

Polytechnic University of Puerto Rico – Orlando Campus
ME 3140 – Intermediate Fluid Mechanics

Homework N-07

Turbine Scaling Laws – Example 4 (Francis)

Instructor: Dr. Joaquín Valencia

Estudiante: Antonio Pérez

ID: 158655

Fecha de entrega: 19 de enero de 2026

Problema. Leyes de escalamiento de turbinas (Francis) – Example 4

Se diseña una turbina Francis para una represa hidroeléctrica escalando geométricamente una turbina existente A que opera de forma excelente en su punto óptimo.

Datos de la turbina A (punto de mejor eficiencia):

$$D_A = 2,050 \text{ m}, \quad n_A = 120,000 \text{ rpm} (\omega_A = 12,570 \text{ rad/s}), \quad Q_A = 350,000 \text{ m}^3/\text{s}, \quad H_A = 75,000 \text{ m}, \quad \text{bhp}_A = 242,000 \text{ MW}.$$

Para la turbina nueva B, el generador girará a la misma velocidad ($n_B = 120,000 \text{ rpm}$), pero el head neto será mayor:

$$H_B = 104,000 \text{ m}.$$

Calcular: D_B para operación más eficiente (similitud), y estimar Q_B , bhp_B y $\eta_{\text{turbina},B}$. Usar $\rho = 998,000 \text{ kg/m}^3$ (agua a $\approx 20,000^\circ\text{C}$) y $g = 9,810 \text{ m/s}^2$.

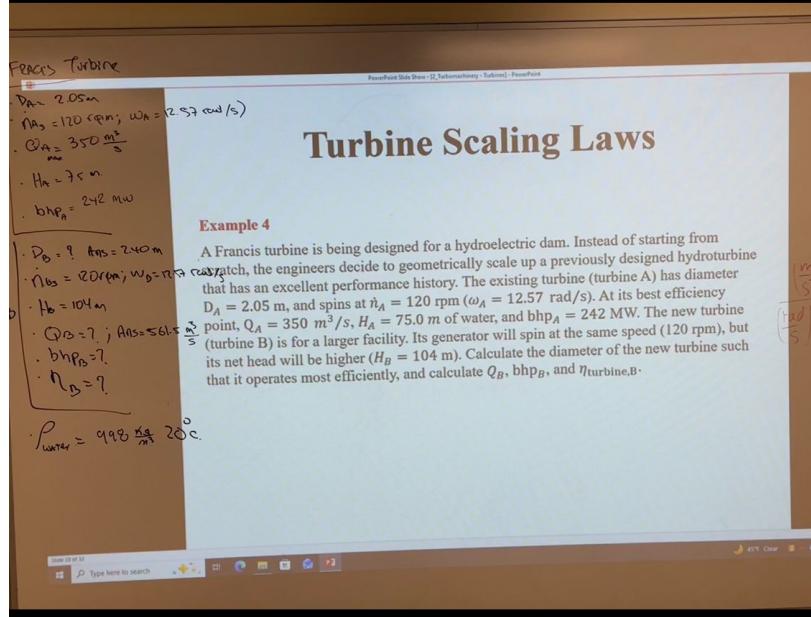


Figura 1: Diapositiva: “Turbine Scaling Laws – Example 4” (enunciado).

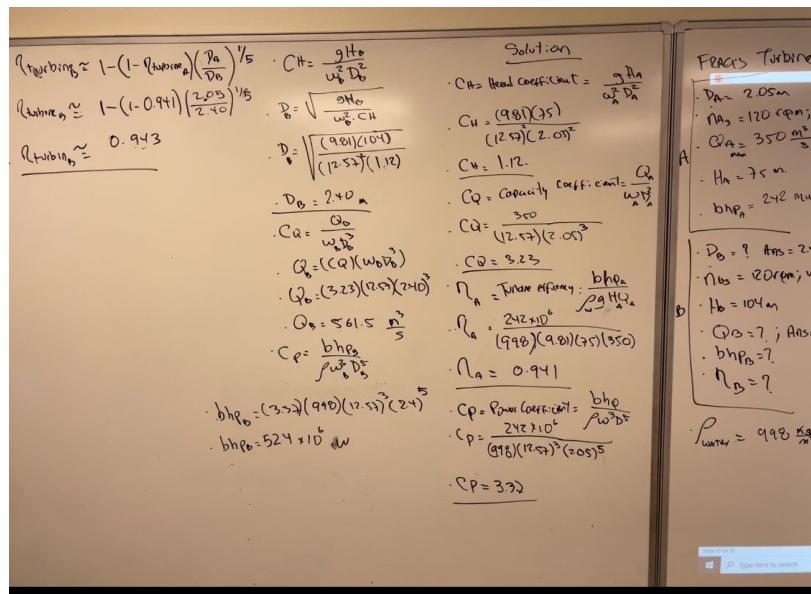


Figura 2: Pizarra: procedimiento de clase y resultados (coeficientes C_H , C_Q , C_P y escalamiento).

Tabla de variables iniciales

Variable	Valor (SI)	Descripción
D_A	2.050 m	Diámetro del rodete (turbina A)
n_A	120.000 rpm	Velocidad de giro (turbina A)
ω_A	12.570 rad/s	Velocidad angular (dada)
Q_A	350.000 m ³ /s	Caudal en punto óptimo (A)
H_A	75.000 m	Head neto (A)
bhp _A	242.000 MW	Potencia al eje (A)
H_B	104.000 m	Head neto (B)
n_B	120.000 rpm	Velocidad de giro (B)
ω_B	12.570 rad/s	Misma velocidad angular (B)
D_B	?	Diámetro requerido (B)
Q_B	?	Caudal estimado (B)
bhp _B	?	Potencia al eje estimada (B)
η_A, η_B	?	Eficiencias (A y B)
ρ	998.000 kg/m ³	Densidad del agua
g	9.810 m/s ²	Gravedad

Tabla de fórmulas (usadas en clase)

ID	Fórmula	Uso
F1	$C_H = \frac{gH}{\omega^2 D^2}$	Coeficiente de head (constante por similitud)
F2	$C_Q = \frac{Q}{\omega D^3}$	Coeficiente de capacidad/caudal (constante por similitud)
F3	$C_P = \frac{\text{bhp}}{\rho \omega^3 D^5}$	Coeficiente de potencia (constante por similitud)
F4	$\eta = \frac{\text{bhp}}{\rho g Q H}$	Eficiencia global (definición)
F5	$\eta_B \approx 1 - (1 - \eta_A) \left(\frac{D_A}{D_B} \right)^{1/5}$	Corrección de eficiencia por escala (forma usada en pizarra)

Desarrollo (siguiendo el procedimiento de clase)

Paso 1. Calcular C_H usando la turbina A (F1)

$$C_H = \frac{gH_A}{\omega_A^2 D_A^2} = \frac{(9,81)(75,0)}{(12,57)^2 (2,05)^2}$$

$$C_H = 1,12 \quad \Rightarrow \quad C_H = 1,12$$

Paso 2. Encontrar el diámetro D_B imponiendo similitud $C_{H,A} = C_{H,B}$

$$\frac{gH_A}{\omega_A^2 D_A^2} = \frac{gH_B}{\omega_B^2 D_B^2}$$

Como $\omega_B = \omega_A$:

$$D_B = \sqrt{\frac{gH_B}{\omega_B^2 C_H}} = \sqrt{\frac{(9,81)(104)}{(12,57)^2 (1,12)}} = 2,400 \text{ m}$$

$$D_B = 2,400 \text{ m}$$

Paso 3. Calcular C_Q con la turbina A (F2)

$$C_Q = \frac{Q_A}{\omega_A D_A^3} = \frac{350}{(12,57)(2,05)^3} = 3,23$$

$$C_Q = 3,23$$

Paso 4. Estimar Q_B con $C_{Q,A} = C_{Q,B}$ (F2)

$$Q_B = C_Q \omega_B D_B^3 = (3,23)(12,57)(2,40)^3 = 561,500 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$Q_B = 561,500 \text{ m}^3/\text{s}$$

Paso 5. Eficiencia de la turbina A (F4)

$$\eta_A = \frac{\text{bhp}_A}{\rho g Q_A H_A} = \frac{242 \times 10^6}{(998)(9,81)(350)(75)} = 0,941$$

$\eta_A = 0,941$

Paso 6. Calcular C_P con la turbina A (F3)

$$C_P = \frac{\text{bhp}_A}{\rho \omega_A^3 D_A^5} = \frac{242 \times 10^6}{(998)(12,57)^3(2,05)^5} = 3,37$$

$C_P = 3,37$

Paso 7. Estimar bhp_B con $C_{P,A} = C_{P,B}$ (F3)

$$\begin{aligned}\text{bhp}_B &= C_P \rho \omega_B^3 D_B^5 = (3,37)(998)(12,57)^3(2,40)^5 = 5,24 \times 10^8 \text{ W} \\ \text{bhp}_B &= 5,240 \times 10^8 \text{ W} = 524,000 \text{ MW} \\ \text{bhp}_B &= 5,240 \times 10^8 \text{ W} = 524,000 \text{ MW}\end{aligned}$$

Paso 8. Estimar η_B con la corrección por escala (F5)

$$\begin{aligned}\eta_B &\approx 1 - (1 - \eta_A) \left(\frac{D_A}{D_B} \right)^{1/5} \\ \eta_B &\approx 1 - (1 - 0,941) \left(\frac{2,05}{2,40} \right)^{1/5} = 0,943 \\ \eta_B &\approx 0,943\end{aligned}$$

Resumen final

$D_B = 2,400 \text{ m}$	$Q_B = 561,500 \text{ m}^3/\text{s}$	$\text{bhp}_B = 524,000 \text{ MW}$	$\eta_B \approx 0,943$
-------------------------	--------------------------------------	-------------------------------------	------------------------

Comentario final

El diseño se basa en similitud para turbinas Francis: al mantener constantes C_H , C_Q y C_P , y usar la misma velocidad de giro, el incremento de head a 104.000 m exige un mayor diámetro D_B , lo cual incrementa el caudal y la potencia de eje. La eficiencia se ajusta con la corrección por escala usada en clase, dando $\eta_B \approx 94,3\%$.