

Polytechnic University of Puerto Rico – Orlando Campus  
**ME 3140 – Intermediate Fluid Mechanics**

## **Homework N-07**

**Turbine Scaling Laws – Example 4 (Francis)**

**Instructor:** Dr. Joaquín Valencia

**Estudiante:** Antonio Pérez

**ID:** 158655

**Fecha de entrega:** 19 de enero de 2026

## Problema. Leyes de escalamiento de turbinas (Francis) – Example 4

Se diseña una turbina Francis para una represa hidroeléctrica escalando geoméricamente una turbina existente A que opera de forma excelente en su punto óptimo.

Datos de la turbina A (punto de mejor eficiencia):

$$D_A = 2,050 \text{ m}, \quad n_A = 120,000 \text{ rpm} \quad (\omega_A = 12,570 \text{ rad/s}), \quad Q_A = 350,000 \text{ m}^3/\text{s}, \quad H_A = 75,000 \text{ m}, \quad \text{bhp}_A = 242,000 \text{ MW}.$$

Para la turbina nueva B, el generador girará a la misma velocidad ( $n_B = 120,000 \text{ rpm}$ ), pero el head neto será mayor:

$$H_B = 104,000 \text{ m}.$$

Calcular:  $D_B$  para operación más eficiente (similitud), y estimar  $Q_B$ ,  $\text{bhp}_B$  y  $\eta_{\text{turbina},B}$ . Usar  $\rho = 998,000 \text{ kg/m}^3$  (agua a  $\approx 20,000^\circ \text{C}$ ) y  $g = 9,810 \text{ m/s}^2$ .

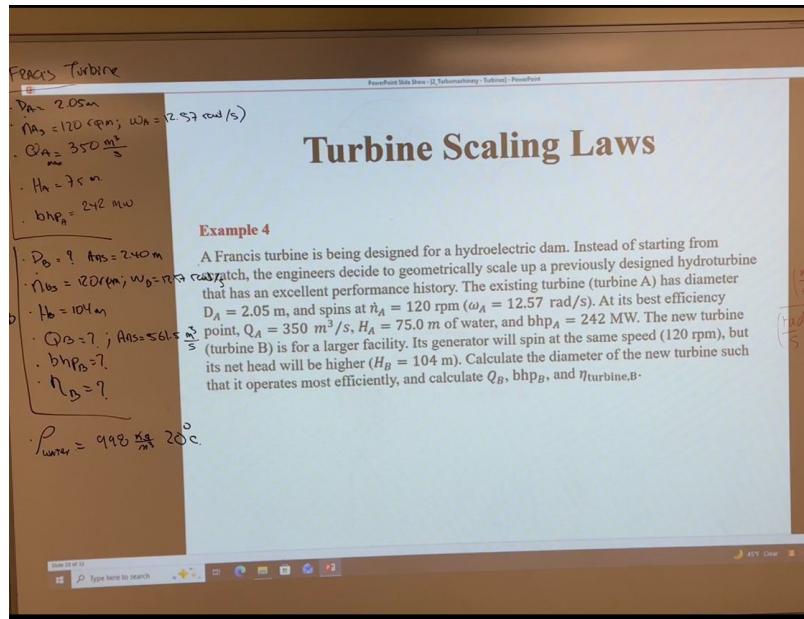


Figura 1: Diapositiva: “Turbine Scaling Laws – Example 4” (enunciado).

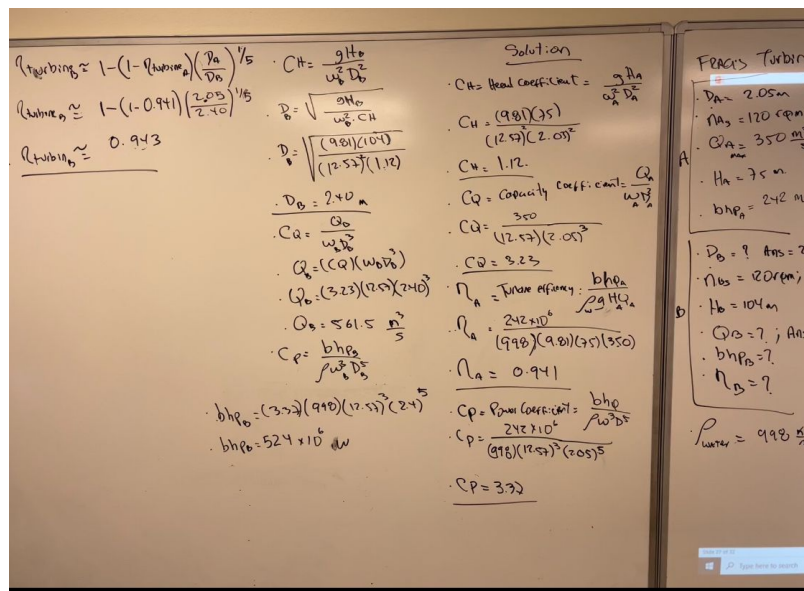


Figura 2: Pizarra: procedimiento de clase y resultados (coeficientes  $C_H$ ,  $C_Q$ ,  $C_P$  y escalamiento).

## Tabla de variables iniciales

Variable	Valor (SI)	Descripción
$D_A$	2.050 m	Diámetro del rodete (turbina A)
$n_A$	120.000 rpm	Velocidad de giro (turbina A)
$\omega_A$	12.570 rad/s	Velocidad angular (dada)
$Q_A$	350.000 m <sup>3</sup> /s	Caudal en punto óptimo (A)
$H_A$	75.000 m	Head neto (A)
$bhp_A$	242.000 MW	Potencia al eje (A)
$H_B$	104.000 m	Head neto (B)
$n_B$	120.000 rpm	Velocidad de giro (B)
$\omega_B$	12.570 rad/s	Misma velocidad angular (B)
$D_B$	?	Diámetro requerido (B)
$Q_B$	?	Caudal estimado (B)
$bhp_B$	?	Potencia al eje estimada (B)
$\eta_A, \eta_B$	?	Eficiencias (A y B)
$\rho$	998.000 kg/m <sup>3</sup>	Densidad del agua
$g$	9.810 m/s <sup>2</sup>	Gravedad

## Tabla de fórmulas (usadas en clase)

ID	Fórmula	Uso
F1	$C_H = \frac{gH}{\omega^2 D^2}$	Coefficiente de head (constante por similitud)
F2	$C_Q = \frac{Q}{\omega D^3}$	Coefficiente de capacidad/caudal (constante por similitud)
F3	$C_P = \frac{bhp}{\rho \omega^3 D^5}$	Coefficiente de potencia (constante por similitud)
F4	$\eta = \frac{bhp}{\rho g Q H}$	Eficiencia global (definición)
F5	$\eta_B \approx 1 - (1 - \eta_A) \left( \frac{D_A}{D_B} \right)^{1/5}$	Corrección de eficiencia por escala (forma usada en pizarra)

## Desarrollo (siguiendo el procedimiento de clase)

### Paso 1. Calcular $C_H$ usando la turbina A (F1)

$$C_H = \frac{gH_A}{\omega_A^2 D_A^2} = \frac{(9,81)(75,0)}{(12,57)^2 (2,05)^2}$$

$$C_H = 1,12 \quad \Rightarrow \quad C_H = 1,12$$

### Paso 2. Encontrar el diámetro $D_B$ imponiendo similitud $C_{H,A} = C_{H,B}$

$$\frac{gH_A}{\omega_A^2 D_A^2} = \frac{gH_B}{\omega_B^2 D_B^2}$$

Como  $\omega_B = \omega_A$ :

$$D_B = \sqrt{\frac{gH_B}{\omega_B^2 C_H}} = \sqrt{\frac{(9,81)(104)}{(12,57)^2 (1,12)}} = 2,400 \text{ m}$$

$$D_B = 2,400 \text{ m}$$

### Paso 3. Calcular $C_Q$ con la turbina A (F2)

$$C_Q = \frac{Q_A}{\omega_A D_A^3} = \frac{350}{(12,57)(2,05)^3} = 3,23$$

$$C_Q = 3,23$$

### Paso 4. Estimar $Q_B$ con $C_{Q,A} = C_{Q,B}$ (F2)

$$Q_B = C_Q \omega_B D_B^3 = (3,23)(12,57)(2,40)^3 = 561,500 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$Q_B = 561,500 \text{ m}^3/\text{s}$$

#### Paso 5. Eficiencia de la turbina A (F4)

$$\eta_A = \frac{\text{bhp}_A}{\rho g Q_A H_A} = \frac{242 \times 10^6}{(998)(9,81)(350)(75)} = 0,941$$
$$\eta_A = 0,941$$

#### Paso 6. Calcular $C_P$ con la turbina A (F3)

$$C_P = \frac{\text{bhp}_A}{\rho \omega_A^3 D_A^5} = \frac{242 \times 10^6}{(998)(12,57)^3 (2,05)^5} = 3,37$$
$$C_P = 3,37$$

#### Paso 7. Estimar $\text{bhp}_B$ con $C_{P,A} = C_{P,B}$ (F3)

$$\text{bhp}_B = C_P \rho \omega_B^3 D_B^5 = (3,37)(998)(12,57)^3 (2,40)^5 = 5,24 \times 10^8 \text{ W}$$
$$\text{bhp}_B = 5,240 \times 10^8 \text{ W} = 524,000 \text{ MW}$$
$$\text{bhp}_B = 5,240 \times 10^8 \text{ W} = 524,000 \text{ MW}$$

#### Paso 8. Estimar $\eta_B$ con la corrección por escala (F5)

$$\eta_B \approx 1 - (1 - \eta_A) \left( \frac{D_A}{D_B} \right)^{1/5}$$
$$\eta_B \approx 1 - (1 - 0,941) \left( \frac{2,05}{2,40} \right)^{1/5} = 0,943$$
$$\eta_B \approx 0,943$$

#### Resumen final

$$D_B = 2,400 \text{ m}$$

$$Q_B = 561,500 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$\text{bhp}_B = 524,000 \text{ MW}$$

$$\eta_B \approx 0,943$$

#### Comentario final

El diseño se basa en similitud para turbinas Francis: al mantener constantes  $C_H$ ,  $C_Q$  y  $C_P$ , y usar la misma velocidad de giro, el incremento de head a 104.000 m exige un mayor diámetro  $D_B$ , lo cual incrementa el caudal y la potencia de eje. La eficiencia se ajusta con la corrección por escala usada en clase, dando  $\eta_B \approx 94,3\%$ .