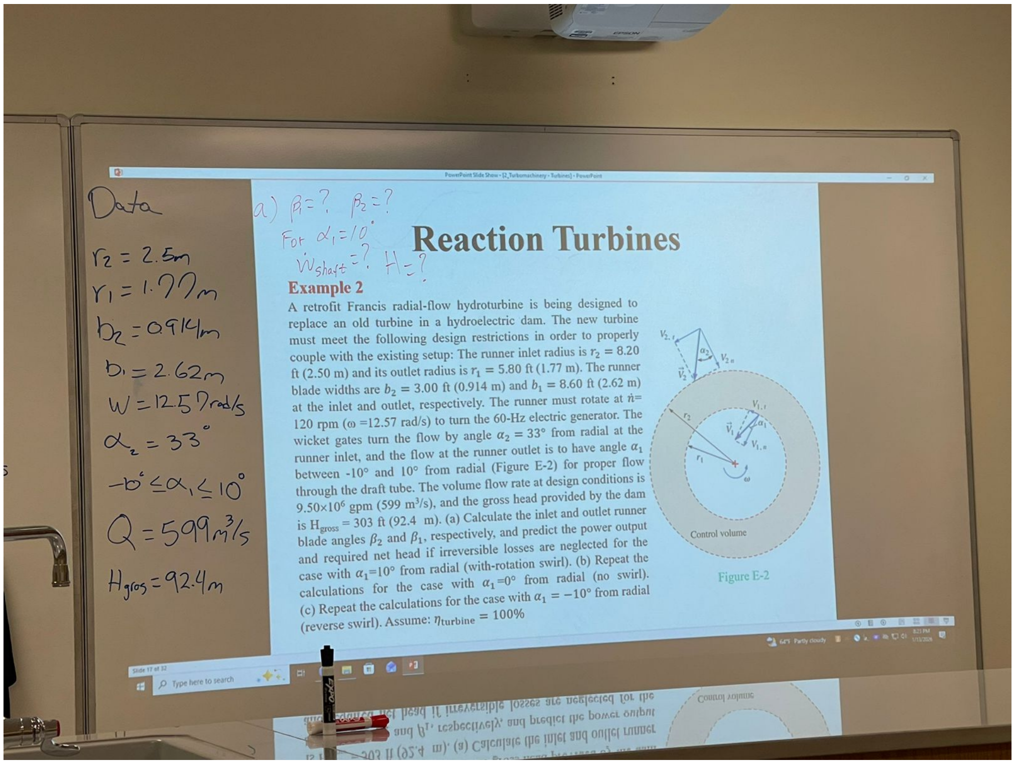

Figura 1: Diapositiva: "Reaction Turbines – Example 2" (enunciado y esquema).

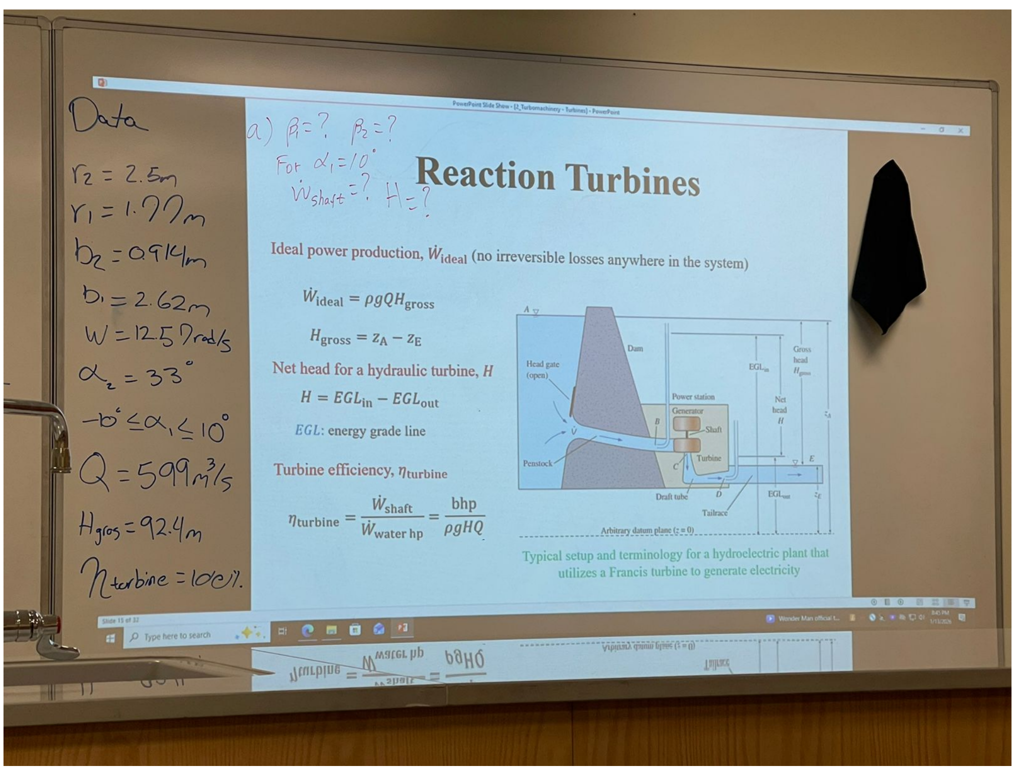

Figura 2: Diapositiva: "Reaction Turbines – Example 2" (enunciado y esquema).

Enunciado

Una turbina Francis de flujo radial está siendo rediseñada para reemplazar una turbina antigua en una represa hidroeléctrica. La turbina nueva debe cumplir restricciones de diseño para acoplarse al sistema existente: el radio de entrada del rodete es $r_2 = 2{,}500\,\mathrm{m}$ y el radio de salida es $r_1 = 1{,}770\,\mathrm{m}$. Los anchos del rodete son $b_2 = 0{,}914\,\mathrm{m}$ en la entrada y $b_1 = 2{,}620\,\mathrm{m}$ en la salida. El rodete gira a $n = 120{,}000\,\mathrm{rpm}$ ($\omega = 12{,}570\,\mathrm{rad/s}$). Los álabes directrices (wicket gates) desvían el flujo un ángulo $\alpha_2 = 33°$ medido desde la dirección radial en la entrada del rodete. A la salida, el flujo debe tener un ángulo α_1 entre $-10°$ y $10°$ desde radial para asegurar buen flujo a través del tubo de aspiración. El caudal de diseño es $Q = 599{,}000\,\mathrm{m^3/s}$ y la carga bruta disponible es $H_{\text{gross}} = 92{,}400\,\mathrm{m}$.

(a) Calcular los ángulos de álabe del rodete β_2 (entrada) y β_1 (salida), y predecir la potencia y el head neto requerido, despreciando pérdidas irreversibles, para $\alpha_1 = +10°$.

(b) Repetir para $\alpha_1 = 0°$.

(c) Repetir para $\alpha_1 = -10°$.

Se asume $\eta_{\text{turbina}} = 100\,\%$.

Tabla de variables iniciales

Variable	Valor (SI)	Descripción
r_2	$2{,}500\,\mathrm{m}$	Radio del rodete en la entrada
r_1	$1{,}770\,\mathrm{m}$	Radio del rodete en la salida
b_2	$0{,}914\,\mathrm{m}$	Ancho del rodete en la entrada
b_1	$2{,}620\,\mathrm{m}$	Ancho del rodete en la salida
ω	$12{,}570\,\mathrm{rad/s}$	Velocidad angular
α_2	$33°$	Ángulo del flujo en la entrada (desde radial)
α_1	$\{-10°, 0°, +10°\}$	Ángulo del flujo a la salida (desde radial)
Q	$599{,}000\,\mathrm{m^3/s}$	Caudal volumétrico
ρ	$998{,}200\,\mathrm{kg/m^3}$	Densidad del agua (aprox.)
g	$9{,}810\,\mathrm{m/s^2}$	Gravedad
H_{gross}	$92{,}400\,\mathrm{m}$	Head bruto disponible (dato)
η_{turbina}	$1{,}00$	Turbina ideal (sin pérdidas)

Tabla de fórmulas (usadas en clase)

ID	Fórmula	Uso
F1	$Q = 2\pi r\, b\, V_n$	Continuidad en anillo: obtiene V_n en entrada/salida
F2	$\tan\alpha = \dfrac{V_t}{V_n}$	Relación ángulo absoluto (desde radial)
F3	$U = \omega r$	Velocidad periférica del rodete
F4	$\tan\beta = \dfrac{V_n}{U - V_t}$	Triángulo de velocidades → ángulos de álabe β
F5	$\dot{W}_{\text{shaft}} = \rho Q\, \omega\,(r_2 V_{2,*} - r_1 V_{1,t})$	Ecuación de Euler (forma usada en clase)
F6	$H = \dfrac{\dot{W}_{\text{shaft}}}{\rho g Q}$	Head neto ideal (si $\eta = 1$)

Desarrollo

Paso 1. Componentes normales por continuidad (F1)

$$V_{2,n} = \frac{Q}{2\pi r_2 b_2} = \frac{599}{2\pi(2{,}50)(0{,}914)} = 41{,}722\,\mathrm{m/s}$$
$$V_{1,n} = \frac{Q}{2\pi r_1 b_1} = \frac{599}{2\pi(1{,}77)(2{,}62)} = 20{,}558\,\mathrm{m/s}$$
$$V_{2,n} = 41{,}720\,\mathrm{m/s} \qquad V_{1,n} = 20{,}560\,\mathrm{m/s}$$

Paso 2. Componente tangencial en la entrada usando α_2 (F2)

$$V_{2,t} = V_{2,n}\tan\alpha_2 = (41{,}722)\tan(33°) = 27{,}094\,\mathrm{m/s}$$
$$V_{2,t} = 27{,}090\,\mathrm{m/s}$$

Paso 3. Velocidades periféricas (F3)

$$U_2 = \omega r_2 = (12{,}57)(2{,}50) = 31{,}425\,\mathrm{m/s}, \qquad U_1 = \omega r_1 = (12{,}57)(1{,}77) = 22{,}249\,\mathrm{m/s}$$
$$U_2 = 31{,}430\,\mathrm{m/s} \qquad U_1 = 22{,}250\,\mathrm{m/s}$$

Paso 4. Ángulo de álabe en la entrada β_2 (F4)

$$\tan\beta_2 = \frac{V_{2,n}}{U_2 - V_{2,t}} = \frac{41{,}722}{31{,}425 - 27{,}094} = 9{,}633 \Rightarrow \beta_2 = \arctan(9{,}633) = 84{,}070^\circ$$

$$\boxed{\beta_2 = 84{,}070^\circ}$$

(a) Caso $\alpha_1 = +10^\circ$ (with-rotation swirl)

Paso (a1). Componente tangencial a la salida $V_{1,t}$ (F2)

$$V_{1,t} = V_{1,n}\tan(10^\circ) = (20{,}558)\tan(10^\circ) = 3{,}625\,\mathrm{m/s}$$

$$\boxed{V_{1,t}(+10^\circ) = 3{,}620\,\mathrm{m/s}}$$

Paso (a2). Ángulo de álabe a la salida β_1 (F4)

$$\tan\beta_1 = \frac{V_{1,n}}{U_1 - V_{1,t}} = \frac{20{,}558}{22{,}249 - 3{,}625} = 1{,}104 \Rightarrow \beta_1 = \arctan(1{,}104) = 47{,}830^\circ$$

$$\boxed{\beta_1(+10^\circ) = 47{,}830^\circ}$$

Paso (a3). Potencia al eje (Euler) y head neto ideal (F5–F6)

Siguiendo la forma aplicada en clase (pizarra):

$$\dot{W}_{\text{shaft}} = \rho Q\,\omega\,(r_2 V_{2,n} - r_1 V_{1,t})$$

$$\dot{W}_{\text{shaft}} = (998{,}2)(599)(12{,}57)\,[(2{,}50)(41{,}722) - (1{,}77)(3{,}625)] = 7{,}357 \times 10^8\ \mathrm{W}$$

$$\boxed{\dot{W}_{\text{shaft}}(+10^\circ) = 7{,}360 \times 10^8\ \mathrm{W}\ =\ 735{,}700\,\mathrm{MW}}$$

$$H = \frac{\dot{W}_{\text{shaft}}}{\rho g Q} = \frac{7{,}3572 \times 10^8}{(998{,}2)(9{,}81)(599)} = 125{,}430\,\mathrm{m}$$

$$\boxed{H(+10^\circ) = 125{,}430\,\mathrm{m}}$$

(b) Caso $\alpha_1 = 0^\circ$ (no swirl)

Paso (b1). $V_{1,t}$

$$V_{1,t} = V_{1,n}\tan(0^\circ) = 0 \Rightarrow \boxed{V_{1,t}(0^\circ) = 0{,}000\,\mathrm{m/s}}$$

Paso (b2). β_1

$$\tan\beta_1 = \frac{V_{1,n}}{U_1 - 0} = \frac{20{,}558}{22{,}249} = 0{,}9246 \Rightarrow \beta_1 = \arctan(0{,}9246) = 42{,}740^\circ$$

$$\boxed{\beta_1(0^\circ) = 42{,}740^\circ}$$

Paso (b3). $\dot{W}_{\text{shaft}}$ y H

$$\dot{W}_{\text{shaft}} = \rho Q\,\omega\,(r_2 V_{2,n} - r_1 V_{1,t}) = (998{,}2)(599)(12{,}57)\,[(2{,}50)(41{,}722) - 0] = 7{,}839 \times 10^8\ \mathrm{W}$$

$$\boxed{\dot{W}_{\text{shaft}}(0^\circ) = 7{,}840 \times 10^8\ \mathrm{W}\ =\ 783{,}900\,\mathrm{MW}}$$

$$H = \frac{7{,}8394 \times 10^8}{(998{,}2)(9{,}81)(599)} = 133{,}650\,\mathrm{m}$$

$$\boxed{H(0^\circ) = 133{,}650\,\mathrm{m}}$$

(c) Caso $\alpha_1 = -10^\circ$ (reverse swirl)

Paso (c1). $V_{1,t}$

$$V_{1,t} = V_{1,n}\tan(-10^\circ) = -(20{,}558)\tan(10^\circ) = -3{,}625\,\mathrm{m/s}$$

$$\boxed{V_{1,t}(-10^\circ) = -3{,}620\,\mathrm{m/s}}$$

Paso (c2). β_1

$$\tan\beta_1 = \frac{V_{1,n}}{U_1 - V_{1,t}} = \frac{20{,}558}{22{,}249-(-3{,}625)} = 0{,}7947 \Rightarrow \beta_1 = \arctan(0{,}7947) = 38{,}470^\circ$$

$$\beta_1(-10^\circ) = 38{,}470^\circ$$

Paso (c3). $\dot{W}_{\mathbf{shaft}}$ **y** H

$$\dot{W}_{\text{shaft}} = (998{,}2)(599)(12{,}57)\left[(2{,}50)(41{,}722)-(1{,}77)(-3{,}625)\right] = 8{,}322\times10^8\ \text{W}$$

$$\dot{W}_{\text{shaft}}(-10^\circ) = 8{,}320\times10^8\ \text{W} \ = \ 832{,}200\,\text{MW}$$

$$H = \frac{8{,}3217\times10^8}{(998{,}2)(9{,}81)(599)} = 141{,}870\,\text{m}$$

$$H(-10^\circ) = 141{,}870\,\text{m}$$

Resumen final

Caso	$V_{1,t}$ (m/s)	β_1 (°)	$\dot{W}_{\text{shaft}}$ (MW)	H (m)
$\alpha_1 = +10^\circ$	+3,62	47,83	735,7	125,43
$\alpha_1 = 0^\circ$	0	42,74	783,9	133,65
$\alpha_1 = -10^\circ$	−3,62	38,47	832,2	141,87

$$\beta_2 = 84{,}070^\circ \ \ \text{(mismo en los tres casos)}$$

Comentario final (consistencia física)

Bajo el modelo ideal usado, al reducir $V_{1,t}$ (hacerlo cero o negativo), el término de Euler aumenta, lo cual incrementa la potencia ideal al eje y el head neto ideal requerido.