FÍSICA 2º BACHILLERATO

BLOQUE TEMÁTICO: INTERACCIÓN GRAVITATORIA

GRAVITACIÓN UNIVERSAL

1) Leyes de Kepler
2) Ley de la gravitación universal
3) Concepto de campo. Campo gravitatorio
4) Intensidad de un campo gravitatorio
5) Estudio energético de la interacción gravitatoria
6) Energía potencial gravitatoria
7) Principio de conservación de la energía mecánica
8) Potencial gravitatorio

---

1) LEYES DE KEPLER

Las leyes de Kepler fueron enunciadas por Johannes Kepler (principios siglo XVII) para describir matemáticamente el movimiento de los planetas en sus órbitas alrededor del Sol.

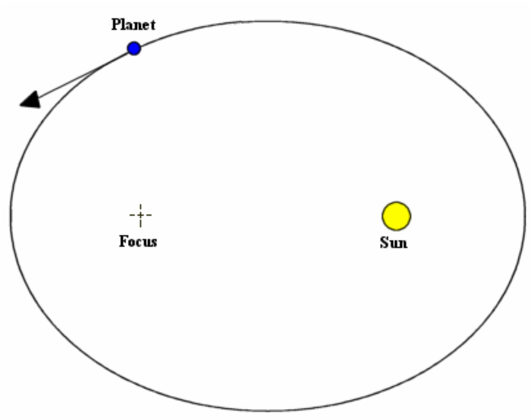
Se trata de tres leyes empíricas, es decir, son resultado del descubrimiento de regularidades en una serie de datos empíricos, concretamente en los datos de observación de la posición de los planetas realizados por Tycho Brahe.

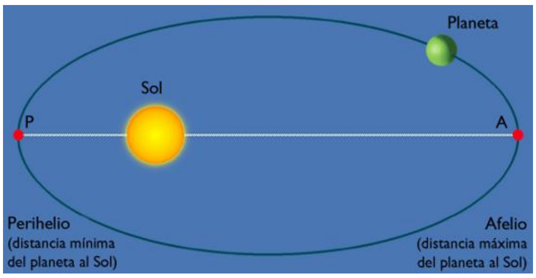
Todos los cuerpos en órbita alrededor de otro cuerpo cumplen las leyes, es decir, no solamente se pueden aplicar a los planetas del sistema solar sino a otros sistemas planetarios, estrellas orbitando a otras estrellas, satélites orbitando sobre planetas, etc.

Aunque Kepler no enunció sus leyes en el mismo orden, en la actualidad las leyes se numeran como sigue a continuación.

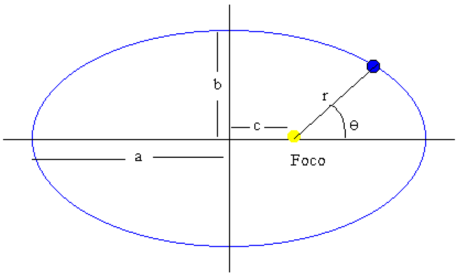
① Primera ley: ley de las órbitas.

Los planetas giran alrededor del Sol describiendo órbitas elípticas en uno de cuyos focos se encuentra el Sol.





El parámetro que da una idea del mayor o menor alejamiento de una elipse dada respecto de la circunferencia es la excentricidad (e). Para una elipse viene dada por la expresión



$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$

Donde b es el semieje menor de la elipse y a el semieje mayor.

-En la circunferencia $a = b$, entonces $e = 0$

-En la elipse $b < a$, entonces $0 < e < 1$

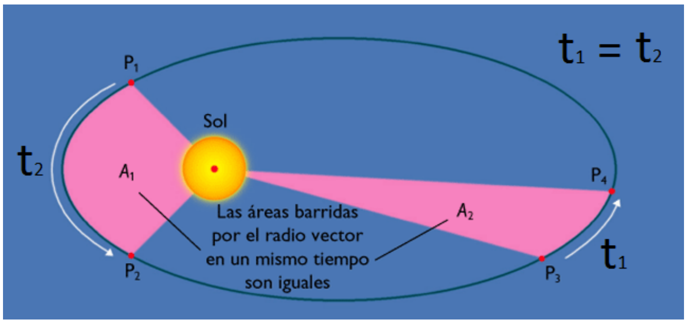
Las excentricidades de las órbitas de los planetas del sistema solar son

Planetas	Planetas enanos
Mercurio 0,206	Ceres 0,080
Venus 0,007	Plutón 0,249
Tierra 0,017	Eris 0,442
Marte 0,093	Makemake 0,159
Júpiter 0,048	Haumea, ¿?
Saturno 0,0541	
Urano 0,047	
Neptuno 0,009	

② Segunda ley: ley de las áreas.

Las áreas barridas por el radio vector que une el Sol con un planeta son directamente proporcionales a los tiempos empleados en barrerlas.

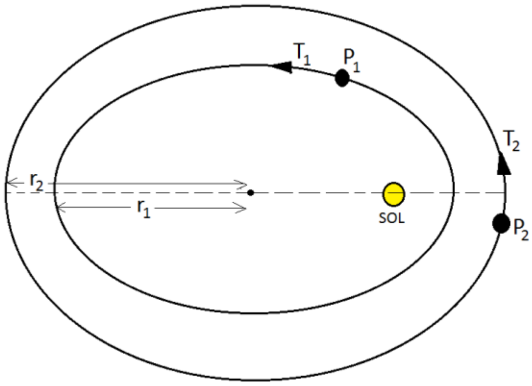
El radio vector que une un planeta y el Sol barre áreas iguales en tiempos iguales



Consecuencia: la velocidad de un cuerpo en órbita no es constante, es mayor cuando se encuentra en el perihelio que cuando está en el afelio. Por tanto, cuando se considere constante la velocidad de un objeto en órbita –movimiento circular uniforme– se está haciendo una aproximación si su órbita es elíptica. Esta aproximación será tanto mejor cuanto menor sea la excentricidad de la órbita. Solamente en una órbita circular se puede considera como constante la velocidad orbital.

③ Tercera ley: ley de los periodos.

Los cuadrados de los periodos de revolución son directamente proporcionales a los cubos de los semiejes mayores de las respectivas órbitas



Supongamos dos planetas, P_1 y P_2 que describen dos órbitas con periodos respectivos T_1 y T_2 (figura adjunta). Según la tercera ley de Kepler se cumple que:

$$\frac{T_1^2}{r_1^3} = \frac{T_2^2}{r_2^3}$$

La principal consecuencia en el siglo XVII de esta ley es que permitió dar dimensiones al sistema solar. En efecto, si consideramos como 1 la distancia entre la Tierra y el Sol (1 unidad astronómica, aproximadamente igual a 150 millones de kilómetros, valor no conocido en el siglo XVII), dado que se conoce el periodo de revolución de la Tierra, podemos conocer la distancia de cualquier planeta al Sol en unidades astronómicas sin más que conocer el periodo de revolución de dicho planeta, valor que se conoce de la observación astronómica del mismo. Por ejemplo, si el periodo de revolución aproximado del planeta Júpiter es de 11 años y 315 días,

$$11 \text{ años}, 315 \text{ días} = 11 + \frac{315}{365{,}25} = 11{,}86 \text{ años}$$

$$\frac{1^2}{1^3} = \frac{11{,}86^2}{\mathrm{r}_{\text{Júpiter}}^3}$$

$$\mathrm{r}_{\text{Júpiter}} = \sqrt[3]{11{,}86^2} = 5{,}2 \text{ unidades astronómicas}$$

2) LEY DE LA GRAVITACIÓN UNIVERSAL

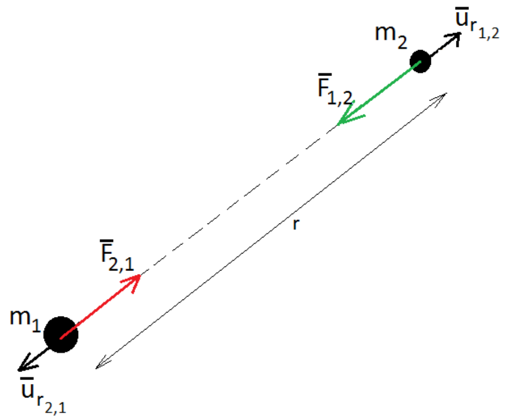
① A partir de las leyes enunciadas por Kepler, Isaac Newton dedujo la ley de gravitación universal. Se trata pues de una ley deductiva.

② La ley de gravitación de Newton puede enunciarse así:

Toda partícula material atrae a cualquier otra partícula material con una fuerza directamente proporcional al producto de las masas de ambas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa.

$$F = G\,\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Siendo m_1 y m_2 sus masas; r la distancia entre ellas y G una constante universal que recibe el nombre de **constante de gravitación.**



Su expresión en forma vectorial es:

$$\vec{F} = -G\,\frac{m_1\,m_2}{r^2}\,\overrightarrow{u_r}$$

Siendo $\overrightarrow{u_r}$ un vector unitario cuya dirección es la recta que une los centros de las dos partículas que se atraen y cuyo sentido va dirigido desde la partícula que origina la fuerza hacia fuera. Este sentido dado al vector unitario es el que explica la aparición del signo negativo en la expresión vectorial ya que el sentido de la fuerza gravitatoria será contrario al vector unitario que le corresponda.

En la figura anterior se puede observar que las fuerzas gravitatorias que actúan sobre cada una de las partículas son fuerzas de acción y reacción (tercer principio de la Dinámica) y, por tanto, tienen el mismo valor, son de sentidos contrarios y sus líneas de acción coinciden con la recta que las une.

③ La constante de gravitación, G.

Se trata de una constante universal, es decir, su valor es el mismo en cualquier parte del universo (conocido) e independiente del medio en el que se encuentren los cuerpos.

Newton no determinó el valor de esta constante ya que la formulación de la ley tal como lo hizo difiere de la formulación que se hace actualmente y que se está viendo aquí. El valor de G es

$$G = 6{,}670 \cdot 10^{-11}\,\frac{N \cdot m^2}{kg^2}$$

El sentido físico de este valor: es la fuerza con que se atraen dos masas de 1 kg situadas a una distancia de un metro.

④ **Dos problemas resueltos**

Calcula la masa de la Tierra a partir del peso de los cuerpos en su superficie. El radio de la Tierra es de 6380 kilómetros.

El peso de un cuerpo de masa m situado en la superficie del planeta es la fuerza con que la Tierra lo atrae. En módulo su valor es, según la ley de gravitación universal

$$F = G\,\frac{M_T\,m}{R_T^2}$$

Donde M_T es la masa de la Tierra y R_T es el radio del planeta.

Por otra parte, podemos aplicar la segunda ley de Newton teniendo en cuenta que la aceleración de caída de los cuerpos en la superficie de la Tierra es g.

$$F = m \cdot a = mg$$

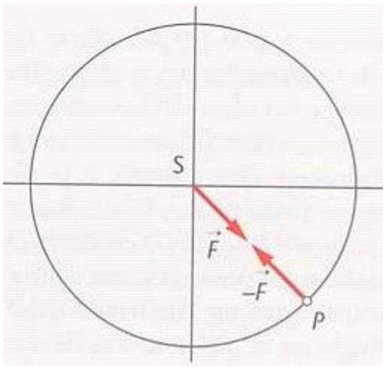
Como ambas fuerzas son iguales,

$$mg = G\frac{M_T\, m}{R_T^2}$$

Despejando la masa de la Tierra

$$M_T = \frac{g\, R_T^2}{G} = \frac{9{,}8 \cdot 6{,}38 \cdot 10^6}{6.67 \cdot 10^{-11}} = 5{,}98 \cdot 10^{24}\, kg$$

Calcula la masa del Sol a partir del periodo de traslación de la Tierra. Distancia entre la Tierra y el Sol, 149 millones de kilómetros.



La fuerza que ejerce el Sol sobre la Tierra es, según la ley de la gravitación universal (en módulo)

$$F = G\frac{M_T\, M_s}{R^2}$$

Donde M_T es la masa de la Tierra, M_s es la masa del Sol y R es la distancia entre la Tierra y el Sol.

Por otra parte, el movimiento de la Tierra alrededor de Sol es un movimiento circular resultado de una fuerza central o centrípeta cuya expresión es según la segunda ley de Newton

$$F = M_T \cdot a_c$$

Donde la aceleración centrípeta es

$$a_c = \frac{v^2}{R}$$

En esta expresión v representa la velocidad en de la Tierra en órbita alrededor del Sol. Suponiendo, como venimos haciendo, que se trata de un movimiento circular uniforme,

$$a_c = \frac{v^2}{R} = \frac{\omega^2 R^2}{R} = \omega^2 R = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R = \frac{4\pi^2 R}{T^2}$$

Por tanto,

$$F = M_T \cdot \frac{4\pi^2 R}{T^2}$$

Como ambas fuerzas son iguales

$$G\frac{M_T\, M_s}{R^2} = M_T \cdot \frac{4\pi^2 R}{T^2}$$

Despejando la masa del Sol,

$$M_s = \frac{4\pi^2 R^3}{GT^2} = \frac{4\pi^2 \cdot (1{,}49 \cdot 10^{11})^3}{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot (3{,}156 \cdot 10^7)^2} = 1.99 \cdot 10^{30} kg$$

Este procedimiento se puede utilizar para calcular la masa de cualquier planeta con satélites sin más que conocer su periodo de revolución de alguno de esos satélites alrededor del planeta (dato que se obtiene de la observación).

3) CONCEPTO DE CAMPO. CAMPO GRAVITATORIO.

Las fuerzas se pueden clasificar atendiendo a diferentes criterios. Si nos centramos en si los cuerpos que interaccionan se tocan o no podemos clasificarlas en:

- *Fuerzas de contacto*. Son fuerzas que están aplicadas directamente sobre los cuerpos cuyo movimiento se estudia. Por ejemplo cuando empujamos una mesa.

- *Fuerzas a distancia*. Generalmente son fuerzas a las que se ven sometidas las partículas por acción de otra partícula. La fuerza gravitatoria es una fuerza a distancia. Estas fuerzas quedan determinadas en función de la distancia que separa los centros de gravedad de las partículas implicadas.

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \;\rightarrow\; F = f(r)$$

Dentro del grupo de las fuerzas (interacciones) a distancia tenemos, por ejemplo, la interacción gravitatoria, la interacción eléctrica y la interacción magnética. Desde un punto de vista clásico, para poder explicar la interacción a distancia entre dos partículas se introduce el **concepto de campo,** utilizado por primera vez por Michael Faraday (1791-1867).

Campo: es la región del espacio en cuyos puntos se presentan o pueden apreciarse algunas propiedades físicas.

Estas propiedades físicas pueden tener carácter escalar o vectorial.

- Campos escalares. La presión atmosférica, la temperatura, por ejemplo, son magnitudes escalares que pueden definir campos escalares, es decir, regiones del espacio donde dichas propiedades sólo dependen de la posición del punto y del tiempo. Así, por ejemplo, un mapa de isobaras representa las regiones del campo donde la presión tiene el mismo valor.

- Campos vectoriales. También llamados campos de fuerzas. Son, por ejemplo, los campos gravitatorios, eléctricos o magnéticos. Una partícula en presencia de un campo gravitatorio se ve afectada por una fuerza gravitatoria, una carga eléctrica en presencia de un campo eléctrico se verá afectada por una fuerza eléctrica.

La magnitud física que define un campo vectorial es la **intensidad del campo** (gravitatorio, eléctrico, magnético,…).

Campo gravitatorio.

Se dice que existe un campo gravitatorio en una región del espacio si una masa colocada en un punto de esa región experimenta una fuerza gravitatoria.

Toda partícula con masa genera un campo gravitatorio a su alrededor, es la zona de influencia de la fuerza gravitatoria que puede generar sobre otra partícula.

Si cada masa genera su propio campo gravitatorio ¿qué partícula está inmersa en el campo de cuál? En general, la partícula que genera el campo es la de mayor masa, por eso decimos que los cuerpos sobre la Tierra se encuentran inmersos en el campo gravitatorio terrestre, o que la Luna gira alrededor de la Tierra porque aquella se encuentra en el mismo campo. Así, también decimos que la Tierra se encuentra en el campo gravitatorio solar, que afecta a todos los planetas que giran a su alrededor. Este campo gravitatorio solar también afecta de algún modo a los satélites de los planetas, pero al ser su intensidad inferior al campo gravitatorio planetario, se dice que cada satélite está afectado por el campo gravitatorio de su planeta.

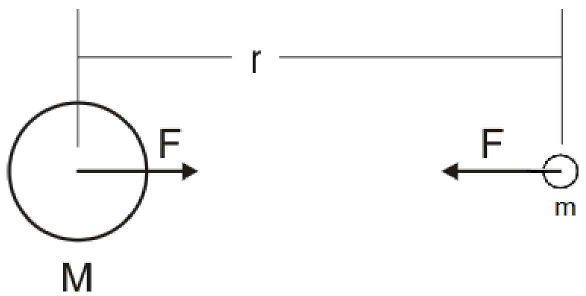
4) INTENSIDAD DE UN CAMPO GRAVITATORIO

Las magnitudes que caracterizan un campo gravitatorio son:

- Intensidad del campo gravitatorio, define un campo gravitatorio vectorial.
- Potencial del campo gravitatorio, define un campo gravitatorio escalar.

La primera (intensidad de campo) está relacionada con la fuerza que el campo puede ejercer sobre una masa. La segunda (potencial del campo) está relacionada con el trabajo que dicha fuerza puede realizar. Veremos aquí cómo se define y utiliza la intensidad de campo gravitatorio.

① Situación de partida: como se ha dicho está relacionada con la fuerza que el campo puede ejercer sobre una masa situada en un punto determinado del campo. Supongamos la situación general representada en la figura adjunta.



Al ser M mayor, decimos que m se encuentra inmersa en el campo gravitatorio generado por M.

② La fuerza de atracción entre las dos masas es, en módulo,

$$F = G\,\frac{M\,m}{r^2}$$

Según la segunda ley de Newton, la masa m sometida a una fuerza tiene una aceleración

$$F = m\,a$$

Esta aceleración se ha interpretado de varias formas:

- Si M es muy grande respecto de m y r es pequeño (por ejemplo, un cuerpo sobre la superficie de un planeta). Entonces la aceleración es la de la gravedad, que se ha venido expresando como g.

- Si M es muy grande respecto de m y r es grande (por ejemplo un planeta alrededor del Sol o un satélite alrededor de un planeta). Entonces la aceleración es centrípeta, resultado de la fuerza central que el cuerpo M está ejerciendo sobre el cuerpo m.

③ En realidad las dos formas son una misma, se denomina intensidad de campo gravitatorio (g) que ejerce la masa M en un punto situado a una distancia r de su centro de masa a

$$g = a = \frac{F}{m} = \frac{G\,\frac{M\,m}{r^2}}{m} = G\,\frac{M}{r^2}$$

$$\boldsymbol{g = G\,\frac{M}{r^2}}$$

- Si M es la masa de la Tierra entonces decimos que g representa la intensidad del campo gravitatorio terrestre a una distancia *r* de su centro de masas.

- Si M es la masa del Sol entonces decimos que g representa la intensidad del campo gravitatorio solar a una distancia *r* de su centro de masas.

- Si M es la masa de la Luna entonces decimos que g representa la intensidad del campo gravitatorio lunar a una distancia *r* de su centro de masas.

- etc...

La intensidad de campo gravitatorio de una masa M en un punto representa la fuerza que experimentaría la unidad de masa colocada en dicho punto. Su unidad en el S.I. es, por tanto, $N \cdot kg^{1}$, o también $m \cdot s^{-2}$.

④ Consideraciones a tener en cuenta:

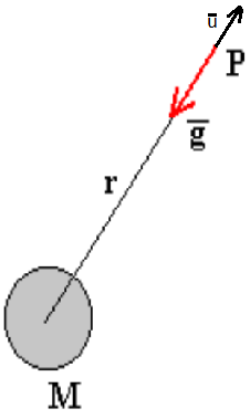
- La intensidad del campo gravitatorio en un punto viene determinada por la aceleración que experimenta un objeto colocado en dicho punto.

- Esta aceleración es independiente de la masa del objeto. Depende de la masa que crea el campo y la distancia del punto considerado.

- La dirección de la intensidad del campo (aceleración gravitatoria) es la que pasa por el centro de masa del cuerpo que crea el campo y el punto del espacio donde se está considerando el valor del campo.

- El sentido de la intensidad del campo (aceleración gravitatoria) es hacia el centro de masas que crea el campo. Por tanto, según el criterio establecido en pág. 4 para definir el vector unitario, su expresión vectorial será:

$$\vec{g} = -G\,\frac{M}{r^2}\,\hat{u}$$



- Es claro que si sustituimos M por la masa de la Tierra ($5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg) y r por el radio terrestre ($6{,}38 \cdot 10^{6}$ m), obtenemos para g un valor conocido:

$$\vec{g} = -G\frac{M}{r^2}\,\hat{u} = -6{,}67 \cdot 10^{-11}\frac{5{,}98 \cdot 10^{24}}{(6{,}38 \cdot 10^{6})^2} = -9{,}8\,\hat{u}$$

$$g = 9{,}8\,\frac{N}{kg} = 9{,}8\,m \cdot s^{-2}$$

⑤ Principio de superposición.

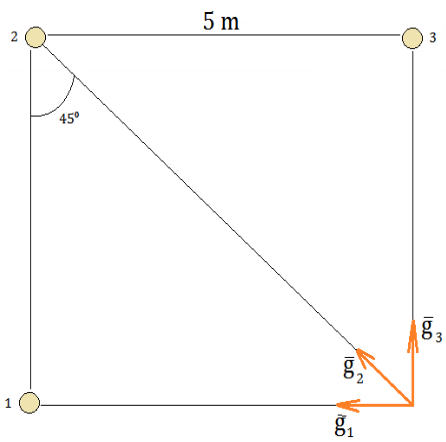
Una región del espacio puede estar bajo la influencia no de un campo gravitatorio sino de varios. Cuando hay más de una masa generando un campo gravitatorio se aplica el principio de superposición: el campo gravitatorio será el resultado de la suma vectorial de los campos generados por cada una de las masas.

Para n masas generando un campo gravitatorio,

$$\vec{g}_t = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 + \cdots + \vec{g}_n$$

Problemas resueltos

En tres vértices de un cuadrado de 5 m de lado se disponen sendas masas de 12 Kg. Determinar el campo gravitatorio en el cuarto vértice. ¿Qué fuerza experimentará una masa de 4 kg situada en dicho vértice.



· Sistema de referencia tiene su origen donde se encuentra la masa 1.

· Diagonal del cuadrado:

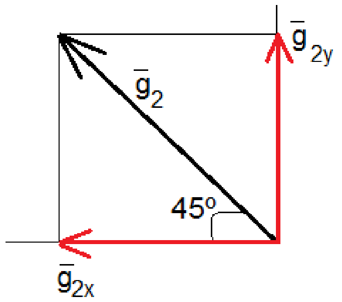
$$r_2 = \sqrt{50} = 7{,}07\,m$$

· Determinación del módulo de las intensidades del campo gravitatorio creado por cada masa en el vértice del cuadrado:

$$g_1 = g_3 = G\frac{m_1}{r_1^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\frac{12}{5^2} = 3{,}2 \cdot 10^{-11}\,N/kg$$

$$g_2 = G\frac{m_2}{r_1^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\frac{12}{7{,}07^2} = 1{,}6 \cdot 10^{-11}\,N/kg$$

· g_2 se descompone de la siguiente manera:



$$g_{2x} = g_2 \cdot \cos 45 = 1{,}13 \cdot 10^{-11}\ N/kg$$
$$g_{2y} = g_2 \cdot \text{sen}\, 45 = 1{,}13 \cdot 10^{-11}\ N/kg$$

· Expresamos ahora las intensidades de campo gravitatorio en función de los vectores unitarios cartesianos,

$$\vec{g}_1 = -3{,}2 \cdot 10^{-11}\,\hat{\imath} \qquad (N/kg)$$
$$\vec{g}_3 = 3{,}2 \cdot 10^{-11}\,\hat{\jmath} \qquad (N/kg)$$
$$\vec{g}_2 = -1{,}13 \cdot 10^{-11}\,\hat{\imath} + 1{,}13 \cdot 10^{-11}\hat{\jmath} \qquad (N/kg)$$

· La intensidad de campo gravitatorio total en el vértice del cuadrado será, según el principio de superposición,

$$\vec{g}_T = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 + \vec{g}_3 = -3{,}2 \cdot 10^{-11}\,\hat{\imath} - 1{,}13 \cdot 10^{-11}\,\hat{\imath} + 3{,}2 \cdot 10^{-11}\,\hat{\jmath} + 1{,}13 \cdot 10^{-11}\hat{\jmath}$$
$$\vec{g}_T = -4{,}33 \cdot 10^{-11}\,\hat{\imath} + 4{,}33 \cdot 10^{-11}\,\hat{\jmath} \qquad (N/kg)$$

Su módulo será:

$$g_T = \sqrt{(-4{,}33 \cdot 10^{-11})^2 + (4{,}33 \cdot 10^{-11})^2} = 6{,}1 \cdot 10^{-11}\ N/kg$$

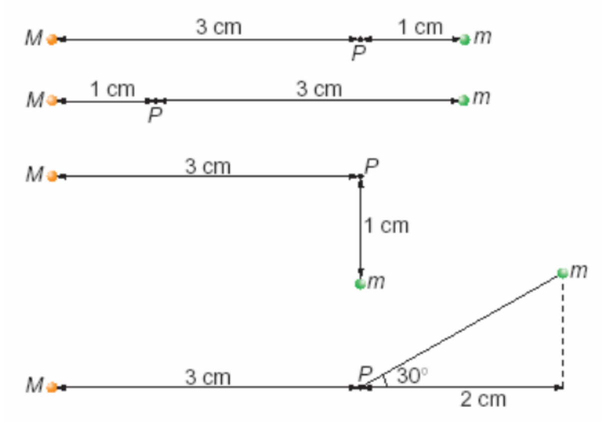
· En cuanto a la fuerza gravitatoria que experimentaría una masa de 4 kg situada en dicho vértice,

$$\vec{F} = m\vec{g}_T = 4 \cdot (-4{,}33 \cdot 10^{-11}\,\hat{\imath} + 4{,}33 \cdot 10^{-11}\,\hat{\jmath}) = -1{,}73 \cdot 10^{-10}\hat{\imath} + 1{,}73 \cdot 10^{-10}\hat{\jmath}$$

Cuyo módulo es,

$$F = mg_T = 4 \cdot 6{,}1 \cdot 10^{-11} = 2{,}44 \cdot 10^{-10}\ N$$

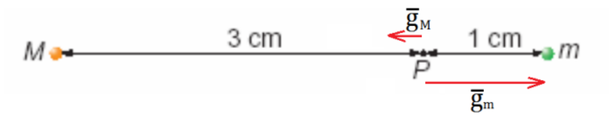
Calcula la intensidad de campo gravitatorio que crean dos masas, M y m, en un punto P, en los cuatro casos representados en la figura. En todos ellos las intensidades de los campos creados por M y m tienen en P como módulo 5 y 20 N/kg, respectivamente.



Datos:

· $g_M = 5$ N/kg
· $g_m = 20$ N/kg

Sistema de referencia en todos los casos tiene como origen el punto P.



a) Expresión vectorial de las dos intensidades de campo gravitatorio en el punto P:

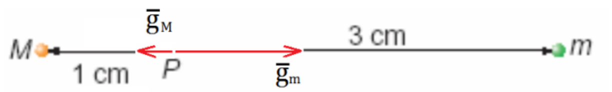
$$\vec{g}_M = -5\,\hat{\imath}$$

$$\vec{g}_m = 20\,\hat{\imath}$$

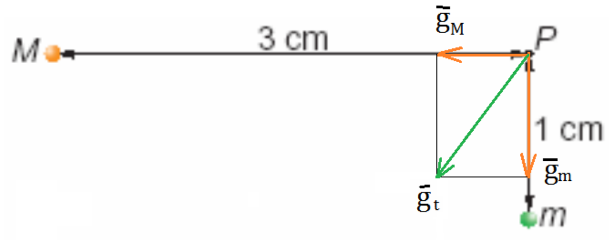
$$\vec{g}_t = \vec{g}_M + \vec{g}_m = -5\,\hat{\imath} + 20\,\hat{\imath} = 15\ \hat{\imath} \quad (N/kg)$$

$$g_t = 15\ N/kg$$

Una masa de un kilogramo situada en el punto P está sometida a una fuerza de 15 N en la dirección que une ambas masas y cuyo sentido va hacia la masa m.



b) Idéntico al apartado a)



c) Expresión vectorial de las dos intensidades de campo gravitatorio en el punto P:

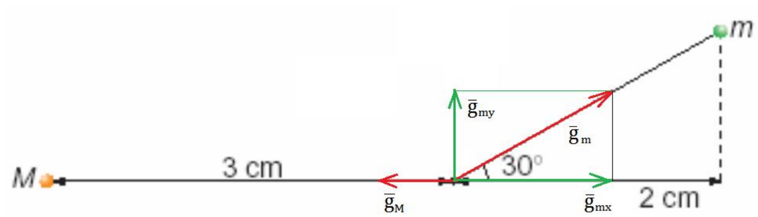
$$\vec{g}_M = -5\,\hat{\imath}$$

$$\vec{g}_m = -20\,\hat{\jmath}$$

$$\vec{g}_t = \vec{g}_M + \vec{g}_m = -5\,\hat{\imath} - 20\,\hat{\jmath} \quad (N/kg)$$

$$g_t = \sqrt{(-5)^2 + (-20)^2} = \sqrt{425} = 20{,}6\ N/kg$$

Una masa de un kilogramo situada en el punto P está sometida a una fuerza de 20,6 N en dirección y el sentido mostrado en la figura.



d) Expresión vectorial de las dos intensidades de campo gravitatorio en el punto P:

$$\vec{g}_M = -5\,\hat{\imath}$$

$$\vec{g}_m = g_m \cos 30\ \hat{\imath} + g_m \operatorname{sen} 30\ \hat{\jmath} = 20 \cos 30\ \hat{\imath} + 20\ \operatorname{sen} 30\ \hat{\jmath}$$

$$\vec{g}_m = 17{,}3\,\hat{\imath} + 10\,\hat{\jmath}$$

$$\vec{g}_t = \vec{g}_M + \vec{g}_m = -5\,\hat{\imath} + 17{,}3\,\hat{\imath} + 10\,\hat{\jmath} = 12{,}3\,\hat{\imath} + 10\,\hat{\jmath} \quad (N/kg)$$

$$g_t = \sqrt{(12{,}3)^2 + (10)^2} = \sqrt{251{,}29} = 15{,}85\ N/kg$$

Suponga que un cuerpo se deja caer desde la misma altura sobre la superficie de la Tierra y de la Luna. Explique por qué los tiempos de caída serían distintos y calcule su relación.
$M_T = 81\ M_L$; $R_T = (11/3)\ R_L$

La caída de un cuerpo en la superficie de la Tierra (desde una altura pequeña que no implique una variación detectable de la intensidad del campo gravitatorio terrestre) es un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado cuya ecuación del movimiento es:

$$r_T = h - \frac{1}{2}\, g_T\, t_T^2$$

Donde r_t es la posición del móvil en el instante t_T^2, medido desde la superficie del planeta, h es la altura desde la que se deja caer (velocidad inicial nula), g_T es la aceleración de la gravedad terrestre, es decir, la intensidad del campo gravitatorio terrestre en su superficie (su valor es negativo pues el vector intensidad de campo tiene sentido contrario al tomado como positivo).

En la Luna la expresión es la misma pero cambiando la intensidad del campo gravitatorio por el lunar:

$$r_L = h - \frac{1}{2} g_L t_L^2$$

Para poder comparar ambas expresiones debemos, con los datos que nos dan, expresar la intensidad del campo gravitatorio lunar en función de la intensidad del campo gravitatorio terrestre,

$$g_T = G\,\frac{M_T}{R_T^2}$$

$$g_L = G\,\frac{M_L}{R_L^2} = G\,\frac{\frac{M_T}{81}}{\left(\frac{3R_T}{11}\right)^2} = G\,\frac{\frac{M_T}{81}}{\frac{9R_T^2}{121}} = \frac{121}{9 \cdot 81}\ G\,\frac{M_T}{R_T^2} = 0{,}166\ g_T$$

En ambos casos, tanto en la Tierra como en la Luna la posición final del cuerpo es el suelo, es decir,

$$r_T = r_L$$

$$h - \frac{1}{2} g_T t_T^2 = h - \frac{1}{2} g_L t_L^2$$

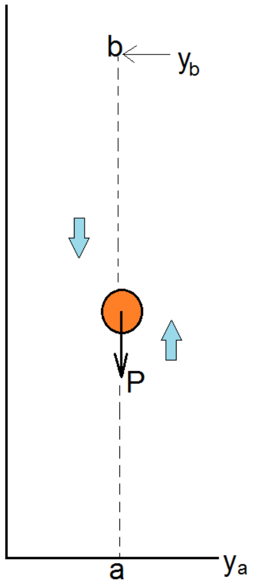
$$g_T t_T^2 = g_L t_L^2\ ; \qquad g_T t_T^2 = 0{,}166\ g_T t_L^2\ ; \qquad t_L = \sqrt{\frac{1}{0{,}166}}\ t_T$$

$$t_L = 2{,}45\ t_T$$

5) ESTUDIO ENERGÉTICO DE LA INTERACCIÓN GRAVITATORIA

La interacción gravitatoria también se puede describir en términos energéticos, teniendo en cuenta los conceptos de **fuerza conservativa** y de **energía potencial.** Una de las formas de transmitir la energía desde un cuerpo a otro cuerpo es mediante una fuerza de interacción. Esta fuerza de interacción provoca en el cuerpo sobre el que se ejerce un desplazamiento y, por tanto, produce un trabajo. Este trabajo es la energía transmitida.

Centrémonos en el caso que nos ocupa, la interacción gravitatoria. Supongamos que se lanza un objeto hacia arriba. El objeto alcanza una altura máxima y luego cae. Vamos a calcular el trabajo total realizado por la fuerza gravitatoria, que está actuando sobre el cuerpo continuamente. En estas consideraciones se está despreciando cualquier resistencia del aire al movimiento.



En la figura adjunta, a es el punto de partida, situado a una altura y_a respecto de la superficie, b es el punto más alto que alcanza el objeto, situado a una altura y_b. Vamos a determinar el trabajo que realiza la fuerza gravitatoria (peso) mientras el cuerpo sube y cuando el cuerpo baja.

- Cuerpo subiendo:

$$W_a^b = \vec{P} \cdot \Delta\vec{r} = P \cdot \Delta \mathrm{r} \cdot \cos 180 = -\mathrm{mg}(\mathrm{y_b} - \mathrm{y_a})$$

- Cuerpo bajando:

$$W_b^a = \vec{P} \cdot \Delta\vec{r} = P \cdot \Delta \mathrm{r} \cdot \cos 0 = \mathrm{mg}(\mathrm{y_b} - \mathrm{y_a})$$

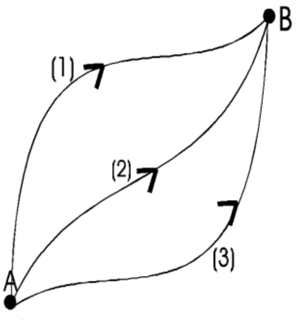
Hacer notar que en los dos casos Δr es ($y_b - ya$) ya que es el módulo del desplazamiento (siempre positivo).

- El trabajo total será:

$$W_T = W_a^b + W_b^a = 0$$

Como vemos, el trabajo realizado a través de una línea cerrada (trayectoria cerrada que empieza y termina en el mismo punto) es cero.

*Una **fuerza es conservativa** si el trabajo realizado por dicha fuerza a través de una línea cerrada es nulo o, lo que es lo mismo, el trabajo realizado entre por dicha fuerza entre dos puntos siempre es el mismo independientemente del camino seguido.*



La fuerza que interviene para mover un cuerpo desde A hasta B por los caminos 1, 2 ó 3 es conservativa si:

$$(W_a^b)_1 = (W_a^b)_2 = (W_a^b)_3$$

Además, por ejemplo,

$$(W_a^b)_1 + (W_b^a)_2 = 0$$

$$(W_a^b)_2 + (W_b^a)_2 = 0\,, \qquad etc.$$

La fuerza gravitatoria y la fuerza elástica son fuerzas conservativas. También es conservativa la fuerza eléctrica. La fuerza de rozamiento no es conservativa (es una fuerza que siempre se opone al movimiento y, por tanto, siempre formará un ángulo de 180º con el desplazamiento). Tampoco es conservativa la fuerza magnética.

Energía potencial asociada a una fuerza conservativa

La energía potencial es una magnitud característica de las fuerzas conservativas. Se representa por U o por Ep.

La variación de la energía potencial viene definida por el llamado *Teorema de la Energía Potencial*. En general, el trabajo realizado por una fuerza conservativa (F) cuando desplaza su punto de aplicación desde la posición 1 hasta la posición 2 viene dado por:

$$W_1^2 = \int_1^2 \vec{F}\, d\vec{r} = -(U_2 - U_1) = -\Delta U \qquad (= -\Delta E_p)$$

El trabajo realizado por una fuerza conservativa es igual a la variación de la energía potencial del cuerpo sobre el que actúa, tomando como minuendo la energía potencial del punto de partida.

Consideraciones:

① La expresión anterior solo puede utilizarse si F es conservativa.

② En el ejemplo anterior de un cuerpo lanzado verticalmente desde un punto del campo gravitatorio, no se ha integrado la expresión del trabajo porque se considera que la variación en altura es pequeña y la intensidad del campo gravitatorio permanece prácticamente constante.

Aplicamos el teorema a dicho ejemplo. Primero cuando el cuerpo sube:

$$W_a^b = \vec{P} \cdot \Delta\vec{r} = P \cdot \Delta \mathrm{r} \cdot \cos 180 = -\mathrm{mg}(\mathrm{y_b} - \mathrm{y_a}) = -\Delta \mathrm{E_p}$$

Como $y_b > y_a$, entonces, $W_a^b = -\Delta \mathrm{E_p} < 0$.

Cuando el trabajo que realiza una fuerza conservativa es negativo, para mover el cuerpo desde el punto *a* hasta el punto *b* hay que realizar un trabajo en contra del campo gravitatorio (el cuerpo no va a subir solo). Es un trabajo que debemos realizar nosotros, cuyo valor será igual al que realiza la fuerza conservativa pero cambiado de signo.

Cuando el cuerpo cae,

$$W_b^a = \vec{P} \cdot \Delta\vec{r} = P \cdot \Delta \mathrm{r} \cdot \cos 0 = \mathrm{mg}(\mathrm{y_b} - \mathrm{y_a}) = -\Delta \mathrm{E_p}$$

Como $y_b > y_a$, entonces, $W_a^b = -\Delta \mathrm{E_p} > 0$.

Cuando el trabajo que realiza una fuerza conservativa es positivo, para mover el cuerpo desde el punto *b* hasta el punto *a*, el trabajo lo realiza el campo gravitatorio.

③ Teorema de las fuerzas vivas.

En mecánica del sólido rígido, el trabajo realizado por una fuerza al desplazarse su punto de aplicación entre dos posiciones es igual al incremento que experimenta la energía cinética del cuerpo sobre la que actúa:

$$W_a^b = \Delta E_c$$

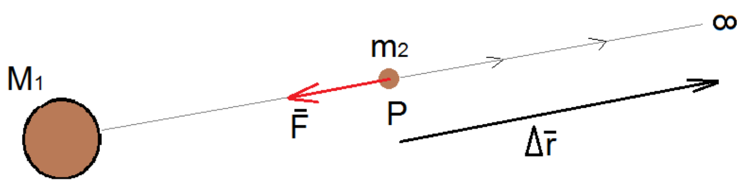
④ Diferencia entre el teorema de la energía potencial y el teorema de las fuerzas vivas: el teorema de la energía potencial sólo es válido para fuerzas conservativas, mientras que el teorema de las fuerzas vivas es válido para todo tipo de fuerzas, conservativas y no conservativas.

Por ejemplo, el teorema de las fuerzas vivas puede aplicarse aunque existan fuerzas disipativas, como la fuerza de rozamiento. Así, se puede utilizar para calcular el trabajo que realizan los frenos de un coche en una frenada (sin embargo, en el caso de la caída de un cuerpo se ha dicho desde el principio que se desprecia la resistencia del aire).

6) ENERGÍA POTENCIAL GRAVITATORIA

La fuerza gravitatoria es conservativa. Por consiguiente lleva asociada una energía potencial cuya expresión será deducida en este apartado, así como un análisis de las consecuencias de aplicación de dicha expresión.

① Situación de partida: dos masas cualesquiera M_1 y m_2 ($M_1 >> m_2$). La masa m_2 se encuentra inmersa en el campo gravitatorio que genera M_1 en un punto P, situado a una distancia r del centro de M_1, y se mueve desde dicho punto hasta el infinito (es decir, se aleja del campo gravitatorio de M_1).



Se puede tratar, por ejemplo, de un lanzamiento vertical de una masa en un planeta, o de una salida de órbita de un satélite.

② Cálculo del trabajo que realiza la fuerza gravitatoria en este desplazamiento.

$$W_P^\infty = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}$$

Aquí $\vec{F}$ es la fuerza gravitatoria que se establece en m_2 y que es ejercida por M_1. Por otra parte, $\Delta\vec{r}$ es el vector desplazamiento con origen en P y extremo en el infinito. $\vec{F}$ es una fuerza variable que depende de la distancia que hay entre las masas. Esta circunstancia impide un cálculo del trabajo con la expresión anterior, hay que recurrir a calcular dicho trabajo (dW) en desplazamientos infinitesimales ($d\vec{r}$):

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F\, dr \cos 180 = -\, G \frac{M_1 m_2}{r^2}\, dr$$

y “sumar” (integral) todos los trabajos calculados al final:

$$W_P^{\infty} = \int_r^{\infty} -G\frac{M_1 m_2}{r^2}\,dr = -GM_1m_2\int_r^{\infty}\frac{dr}{r^2} = -GM_1m_2\left[\frac{-1}{r}\right]_r^{\infty}$$

$$W_P^{\infty} = -GM_1m_2\left[\frac{1}{r} - \frac{1}{\infty}\right] = -\,G\,\frac{M_1m_2}{r}$$

③ La expresión anterior representa la energía potencial gravitatoria de m_2 en un punto cualquiera P del campo gravitatorio creado por M_1.

$$Ep = -\,G\,\frac{M_1m_2}{r}$$

¿Qué representa dicha energía potencial gravitatoria?

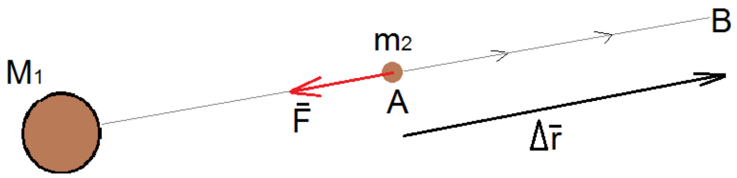
Es el trabajo necesario para llevar, en presencia de M_1, la masa m_2 desde el punto donde se encuentra hasta el infinito.

La energía potencial no se puede conocer de forma absoluta. Sólo se puede conocer la diferencia de energía potencial, pero al poner el punto final en el infinito se asume que en dicho punto la energía potencial es cero.

④ Valoración del signo de Ep.

Como vemos la energía potencial es negativa, es decir, el trabajo necesario para alejar una masa de la influencia de otra lo debemos “hacer nosotros” en contra del campo. Dado que se ha calculado el trabajo que realiza la fuerza gravitatoria, el que teóricamente debemos “hacer nosotros” al aplicar una fuerza sobre m_2 es el mismo pero cambiado de signo.

⑤ Si la posición final no es el infinito sino que es otra cualquiera.



Aplicando el teorema de la energía potencial y sustituyendo ésta por la expresión recién encontrada

$$W_A^B = -\Delta Ep = -(Ep_B - Ep_A) = -\left(-\,G\,\frac{M_1m_2}{r_B} + G\,\frac{M_1m_2}{r_A}\right)$$

$$W_A^B = \left(G\,\frac{M_1m_2}{r_B} - \,G\,\frac{M_1m_2}{r_A}\right)$$

Pueden darse dos posibilidades:

1) $r_A < r_B$, situación dibujada anteriormente que corresponde a un alejamiento de las dos masas. En estas condiciones,

$$\frac{1}{r_B} < \frac{1}{r_A} \;\; \rightarrow \;\; W_A^B < 0$$

es decir, el trabajo necesario para alejar una masa de la influencia de otra lo debemos "hacer nosotros" en contra del campo. Dado que se ha calculado el trabajo que realiza la fuerza gravitatoria, el que teóricamente debemos "hacer nosotros" al aplicar una fuerza sobre m_2 es el mismo pero cambiado de signo.

2) $r_A > r_B$, situación que corresponde a un acercamiento entre las dos masas. En estas condiciones

$$\frac{1}{r_B} > \frac{1}{r_A} \;\; \rightarrow \;\; W_A^B > 0$$

es decir, el trabajo necesario para acercar una masa a otra lo realiza el campo gravitatorio.

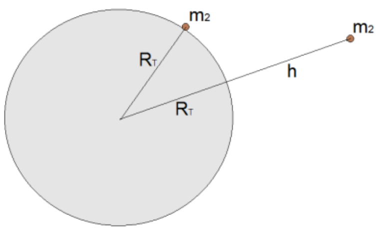
⑥ Energía potencial terrestre y su relación con la expresión Ep = mgh.

Hemos visto que la energía potencial gravitatoria de una masa m_2 debido a la interacción gravitatoria con otra masa M_1 viene dada por la expresión:

$$Ep = -\,G\;\frac{M_1 m_2}{r}$$

Donde r es la distancia entre los centros de masa de M_1 y m_2. También hemos visto que su valor representa el trabajo que hay que realizar para mover m_2 desde su posición hasta el infinito.

Si M_1 representa la masa de la Tierra todo lo dicho es válido y entonces Ep representa la energía potencial gravitatoria terrestre. En esta situación se pueden hacer algunas consideraciones:



1) r como mínimo vale el radio de la Tierra, R_T. Si m_2 se encuentra en la superficie de la Tierra,

$$Ep = -\,G\;\frac{M_1 m_2}{R_T}$$

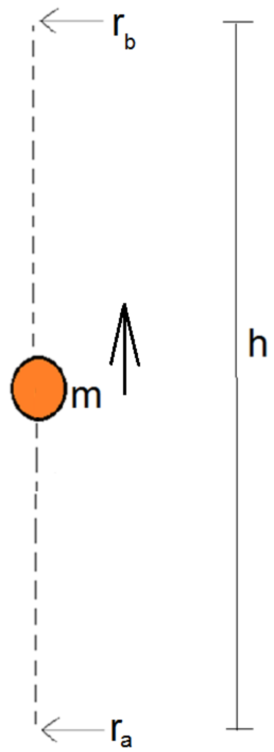
Este valor es negativo, distinto de cero. Cambiado de signo representa el trabajo que debemos realizar en contra del campo gravitatorio terrestre para desplazar m_2 desde la superficie de la Tierra hasta el infinito.

2) Cuando m_2 se encuentra a una altura h sobre la superficie terrestre, su energía potencial será

$$Ep = -\,G\;\frac{M_1 m_2}{(R_T + h)}$$

Este valor también es negativo, menos negativo que el caso anterior. Cambiado de signo representa el trabajo que debemos realizar en contra del campo gravitatorio terrestre para desplazar m_2 desde una altura h de la Tierra hasta el infinito.

¿Cuándo se puede utilizar entonces la expresión Ep = mgh? ¿Por qué si utilizamos la expresión Ep = mgh la energía potencial es cero en la superficie de la Tierra contradiciendo lo que se ha mencionado anteriormente?



Volvamos a la siguiente situación: un cuerpo se lanza desde un punto r_a hasta otro punto r_b:

$$W_a^b = -\Delta Ep = -(Ep_b - Ep_a) = -\left(-G\frac{M_T m}{r_b} + G\frac{M_T m}{r_a}\right)$$

Si r_a es la superficie de la Tierra,

$$-\Delta Ep = -GM_T m\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{R_T + h}\right)$$

$$-\Delta Ep = -GM_T m\left(\frac{R_T + h - R_T}{R_T(R_T + h)}\right) = GM_T m\left(\frac{h}{R_T(R_T + h)}\right)$$

Como $R_T \gg h$, la expresión $R_T(R_T + h)$ es aproximadamente igual a R_T^2. Entonces la variación de energía potencial en esta caída es

$$\Delta Ep = GM_T m\left(\frac{h}{R_T^2}\right) = m_2 \cdot G\frac{M_T}{R_T^2} \cdot h = mgh$$

Por otra parte, si hacemos $Ep_a = 0$ ya que al encontrarse en la superficie de la Tierra su altura sobre esta es cero,

$$\Delta Ep = Ep_b - Ep_a = Ep_b - 0$$

Entonces podemos asimilar la energía potencial a una cierta altura sobre la superficie como

$$Ep_b = mgh$$

La expresión Ep = mgh sólo es válida, por tanto, cuando $R_T \gg h$ pues en estas condiciones la intensidad del campo gravitatorio, g, se mantiene prácticamente constante.

7) PRINCIPIO DE CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA MECÁNICA

Se llama energía mecánica de un sistema a la suma de la energía cinética y la energía potencial

$$Em = Ec + Ep$$

El principio de conservación de la energía mecánica dice:

Si sobre un sistema sólo actúan fuerzas conservativas, la energía mecánica del sistema se mantiene constante

Deducción:

Tenemos dos teoremas que se pueden aplicar cuando un cuerpo se mueve desde un punto a otro gracias a la acción de una fuerza conservativa:

-Teorema de la energía cinética, $W_1^2 = \Delta Ec$

-Teorema de la energía potencial, $W_1^2 = -\Delta Ep$

Si ambas expresiones representan el mismo trabajo,

$$\Delta Ec = -\Delta Ep$$

$$\Delta Ec + \Delta Ep = 0$$

$$Ec_2 - Ec_1 + Ep_2 - Ep_1 = 0$$

$$Ec_2 + Ep_2 - (Ec_1 + Ep_1) = 0$$

$$Em_2 - Em_1 = 0$$

$$\Delta Em = 0$$

Este principio sólo se puede utilizar si en el sistema no intervienen fuerzas no conservativas. Sin embargo las fuerzas no conservativas, a menudo llamadas fuerzas disipativas (disipan energía en forma de calor) son de lo más habitual (fuerza de rozamiento). Cuando en un sistema se tengan en cuenta estas fuerzas disipativas, el principio de conservación de la energía mecánica debe ser modificado.

Como el trabajo que se realiza sobre un cuerpo es igual a la suma de los trabajos que realizan cada una de las fuerzas que actúan sobre él, podemos poner,

$$W_T = W_c + W_{nc}$$

Donde W_c es el trabajo que realiza todas las fuerzas conservativas (gravitatoria, elástica, etc.) y W_{nc} es trabajo que realizan las fuerzas no conservativas (fundamentalmente la fuerza de rozamiento). Los teoremas de la energía cinética y energía potencial se aplican de la siguiente forma:

$$W_c = -\Delta Ep$$

$$W_T = \Delta Ec$$

Por tanto,

$$\Delta Ec = -\Delta Ep + W_{nc}$$

$$\Delta Ec + \Delta Ep = W_{nc}$$

$$\Delta Em = W_{nc}$$

El trabajo realizado por las fuerzas no conservativas es igual a la variación de la energía mecánica. Es decir, la energía mecánica no se mantiene constante.

8) POTENCIAL GRAVITATORIO

En la determinación de la energía potencial de una masa m_2 inmersa en el campo gravitatorio de M_1, si m_2 fuese la unidad de masa, entonces el trabajo necesario para mover la unidad de masa desde donde se encuentre hasta el infinito recibe el nombre de potencial gravitatorio (V). Por tanto,

$$Ep = -G\,\frac{M_1 m_2}{r} \xrightarrow{si\ m_2 = 1\ kg} V = -G\,\frac{M_1}{r}$$

El potencial gravitatorio se mide en J/kg.

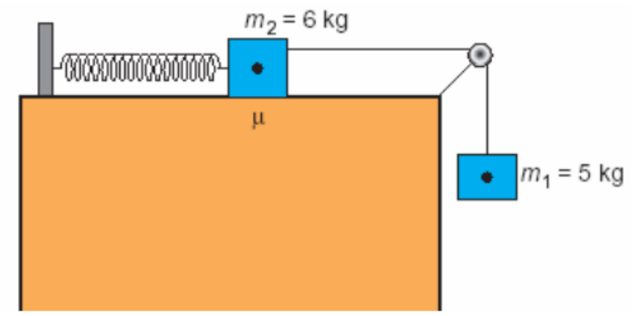
Se puede encontrar una expresión que permita calcular el trabajo necesario para mover una masa m_2 entre dos puntos del campo gravitatorio generado por M_1 en función de los potenciales gravitatorios de dichos puntos:

$$W_a^b = -\Delta Ep = -\left(-G\,\frac{M_1 m_2}{r_b} + G\,\frac{M_1 m_2}{r_a}\right) = -m_2\left(-G\,\frac{M_1}{r_b} + G\,\frac{M_1}{r_a}\right)$$

$$W_a^b = -\Delta Ep = -\mathrm{m}_2 \Delta \mathrm{V}$$

Problemas resueltos

En el dispositivo de la figura, el muelle tiene una constante elástica K = 1000 N/m y el coeficiente de rozamiento de la masa m_2 con la superficie de la mesa vale 0,1. Si, inicialmente, el muelle se encuentra en reposo, calcula la ecuación que proporciona el alargamiento máximo.



Inicio

El sistema parte del reposo (v_o = 0) y, según el enunciado, el muelle no está estirado (x = 0). Con estos datos podemos establecer que inicialmente la energía mecánica del sistema es la energía potencial correspondiente a la altura (h_o) a la que se encuentre la masa m_1, es decir,

$$Em_o = Ep_o = m_1 g h_o$$

Final

La energía potencial de la masa m_1 es la que hace moverse al sistema, que empieza a acelerar y el muelle a estirarse hasta que el sistema se detiene (v = 0) con un estiramiento máximo del muelle (x). En estas condiciones la energía mecánica del sistema corresponde a la energía potencial de m_1 debido a la nueva altura a la que se encuentre (h) y energía potencial elástica del muelle, es decir,

$$Em = Ep_{gravitatoria} + Ep_{elástica}$$

$$Em = m_1gh + \frac{1}{2}Kx^2$$

Por tanto,

$$\Delta Em = Em - Em_o = m_1gh + \frac{1}{2}Kx^2 - m_1gh_o$$

$$\Delta Em = m_1g(h - h_o) + \frac{1}{2}Kx^2 = -m_1gx + \frac{1}{2}Kx^2$$

Ya que la variación en altura de m_1 es igual al alargamiento que se produce en el muelle, pero su valor es negativo porque $h < h_o$.

Entre el instante inicial y el final interviene una fuerza no conservativa (fuerza de rozamiento), por tanto,

$$\Delta Em = W_{nc}$$

Donde W_{nc} es el trabajo realizado por la fuerza de rozamiento, es decir,

$$W_{nc} = F_Rx\cos 180 = -\mu Nx = -\mu m_2gx$$

Donde la distancia que recorre m_2 en horizontal es igual al alargamiento que se produce en el muelle.

Igualando la variación de energía mecánica con el trabajo no conservativo:

$$-m_1gx + \frac{1}{2}Kx^2 = -\mu m_2gx$$

$$-49 \cdot x + \frac{1}{2}\,1000\,x^2 = -5{,}88 \cdot x$$

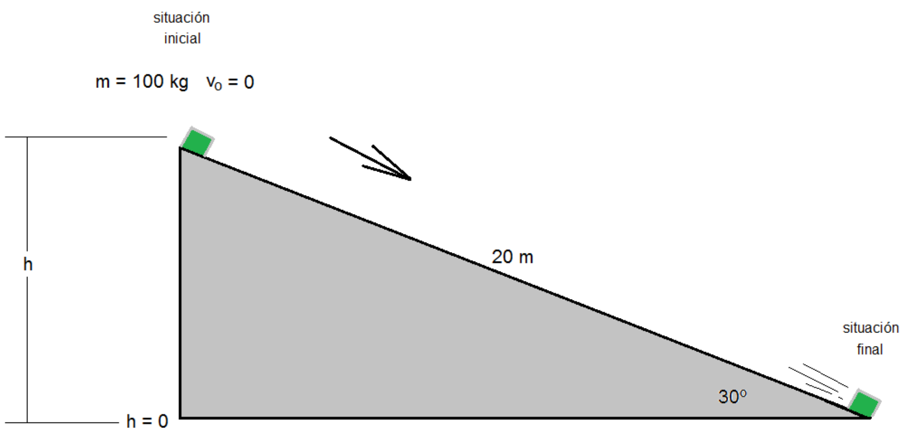
$$-43{,}12 \cdot x + 500\,x^2 = 0 \qquad x\,(500x - 43{,}12) = 0$$

Soluciones:

$$x = 0\ (situación\ inicial)$$

$$x = 0{,}086\ m\ \ (situación\ final)$$

Un trineo de 100 kg parte del reposo y desliza hacia abajo por una ladera de 30º de inclinación respecto a la horizontal.
a) Explique las transformaciones energéticas durante el desplazamiento del trineo suponiendo que no existe rozamiento y determine, para un desplazamiento de 20 m, la variación de sus energías cinética y potencial, así como la velocidad del cuerpo.
b) Explique, sin necesidad de cálculos, cuáles de los resultados del apartado a) se modificarían y cuáles no, si existiera rozamiento.



a) En la figura se representa la situación inicial y final, los datos que da el problema y el origen de alturas.

En la situación inicial el cuerpo está en reposo, luego no posee energía cinética ($Ec_o = 0$). En dicha situación el cuerpo se encuentra a una cierta altura sobre el origen de alturas y posee, por tanto, energía potencial gravitatoria cuyo valor es,

$$Ep_o = m\,g\,h$$

La energía mecánica del cuerpo en esta situación inicial será:

$$Em_0 = Ep_o + Ec_o = m\,g\,h$$

En la situación final el cuerpo ha llegado al origen de alturas, ha perdido la energía potencial (Ep = 0) que tenía en la situación inicial transformándose esta en energía cinética, es decir,

$$Ec = \frac{1}{2}mv^2$$

La energía mecánica del cuerpo en esta situación final será:

$$Em = Ep + Ec = \frac{1}{2}mv^2$$

Como el cuerpo cae sin rozamiento, no existen fuerzas disipativas y, por tanto, se cumple el principio de conservación de la energía mecánica,

$$\Delta Em = 0 \qquad\qquad Em - Em_o = 0$$

$$\frac{1}{2}mv^2 - m\,g\,h = 0$$

Despejando v

$$v = \sqrt{2\, g\, h}$$

Donde $h = 20 \text{ sen}30 = 10\ m$. Por tanto,

$$v = \sqrt{2\, g\, h} = \sqrt{2 \cdot 9{,}8 \cdot 10} = 14 \text{ m/s}$$

En cuanto a las variaciones de energía potencial y energía cinética,

$$\Delta Ep = \Delta Ec = m\, g\, h = \frac{1}{2} \text{ m v}^2 = 9800 \text{ J}$$

b) Si existiera rozamiento, una fuerza disipativa, el principio de conservación de la energía mecánica toma la forma

$$\Delta \text{Em} = W_{nc}$$

Donde W_{nc} es el trabajo que realiza la fuerza de rozamiento. Este trabajo es energía que se pierde en forma de calor, es decir, la energía potencial inicial del cuerpo no se transforma completamente en energía cinética cuando llega al final del plano sino que parte de esta energía se ha disipado en forma de calor por el rozamiento entre el cuerpo y el suelo del plano. Según este razonamiento, la energía potencial inicial no cambia pero si la energía cinética en la situación final, que disminuye respecto del valor calculado. La disminución de esta energía cinética será el valor del trabajo no conservativo.

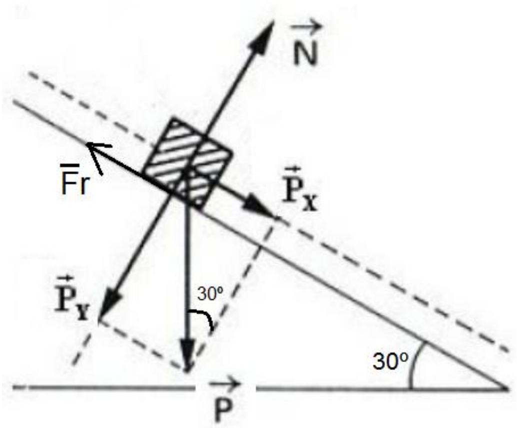
Un bloque de 0,2 kg, inicialmente en reposo, se deja deslizar por un plano inclinado que forma un ángulo de 30º con la horizontal. Tras recorrer 2 mm, queda unido al extremo libre de un resorte, de constante elástica 200 N·m^{-1}, paralelo al plano fijo por el otro extremo. El coeficiente de rozamiento del bloque con el plano es 0,2.

a) Dibuja esquema todas las fuerzas que actúan sobre el bloque cuando comienza el descenso e indica el valor de cada una de ellas. ¿Con qué aceleración desciende el bloque?

b) Explica los cambios de energía del bloque que inicia el descenso hasta que comprime el resorte, y calcula la máxima compresión de este.

---

a) El esquema de todas las fuerzas que actúan sobre el bloque cuando comienza el descenso aparece en la figura adjunta.



Se observa que sobre el bloque se ejercen tres fuerzas, la fuerza peso, la reacción normal del plano y la fuerza de rozamiento.

$$P_x = mg \cdot \text{sen } 30 = 0{,}2 \cdot 9{,}8 \cdot \text{sen } 30 = 0{,}98\ N$$

$$N = P_y = mg \cos 30 = 0{,}2 \cdot 9{,}8 \cdot \cos 30 = 1{,}70\ N$$

$$Fr = \mu N = 0{,}2 \cdot 1{,}70 = 0{,}34\ N$$

Para determinar la aceleración de caída del bloque aplicamos la segunda ley de Newton en la dirección del movimiento,

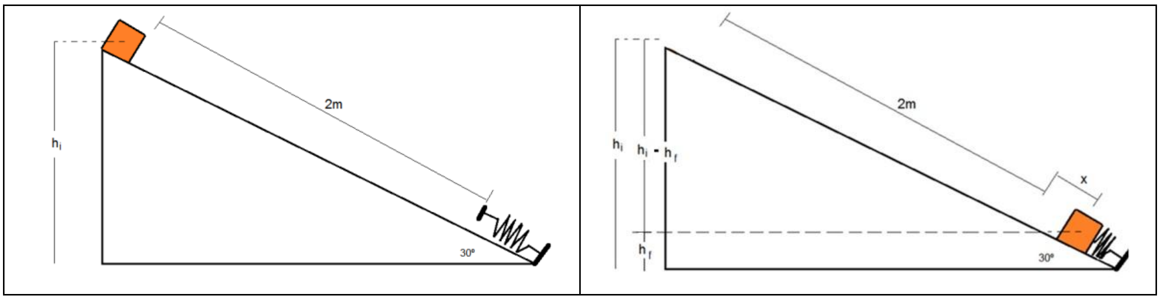
$$\Sigma F_x = m \cdot a$$

$$P_x - F_r = m \cdot a \qquad 0{,}98 - 0{,}34 = 0{,}2 \cdot 1 \rightarrow \quad a = 3{,}2\, m/s^2$$

b) Sobre el cuerpo están actuando simultáneamente fuerzas conservativas y la fuerza de rozamiento (disipativa). En estas circunstancias se cumple que el trabajo que realiza la fuerza de rozamiento (W_{nc}) es igual a la variación de energía mecánica:

$$W_{nc} = \Delta Em$$

Para desarrollar esta expresión debemos observar la siguiente figura que representa el punto inicial y final de este movimiento.



- Valoración energética de la situación inicial:

$$Em_i = Ep_g = mgh_i$$

En el estado inicial no hay energía cinética pues el móvil parte del reposo. Tampoco hay energía potencial elástica pues el resorte se encuentra en su posición de equilibrio.

- Valoración energética de la situación final:

$$Em_f = Ep_g + Ep_e = mgh_f + \frac{1}{2}Kx^2$$

En el estado final no hay energía cinética pues el móvil está en reposo. Existe en este estado energía potencial gravitatoria debido a que el cuerpo se encuentra a una altura h_f respecto del origen de alturas. Además hay energía potencial elástica pues el resorte se ha alejado de su posición de equilibrio.

- Variación de energía mecánica:

$$\Delta Em = Em_f - Em_i = \; mgh_f + \frac{1}{2}Kx^2 - mgh_i$$

$$\Delta Em = mg\left(h_f - h_i\right) + \frac{1}{2}Kx^2$$

Según se puede observar en la figura,

$$h_i - h_f = (2 + x) \cdot \text{sen } 30$$

Por tanto,

$$\Delta Em = -\, mg(2 + x)\text{ sen } 30 + \frac{1}{2}Kx^2$$

- Cálculo del trabajo de la fuerza de rozamiento:

$$W_{nc} = \vec{F}_R \cdot \Delta\vec{r} = F_R\, \Delta r \cos 180 = \; -F_R\,(2 + x)$$

Durante la caída del cuerpo por el plano inclinado la energía potencial gravitatoria inicial del cuerpo se está transformando en energía cinética, el cuerpo va ganando velocidad hasta llegar al resorte donde convierte dicha energía cinética en energía potenical elástica. También parte de la energía potencial inicial se transforma en calor, debido al rozamiento del cuerpo con el plano inclinado. No toda la energía potencial inicial se transforma en energía potencial elásica pues el cuerpo no queda en el origen de alturas, es decir, aún le queda energía potencial gravitatoria.

El principio de conservación de la energía mecánica no se cumple cuando existen fuerzas no conservativas, sino que se cumple que

$$\Delta Em = W_{nc}$$

$$-\,mg(2+x)\,\mathrm{sen}\,30 + \frac{1}{2}Kx^2 = -F_R\,(2+x)$$

$$-0{,}2\cdot 9{,}8\cdot(2+x)\cdot 0{,}5 + \frac{1}{2}\,200\,x^2 = -\,0{,}34\cdot(2+x)$$

$$-0{,}98\cdot(2+x)\ + 100\,x^2 = -\,0{,}34\cdot(2+x)$$

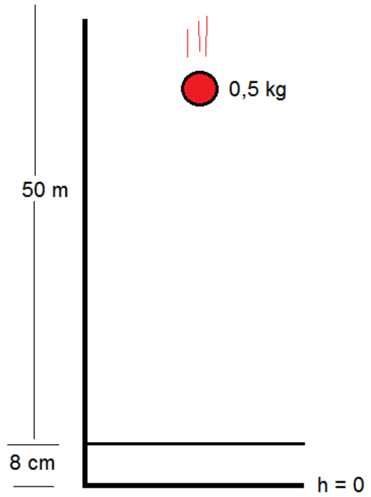
$$100\,x^2 - 0{,}64\,x - 1{,}28 = 0$$

Resolviendo esta ecuación cuadrática se obtiene como solución x = 0,12 m = 12 cm

---

Desde una altura de 50 m se deja caer un cuerpo de 500 g. Si al llegar al suelo penetra en este una distancia de 8 cm, calcula la resistencia media que ha ofrecido el suelo. ¿En qué se ha empleado la energía mecánica que poseía el cuerpo? Se desprecia la resistencia del aire

---



Inicialmente

El cuerpo tiene energía potencial gravitatoria. No tiene energía cinética pues su velocidad inicial es cero, tal como menciona el enunciado).

$$Em_i = Ep_i = mgh$$

Final

El cuerpo ha transformado su energía potencial inicial en energía calorífica principalmente, es decir, la energía mecánica se ha invertido en vencer la fuerza de rozamiento durante 8 cm.

$$Em_f = 0$$

Por tanto, la variación de energía potencial

$$\Delta Em = Em_f - Em_i = -mgh = -0{,}5\cdot 9{,}8\cdot 50{,}08 = -245{,}5\,J$$

Al existir una fuerza no conservativa, la fuerza de resistencia del suelo,

$$\Delta Em = W_{nc}$$

Donde W_{nc} es el trabajo que realiza la fuerza de resistencia,

$$W_{nc} = \vec{F}_R\Delta\vec{r} = F_R\,\Delta r\cos 180 = -F_R\,\Delta r = -\,0{,}08\,F_R$$

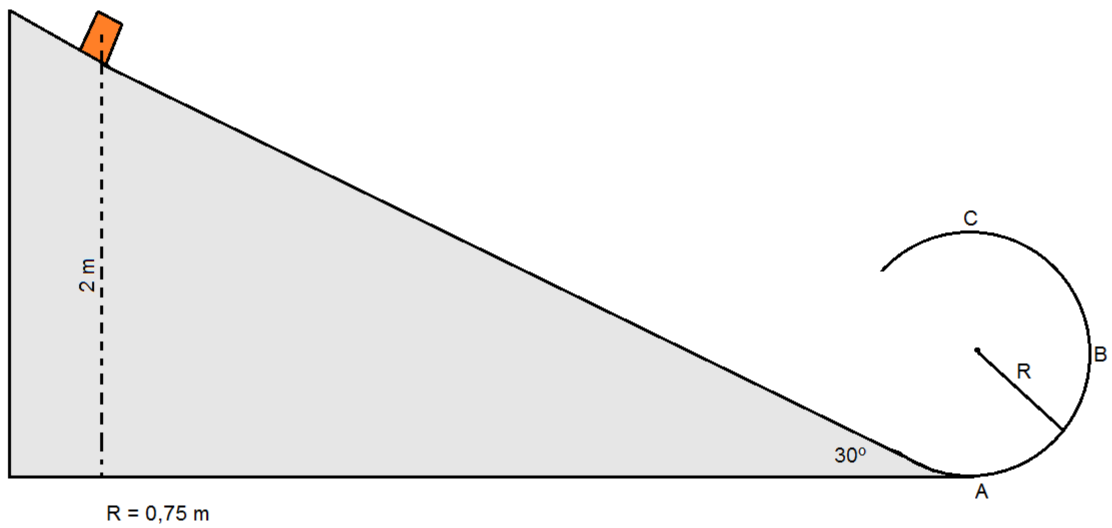
$$\Delta Em = W_{nc} \qquad \rightarrow \qquad -245{,}5 = -\,0{,}08\,F_R$$

$$F_R = 3067\,N$$

En lo alto de un plano de 2 m de altura y 30º de inclinación se coloca una masa de 0,5 kg. Al final del plano se encuentra un aro circular como indica la figura. En todo el recorrido no existe rozamiento. Calcula:

a) La velocidad de la masa en los puntos A, B y C.

b) ¿Desde qué altura sobre el plano se debe dejar caer la masa para que al llegar a C no ejerza ninguna fuerza sobre el aro?



Dado que no existe rozamiento, la caída del objeto por el plano se debe exclusivamente a una fuerza conservativa, la gravedad. En estas condiciones de cumple el principio de conservación de la energía mecánica,

$$\Delta Em = 0$$

La aplicación de este principio al punto A,

$$Em_A - Em_o = 0 \quad \rightarrow \quad Ep_A + Ec_A - Ep_o - Ec_o = 0$$

La energía cinética inicial (Ec_o) es en todos los casos cero pues el cuerpo parte del reposo. La energía potencial en A (Ep_A) es cero si consideramos que la base del plano inclinado es el origen de alturas. Por tanto,

$$Ec_A - Ep_o = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2}mv_A^2 - mgh_o = 0 \quad \rightarrow \quad v_A^2 = \sqrt{2gh_o} = 6{,}26\, m/s$$

En A toda la energía potencial inicial se ha convertido en energía cinética.

La aplicación del principio de conservación de la energía mecánica a B, teniendo en cuenta lo ya mencionado quedará,

$$Em_B - Em_o = 0 \quad \rightarrow \quad Ep_B + Ec_B - Ep_o = 0$$

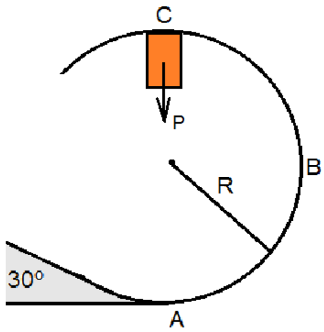
En B parte de la energía cinética que el cuerpo tenía en A se ha vuelto a convertir en energía potencial,

$$mgh_B + \frac{1}{2}mv_B^2 - mgh_o = 0 \quad \rightarrow \quad v_B^2 = \sqrt{2g(h_o - R)} = 4{,}95\, m/s$$

El procedimiento en C es idéntico al caso anterior pero $h_C = 2R$, por tanto,

$$v_C^2 = \sqrt{2g(h_o - 2R)} = 3{,}13\ m/s$$

b) “Rizar el rizo”



La velocidad mínima en C para no caer es tal que el cuerpo no “toca” el aro, es decir, no hay una fuerza normal del aro sobre el cuerpo. En estas condiciones, siendo un movimiento circular, la fuerza peso ejerce de fuerza central, es decir,

$$F_c = P \quad \rightarrow \quad ma_c = mg$$

$$\frac{v^2}{R} = g \quad \rightarrow \quad v = \sqrt{gR} = 2{,}7\ m/s \quad (= v_C)$$

Para que llegue al punto C con esa velocidad, haciendo las mismas consideraciones que en el apartado anterior, la altura a la que se debe dejar caer es,

$$Em_C - Em_o = 0 \quad \rightarrow \quad Ep_C + Ec_B - Ep_o = 0$$

$$mgh_C + \frac{1}{2}mv_C^2 - mgh_o = 0 \quad \rightarrow \quad h_o = 2R + \frac{v_C^2}{2g} = 1{,}87\ m$$

Se lanza un cuerpo verticalmente hacia arriba desde la superficie de la Tierra con una velocidad de 4000 m/s. Calcula la altura máxima que alcanzará. (R_T = 6400 km)

Si se desprecia la resistencia del aire entonces no existen fuerzas no conservativas, se cumple el principio de conservación de la energía mecánica,

$$\Delta Em = 0 \quad \rightarrow \quad Em - Em_o = 0 \quad \rightarrow \quad Em = Em_o$$

$$Ec + Ep = Ec_o + Ep_o$$

Supondremos que al alcanzar la altura máxima el cuerpo se para, es decir, Ec = 0. Además la velocidad a la que se lanza es elevada y el cuerpo alcanzará una altura considerable, es decir, la expresión de la energía potencial del cuerpo será:

$$Ep = -G\frac{M_T m}{r}$$

Donde M_T representa la masa de la Tierra, m la masa del cuerpo, r la distancia del cuerpo al centro de la Tierra y G es la constante de gravitación universal. Por tanto,

$$-G\frac{M_T m}{R_T + h} = \frac{1}{2}mv_o^2 - G\frac{M_T m}{R_T}$$

La masa del cuerpo se simplifica, h representa la altura sobre la superficie de la Tierra a la que se encuentra el cuerpo (lo que se pide) y R_T el radio de la Tierra,

$$-G\frac{M_T}{R_T + h} = \frac{1}{2}v_o^2 - G\frac{M_T}{R_T}$$

En esta expresión todo es conocido excepto h, que despejado nos da un valor de

h = 938900 m = 938,9 km

Estos apuntes se finalizaron el 18 de enero de 2011
en Villanueva del Arzobispo, Jaén (España).

Realizados por: Felipe Moreno Romero
fresenius1@gmail.com
http://www.escritoscientificos.es

FÍSICA 2º BACHILLERATO

BLOQUE TEMÁTICO: INTERACCIÓN GRAVITATORIA

CAMPO GRAVITATORIO TERRESTRE

1) Campo gravitatorio de la Tierra.
2) Magnitudes físicas que caracterizan el campo gravitatorio.
    a. Intensidad del campo gravitatorio.
    b. Energía potencial gravitatoria y potencial gravitatorio.
3) Aplicaciones.
    a. Periodo de revolución y velocidad orbital.
    b. Velocidad de escape de un cohete.
    c. Lanzamiento de satélites. Energía y órbitas.
    d. Energía mecánica de un satélite.
    e. Cambio de órbita de un satélite.

---

1) CAMPO GRAVITATORIO TERRESTRE

Se dice que existe un campo gravitatorio en una región del espacio si una masa colocada en un punto de esa región experimenta una fuerza gravitatoria.

El campo gravitatorio terrestre es un caso particular de la definición anterior, referida a la Tierra, es decir, el campo gravitatorio terrestre es la región del espacio donde una masa experimenta una fuerza gravitatoria debida a la Tierra.

Las características generales del campo gravitatorio ya han sido analizadas en el tema anterior y son aplicables aquí.

2) MAGNITUDES FÍSICAS QUE CARACTERIZAN EL CAMPO GRAVITATORIO

Un campo gravitatorio queda determinado en cada punto del espacio por dos magnitudes características:

- La intensidad del campo gravitatorio
- El potencial gravitatorio

2.1.- Intensidad del campo gravitatorio en un punto.

Esta magnitud ya ha sido definida y caracterizada en el tema anterior.

La intensidad de campo gravitatorio (g) de una masa M en un punto representa la fuerza que experimentaría la unidad de masa colocada en dicho punto. Su unidad en el S.I. es, por tanto, $N\cdot kg^{1}$, o también $m\cdot s^{-2}$.

$$g = G\,\frac{M}{r^2}$$

De lo que aquí se trata es de concretar este concepto al campo gravitatorio terrestre. Así,

$$g = G\,\frac{M_T}{(R_T + h)^2}$$

Donde G es la constante de gravitación universal, $G = 6{,}67428 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$

M_T es la masa de la Tierra, $M_T = 5{,}974 \cdot 10^{24}$ kg

R_T es el radio terrestre, $R_T = 6378$ km (radio ecuatorial)

h es la altura sobre la superficie terrestre a la que se esté midiendo g

g es la intensidad del campo gravitatorio terrestre a una altura h sobre su superficie.

Si hacemos h = 0 en la expresión anterior obtenemos la intensidad del campo gravitatorio en la superficie del planeta, g_o

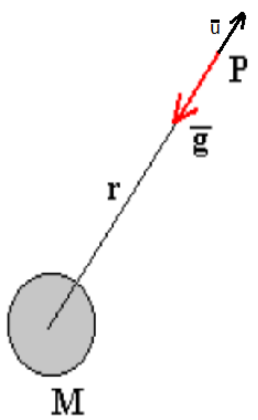
$$g_o = 6{,}67428 \cdot 10^{-11}\frac{5{,}974 \cdot 10^{24}}{(6378000)^2} = 9{,}802\ m \cdot s^{-2} \sim 9{,}8\ N \cdot kg^{-1}$$

Consideraciones (aplicadas al campo gravitatorio terrestre)

- La intensidad del campo gravitatorio en un punto bien dada por la aceleración que experimenta un objeto colocado en dicho punto.

- Esta aceleración es independiente de la masa del objeto. Depende de la masa de la Tierra y de la distancia del lugar donde se encuentre al centro del planeta.

- La dirección de la intensidad del campo (aceleración gravitatoria) es la que pasa por el centro de la Tierra y el punto del espacio donde se está considerando el valor del campo.



- El sentido de la intensidad del campo (aceleración gravitatoria) es hacia el centro de la Tierra. Por tanto, según el criterio establecido en la figura para definir el vector unitario, su expresión vectorial será:

$$\vec{g} = -G\,\frac{M_T}{(R_T + h)^2}\,\hat{u}$$

Variación de la intensidad de campo gravitatorio con la distancia

El modelo establecido para el estudio de la interacción gravitatoria supone, para la Tierra, que la parte del planeta que genera el campo gravitatorio está concentrada en un punto material situado en el centro. A partir de este punto cualquier coordenada se considera inmersa en el campo gravitatorio terrestre. Debemos considerar pues cómo varía la intensidad del campo gravitatorio desde la superficie del planeta hacia el espacio, pero también desde la superficie del planeta hacia el centro de este.

- Desde la superficie hacia el espacio exterior

$$g = G \frac{M_T}{(R_T + h)^2}$$

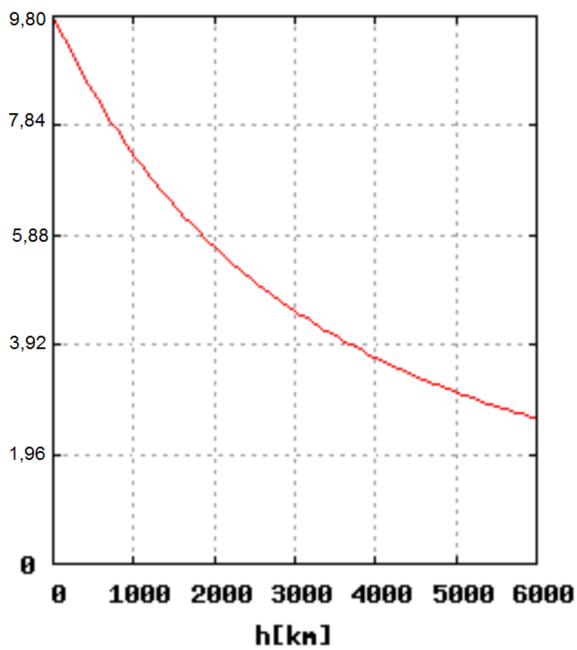
Esta expresión se suele referir al valor de g_o

$$g_o = G \frac{M_T}{R_T^2}$$

Dividiendo ambas expresiones

$$\frac{g}{g_o} = \frac{G \frac{M_T}{(R_T + h)^2}}{G \frac{M_T}{R_T^2}} = \frac{R_T^2}{(R_T + h)^2}$$

$$g = g_o \frac{R_T^2}{(R_T + h)^2}$$

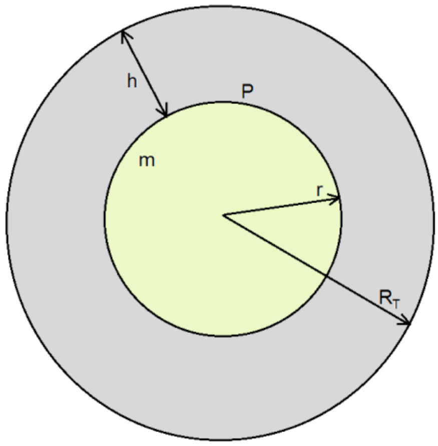


La representación gráfica de la variación de la intensidad del campo gravitatorio (módulo) en función de la altura en kilómetros se puede observar en la figura adjunta.

- Desde la superficie hacia el interior del planeta.

Consideraremos que la Tierra es una esfera sólida y homogénea (aproximación que permite hacer estimaciones de g pero que no es real). Así, el campo gravitatorio será nulo en el centro de la esfera y aumentará conforme aumenta la distancia del centro a un punto interior.

Supongamos que deseamos conocer la intensidad del campo gravitatorio en un punto P situado a una profundidad h. Dicho punto se encuentra a una distancia r del centro del planeta y la masa del planeta que influye como campo gravitatorio sobre P es la masa de la esfera de planeta cuyo radio es precisamente r (véase figura). Por tanto, en el interior del planeta,



$$g = G\,\frac{m}{r^2}$$

Como hemos considerado que la Tierra es una esfera homogénea,

$$m = d \cdot V = \frac{4}{3}\pi\, r^3 d$$

Donde d es la densiad de la Tierra,

$$d = \frac{M_T}{\frac{4}{3}\pi\, R_T^3}$$

Así,

$$m = \frac{4}{3}\pi\, r^3 \cdot \frac{M_T}{\frac{4}{3}\pi\, R_T^3} = \frac{M_T \cdot r^3}{R_T^3}$$

La expresión de g en el interior de la Tierra queda,

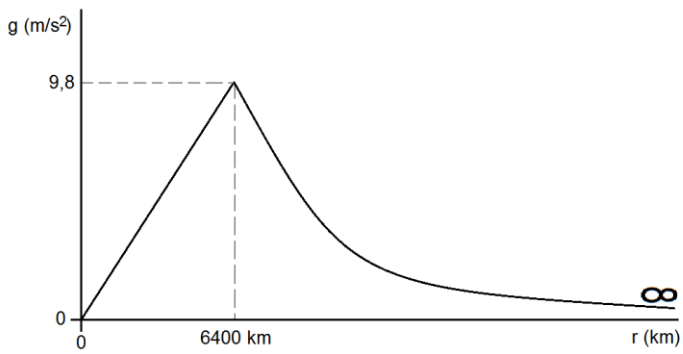
$$g = G\,\frac{\frac{M_T \cdot r^3}{R_T^3}}{r^2} = G\,\frac{M_T \cdot r}{R_T^3} = g_o\,\frac{r}{R_T}$$

$$g = g_o\,\frac{r}{R_T} = g_o\,\frac{R_T - h}{R_T}$$

Vemos que la variación de g en el interior de la Tierra es lineal con la profundidad, h.

$$g = g_o - \frac{g_o}{R_T}\, h$$

En definitiva, una representación aproximada de la variación de la intensidad del campo gravitatorio terrestre desde el centro de la Tierra hasta el infinito, considerando a la Tierra como una esfera homogénea sería:



La gravedad también varía con la latitud debido al movimiento de rotación de la Tierra y al achatamiento en los polos.

Latitud (grados)	g (m/s^2)
0	9,7803
10	9,7819
20	9,7864
30	9,7932
40	9,8017
45	9,806
60	9,8191
80	9,8305
90	9,8321

2.2.- Energía potencial gravitatoria y potencial gravitatorio

Tal como se dijo en el tema anterior, la fuerza gravitatoria es conservativa, es decir, el trabajo realizado por dicha fuerza entre dos puntos siempre es el mismo, independiente del camino seguido. Las fuerzas conservativas tienen una magnitud característica llamada energía potencial que permite determinar el trabajo que realiza dicha fuerza (teorema de la energía potencial),

$$W_1^2 = -\Delta E_p = -(Ep_2 - Ep_1)$$

La expresión de la energía potencial de una masa m en un punto cualquiera de un campo gravitatorio generado por la masa M es

$$Ep = -G\,\frac{Mm}{r}$$

Donde r es la distancia entre los centros de masas de M y m.

Si sustituimos los parámetros terrestres obtenemos

$$Ep = -G\,\frac{M_T m}{(R_T + h)}$$

Expresión que representa la energía potenical gravitatoria de un cuerpo de masa m situado a una altura h sobre la superficie de la Tierra.

Aunque lo pueda parecer, la expresión anterior no nos da un valor absoluto de la energía potencial ya que sólo es posible conocer una diferencia entre las energías potenciales de dos puntos del campo gravitatorio (teorema de la energía potenical). Así, la expresión anterior representa el trabajo que realiza el campo gravitatorio cuando la masa m se mueve desde el punto donde se encuentra hasta el infinito.

La energía potencial de un cuerpo en la superficie de la Tierra será entonces

$$Ep = -G\,\frac{M_T m}{R_T} = -g_o \cdot m \cdot R_T$$

Y respresenta el trabajo que realiza la fuerza gravitatoria cuando m se mueve desde la superficie de la Tierra hasta el infinito, es decir, es la diferencia entre las energías potenciales en la superficie de la Tierra y en el infinito (donde la energía potencial es cero, considerado como origen de energía potencial).

La energía potencial gravitatoria es siempre negativa, indicándose así que para mover la masa m desde donde esté hasta el infinito hay que realizar un trabajo externo en contra del campo cuyo valor es igual al de la energía potencial pero cambiado de signo.

Si en lugar de una masa cualquiera se traslada la masa unidad, entonces el trabajo realizado recibe el nombre de **potencial gravitatorio terrestre (J/kg):**

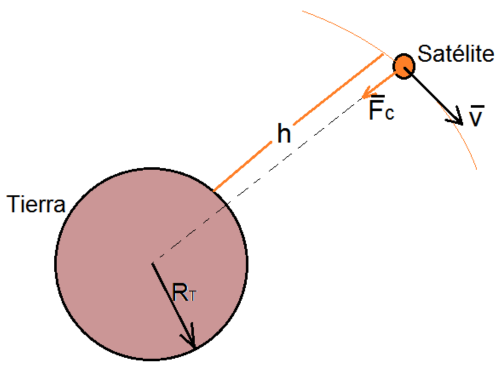
$$V = \frac{Ep}{m} = -G\frac{M_T}{R_T + h}$$

El potencial en un punto depende de la distancia desde dicho punto hasta el centro del campo. Todos los puntos que equidisten del centro del campo tendrán, pues, el mismo potencial y forman una superficie equipotencial, que es la superficie de la esfera de radio r que rodea al punto centro del campo. Cada punto de un campo gravitatorio está definido por un potencial, que es una magnitud escalar, por tanto, el campo gravitatorio lleva asociado un campo escalar.

3) APLICACIONES

3.1.- Periodo de revolución y velocidad orbital

En general un satélite es un cuerpo que orbita alrededor de otro mayor que se considera como el generador del campo gravitatorio.



Para simplificar consideraremos una orbita circular. Cuando un satélite describe una órbita experimenta una aceleración centrípeta debido a que se encuentra sometido a una fuerza central (F_c), que en el caso de la Tierra viene suministrada por la atracción gravitatoria que ejerce la Tierra sobre el satélite.

Por tanto, los módulos de la fuerza centrípeta y la fuerza gravitatoria son iguales,

$$F_c = F_g$$

Para los parámetros fijados en la figura,

$$m\frac{v^2}{R_T + h} = G\frac{M_T m}{(R_T + h)^2}$$

Donde m es la masa del satélite que, al simplificarse, indica que la velocidad orbital es independiente de la masa del cuerpo que esté girando.

$$v = \sqrt{G\frac{M_T}{R_T + h}}$$

Esta expresión nos dice que la velocidad orbital es inversamente proporcional a la raiz cuadrada de la altura sobre la superficie a la que se encuentre el satélite. La expresión se puede modificar para introducir la intensidad del campo gravitatorio,

$$v = \sqrt{G\frac{M_T}{(R_T + h)^2}\,(R_T + h)} = \sqrt{g(R_T + h)}$$

$$v = \sqrt{g(R_T + h)}$$

Expresión que se también se conoce como primera velocidad cósmica.

Otros parámetros que se pueden conocer son la aceleración centrípeta del satélite,

$$a_c = \frac{v^2}{R_T + h}$$

y el periodo de revolución,

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \rightarrow \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\frac{v}{R_T + h}} = \frac{2\pi(R_T + h)}{v}$$

$$T = \frac{2\pi(R_T + h)}{\sqrt{G\frac{M_T}{R_T + h}}} \quad \rightarrow \quad T^2 = \frac{4\pi^2(R_T + h)^2}{G\frac{M_T}{R_T + h}} = \frac{4\pi^2(R_T + h)^3}{GM_T}$$

Se puede observar que

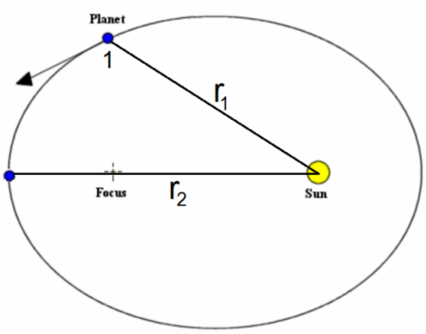
$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_T}(R_T + h)^3 = K(R_T + h)^3$$

que es la expresión de la tercera ley de Kepler.

Todas las expresiones anteriores son válidas para cualquier planeta que gira en torno al Sol, para cualquier satélite que gire en torno a otro planeta o para cualquier cuerpo que gire en torno a otro por la fuerza de la gravedad. Simplemente hay que cambiar la masa de la Tierra, M_T, y el radio de la Tierra, R_T, por los valores correspondientes al cuerpo central. Para cuerpos muy alejados en comparación con su tamaño es más conveniente sustituir el término R_T+h por la distancia *(r)* entre sus centros de masa.

Si la órbita es elíptica, la distancia entre los centros de los cuerpos (el central y el satélite) es variable. En esta situación la energía potencial del satélite (o planeta) también es variable

$$Ep = -\,G\,\frac{Mm}{r}$$



Ahora bien, como sólo actúa una fuerza conservativa, la energía permanece constante. Así, entre dos puntos diferentes de la órbita elíptica (puntos 1 y 2 en la figura adjunta) se cumple que

$$\Delta Em = 0 \;\rightarrow\; Em_2 = Em_1 \;\rightarrow\; Ec_2 + Ep_2 = Ec_1 + Ep_1$$

En el punto 2 la distancia es mayor y la energía potencial es menor menos negativa que en el punto 1. Entonces, para mantener la igualdad, la energía cinética en 2 es menor que en 1, es decir, la velocidad del cuerpo en órbita elíptica es menor cuando está más alejado del foco y viceversa.

3.2.- Velocidad de escape de un proyectil

Para conseguir que un cuerpo lanzado desde la superficie terrestre salga del campo gravitatorio habrá que comunicarle una gran velocidad. Se denomina ***velocidad de escape*** a la velocidad que debe adquirir un cuerpo para que se escape de la atracción terrestre.

Supongamos un cuerpo que se lanza desde la superficie de la Tierra. Supondremos también que no hay resistencia del aire. En estas condiciones

$$\Delta Em = 0 \;\rightarrow\; Em_2 = Em_1 \;\rightarrow\; Ec_2 + Ep_2 = Ec_1 + Ep_1$$

Si el punto 2 es el infinito podremos considerar que el cuerpo ha escapado del campo gravitatorio terrestre. Si el cuerpo se para en dicho punto,

$$Ec_2 = 0$$

$$Ep_2 = 0$$

Por tanto,

$$Ec_1 + Ep_1 = 0$$

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - G\frac{M_T m}{R_T} = 0$$

Despejando la velocidad, que denotaremos como v_e,

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}} = \sqrt{2g_oR_T}$$

Exprexión que recibe el nombre de segunda velocidad cósmica.

Consideraciones:

-La velocidad de escape es independiente de la masa del objeto que quiere escapar (un proyectil necesita la misma velocidad de escape que una molécula).

-Según se ha visto en el desarrollo,

$$Ec_1 + Ep_1 = 0 \qquad Ec_2 = 0 \qquad Ep_2 = 0$$

Es decir, un objeto al que se le ha comunicado la velocidad de escape tiene energía mecánica cero. A medida que el proyectil se aleja de la Tierra su energía potencial va aumentando (se va haciendo menos negativa) a costa de su energía cinética de manera que la energía mecánica se conserva.

-Si sustituimos los valores terrestre obtenemos una velocidad de escape desde la superficie de la Tierra de 11,2 Km/s. La expresión es válida para objetos lanzados desde cualquier planeta o satélite, así las velocidades de escape de los planetas del sistema solar (y la Luna) son, en km/s

Mercurio	4,3	Júpiter	60
Venus	10,3	Saturno	36
Tierra	11,2	Urano	22
Luna	2,3	Neptuno	24
Marte	5,0		

Los valores de los planetas gigantes gaseosos corresponden a la velocidad de escape desde la superficie visible de nubes.

-La velocidad de escape es aplicable tan solo a objetos que dependan únicamente de su impulso inicial (proyectiles) para vencer la atracción gravitatoria; obviamente, no es aplicable a los cohetes, lanzaderas espaciales u otros artefactos con propulsión propia.

-Si el cuerpo se sube primero a una altura que se pueda considerar no despreciable y desde este lugar se lanza, la velocidad de escape es, evidentemente, menor:

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T + h}} = \sqrt{2g(R_T + h)}$$

Siendo g la intensidad del campo gravitatorio terrestre a la altura h.

3.3.- Lanzamiento de satélites. Energía y órbitas.

Generalmente el lanzamiento de un satélite artificial se realiza en dos fases:

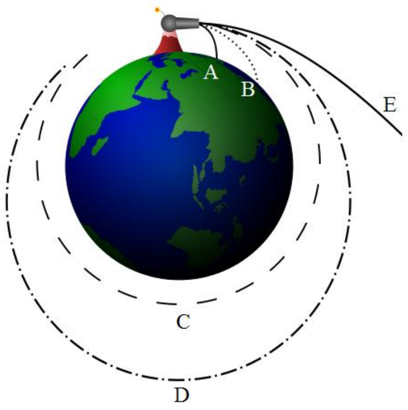
Fase 1: Se lleva el satélite a una altura h (este problema se considera en pág. 11).

Fase 2: Desde esa altura se lanza el satélite con una velocidad horizontal. El tipo de trayectoria que adquiera dependerá de la velocidad con que se lance desde dicha altura.

Supongamos que el cuerpo ya se encuentra a una altura h sobre la superficie terrestre, en ese momento el cuerpo se orienta y se lanza horizontalmente con una velocidad v_o. La energía mecánica del cuerpo será en ese instante:

$$Ec + Ep = Em$$

$$\frac{1}{2}mv_o^2 - G\frac{M_T m}{R_T + h} = Em$$



Dependiento del valor de v_o se pueden dar los siguientes casos (véase figura):

·) Casos A y B. Son lanzamientos que comportan caídas, es decir, son aquellos en los que la velocidad del lanzamiento es inferior a la velocidad orbital correspondiente a la altura de lanzamiento (h). La trayectoria hasta la superficie es una rama de parábola (tiro horizontal).

·) Casos C y D. Son lanzamientos que ponen el objeto en órbita. En estos casos la velocidad del lanzamiento es igual o superior a la velocidad orbital correspondiente a la altura h. Las órbitas pueden ser circulares (C) o elípticas (D).

En los dos casos, tanto para órbitas circulares como para órbitas elípticas, la energía mecánica del cuerpo es negativa, es decir,

$$\frac{1}{2}mv_o^2 - G\frac{M_T m}{R_T + h} < 0 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2}mv_o^2 < G\frac{M_T m}{R_T + h}$$

El caso C (órbita circular) se consigue si el lanzamiento tiene una velocidad igual a la velocidad orbital (primera velocidad cósmica), deducida en págs. 6-7.

$$v_o = velocidad\ orbital = \sqrt{G\frac{M_T}{R_T + h}} = \sqrt{g(R_T + h)}$$

Si v_o supera este valor entonces la órbita se hace elíptica, tanto más excentrica cuanto más se aleje v_o de la velocidad orbital. Pero hay un límite: el caso siguiente.

·) Caso E. Corresponde a un lanzamiento con una velocidad igual a la velocidad de escape del cuerpo situado a la altura h.

$$v_o = v_e = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T + h}} = \sqrt{2g(R_T + h)}$$

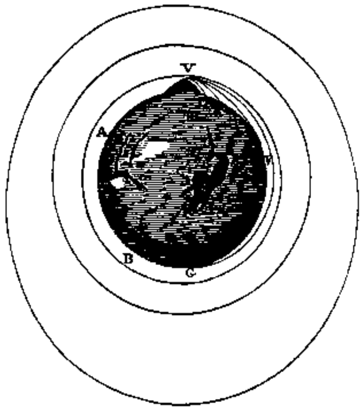
La trayectoria que sigue el cuerpo es parabólica y sería como si la órbita elíptica del caso D se abriera cada vez más, de forma que su eje mayor se hace infinito y el satélite sale del campo gravitatorio siguiendo una parábola. Tal como se ha dicho en el apartado 3.2., en este caso la energía mecánica del cuerpo es cero.

·) Si la velocidad de lanzamiento es superior a la velocidad de escape a la altura h, la curva trazada es una hipérbola. En este caso la energía mecánica del cuerpo (en el instante en que es lanzado) es positiva,

$$\frac{1}{2}mv_o^2 - G\frac{M_T m}{R_T + h} > 0 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2}mv_o^2 > G\frac{M_T m}{R_T + h}$$

El que la energía mecánica sea mayor que cero significa que el cuerpo llega al infinito con una velocidad mayor que cero.

La figura anterior también se suele conocer como esquema de Newton pues Fue Isaac Newton quien lo ideó en “Sobre el sistema del mundo”, libro III de los Principia.



Puesta en órbita de un satélite

En todas las consideraciones anteriores el cuerpo que se pone en órbita ya se encuentra a la altura deseada. Ante la cuestión de determinar la energía necesaria para poner un satélite en una determinada órbita desde la superficie de la Tierra debemos tener en cuenta que al estar en un campo conservativo, se debe cumplir que la energía que le comunicamos al satélite sea igual a la suma del incremento de su energía cinética y de su energía potencial,

$$W_{F_{exterior}} = E_{comunicada} = \Delta Ec + \Delta Ep$$

Al lanzar un satélite se suele hacer desde una latitud ecuatorial y hacia el este para aprovechar al máximo el impulso que le proporciona la Tierra pues el satélite lleva la velocidad del punto de lanzamiento. Así, si $\Delta Em = 0$

$$Ep_{superficie} + Ec_{ayuda\,Tierra} + E_{comunicada} = Ep_{órbita} + Ec_{órbita}$$

Veamos miembro a miembro y término a término. Para ello tendremos en cuenta que,

- M_T es la masa de la Tierra
- R_T es el radio de la Tierra
- h la altura sobre la superficie terrestre a la que se encuentra el satélite
- m es la masa del satélite
- v_T es la velocidad de rotación de la Tierra
- v_o es la velocidad orbital del satélite a la altura h

$$Ep_{superficie} = -G\ \frac{M_T\, m}{R_T}$$

$$Ep_{órbita} = -G\ \frac{M_T m}{R_T + h}$$

$$Ec_{órbita} = \frac{1}{2}\, m\, v_o^2 = \frac{1}{2}\, m\, \frac{GM_T}{R_T + h}$$

Este valor se hace cero si sólo se desea conocer la energía necesaria para que un cuerpo alcance una altura h.

$$Ec_{ayuda\, Tierra} = \frac{1}{2}\, m\, v_T^2$$

El cuerpo se lanza desde el ecuador pues en donde la velocidad de la Tierra (rotación) es máxima (radio máximo).

$$v_T = \frac{2\pi R_T}{T} = \frac{2\pi \cdot 6{,}38 \cdot 10^6}{24 \cdot 3600} = 465\, m/s$$

La energía cinética que corresponde a este valor de velocidad es, por ejemplo, para un satélite de 65 kg de masa que hay que situar a una altura de dos radios terrestres desde la superficie, de el 0,2 % de toda la energía necesaria. Es un valor pequeño y en algunos problemas ni se tiene en cuenta (por ejemplo, en el análisis de la velocidad de escape no se ha tenido en cuenta).

Con todas estas expresiones se puede determinar la energía comunicada al satélite,

$$E_{comunicada} = -G\, \frac{M_T m}{R_T + h} + \frac{1}{2}\, m\, \frac{GM_T}{R_T + h} + G\, \frac{M_T\, m}{R_T} - \frac{1}{2}\, m\, v_T^2$$

$$E_{comunicada} = G\, \frac{M_T\, m}{R_T} - \frac{1}{2} G\, \frac{M_T m}{R_T + h} - \frac{1}{2}\, m\, v_T^2$$

A partir de esta energía comunicada se puede determinar la velocidad con que debe ser lanzado un satélite para alcanzar una determinada altura, asumiendo que toda esta energía es energía cinética (y se considera que $Ec_{órbita} = 0$, como se ha mencionado antes).

3.4.- Energía mecánica de un satélite en órbita cerrada.

La energía mecánica que debe tener u.n satélite para mantenerse en una orbita estacionaria a una altura sobre la superficie terrestre suele llamarse también energía de enlace.

Si el satélite describe una órbita circular

$$Em = Ec + Ep$$

$$Em = \frac{1}{2} m v^2 - G\, \frac{M_T m}{R_T + h}$$

Como v es la velocidad orbital,

$$Em = \frac{1}{2} m\, G\, \frac{M_T}{R_T + h} - G\, \frac{M_T m}{R_T + h}$$

$$Em = \frac{1}{2} m\, G \frac{M_T}{R_T + h} - G \frac{M_T m}{R_T + h}$$

$$Em = -\frac{1}{2}\, G \frac{M_T m}{R_T + h} = -G \frac{M_T m}{2R_o}$$

Siendo R_o la distancia desde el satélite al centro de la Tierra. Se puede observar que mientras que el satélite se mantenga en órbita la energía mecánica del mismo permanece constante.

Si la órbita fuese elíptica la expresión de la energía mecánica sería,

$$Em = = -G \frac{M_T m}{2a}$$

donde "a" es el semieje mayor de la órbita elíptica.

Un objeto libre, que no esté ligado a la atracción terrestre no tiene energía potencial, su energía mecánica (positiva) será la correspondiente a su energía cinética. Por tanto, un satélite tiene menos energía que si estuviera libre.

3.5.- Cambio de órbita de un satélite.

Para hacer que un satélite cambie de una órbita situada a una distancia r_i del centro de la Tierra a otra órbita cuya distancia es r_f, podemos conocer el trabajo que se debe realizar pues equivale a la diferencia entre las energías de enlace correspondientes

$$W_i^f = Em_f - Em_i$$

Al utilizar esta expresión tenemos en cuenta no solo la energía potencial del satélite a la altura a la que se encuentre sino también su velocidad orbital correspondiente.

Importante: esta expresión no es el trabajo que realiza el campo gravitatorio sino que se trata del trabajo externo que se debe realizar para conseguir el cambio de órbita.

$$W_i^f = -G \frac{M_T m}{2r_f} + G \frac{M_T m}{2r_i}$$

$$W_i^f = \frac{G M_T m}{2} \left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_f} \right)$$

Si se trata de acercar el satélite a la Tierra,

$$r_i > r_f \;\rightarrow\; \frac{1}{r_i} < \frac{1}{r_f} \;\rightarrow\; \frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_f} < 0 \;\rightarrow\; W_i^f < 0$$

es decir, se trata de un trabajo negativo. El proceso no requierirá del consumo de energía ya que en realidad se trata de una caída.

Si se trata de alejar el satélite de la Tierra,

$$r_i < r_f \rightarrow \frac{1}{r_i} > \frac{1}{r_f} \rightarrow \frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_f} > 0 \rightarrow W_i^f > 0$$

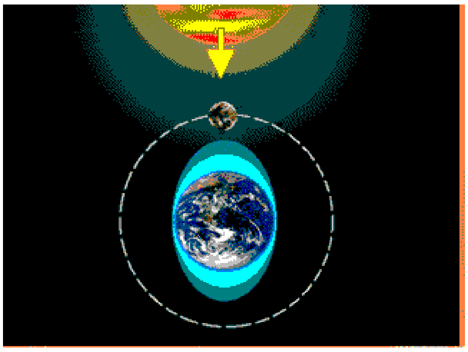
es decir, se trata de un trabajo positivo. El proceso requiere del consumo de energía ya que en realidad se trata de un "lanzamiento hacia arriba".

Estos apuntes se finalizaron el 25 de enero de 2011
en Villanueva del Arzobispo, Jaén (España).

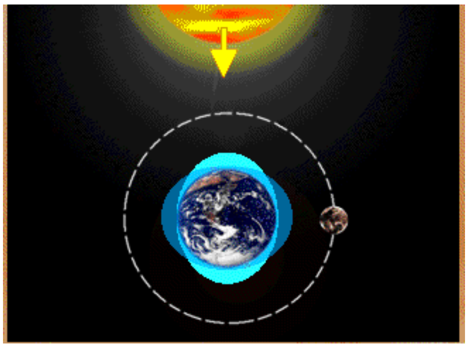
Realizados por: Felipe Moreno Romero
fresenius1@gmail.com
http://www.escritoscientificos.es

MAREAS

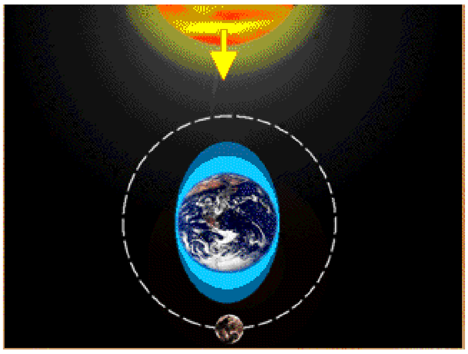
Las mareas son movimientos periódicos del mar causados por la atracción gravitatoria de la Luna y del Sol sobre la Tierra, vinculada a las órbitas relativas Tierra-Luna y Tierra-Sol, combinada con la fuerza centrífuga.
El comportamiento de las mareas es muy complejo, sobre todo porque los océanos no cubren de manera uniforme la superficie terrestre sino que son interrumpidos por las masas continentales.
La marea es, así, un movimiento periódico consistente en oscilaciones rítmicas con elevaciones (flujos) y descensos (reflujos) del nivel del mar, provocados por la acción gravitatoria de la Luna y el Sol sobre las masas de agua que cubren la Tierra. Por lo general se producen dos flujos y dos reflujos cada 24 h 50' (día lunar).
La fase correspondiente a la máxima elevación se llama marea alta o pleamar y, la de máximo descenso, marea baja o bajamar; la diferencia de altura entre estas dos se denomina amplitud de la marea.
Además de la acción gravitatoria ejercida por la Luna sobre la Tierra, en el fenómeno de las mareas interviene también la fuerza centrífuga inducida por el movimiento de revolución que el sistema Tierra-Luna cumple en torno al centro de masas común.
En el fenómeno de las mareas interviene también la fuerza de atracción del Sol, que actúa con menor intensidad respecto a la Luna (a pesar de que su masa es mucho mayor) porque su distancia de la Tierra es mucho mayor.
Cuando el Sol, la Tierra y la Luna están alineados (sigicia) las influencias de la Luna y el Sol se suman (mareas vivas); cuando los centros del Sol y la Luna forman un ángulo recto con la Tierra (cuadratura) los efectos de estos dos astros se anulan parcialmente (mareas muertas).
El fenómeno real de las mareas se aparta notablemente del modelo teórico, porque está ligado a la profundidad y la forma de las cuencas oceánicas, a la dirección y perfil de la línea de la costa, al efecto de las fuerzas de inercia de las masas de agua y a su rozamiento sobre el fondo.

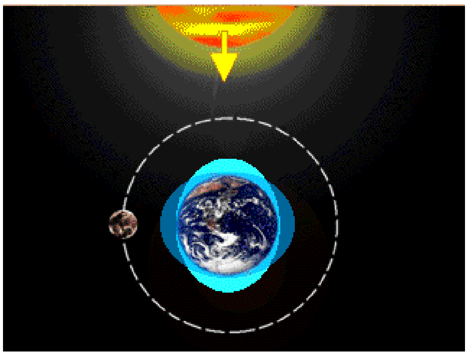


Cuando el Sol y la Luna se encuentran alineados, como ocurre cuando hay luna nueva, las mareas altas son mucho más altas y las bajas mucho más bajas. A pesar de que el tamaño de Sol es mucho mayor que el de la Luna, su atracción sobre las masas oceánicas es la mitad de la lunar, debido a su mayor distancia a la Tierra.



Cuando la Luna está en cuarto creciente, también llamado cuadratura, su fuerza de atracción no se suma a la del Sol, sino que la contrarresta. En esta situación tanto la pleamar como la bajamar son más suaves.





Cuando la Luna esta llena se produce una nueva alineación con es Sol, si bien en caras opuestas respecto a la Tierra. En esta situación sus fuerzas de atracción también se suman y nuevamente las mareas, tanto la alta como la baja, son intensas.
En el cuarto menguante el Sol y la Luna no están alineados y su atracción es ejercida en direcciones diferentes. Las mareas alta y baja no alcanzan sus valores máximos.

Variación del valor de g superficial con la latitud

Debido a la rotación de la Tierra, los cuerpos experimentan una fuerza centrífuga que varía según la latitud: es nula en los polos y máxima en el ecuador. Esta fuerza centrífuga hace disminuir el efecto de la atracción gravitatoria, y la desvía de su dirección original hacia el centro de la Tierra.

A nivel del mar, la siguiente fórmula nos da el valor de "g" a una latitud ϕ:

$$g_\phi = 9.780327\left(1 + 0.0053024\sin^2\phi - 0.0000058\sin^2 2\phi\right)\ m/s^2$$

donde g_ϕ = aceleración de la gravedad en $m \cdot s^{-2}$ en la latitud :ϕ

Además, el campo gravitatorio aumenta con la latitud debido a otro efecto: el achatamiento de la Tierra en los polos (también como consecuencia de la fuerza centrífuga) hace que la distancia *r* se reduzca a medida que la latitud aumenta. La fuerza de atracción es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia, lo cual significa que estando en el ecuador la fuerza de gravedad es menor que en otras latitudes, y a medida que nos vayamos desplazando al sur o al norte, la fuerza de gravedad se va incrementando. Entre los dos efectos, la fuerza centrífuga y el achatamiento de los polos, hacen que la gravedad en el ecuador sea un 0,5 % menor que en los polos.

Estos dos factores influyen además en la dirección de la gravedad. La atracción gravitatoria no está dirigida al centro de la Tierra, sino perpendicular a la superficie del geoide, lo que representa una pequeña desviación hacia el polo del hemisferio opuesto. Aproximadamente la mitad de esa desviación se debe a la fuerza centrífuga, y la otra mitad a la masa adicional alrededor del ecuador, que provoca un cambio en la dirección de la fuerza de la gravedad con respecto a lo que sería su dirección en una Tierra perfectamente esférica.

A efectos de los cálculos del campo gravitatorio de la Tierra, generalmente se considera que su forma es una esfera de densidad uniforme. La forma de la superficie de la Tierra es en realidad más próxima a un esferoide oblato, que además no tiene una densidad uniforme, por lo que su campo gravitatorio no es un campo central exacto, y esto se refleja en un momento cuadripolar no nulo. El efecto del momento cuadripolar por ejemplo es importante en el diseño de satélites artificiales.

Los valores de $|\mathbf{g}|$ (la fuerza específica de la gravedad) en el ecuador y en los polos son respectivamente:[1]

$$|\mathbf{g}_{ec}| = 9,78\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \qquad |\mathbf{g}_{po}| = 9,8322\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Algunas consecuencias de la ley de gravitación newtoniana: determinación de la masa de algunos cuerpos celestes, la predicción de la existencia de planetas y la explicación de las mareas.

Neptuno

Neptuno es el planeta más exterior de los cuatro planetas «gigantes». Fue descubierto por J. G. Galle en 1846 gracias a los cálculos realizados por U. J. J. LeVerrier y J. C. Adams sobre la perturbación que experimentaba la órbita de Urano (ya que desde 1840 era evidente que su órbita no correspondía a la que cabría esperar de acuerdo con los cálculos hechos mediante la mecánica celeste newtoniana, dado que la órbita mostraba discrepancias con las trayectorias elípticas calculadas teóricamente) y tomando como hipótesis la existencia de otro planeta desconocido. Adams fue el primero en encontrar la respuesta, en 1843, comunicándosela a los dos astrónomos ingleses más destacados de la época, Challis, astrónomo del observatorio de Cambridge, y Airy, astrónomo real del observatorio de Greenwich, que sin embargo no dieron ninguna importancia al trabajo de Adams. Tres años más tarde, Le Verrier obtuvo resultados muy similares a los de Adams y que comunicó a su vez a J. G. Galle, del observatorio de Berlin, quien por su parte inició inmediatamente la búsqueda de dicho objeto, observando por vez primera el planeta Neptuno.

Dicho planeta tiene un diámetro ecuatorial de 44.600 km, y su diámetro polar es de 43.700 km, aproximadamente. Su período de rotación es de unas 15 horas 40 minutos, mientras que su masa es unas 17,23 veces la de la Tierra y su densidad alcanza los 2,27g/cm^3.