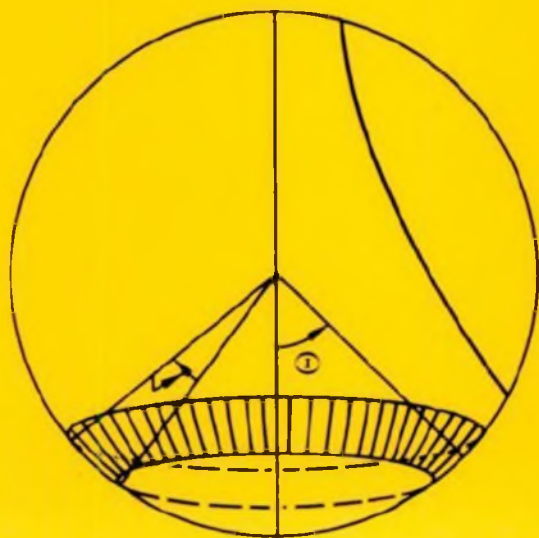


MECÁNICA CLÁSICA

H. Goldstein



MECÁNICA
CLÁSICA

En memoria de
LOUIS J. KLEIN
profesor y amigo

MECÁNICA CLÁSICA

H. Goldstein

Columbia University



EDITORIAL REVERTÉ, S. A.

Barcelona-Bogotá-Buenos Aires-Caracas-México

Título de la obra original:

Classical Mechanics, Second Edition

Edición original en lengua inglesa publicada por:

Addison-Wesley Publishing Company, Inc. Reading, Massachusetts, U.S.A.

Copyright © Addison-Wesley Publishing Company, Inc.

“Esta obra es una traducción al español de CLASSICAL MECHANICS, SECOND EDITION, de Herbert Goldstein, publicada y vendida en todo el mundo en español por concesión de Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts, E.E.U.U. que es la compañía propietaria de todos los derechos para publicar y vender la misma”.

Versión española por:

Dr. Julián Fernández Ferrer

Catedrático de la Universidad Politécnica de Barcelona

Fellow of the Institute of Mathematics and its Applications

Propiedad de:

EDITORIAL REVERTÉ, S.A.

Loreto, 13-15, Local B

08029 Barcelona

Reservados todos los derechos. La reproducción total o parcial de esta obra, por cualquier medio o procedimiento, comprendidos la reprografía y el tratamiento informático, y la distribución de ejemplares de ella mediante alquiler o préstamo públicos, queda rigurosamente prohibida, sin la autorización escrita de los titulares del copyright, bajo las sanciones establecidas por las leyes.

Edición en español

© EDITORIAL REVERTÉ, S.A., 1994

Impreso en España - Printed in Spain

ISBN - 84 - 291 - 4306 - 8

Depósito Legal: B - 22261 - 1994

Impreso por LIBERGRAF, S.A.

Constitución 19, interior (Can Batlló)

08014 BARCELONA

Prólogo a la segunda edición

La perspectiva de una segunda edición de Mecánica Clásica, casi treinta años después de su publicación inicial, ha dado lugar a dos tipos de reacciones casi contradictorios. Por una parte, se reivindica que el adjetivo «clásica» implica que el campo está completo, cerrado, totalmente fuera de las corrientes de la investigación en Física. Además, la primera edición ha recibido el favor de una utilización continua desde que se publicó. ¿Por qué, pues, una segunda edición? La reacción contraria ha sido que ya era hora de que saliera una segunda edición. Más importante que los cambios introducidos en los temas tratados (que han sido considerables) ha sido la revolución en la actitud hacia la Mecánica clásica en relación con otras áreas de la Ciencia y la Tecnología. Cuando apareció la primera edición, formaba parte de un movimiento que rompía con las viejas formas de enseñar la Física. Pero lo que en 1950 eran riesgos audaces son hoy en día lugares comunes que a la generación actual se les antojan pasados de moda. La presentación de la Mecánica clásica necesita cambios radicales.

Al preparar esta segunda edición he intentado seguir un camino intermedio entre esas dos actitudes. He intentado conservar, todo lo posible, las ventajas de la primera edición (tal como las veo) al tiempo que doy cuenta de los desarrollos del propio tema, su posición en la carrera y su aplicación a otros campos. Lo que ha salido es una revisión completa de la primera edición. Difícilmente encontraremos una página del texto que no se haya retocado. Los cambios han sido de diversos tipos:

Errores (algunos de bulto) que he captado o que me han sido señalados, se han corregido, desde luego. Espero que no se hayan introducido muchos en la materia revisada.

El capítulo referente a las oscilaciones pequeñas se ha trasladado desde su anterior posición en que era el penúltimo y se ha situado inmediatamente detrás del Capítulo 5 referente al movimiento del cuerpo rígido. Esta situación parece más adecuada a la manera actual de impartirse los cursos de Mecánica. Parte de la materia relativa a la formulación de Hamilton ha tenido, por tanto, que sacarse y llevarla más adelante, a lo que constituye el Capítulo 8 actual.

Se ha añadido un nuevo capítulo referente a la teoría de perturbaciones (Capítulo 11). El último capítulo, referente a sistemas continuos y campos se ha ampliado mucho, cumpliendo la promesa implícita hecha en el Prólogo de la primera edición.

En todo el libro se han añadido nuevos apartados, que van desde uno en el Capítulo 3 acerca del teorema de Bertrand para los potenciales de fuerzas centrales que dan lugar a órbitas cerradas, hasta el apartado final del Capítulo 12 que trata el teorema de Noether. En su mayor parte, estos apartados contienen materia totalmente nueva.

En diversos apartados, se han sustituido razonamientos y demostraciones por otros nuevos que parecen más sencillos y comprensibles, p. ej., la demostración del teorema de Euler en el Capítulo 4. En ocasiones, alguna línea de razonamiento presentada en la primera edición se ha complementado con una manera diferente de enfocar el problema. El ejemplo más importante es la introducción del método matricial para las ecuaciones canónicas, en paralelo con la antigua técnica de las funciones generadoras. De nuevo, aun manteniendo el convenio original de los ángulos de Euler, se mencionan otros convenios, incluso el común en Mecánica cuántica y se dan fórmulas detalladas en un apéndice.

Fruto de la larga experiencia en la enseñanza de cursos basados en el libro es el haber aumentado el número de ejercicios al final de cada capítulo, que ha quedado multiplicado por un factor superior a dos y medio. La bibliografía ha sufrido un aumento semejante que refleja la aparición de muchos textos y monografías de gran valor durante el tiempo transcurrido desde la primera edición. En deferencia a —pero no de acuerdo con— el actual olvido de las lenguas extranjeras en la educación en Estados Unidos, se han reducido al mínimo las referencias a libros escritos en idiomas extranjeros.

La elección de los temas conservados y de la nueva materia añadida refleja hasta cierto punto mis opiniones e intereses personales y al lector podría gustarle más una selección diferente. Como exigiría demasiado espacio (y sería muy pesado) tratar las razones motivadoras relativas a cada tema, debo comentar algunos de los principios generales que han regido mis decisiones. La cuestión de la elección de las técnicas matemáticas a emplear es fastidiosa. La primera edición intentaba hacer de vehículo para presentar herramientas matemáticas de amplia utilidad con las que pudiera no estar familiarizado el estudiante. En la presente edición la actitud es más que una precaución. Es mucho más probable ahora que hace treinta años que el estudiante se enfrente a la Mecánica con una buena base en manipulación de matrices. A pesar de todo, se ha conservado el apartado referente a propiedades de las matrices en el Capítulo 4 e incluso se ha ampliado, a fin de proporcionar una referencia conveniente de las fórmulas y técnicas necesarias. Los conocedores del tema pueden pasar por alto el apartado, si no lo necesitan. En cambio, se ha introducido muy poco de Matemática moderna. La propiedades elementales de la teoría de grupos se mencionan en distintos puntos del libro. En los Capítulos 6 y 7 se presta brevemente atención a la manipulación de tensores en espacios no euclídeos. Por lo demás, el nivel matemático de esta edición viene a ser el mismo que el de la primera. Es suficientemente adecuado para el contenido físico del libro y en la carrera existen otros medios para adquirir la Matemática necesaria en otras ramas de la Física. En particular, la «Matemática nueva» de la Física teórica se ha excluido deliberadamente. No se hace mención de variedades o difeomorfismos, de haces de fibras tangentes o de toros invariantes. Existen ciertas

áreas muy especializadas de la Mecánica clásica en donde son útiles y quizá esenciales las poderosas herramientas del Análisis global y de la Topología diferencial. No obstante, no veo claro que contribuyan a la comprensión de la Física de la Mecánica clásica al nivel que se da en esta edición. Introducir estos conceptos matemáticos y sus aplicaciones inflarían demasiado el libro y probablemente sólo serviría para oscurecer la Física. La Física teórica tiende a lo contrario, no es sólo Matemáticas.

En línea con esta actitud, se ha conservado el espacio complejo de Minkowski en la mayor parte del tratamiento de la Relatividad restringida a fin de simplificar su tratamiento matemático. Las bases de esta decisión (que nos damos cuenta va en contra de la moda actual) se dan en detalle en las páginas 360-361.

Cierto es que la Mecánica clásica actual está lejos de ser un tema cerrado. Las tres últimas décadas han visto la floración de nuevos desarrollos en Mecánica clásica, el abordaje de nuevos problemas y la aplicación de las técnicas de la Mecánica clásica a cuestiones de largo alcance de la Física y la Química. Evidentemente, no sería posible incluir aquí el tratamiento de todos esos desarrollos. Las razones son varias. Las limitaciones de espacio son, evidentemente, importantes. Además, novedades atractivas de la investigación corriente resultan, a menudo, efímeras y tienen muy corta vida. Y ciertas aplicaciones exigen una base demasiado extensa en otros campos, tales como la Física del estado sólido o la Química física. La selección realizada representa un compromiso personal. Las aplicaciones que permiten una descripción sencilla y proporcionan nuevos puntos de vista se incluyen con cierto detalle. Otras sólo se describen brevemente, con suficientes referencias que permitan al estudiante satisfacer su naciente curiosidad. En algunos casos he intentado describir casi sólo con palabras el estado actual de la investigación de un tema, sin matemáticas, a fin de proporcionar al estudiante una visión global que le guíe en una futura investigación. Hay una área omitida que merece especial mención —las oscilaciones alineales y las cuestiones de estabilidad inherentes a ellas. Es incuestionable la importancia del tema, pero creo que el tratamiento adecuado del mismo necesita de todo un libro.

Con todas las restricciones y una selección cuidadosa, el libro ha alcanzado un volumen probablemente excesivo para desarrollarse en un solo curso. Se ha escrito un cierto número de apartados de manera que se puedan suprimir sin afectar a desarrollos posteriores y se han marcado en consecuencia. Sin embargo, creemos que no es necesario marcar «pistas» especiales a lo largo del libro. Cada profesor, identificado con sus propias necesidades, está mejor facultado para recoger y elegir lo que cree debe incluirse en los cursos que imparte.

Quedo muy agradecido a muchas personas que han contribuido a mi formación en Mecánica clásica en los treinta años anteriores. A mis colegas los Profesores Frank L. DiMaggio, Richard W. Longman y al Decano Peter W. Likins les agradezco muchos valiosos comentarios y discusiones. Mi agradecimiento a Sir Edward Bullard por corregirme un error grave de mi primera edición, especialmente por lo simpática y graciosamente que lo hizo. El Profesor Boris Garfinkel de la Yale University leyó y comentó amablemente varios capítulos e hizo todo lo posible para iniciarme en los misterios de la Mecánica celeste. A lo largo de los años he sido un receptor agradecido de las valiosas correcciones y sugerencias de muchos amigos y extraños entre los cuales debo mencionar en particular a los Drs. Eric Ericson (de la Universidad de Oslo), K. Kalikstein, J. Neuberger, A. Radkowsky y a Mr. W. S. Pajes. Sus contribuciones han enriquecido el

libro, si bien solamente yo soy responsable de los errores y falsas interpretaciones. Quisiera añadir mi agradecimiento a todos los autores de trabajos acerca de Mecánica clásica aparecidos en las tres últimas décadas en el American Journal of Physics cuyas páginas espero haber leído con provecho.

El equipo de Addison-Wesley me ha ayudado y animado de manera uniforme. Deseo dar especialmente las gracias a Mrs. Laura R. Finney por su paciencia en lo que debe haberle parecido un proceso interminable y a Mrs. Marion Howe por su amable y persistente colaboración en la lucha por lograr una página impresa aceptable.

A mi padre, Harry Goldstein ז"ל, le debo más que palabras que puedan describir su devoción y guía a lo largo de toda la vida. Pero quiero, al menos ahora, hacer lo que él no me permitió durante su vida —reconocer la ayuda de su crítica incisiva y la edición meticulosa de la primera edición. Sólo espero que la presente edición refleje aún parte de su insistencia en una escritura lúcida y concisa.

Quiero dedicar esta edición a los que atesoro por encima de todo en este mundo y que han dado un significado a mi vida —a mi esposa, Channa, y a nuestros hijos, Penina Perl, Aaron Meir y Shoshanna.

Y, sobre todo, quiero manifestar el agradecimiento de mi corazón, en las palabras de Daniel (2:23):

לֹא הָיָה לְעַלְמָא דְּלִילְיָא
 זְלִי נְזִילְ נְעֻלְיָא, אִילְלִין לְאִמְרֵי נְעֻלְיָא

Kew Gardens Hills, New York

HERBERT GOLDSTEIN

Prólogo a la primera edición

Un curso superior de Mecánica clásica ha sido siempre una parte de muchos créditos de una carrera de Física. Sin embargo, la función actual de un tal curso podría ser fuertemente cuestionada. No presenta nuevos conceptos físicos al estudiante. No le lleva directamente a la investigación en Física. Ni le ayuda, en gran manera, a resolver los problemas prácticos de mecánica que encuentra en el laboratorio.

A pesar de todo esto, la Mecánica clásica sigue siendo una parte indispensable de la formación del físico. Desempeña un papel doble en la preparación del estudiante para el estudio de la Física moderna. Así, la técnica de las variables acción-ángulo se necesita para la Mecánica cuántica antigua, la ecuación de Hamilton-Jacobi y el principio de mínima acción proporcionan la transición a la Mecánica ondulatoria, mientras que los paréntesis de Poisson y las transformaciones canónicas son valiosísimas para formular la Mecánica cuántica moderna. En segundo lugar, la Mecánica clásica ofrece al estudiante una oportunidad de dominar muchas de las técnicas matemáticas necesarias para la Mecánica cuántica aun siendo todavía válidas en función de los conceptos conocidos de la Física clásica.

Desde luego, con estos objetivos en mente, el tratamiento tradicional del tema, que se fijó en gran manera hace medio siglo, ya no resulta adecuado. Este libro intenta una exposición de la Mecánica clásica que cubra los nuevos requisitos. Se ha hecho hincapié en las formulaciones que son importantes para la Física moderna y se han presentado las técnicas matemáticas usualmente asociadas a la Mecánica cuántica cuando resulten de mayor elegancia y compacidad. Por ejemplo, se ha ampliado el estudio del movimiento bajo fuerzas centrales para introducir la Cinemática de la difusión y la solución clásica de problemas de difusión. Se ha dedicado un espacio considerable a las transformaciones canónicas, a las formulaciones con paréntesis de Poisson, a la teoría de Hamilton-Jacobi y a las variables acción-ángulo. Se proporciona una introducción a la formulación de principios variacionales para sistemas continuos y campos. Como ejemplo de

la aplicación de nuevas técnicas matemáticas, se trata la rotación del cuerpo rígido desde el punto de vista de las transformaciones matriciales. El conocido teorema de Euler para la rotación de un cuerpo rígido puede entonces presentarse en función del problema de valores propios de una matriz ortogonal. A consecuencia de ello, temas tan diversos como el tensor de inercia, las transformaciones de Lorentz en el espacio de Minkowski y las frecuencias resonantes de las oscilaciones pequeñas resultan susceptibles de un tratamiento matemático unificado. Además, mediante esta técnica es posible incluir en una etapa previa los difíciles conceptos de operaciones de reflexión y cantidades pseudo-tensoriales, tan importantes en la Mecánica cuántica moderna. Un nuevo adelanto de los métodos matriciales es que se pueden introducir los «spinores» en relación con los parámetros de Cayley-Klein.

Se han tomado sin dudar varios puntos de partida adicionales. Demasiado frecuentemente, la Relatividad restringida no recibe ningún desarrollo relacionado con ella salvo como parte de un curso especializado que también cubre la Relatividad generalizada. No obstante, su importancia vital en Física moderna exige que se exponga al estudiante la Relatividad restringida en una etapa previa de su formación. En consecuencia, se ha dedicado al tema el Capítulo 6. Otra innovación ha sido la inclusión de las fuerzas dependientes de la velocidad. Históricamente, la Mecánica clásica se desarrolló haciendo hincapié en las fuerzas estáticas que sólo dependen de la posición, tal como las fuerzas gravitatorias. Por otra parte, en la Física moderna aparece constantemente la fuerza electromagnética que depende de la velocidad. A fin de que el estudiante pueda manejar dichas fuerzas lo más pronto posible, desde el principio se han incluido en la estructura de la Mecánica potenciales dependientes de la velocidad y se han desarrollado coherentemente a lo largo de todo el texto.

Un nuevo elemento ha sido aún el tratamiento de la Mecánica de sistemas continuos y campos del Capítulo 11 y procede algún comentario acerca de la elección de la materia. Interpretado estrictamente, el tema podría incluir toda la Elasticidad, la Hidrodinámica y la Acústica, si bien esos temas se salen del ámbito prescrito a este libro y para la mayoría de ellos se han escrito tratados adecuados. Por contra, no se dispone de ningún tratado relacionado con los fundamentos clásicos de la formulación de principios variacionales de los sistemas continuos, a pesar de su creciente importancia en la teoría de campos de partículas elementales. La teoría de campos puede llevarse dándole una gran longitud y complejidad antes de que sea necesario introducir la cuantización. Por ejemplo, es perfectamente posible estudiar el tensor esfuerzo-energía, las ecuaciones de continuidad microscópicas, las representaciones en el espacio de las cantidades de movimiento, etc., totalmente dentro del campo de la Física clásica. Sin embargo, creímos que el tratamiento adecuado de estos temas requiere una elaboración que se sale de lo que se podría esperar naturalmente del estudiante. Se decidió por tanto que, al menos en esta edición, se limitara el Capítulo 11 a una descripción elemental de la formulación de Lagrange y de Hamilton de los campos.

El curso para el que está pensado este texto tiene un prerrequisito de un curso intermedio de Mecánica. Tanto para el estudiante inadecuadamente preparado (cosa muy frecuente) como para el que ambiciosamente pretende saltarse la etapa intermedia, se ha hecho un esfuerzo para que el libro contenga todo lo necesario sin necesidad de acudir a otros. Por tanto, gran parte de los Capítulos 1 y 3 se dedica a materias que suelen tratarse en los cursos preliminares.

Con pocas excepciones, no se necesitará más base matemática que la que obtienen los alumnos en Cálculo infinitesimal y Análisis vectorial en cursos preuniversitarios. Por tanto, se da un espacio considerable para desarrollar las herramientas matemáticas más complicadas a medida que se necesiten. El conocimiento elemental de las ecuaciones de Maxwell y de sus consecuencias más sencillas es necesario para comprender los apartados referentes a las fuerzas electromagnéticas. La mayoría de estudiantes que ingresan en la Facultad han tenido al menos un curso de Física moderna y suelen haber aprovechado esta circunstancia para indicar brevemente la relación entre un desarrollo clásico y su continuación cuántica.

En las publicaciones de Mecánica se dispone de un gran lote de ejercicios, fácilmente accesibles a todo el mundo, por lo que no parecía necesario reproducir una colección numerosa de tales problemas. Por ello se han limitado los ejercicios al final de cada capítulo a aquellos que sirvan de ampliación al texto, ilustrando algún punto particular o que proporcionen teoremas variantes. Se han evitado conscientemente las piezas de museo pedantes.

La cuestión de la notación es siempre fastidiosa. Es imposible lograr un sistema de notación coherente y sin ambigüedad que no sea al mismo tiempo impracticable y engorroso. Se ha seguido el convenio acostumbrado de representar los vectores por letras negritas redondas. Además, las cantidades matriciales de cualquier rango y los tensores que no sean vectores se representan por caracteres negritos del tipo: **A**. Al final del libro se da un índice de símbolos que consigna la apariencia inicial de cada significado de los símbolos importantes. No se incluyen los caracteres secundarios que sólo aparecen una vez.

Al final de cada capítulo se han incluido referencias correspondientes a la elaboración de la materia tratada o al tratamiento de cuestiones que no se hayan abordado. Las evaluaciones que acompañan a dichas referencias son, desde luego, puramente personales pero se ha creído necesario proporcionar al estudiante una guía para la laberíntica bibliografía de la Mecánica. Estas referencias, junto con otras muchas, se consignan también al final del libro. La lista no pretende ser en absoluto completa, habiéndose omitido deliberadamente muchos de los libros antiguos. De todas maneras, la lista contiene las referencias de las obras que se han utilizado para escribir este libro y debe servir, por tanto, de reconocimiento por mi parte a dichas fuentes.

El presente texto ha resultado de un curso de lecciones de Mecánica clásica que di en la Universidad de Harvard y estoy muy agradecido al Profesor J. H. Van Vleck, entonces Jefe del Departamento de Física, por la ayuda personal y oficial que me prestó. Al Profesor J. Schwinger y a otros colegas les debo muchas y valiosas sugerencias. También quiero expresar mi gratitud a los estudiantes de mis cursos, cuya reacción favorable y activo interés proporcionaron el ímpetu continuado para este trabajo.

תושלב'ע

Cambridge, Mass.
Marzo 1950

HERBERT GOLDSTEIN

Índice analítico

PRÓLOGO	v
CAPÍTULO 1 REPASO DE LOS PRINCIPIOS ELEMENTALES	1
1-1 Mecánica de una partícula	1
1-2 Mecánica de un sistema de partículas	6
1-3 Ligaduras	14
1-4 Principio de d'Alembert y ecuaciones de Lagrange	19
1-5 Potenciales dependientes de la velocidad y función de disipación	26
1-6 Aplicaciones sencillas de la formulación lagrangiana	30
CAPÍTULO 2 PRINCIPIOS VARIACIONALES Y ECUACIONES DE LAGRANGE	43
2-1 Principio de Hamilton	43
2-2 Algunas técnicas del cálculo de variaciones	45
2-3 Deducción de las ecuaciones de Lagrange a partir del principio de Hamilton	53
2-4 Extensión del principio de Hamilton a sistemas no holonomos	56
2-5 Ventajas de una formulación de principio variacional	63
2-6 Teoremas de conservación y propiedades de simetría	66
CAPÍTULO 3 PROBLEMA DE LOS DOS CUERPOS	85
3-1 Reducción al problema equivalente de un cuerpo	85
3-2 Ecuaciones del movimiento e integrales primeras	87
3-3 Problema unidimensional equivalente y clasificación de órbitas	92
3-4 Teorema del virial	101

3-5	Ecuación diferencial de la órbita y potenciales de fuerza integrables ...	105
3-6	Condiciones para órbitas cerradas (teorema Bertrand)	112
3-7	Problema de Kepler: Fuerza inversamente proporcional al cuadrado de la distancia	116
3-8	Movimiento en el tiempo en el problema de Kepler	122
3-9	Vector de Laplace-Runge-Lenz	128
3-10	Dispersión en un campo de fuerzas central	132
3-11	Transformación del problema de la dispersión a coordenadas del laboratorio	143

CAPÍTULO 4 CINEMÁTICA DEL CUERPO RÍGIDO 161

4-1	Coordenadas independientes para un cuerpo rígido	161
4-2	Transformaciones ortogonales	167
4-3	Propiedades formales de la matriz de cambio	173
4-4	Ángulos de Euler	183
4-5	Parámetros Cayley-Klein y cantidades relacionadas con ellos	188
4-6	Teorema de Euler referente al movimiento del cuerpo rígido	202
4-7	Rotaciones finitas	209
4-8	Rotaciones infinitesimales	213
4-9	Velocidad de variación de un vector	222
4-10	Fuerza de Coriolis	226

CAPÍTULO 5 ECUACIONES DE MOVIMIENTO DEL CUERPO RÍGIDO 239

5-1	Momento cinético y energía cinética del movimiento alrededor de un punto	239
5-2	Tensores y afinores	244
5-3	Tensor de inercia y momento de inercia	248
5-4	Valores propios del tensor de inercia y transformación a los ejes principales	252
5-5	Métodos de solución de problemas de cuerpo rígidos y ecuaciones de Euler del movimiento	259
5-6	Movimiento de un cuerpo rígido exento de momentos	261
5-7	Peonza simétrica pesada con un punto fijo	270
5-8	Precesión de los equinoccios y de las órbitas de satélites	285
5-9	Precesión de sistemas de cargas en un campo magnético	293

CAPÍTULO 6 OSCILACIONES PEQUEÑAS 305

6-1	Formulación del problema	305
6-2	Ecuación de valores propios y transformación a los ejes principales ...	308
6-3	Frecuencias de vibración libre y coordenadas normales	317

6-4	Vibraciones libres de una molécula triatómica lineal	323
6-5	Vibraciones forzadas y efecto de las fuerzas disipativas	328

CAPÍTULO 7 LA TEORÍA RESTRINGIDA DE LA RELATIVIDAD EN MECÁNICA CLÁSICA **341**

7-1	Programa básico de la relatividad restringida	342
7-2	Transformación de Lorentz	344
7-3	Transformaciones de Lorentz en espacios reales de cuatro dimensiones ..	356
7-4	Otras descripciones de la transformación de Lorentz	361
7-5	Formulaciones covariantes en cuatro dimensiones	367
7-6	Las ecuaciones de la fuerza y la energía en mecánica relativista	373
7-7	Cinemática relativista de las colisiones y de sistemas de muchas partículas	380
7-8	Formulación lagrangiana de la mecánica relativista	394
7-9	Formulaciones lagrangianas covariantes	401

CAPÍTULO 8 ECUACIONES DE MOVIMIENTO DE HAMILTON **417**

8-1	Transformaciones de Legendre y ecuaciones de movimiento de Hamilton	417
8-2	Coordenadas cíclicas y teoremas de conservación	427
8-3	Método de Routh y oscilaciones en torno al movimiento estacionario	431
8-4	Formulación de Hamilton de la mecánica relativista	437
8-5	Deducción de las ecuaciones de Hamilton a partir de un principio variacional	443
8-6	Principio de mínima acción	446

CAPÍTULO 9 TRANSFORMACIONES CANÓNICAS **461**

9-1	Ecuaciones de la transformación canónica	461
9-2	Ejemplos de transformaciones canónicas	470
9-3	Método simpléctico para transformaciones canónicas	476
9-4	Corchetes de Poisson y otros invariantes canónicos	484
9-5	Ecuaciones de movimiento. Transformaciones canónicas infinitesimales y teoremas de conservación con la formulación de los corchetes de Poisson	494
9-6	Relaciones del corchete de Poisson momento cinético	507
9-7	Grupos de simetría de sistemas mecánicos	511
9-8	Teorema de Liouville	518

CAPÍTULO 10	TEOREMA DE HAMILTON-JACOBI	533
10-1	Ecuación de Hamilton-Jacobi para la función principal de Hamilton	533
10-2	El problema del oscilador armónico como ejemplo del método de Hamilton-Jacobi	538
10-3	Ecuación de Hamilton-Jacobi para la función característica de Hamilton	541
10-4	Separación de variables en la ecuación de Hamilton-Jacobi	546
10-5	Variables acción-ángulo en sistemas de un grado de libertad	556
10-6	Variables acción-ángulo para sistemas totalmente separables	562
10-7	Problema de Kepler tratado con variables acción ángulo	572
10-8	Teoría de Hamilton-Jacobi. Óptica geométrica y Mecánica ondulatoria	588
CAPÍTULO 11	TEORÍA CANÓNICA DE LA PERTURBACIÓN	605
11-1	Introducción	605
11-2	Perturbación dependiente del tiempo (variación de constantes)	606
11-3	Ejemplos de la teoría de la perturbación dependiente del tiempo	614
11-4	Teoría de la perturbación independiente del tiempo en primer orden con un grado de libertad	624
11-5	Teoría de la perturbación independiente del tiempo para un orden superior al primero	630
11-6	Técnicas de perturbación especializadas para mecánica celeste y mecánica espacial	639
11-7	Invariantes adiabáticos	642
CAPÍTULO 12	INTRODUCCIÓN A LAS FORMULACIONES DE LAGRANGE Y HAMILTON PARA SISTEMAS CONTINUOS Y CAMPOS	659
12-1	Transición de un sistema discreto a un sistema continuo	659
12-2	Formulación de Lagrange para sistemas continuos	663
12-3	Tensor esfuerzo-energía y teoremas de conservación	671
12-4	Formulación de Hamilton, corchetes de Poisson y representación por cantidad de movimiento	679
12-5	Teoría de campos relativista	691
12-6	Ejemplos de teorías de campo relativista	696
12-7	Teorema de Noether	712

APÉNDICES	729
A Demostración del teorema de Bertrand	729
B Los ángulos de Euler en otros convenios	735
C Propiedades de transformación de $d\Omega$	741
D Condiciones de Staeckel para la separabilidad de la ecuación de Hamilton-Jacobi	745
E Formulación lagrangiana del campo acústico en los gases	749
BIBLIOGRAFÍA	755
ÍNDICE DE SÍMBOLOS	765
ÍNDICE ALFABÉTICO	779

Capítulo 1

Repaso de los principios elementales

El movimiento de cuerpos materiales constituyó el tema de algunas de las primeras investigaciones realizadas por los pioneros de la Física. A partir de sus esfuerzos ha evolucionado un vasto campo conocido por los nombres de Mecánica analítica, Dinámica o, simplemente, Mecánica. En el siglo actual se ha impuesto el término «Mecánica clásica» para distinguir esa rama de la Física de las modernas teorías físicas, especialmente de la Mecánica cuántica. También lo haremos nosotros, interpretando que el nombre incluye el tipo de Mecánica que se desprende de la teoría de la Relatividad restringida. El objeto de este libro es desarrollar la estructura de la Mecánica clásica y bosquejar alguna de sus aplicaciones de interés actual a la Física pura.

Toda presentación de la Mecánica se basa en algunos conceptos físicos fundamentales, tales como espacio, tiempo, simultaneidad, masa y fuerza. Cuando tratemos la teoría de la Relatividad restringida, examinaremos brevemente las nociones de simultaneidad y de escalas de tiempo y longitud. Sin embargo, en la mayor parte del libro, no vamos a analizar críticamente estos conceptos; en vez de ello, los supondremos términos no definidos cuyo significado es familiar al lector.

1-1 MECÁNICA DE UNA PARTÍCULA

Sea \mathbf{r} el vector de posición de una partícula para un origen dado y sea \mathbf{v} su vector velocidad:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}. \quad (1-1)$$

La *cantidad de movimiento* \mathbf{p} de la partícula es, por definición, el producto de su masa por su velocidad:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}. \quad (1\ 2)$$

A consecuencia de interacciones con campos y objetos exteriores, la partícula puede experimentar fuerzas de diversos tipos, p. ej., gravitatorias o electrodinámicas; la suma vectorial de las fuerzas que se ejercen sobre la partícula es la fuerza resultante \mathbf{F} . La Mecánica de la partícula está regida por la *Segunda Ley de Newton del Movimiento*, la cual establece que existen sistemas de referencia en los cuales el movimiento de la partícula está descrito por la ecuación diferencial

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}, \quad (1\ 3)$$

o sea

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}). \quad (1\ 4)$$

En la mayoría de los casos, la masa de la partícula es constante y la ecuación (1-3) se reduce a

$$\mathbf{F} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{a}, \quad (1\ 5)$$

donde \mathbf{a} es el vector aceleración de la partícula definido por

$$\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}. \quad (1-6)$$

La ecuación del movimiento es, pues, una ecuación diferencial de segundo orden, suponiendo que \mathbf{F} no dependa de derivadas de orden superior.

Todo sistema de referencia en el cual sea válida la ecuación (1-3) se denomina *sistema inercial* o *de Galileo*. Incluso en Mecánica clásica, la noción de sistema inercial es una idealización. Sin embargo, en la práctica suele ser posible establecer un sistema de coordenadas que se aproxime cuanto queramos a las propiedades deseadas. Para muchos fines, un sistema de referencia solidario a la Tierra (el «sistema del laboratorio») constituye una aproximación suficiente a un sistema inercial, mientras que para ciertos fines astronómicos puede ser necesario construir un sistema inercial por referencia a las galaxias más lejanas.

Muchas conclusiones importantes de la Mecánica se pueden expresar en forma de

teoremas de conservación que indican en qué condiciones se mantienen constantes en el tiempo diversas magnitudes mecánicas. La ecuación (1-1) nos da directamente el primero de ellos, el

Teorema de conservación de la cantidad de movimiento de una partícula: Si la fuerza resultante, \mathbf{F} , es nula, será $\dot{\mathbf{p}} = 0$ y se conservará la cantidad de movimiento \mathbf{p} .

El momento cinético de la partícula respecto a un punto O se representa por \mathbf{L} y es, por definición,

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}, \quad (1-7)$$

donde \mathbf{r} es el vector de posición que va de O a la partícula. Observemos que el orden de los factores es importante. Definimos ahora el *momento de una fuerza respecto a un punto O* en la forma

$$\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}. \quad (1-8)$$

La ecuación análoga a la (1-3) para \mathbf{N} se obtiene formando el producto vectorial de \mathbf{r} por la ecuación (1-4):

$$\mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{N} = \mathbf{r} \times \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}). \quad (1-9)$$

La ecuación (1-9) se puede escribir de otra forma, utilizando la identidad vectorial:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times m\mathbf{v}) = \mathbf{v} \times m\mathbf{v} + \mathbf{r} \times \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}), \quad (1-10)$$

en donde, evidentemente, se anula el primer término del segundo miembro. A consecuencia de esta identidad, la ecuación (1-9) toma la forma

$$\mathbf{N} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times m\mathbf{v}) = \frac{d\mathbf{L}}{dt}. \quad (1-11)$$

Notemos que tanto \mathbf{N} como \mathbf{L} dependen del punto O respecto al cual se toman los momentos.

Al igual que sucedía con la ecuación (1-3), la ecuación (1-11) para el momento $d\mathbf{a}$

también un teorema de conservación inmediato que es esta vez el

Teorema de conservación del momento cinético de una partícula: Si el momento resultante \mathbf{N} es nulo, será $\dot{\mathbf{L}} = 0$, y se conserva el momento cinético.

Consideremos ahora el trabajo efectuado por la fuerza exterior \mathbf{F} sobre la partícula cuando ésta va del punto 1 al punto 2. Por definición, este trabajo es

$$W_{12} = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}. \quad (1-12)$$

Si la masa es constante (como supondremos de ahora en adelante, a menos que se especifique lo contrario), la integral de la ecuación (1-12) se reduce a

$$\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = m \int \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} dt = \frac{m}{2} \int \frac{d}{dt}(v^2) dt,$$

y por tanto

$$W_{12} = \frac{m}{2}(v_2^2 - v_1^2). \quad (1-13)$$

La magnitud escalar $mv^2/2$ es la llamada energía cinética de la partícula y se representa por T , con lo que el trabajo efectuado es igual a la variación de energía cinética:

$$W_{12} = T_2 - T_1. \quad (1-14)$$

Cuando el campo de fuerzas sea tal que el trabajo W_{12} sea el mismo para todo camino posible que una los puntos 1 y 2, diremos que la fuerza (y el sistema) es *conservativa*. Otra descripción de sistema conservativo se obtiene imaginando que se lleva la partícula del punto 1 al punto 2 por un camino posible y luego regresa al punto 1 por otro camino. La independencia de W_{12} del camino particular seguido implica que el trabajo efectuado a lo largo del circuito cerrado mencionado sea nulo, es decir:

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0. \quad (1-15)$$

Desde un punto de vista físico, queda claro que un sistema no podrá ser conservativo

cuando existan en él rozamientos u otras fuerzas disipativas, porque el producto $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ debido al rozamiento es siempre negativo y no podrá anularse la integral.

Según un conocido teorema de Análisis vectorial,* para que W_{12} sea independiente del camino físico seguido por la partícula es condición necesaria y suficiente que \mathbf{F} sea el gradiente de una cierta función escalar de la posición:

$$\mathbf{F} = -\nabla V(\mathbf{r}), \quad (1-16)$$

donde V recibe el nombre de *potencial*, o *energía potencial*. La existencia de V puede inferirse intuitivamente mediante un razonamiento sencillo. Si W_{12} es independiente del camino de integración entre los extremos 1 y 2, se podría considerar que W_{12} es la variación de una magnitud que sólo depende de la posición de los puntos extremos. Esta magnitud la podemos representar por $-V$, con lo que para un elemento de camino tendremos la relación

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = -dV$$

o sea

$$F_s = -\frac{\partial V}{\partial s},$$

que es equivalente a la ecuación (1-16). Observemos que, en la ecuación 1-16, podemos sumar a V una cantidad cualquiera constante en el espacio, sin que quede afectado el resultado. Por tanto, *el nivel cero de V es arbitrario*.

En el caso de un sistema conservativo, el trabajo efectuado por las fuerzas es

$$W_{12} = V_1 - V_2. \quad (1-17)$$

Combinando la ecuación (1-17) con la (1-14) tenemos

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2, \quad (1-18)$$

* Véase, p. ej., W. Kaplan, *Advanced Calculus*, 2.^a ed. (Reading Massachusetts: Addison-Wesley, 1973), p. 311, p. 347.

que expresa en símbolos el

Teorema de conservación de la energía de una partícula: Si las fuerzas que actúan sobre una partícula son conservativas, se conservará la energía total $T + V$ de la partícula.

La fuerza aplicada a una partícula puede venir dada, en determinadas circunstancias, por el gradiente de una función escalar que dependa explícitamente de la posición de la partícula y del tiempo. No obstante, el trabajo efectuado sobre la partícula cuando recorre una distancia ds ,

$$\mathbf{F} \cdot ds = - \frac{\partial V}{\partial s} ds,$$

ya no será la variación total de $-V$ durante el corrimiento, puesto que V también varía explícitamente con el tiempo al moverse la partícula. Luego el trabajo efectuado cuando la partícula va del punto 1 al punto 2 ya no será la diferencia entre los valores de la función V en dichos puntos. Aun cuando podamos definir una energía total $T + V$, no se conserva en el curso del movimiento de la partícula.

1-2 MECÁNICA DE UN SISTEMA DE PARTÍCULAS

Al generalizar a sistemas de muchas partículas las ideas del apartado anterior, deberemos distinguir entre *fuerzas exteriores* que se ejercen sobre las partículas por parte de fuentes de fuera del sistema y *fuerzas interiores* sobre, p. ej., la partícula i debidas a las demás partículas del sistema. Así, la ecuación del movimiento (Segunda ley de Newton) para la partícula i -ésima se escribirá

$$\sum_j \mathbf{F}_{ji} + \mathbf{F}_i^{(e)} = \dot{\mathbf{p}}_i, \quad (1-19)$$

donde $\mathbf{F}_i^{(e)}$ representa la fuerza exterior y \mathbf{F}_{ji} es la fuerza interior que la partícula j -ésima ejerce sobre la partícula i -ésima (naturalmente, \mathbf{F}_{ii} es nula). Supondremos que \mathbf{F}_{ji} (como $\mathbf{F}_i^{(e)}$) cumplen la tercera ley de Newton del movimiento en su forma original: que las fuerzas que se ejercen entre sí dos partículas son iguales y opuestas. Esta hipótesis (que no es válida para todos los tipos de fuerzas) se denomina a veces *ley débil de acción y reacción*.

Sumando las ecuaciones (1-19) para todas las partículas, se tiene

$$\frac{d^2}{dt^2} \sum_i m_i \mathbf{r}_i = \sum_i \mathbf{F}_i^{(e)} + \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \mathbf{F}_{ji}. \quad (1-20)$$

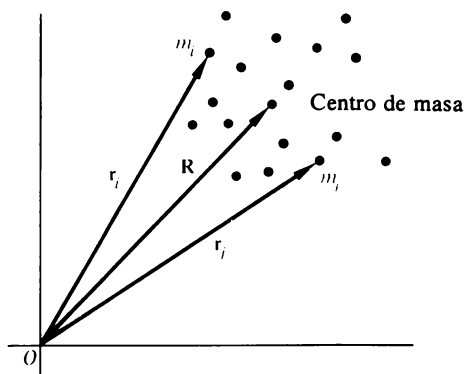


FIGURA 1-1

Centro de masa de un sistema de partículas.

El primer sumatorio del segundo miembro nos da la resultante de las fuerzas exteriores $F^{(e)}$, mientras que el segundo término se anula, ya que la ley de la acción y la reacción dice que cada pareja $F_{ij} + F_{ji}$ da cero. Para reducir el primer miembro, definamos un vector R que sea la media de los vectores de posición de las partículas, ponderada en proporción a sus masas:

$$R = \frac{\sum m_i r_i}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i r_i}{M} \tag{1-21}$$

El vector R define un punto llamado *centro de masa*, o menos precisamente centro de gravedad, del sistema (cfr. Fig. 1-1). Con esta definición, la (1-20) se reduce a

$$M \frac{d^2 R}{dt^2} = \sum_i F_i^{(e)} \equiv F^{(e)}, \tag{1-22}$$

que nos dice que el centro de masa se mueve como si la resultante de las fuerzas exteriores estuviera aplicada a la masa total del sistema concentrada en su centro de masa. Las fuerzas puramente internas, si cumplen la tercera ley de Newton, no tendrán pues efecto alguno sobre el movimiento del centro de masa. Un ejemplo muy corriente es el de la explosión de una granada en movimiento —el centro de masa de los fragmentos se mueve como si la granada siguiera estando en una sola pieza (si se desprecia la resistencia del aire). El mismo principio interviene en la propulsión a chorro y por cohete. Para que no se vea afectado el movimiento del centro de masa, la expulsión de los gases a gran velocidad debe estar contrarrestada por el movimiento del vehículo hacia adelante.

En virtud de la ecuación (1-21), la cantidad de movimiento total del sistema,

$$\mathbf{P} = \sum m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = M \frac{d\mathbf{R}}{dt}, \quad (1-23)$$

es igual al producto de la masa total del sistema por la velocidad de su centro de masa. En consecuencia, la ecuación (1-23) del movimiento del centro de masa puede volverse a enunciar en forma del

Teorema de conservación de la cantidad de movimiento de un sistema de partículas: Cuando la resultante de las fuerzas exteriores es nula, se conserva la cantidad de movimiento total.

Obtenemos el momento cinético resultante del sistema formando los productos vectoriales $\mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{p}}_i$ y sumándolos para todos los valores de i . Si realizamos esta operación en la ecuación (1-19) resulta, con ayuda de la identidad (1-10),

$$\sum_i (\mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{p}}_i) = \sum_i \frac{d}{dt} (\mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i) = \dot{\mathbf{L}} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{(e)} + \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ji}. \quad (1-24)$$

El último término del segundo miembro de (1-24) puede considerarse que es una suma de pares de la forma

$$\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ji} + \mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{ij} = (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{F}_{ji}, \quad (1-25)$$

utilizando la igualdad de acción y reacción. Pero $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$ coincide con el vector \mathbf{r}_{ij} que va de j a i (v. Fig. 1-2), por lo que el segundo miembro de la ecuación (1-25) se puede escribir en la forma

$$\mathbf{r}_{ij} \times \mathbf{F}_{ji}.$$

Si las fuerzas interiores entre dos partículas, además de ser iguales y opuestas, están sobre la recta que une las partículas —condición conocida por el nombre de *ley fuerte de acción y reacción*— todos estos productos vectoriales serán nulos. Con esta hipótesis, la suma para todos los pares será nula y la ecuación (1-24) podrá escribirse en la forma

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{N}^{(e)}. \quad (1-26)$$

La derivada temporal del momento cinético resultante es, pues, igual al momento resultante de las fuerzas exteriores respecto al punto dado. A la ecuación (1-26) corresponde el

Teorema de conservación del momento cinético resultante: L será constante en el tiempo cuando el momento resultante aplicado (de las fuerzas exteriores) sea nulo.

(Quizá valga la pena recalcar que se trata de un teorema *vectorial*, es decir, L_x se conservará si es nulo $N_x^{(e)}$, aun cuando no lo sean $N_x^{(e)}$ y $N_y^{(e)}$.)

Notemos que la conservación de la cantidad de movimiento en ausencia de fuerzas aplicadas supone que la ley débil de acción y reacción es válida para las fuerzas interiores. La conservación del momento cinético resultante del sistema en ausencia de pares aplicados exige la validez de la ley fuerte de acción y reacción — que las fuerzas interiores sean, además, *centrales*. Muchas fuerzas físicas conocidas, tales como las de la gravedad, satisfacen la ley fuerte. Pero se pueden encontrar fuerzas para las cuales acción y reacción son iguales aun cuando las fuerzas no sean centrales (v. más adelante). En un sistema en el cual haya cargas en movimiento, las fuerzas entre cargas predichas por la ley de Biot-Savart pueden vulnerar las dos formas de la ley de acción y reacción.* En tales

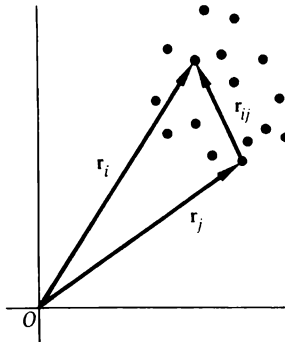


FIGURA 1-2

El vector r_{ij} entre las partículas i -ésima y j -ésima.

casos no son aplicables las ecuaciones (1-23) y (1-26) y sus correspondientes teoremas de conservación, al menos en la forma que los hemos dado. Usualmente será posible hallar

* Si dos cargas se mueven uniformemente con vectores velocidad paralelos que no sean perpendiculares a la recta que une las cargas, las fuerzas mutuas serán iguales y opuestas pero no estarán soportadas por el vector entre las cargas. Consideremos, además, dos cargas que se muevan (instantáneamente) de manera que una se dirija hacia la otra la cual, a su vez, se mueve perpendicularmente a la primera. Entonces, la segunda ejerce sobre la primera una fuerza no nula, sin experimentar fuerza de reacción alguna.

alguna generalización de \mathbf{P} o \mathbf{L} que se conserve. Así, en un sistema aislado de cargas en movimiento, lo que se conserva es la suma del momento cinético mecánico y el «momento cinético» electromagnético del campo.

La ecuación (1-23) dice que la cantidad de movimiento resultante del sistema es la misma que se tendría si se concentrara toda la masa del sistema en el centro de masa y se moviera con éste. El teorema análogo para el momento cinético es más complicado. Con el origen O como punto de referencia, el momento cinético resultante del sistema es

$$\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i.$$

Sea \mathbf{R} el vector de posición del centro de masa respecto a O y sea \mathbf{r}'_i el vector de posición de la partícula i -ésima respecto al centro de masa. Tendremos entonces (v. fig. 1-3)

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}'_i + \mathbf{R} \quad (1-27)$$

y

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}'_i + \mathbf{v},$$

donde

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{R}}{dt}$$

es la velocidad del centro de masa relativa a O y

$$\mathbf{v}' = \frac{d\mathbf{r}'}{dt}$$

es la velocidad de la partícula i -ésima relativa al centro de masa del sistema. Utilizando la ecuación (1-27), el momento cinético resultante toma la forma

$$\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{R} \times m_i \mathbf{v} + \sum_i \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}'_i + \left(\sum_i m_i \mathbf{r}'_i \right) \times \mathbf{v} + \mathbf{R} \times \frac{d}{dt} \sum_i m_i \mathbf{r}'_i.$$

Los dos últimos términos de esta expresión son nulos, ya que ambos contienen el factor $\sum m_i \mathbf{r}'_i$, el cual define el vector de posición del centro de masa, precisamente en el sistema de coordenadas cuyo origen es el centro de masa, por lo que será un vector nulo.

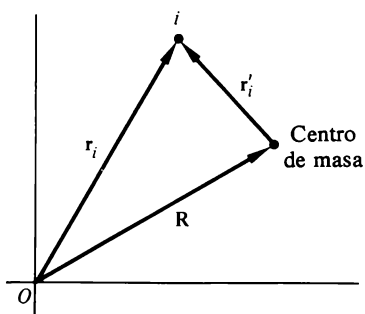


FIGURA 1-3

Vectores que intervienen en el cambio de punto de referencia para el momento cinético.

Escribiendo los demás términos en forma adecuada, el momento cinético resultante respecto a O resulta ser

$$\mathbf{L} = \mathbf{R} \times M\mathbf{v} + \sum_i \mathbf{r}'_i \times \mathbf{p}'_i. \quad (1-28)$$

La ecuación (1-28) nos dice que el momento cinético resultante respecto a un punto O es igual al momento cinético del sistema concentrado en su centro de masa, más el momento cinético del movimiento alrededor del centro de masa. La forma de la ecuación (1-28) hace resaltar que, en general, \mathbf{L} depende del origen O a través del vector \mathbf{R} . Solamente si el centro de masa está en reposo respecto a O será el momento cinético independiente del punto de referencia. En este caso es nulo el primer término de (1-28) y \mathbf{L} se reduce siempre al momento cinético tomado respecto al centro de masa.

Por último, consideremos la ecuación de la energía. Al igual que en el caso de la partícula, calculamos el trabajo efectuado por todas las fuerzas al mover el sistema de una configuración inicial 1 a una configuración final 2:

$$W_{12} = \sum_i \int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{s}_i = \sum_i \int_1^2 \mathbf{F}_i^{(e)} \cdot d\mathbf{s}_i + \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \int_1^2 \mathbf{F}_{ji} \cdot d\mathbf{s}_i. \quad (1-29)$$

De nuevo podemos utilizar las ecuaciones del movimiento para reducir las integrales a

$$\sum_i \int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{s}_i = \sum_i \int_1^2 m_i \dot{\mathbf{v}}_i \cdot \mathbf{v}_i dt = \sum_i \int_1^2 d\left(\frac{1}{2}m_i v_i^2\right).$$

Luego, el trabajo efectuado sigue pudiéndose escribir en forma de diferencia entre las energías cinéticas final e inicial:

$$W_{1,2} = T_2 - T_1,$$

donde T , energía cinética total del sistema, es

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2. \quad (1-30)$$

Utilizando las transformaciones a las coordenadas del centro de masa, dadas en la ecuación (1-27), también podremos escribir T en la forma

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_i m_i (\mathbf{v} + \mathbf{v}'_i) \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{v}'_i) \\ &= \frac{1}{2} \sum_i m_i v^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i'^2 + \mathbf{v} \cdot \frac{d}{dt} \left(\sum_i m_i \mathbf{r}'_i \right), \end{aligned}$$

y por la misma razón empleada al calcular el momento cinético, el último término es nulo y queda

$$T = \frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i'^2. \quad (1-31)$$

La energía cinética, al igual que el momento cinético, consta de dos partes: la energía cinética que se obtiene considerando toda la masa concentrada en el centro de masa, más la energía cinética del movimiento alrededor del centro de masa.

Consideremos ahora el segundo miembro de la ecuación (1-29). En el caso particular de que las fuerzas exteriores derive. de un potencial, el primer término lo podremos escribir en la forma

$$\sum_i \int_1^2 \mathbf{F}_i^{(e)} \cdot d\mathbf{s}_i = - \sum_i \int_1^2 \nabla_i V_i \cdot d\mathbf{s}_i = - \sum_i \left| V_i \right|_1^2,$$

donde el subíndice i del operador indica que las derivadas se calculan respecto a las componentes de \mathbf{r}_i . Si las fuerzas interiores son también conservativas, las fuerzas mutuas entre las partículas i -ésima y j -ésima, \mathbf{F}_{ij} y \mathbf{F}_{ji} , podrán obtenerse a partir de una función

potencial V_{ij} . Para que se cumpla la ley fuerte de acción y reacción, V_{ij} sólo podrá ser función de la distancia entre las partículas:

$$V_{ij} = V_{ij}(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|). \quad (1-32)$$

Entonces, las dos fuerzas serán automáticamente iguales y opuestas,

$$\mathbf{F}_{ji} = -\nabla_i V_{ij} = +\nabla_j V_{ij} = -\mathbf{F}_{ij}, \quad (1-33)$$

y están soportadas por la recta que une las dos partículas,

$$\nabla V_{ij}(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|) = (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) f, \quad (1-34)$$

donde f es una cierta función escalar. Si V_{ij} fuese también función de la diferencia de otros dos vectores asociados a las partículas, tales como sus velocidades o (entrando en el dominio de la Física moderna) sus momentos cinéticos de «spin» intrínsecos, las fuerzas seguirían siendo iguales y opuestas, pero no estarían soportadas necesariamente por la recta que une las partículas.

Cuando las fuerzas sean todas conservativas, podremos escribir el último término de la ecuación (1-29) en forma de suma de *pares* de partículas, en donde los términos para cada par son de la forma

$$-\int_1^2 (\nabla_i V_{ij} \cdot ds_i + \nabla_j V_{ij} \cdot ds_j).$$

Si representamos por \mathbf{r}_{ij} la diferencia de vector $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$ y si ∇_{ij} representa el gradiente respecto a \mathbf{r}_{ij} , será

$$\nabla_i V_{ij} = \nabla_{ij} V_{ij} = -\nabla_j V_{ij},$$

y

$$ds_i - ds_j = d\mathbf{r}_i - d\mathbf{r}_j = d\mathbf{r}_{ij},$$

con lo que el término correspondiente al par ij tendrá la forma

$$-\int \nabla_{ij} V_{ij} \cdot d\mathbf{r}_{ij}.$$

El trabajo total debido a las fuerzas interiores se reduce entonces a

$$-\frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \int_1^2 V_{ij} V_{ij} \cdot d\mathbf{r}_{ij} = -\frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} V_{ij} \Big|_1^2. \quad (1-35)$$

El factor $1/2$ aparece en la ecuación (1-35) porque al sumar para *ambos* índices *i* y *j*, cada miembro de un par dado se incluye dos veces, primero en la suma para *i* y luego en la suma para *j*.

De estas consideraciones, queda claro que si las fuerzas exteriores e interiores derivan ambas de potenciales, se puede definir una *energía potencial total*, V del sistema,

$$V = \sum_i V_i + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} V_{ij}, \quad (1-36)$$

tal que se conserva la energía total $T + V$. Este teorema es el análogo del de conservación (1-17) para una sola partícula.

Al segundo término del segundo miembro de la ecuación (1-36) se le llama energía potencial interna del sistema. En general, no tiene por qué ser nulo y, lo que es más importante, puede variar cuando el sistema varía con el tiempo. Solamente en la clase particular de sistemas llamada *cuerpos rígidos* será siempre constante el potencial interno. Formalmente, podemos definir el cuerpo rígido diciendo que es un sistema de partículas en el cual las distancias \mathbf{r}_{ij} son fijas y no pueden variar con el tiempo. En tal caso, los vectores $d\mathbf{r}_{ij}$ sólo podrán ser perpendiculares a las \mathbf{r}_{ij} correspondientes y por tanto, a las \mathbf{F}_{ij} . Así pues, en un cuerpo rígido las *fuerzas interiores no trabajan* y el potencial interno debe mantenerse constante. Como, en todo caso, el potencial total está definido salvo una constante aditiva, al estudiar el movimiento del sistema podremos prescindir por completo del potencial interno si es invariable.

1-3 LIGADURAS

En los apartados anteriores podríamos haber sacado la impresión de que todos los problemas de la Mecánica se reducen a resolver el sistema de ecuaciones diferenciales (1-19):

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i^{(e)} + \sum_j \mathbf{F}_{ji}.$$

Simplemente, se sustituyen las distintas fuerzas que se ejercen sobre las partículas del sistema, se da vueltas a la manivela matemática y salen las respuestas como si fuera café

molido. Sin embargo, incluso desde un punto de vista puramente físico, esto es una simplificación excesiva. Por ejemplo, puede ser necesario tener en cuenta las "ligaduras" que limitan el movimiento del sistema. Ya hemos encontrado un tipo de sistema que contiene ligaduras, cual es el cuerpo rígido, en el cual las ligaduras de los movimientos de las partículas mantienen invariables sus distancias mutuas r_{ij} . Es fácil encontrar otros ejemplos de sistemas ligados. Las cuentas de un ábaco están constreñidas a un movimiento unidireccional por las varillas que las atraviesan. Las moléculas de un gas en un recipiente están limitadas por las paredes del recipiente a moverse solamente por el interior de éste. Una partícula situada sobre la superficie de una esfera sólida está sometida a la ligadura de que sólo puede moverse sobre la superficie esférica o por el exterior de ella.

Las ligaduras pueden clasificarse de diversas maneras y nosotros utilizaremos el sistema siguiente. Si las condiciones de ligadura se pueden expresar en forma de ecuaciones que relacionen las coordenadas de las partículas (y posiblemente el tiempo) cuya forma sea

$$f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \dots, t) = 0, \quad (1-37)$$

diremos que las ligaduras son holonomas. Tal vez el ejemplo más simple de ligaduras holonomas lo encontramos en el cuerpo rígido, en el cual las ligaduras se expresan por medio de ecuaciones de la forma

$$(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)^2 - c_{ij}^2 = 0.$$

Otro ejemplo fácil de ligaduras holonomas es el de una partícula obligada a moverse a lo largo de una curva o sobre una superficie dada, en donde las ecuaciones que definan la curva o la superficie serían las ecuaciones de ligadura.

Las ligaduras que no puedan expresarse de esta manera se denominan "no holonomas". Las paredes del recipiente que contiene un gas constituyen una ligadura no holonoma. La ligadura citada en el ejemplo de la partícula situada sobre la superficie de una esfera es también no holonoma, ya que puede expresarse en forma de inecuación

$$r^2 - a^2 \geq 0$$

(donde a es el radio de la esfera), la cual no es de la forma de (1-37). Así, en un campo gravitatorio, una partícula situada en la cumbre de la esfera deslizará hacia abajo sobre la superficie, pero acabará por caer.

Las ligaduras se clasifican además según que las ecuaciones de ligadura contengan el tiempo como variable explícita (reónomas) o no dependan explícitamente del tiempo (esclerónomas). Una cuenta que deslice por un alambre curvo, rígido y fijo en el espacio, está sometida a una ligadura esclerónoma; si el alambre se está moviendo de manera prescrita, la ligadura es reónoma. Notemos que si el alambre se mueve, p. ej., en reacción

al movimiento de la cuenta, la dependencia temporal de la ligadura entra en la ecuación de la ligadura solamente a través de las coordenadas del alambre curvo (que ahora son parte del sistema de coordenadas). La ligadura global será, entonces, esclerónoma.*

Las ligaduras introducen dos tipos de dificultades en la solución de los problemas mecánicos. Primero, las coordenadas r_i ya no son todas independientes puesto que están relacionadas por las ecuaciones de ligadura; luego las ecuaciones del movimiento (1-19) no serán todas independientes. Segundo, las fuerzas de ligadura, p. ej., la fuerza que el alambre ejerce sobre la cuenta (o la pared sobre la partícula gaseosa) no se da a priori. Se cuenta entre las incógnitas del problema y debe obtenerse de la solución que buscamos. En verdad, imponer ligaduras al sistema no es más que otro método de establecer que hay fuerzas presentes en el problema las cuales no se pueden especificar directamente sino que se conocen en función de su efecto sobre el movimiento del sistema.

a) En el caso de ligaduras holonomas, la primera dificultad se resuelve introduciendo coordenadas generalizadas. Hasta ahora hemos estado pensando implícitamente en coordenadas cartesianas. Un sistema de N partículas, exento de ligaduras, tiene $3N$ coordenadas independientes o *grados de libertad*. Si existen ligaduras holonomas, expresadas por k ecuaciones de la forma (1-37), podremos utilizar éstas para eliminar k de las $3N$ coordenadas y nos quedarán $3N - k$ coordenadas independientes y diremos que el sistema posee $3N - k$ grados de libertad. Esta eliminación de las coordenadas dependientes se puede expresar de otra manera, introduciendo $3N - k$ variables independientes nuevas $q_1, q_2, \dots, q_{3N-k}$ en función de las cuales, las antiguas coordenadas $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N$ se expresarán mediante ecuaciones de la forma

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_1(q_1, q_2, \dots, q_{3N-k}, t) \quad (1\ 38)$$

$$\mathbf{r}_N = \mathbf{r}_N(q_1, q_2, \dots, q_{3N-k}, t)$$

que contienen implícitamente las ligaduras. Estas son ecuaciones de *transformación* del sistema de variables (\mathbf{r}_i) al sistema de las (q_i), o bien podemos considerar que las ecuaciones (1-38) son representaciones paramétricas de las variables (\mathbf{r}_i). Se supone siempre que también podemos pasar del sistema (q_i) al sistema (\mathbf{r}_i), es decir, que las ecuaciones (1-38) combinadas con las k ecuaciones de ligadura se pueden invertir para obtener cualquier q_i en función de la variable (\mathbf{r}_i) y el tiempo.

Las coordenadas generalizadas, q_i , a diferencia de las cartesianas, no suelen dividirse

* La terminología de las ligaduras puede ser muy elaborada (cfr. Kilmister y Reeve, *Rational Mechanics*, New York, American Elsevier, 1966). De cierta utilidad es la distinción entre ligaduras *bilaterales*, en las que las ecuaciones de ligadura son igualdades, y *unilaterales*, que contienen desigualdades. Esta nomenclatura deriva del ejemplo de movimiento ligado relativo a una superficie. En la ligadura bilateral del movimiento sobre una superficie, la fuerza de ligadura puede tener uno y otro sentido según la normal a la superficie. Una partícula que se mueva sobre la superficie de la esfera o por su exterior, está sometida a una ligadura unilateral en la cual toda fuerza de ligadura actúa solamente en el sentido de la normal hacia el exterior.

en grupos convenientes de tres que puedan agruparse para formar vectores. Así, en el caso de una partícula obligada a moverse sobre la superficie de una esfera, los dos ángulos que expresan la posición sobre la esfera, p. ej., longitud y latitud, serán coordenadas generalizadas posibles. O bien, en el ejemplo del péndulo doble que se mueven en un punto (dos partículas unidas por una varilla rígida inextensible y suspendidas por otra varilla análoga sujeta a una de las partículas), los dos ángulos θ_1 y θ_2 (cfr. fig. 1-4) constituyen coordenadas generalizadas satisfactorias. Las coordenadas generalizadas, en el sentido de coordenadas distintas de las cartesianas, suelen ser útiles en sistemas sin ligaduras. Así, en el problema de la partícula que se mueve en un campo de fuerzas centrales exterior ($V = V(r)$) no hay ligadura pero es evidentemente más conveniente utilizar coordenadas polares esféricas que coordenadas cartesianas. Sin embargo, no debemos pensar en las coordenadas generalizadas en función de coordenadas de posición ortogonales. Se puede fijar cualquier tipo de magnitudes para servir de coordenadas generalizadas. Así, las amplitudes de un desarrollo en serie de Fourier de r , pueden utilizarse como coordenadas generalizadas, o podemos encontrar conveniente emplear cantidades con las dimensiones de una energía o de un momento cinético.

Si la ligadura es no holonoma, no se podrán utilizar las ecuaciones que expresan la ligadura para eliminar las coordenadas dependientes. Un ejemplo corriente de ligadura no holonoma es el de un cuerpo que rueda sin deslizar sobre una superficie rugosa. Las coordenadas que se utilizan para describir el sistema incluirán, por lo general, coordenadas angulares que especifiquen la orientación del cuerpo, más un conjunto de coordenadas que describan la posición del punto de contacto sobre la superficie. La ligadura de «rodadura» relaciona estos dos sistemas de coordenadas; no son independientes. Un cambio de posición del punto de contacto significa inevitablemente un cambio de su orientación. Aún así, no podemos reducir el número de coordenadas, ya que la condición «rodadura» no puede expresarse en forma de ecuación entre las coordenadas, en la forma (1-37). Es más bien una condición sobre las velocidades (es decir, el punto de contacto está quieto), condición diferencial que puede darse en forma integral sólo después de haber resuelto el problema.

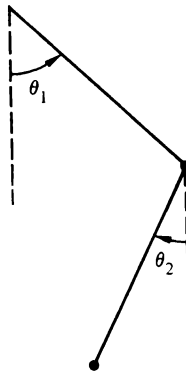


FIGURA 1-4
Péndulo doble.

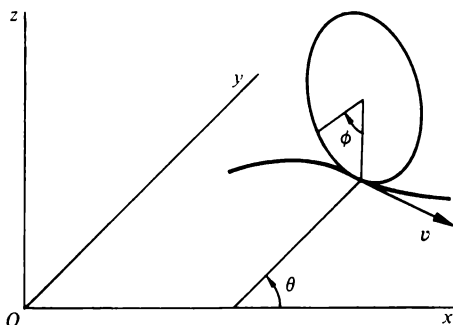


FIGURA 1-5
Disco vertical que rueda sobre un plano horizontal.

Vamos a ilustrar este caso de manera sencilla. Consideremos un disco que rueda sobre el plano horizontal xy obligado a moverse de manera que el plano del disco sea siempre vertical. Las coordenadas utilizadas para describir el movimiento podrían ser las coordenadas x, y del centro del disco, un ángulo de rotación ϕ en torno al eje del disco y el ángulo θ que forma el eje del disco con, p. ej., el eje x (cfr. fig. 1-5). A consecuencia de la ligadura, la velocidad del centro del disco, v , tendrá una magnitud proporcional a ϕ ,

$$v = a\dot{\phi},$$

donde a es el radio del disco y su dirección es perpendicular al eje del mismo:

$$\dot{x} = v \operatorname{sen} \theta,$$

$$\dot{y} = -v \cos \theta.$$

Combinando estas condiciones, tenemos dos ecuaciones *diferenciales* de ligadura:

$$\begin{aligned} dx - a \operatorname{sen} \theta d\phi &= 0, \\ dy + a \cos \theta d\phi &= 0. \end{aligned} \quad (1-39)$$

Ninguna de las ecuaciones (1-39) puede integrarse sin haber resuelto, de hecho, el problema; es decir, no se puede hallar un factor integrante $f(x, y, \theta, \phi)$ que convierta una u otra de las ecuaciones en diferenciales exactas (cfr. Ejercicio 7).* Luego las ligaduras no

* En principio, siempre se puede encontrar un factor integrante para una ecuación diferencial de primer orden de ligadura en sistemas que sólo contengan dos coordenadas (cfr. Kaplan, *Advanced Calculus*, 2.ª ed., p. 531) y dichas ligaduras serán, por tanto, holonomas. Ejemplo conocido lo constituye el movimiento bidimensional de un círculo que rueda por un plano inclinado.

pueden reducirse a la forma de la ecuación (1-37) y por tanto son no holonomas. Podemos ver, físicamente, que no puede haber relación funcional directa entre ϕ y las demás coordenadas x , y y θ observando que en todo punto de su camino se puede hacer rodar el disco alrededor de un círculo tangente al camino y de radio arbitrario. Al final del proceso, x , y y θ habrán vuelto a sus valores iniciales, pero ϕ habrá variado en una cantidad que depende del radio del círculo.

Desde luego, las ligaduras *diferenciales no integrables* de la forma de las ecuaciones (1-39) no constituyen el único punto de ligaduras no holonomas. Las condiciones de ligaduras pueden llevar consigo derivadas de orden superior, o pueden aparecer en forma de inequaciones, según hemos visto.

En parte porque se pueden eliminar las coordenadas dependientes, los problemas que entrañan ligaduras holonomas se pueden llevar siempre a una solución formal. En cambio, no existe una manera general de abordar los problemas no holonomos. En verdad, si la ligadura no es integrable, las ecuaciones diferenciales de ligadura se pueden introducir en el problema junto con las ecuaciones diferenciales del movimiento y eliminar las ecuaciones dependientes por el método de los multiplicadores de Lagrange. Más adelante volveremos a esto. No obstante, los casos más imperfectos de ligaduras no holonomas se deben abordar individualmente y por ello, en el desarrollo de los aspectos más formales de la Mecánica clásica se supone casi invariablemente que toda ligadura, si existe, es holonoma. Esta restricción no limita mucho la aplicabilidad de la teoría, a pesar de que muchas de las ligaduras que se encuentran en la vida cotidiana son no holonomas. La razón estriba en que todo el concepto de ligaduras impuestas al sistema a través del medio de hilos o superficies o paredes sólo resulta particularmente apropiado en problemas macroscópicos o a gran escala. Pero el físico se interesa hoy en día, principalmente en problemas atómicos. A esta escala, todos los cuerpos, tanto dentro como fuera del sistema, consisten en moléculas, átomos o partículas menores que ejercen fuerzas definidas y la noción de ligadura resulta artificiosa y aparece rara vez. Las ligaduras se utilizan entonces tan sólo como idealizaciones matemáticas para el caso físico real o como aproximaciones clásicas a una propiedad mecanocuántica, p. ej., las rotaciones de un cuerpo rígido para el «spin». Dichas ligaduras son siempre holonomas y encajan bien en el marco de la teoría.

Para obviar la segunda dificultad, cual es que no se conocen a priori las fuerzas de ligadura, nos gustaría formular la Mecánica de manera que desaparezcan las fuerzas de ligadura. Entonces sólo tendremos que tratar con fuerzas aplicadas conocidas. Una sugerencia acerca del método a seguir la da el hecho de que en un sistema particular con ligaduras, p. ej., un cuerpo rígido, el trabajo efectuado por las fuerzas interiores (que son aquí las fuerzas de ligadura) es nulo. En los apartados posteriores seguiremos esta idea y generalizaremos las que están contenidas en ella.

1-4 PRINCIPIO DE D'ALEMBERT Y ECUACIONES DE LAGRANGE

Desplazamiento virtual (infinitesimal) de un sistema es el cambio de configuración de éste a consecuencia de una variación infinitesimal arbitraria de las coordenadas δr , compatible con las fuerzas y ligaduras impuestas al sistema en el instante dado t . Se llama virtual al desplazamiento para distinguirlo del desplazamiento real del sistema que

tiene lugar en un intervalo de tiempo dt , durante el cual pueden variar las fuerzas y ligaduras. Supongamos que el sistema está en equilibrio, es decir, que es nula la resultante de las fuerzas que se ejercen sobre cada partícula, $\mathbf{F}_i = 0$. Está claro, entonces, que el producto escalar $\mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i$ que es el trabajo virtual de la fuerza \mathbf{F}_i en el desplazamiento $\delta \mathbf{r}_i$, también será nulo. La suma de estos productos nulos extendida a todas las partículas será igualmente nula:

$$\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0. \quad (1-40)$$

Hasta ahora no hemos dicho nada que tenga un contenido físico nuevo. Descomponemos \mathbf{F}_i en la fuerza aplicada $\mathbf{F}_i^{(a)}$ y la fuerza de ligadura \mathbf{f}_i ,

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^{(a)} + \mathbf{f}_i, \quad (1-41)$$

con lo cual la ecuación (1-40) queda en la forma

$$\sum_i \mathbf{F}_i^{(a)} \cdot \delta \mathbf{r}_i + \sum_i \mathbf{f}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0. \quad (1-42)$$

Limitémonos ahora a sistemas para los cuales el trabajo virtual total de las fuerzas de ligadura sea nulo. Hemos visto que esta condición se cumple en el caso de cuerpos rígidos y es válida para otras muchas ligaduras. Así, si se obliga a una partícula a moverse sobre una superficie, la fuerza de ligadura es perpendicular a dicha superficie, mientras que el desplazamiento virtual debe ser tangente a ella y por tanto, el trabajo virtual es nulo. Esto deja de ser cierto cuando haya fuerzas de rozamiento, por lo que deberemos excluir de nuestra formulación tales sistemas. La restricción no es demasiado enredada, ya que el rozamiento es en esencia un fenómeno macroscópico. Por otra parte, las fuerzas del rozamiento por rodadura no vulneran esta condición, ya que dichas fuerzas están aplicadas a un punto que está en reposo instantáneo y no podrán trabajar en un desplazamiento infinitesimal compatible con la ligadura de rozamiento. Notemos que cuando una partícula esté ligada a una superficie que se mueva con el tiempo, la fuerza de ligadura es perpendicular instantáneamente a la superficie y el trabajo durante un desplazamiento virtual seguirá siendo nulo aun cuando el trabajo durante un desplazamiento real en el tiempo dt no sea necesariamente nulo.

Tenemos, pues, como condición de equilibrio de un sistema que el trabajo virtual de las fuerzas aplicadas sea nulo:

$$\sum_i \mathbf{F}_i^{(a)} \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0. \quad (1-43)$$

A la ecuación (1-43) se la conoce por el nombre de principio de los trabajos virtuales. Notemos que los coeficientes de $\delta \mathbf{r}_i$ ya no se pueden hacer iguales a cero, es decir, en general $\mathbf{F}_i^{(a)} \neq 0$, ya que los $\delta \mathbf{r}_i$ no son totalmente independientes sino que están relacionados por las ligaduras. Para igualar a cero los coeficientes, debemos transformar el principio dándole una forma que comporte los desplazamientos virtuales de las q_i , que son independientes. La ecuación (1-43) satisface nuestras necesidades en cuanto no contiene las \mathbf{f}_i , pero sólo es válida para la Estática: necesitamos una condición que entrañe el movimiento general del sistema.

Para obtener un tal principio utilizaremos un recurso que pensó Jacques Bernoulli y desarrolló D'Alembert. La ecuación del movimiento,

$$\mathbf{F}_i = \dot{\mathbf{p}}_i,$$

puede escribirse en la forma

$$\mathbf{F}_i - \dot{\mathbf{p}}_i = 0,$$

que dice que las partículas del sistema estarán en equilibrio bajo una fuerza igual a la real más una «fuerza efectiva invertida» $-\dot{\mathbf{p}}_i$. En vez de (1-40) podemos escribir inmediatamente

$$\sum_i (\mathbf{F}_i - \dot{\mathbf{p}}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0, \quad (1-44)$$

y haciendo la misma descomposición en fuerzas aplicadas y fuerzas de ligadura, resulta

$$\sum_i (\mathbf{F}_i^{(a)} - \dot{\mathbf{p}}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i + \sum_i \mathbf{f}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0.$$

Limitémonos de nuevo a sistemas para los cuales el trabajo virtual de las fuerzas de ligadura sea nulo y obtendremos

$$\sum_i (\mathbf{F}_i^{(a)} - \dot{\mathbf{p}}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0, \quad (1-45)$$

que constituye el principio de D'Alembert. Hemos logrado nuestro propósito de que no figuren las fuerzas de ligadura y podremos suprimir el supraíndice ^(a) sin ambigüedad. Aún no tiene forma útil para proporcionar las ecuaciones del movimiento del sistema. Debemos ahora transformar el principio en una expresión que contenga desplazamientos virtuales de las coordenadas generalizadas, las cuales son entonces independientes entre

si (para ligaduras holonomas), con lo cual se podrán hacer separadamente iguales a cero los coeficientes de las δq_i .

La traducción del lenguaje de las \mathbf{r}_i al de las q_j parte de las ecuaciones de transformación (1-38),

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t)$$

(suponiendo n coordenadas independientes) y se efectúa mediante las «reglas de cadena» del cálculo de derivadas parciales.* Así, \mathbf{v}_i se expresa en función de las \dot{q}_k mediante la fórmula

$$\mathbf{v}_i \equiv \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \sum_k \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t}. \quad (1-46)$$

Análogamente, el desplazamiento virtual arbitrario $\delta \mathbf{r}_i$ se puede relacionar con los desplazamientos virtuales δq_j mediante

$$\delta \mathbf{r}_i = \sum_j \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j. \quad (1-47)$$

Notemos que aquí no interviene ninguna variación del tiempo δt , ya que un desplazamiento virtual sólo considera, por definición, desplazamientos de las coordenadas. (Sólo entonces es perpendicular el desplazamiento virtual a la fuerza de ligadura si ésta varía con el tiempo).

En función de las coordenadas generalizadas, el trabajo virtual de las \mathbf{F}_i será

$$\begin{aligned} \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i &= \sum_{i,j} \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \\ &= \sum_j Q_j \delta q_j, \end{aligned} \quad (1-48)$$

donde las Q_j son las llamadas componentes de la fuerza generalizada, las cuales se definen en la forma :

$$Q_j = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}. \quad (1-49)$$

* Véase, p. ej., Kaplan, *Advanced Calculus*, 2.ª ed., p. 135.

“Nótese que al igual que las q no tiene por qué tener las dimensiones de una longitud, las Q no tienen necesariamente las dimensiones de una fuerza, si bien $Q_j \delta q_j$ deben siempre tener las dimensiones de un trabajo.

Pasemos ahora al otro término de la ecuación (1-45), que puede escribirse en la forma

$$\sum_i \dot{\mathbf{p}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_i m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i.$$

que expresando $\delta \mathbf{r}_i$ mediante (1-47) queda

$$\sum_{i,j} m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j.$$

Consideremos ahora la relación

$$\sum_i m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \sum_i \left\{ \frac{d}{dt} \left(m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) - m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) \right\}. \quad (1-50)$$

En el último término de la ecuación (1-50) podemos permutar las derivaciones respecto a t y q_j , ya que, en analogía con (1-46)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) &= \sum_k \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_j \partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_j \partial t} = \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_j}, \\ &= \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial q_j}, \end{aligned}$$

en virtud de la ecuación (1-46). Además, en la ecuación (1-46) vemos que

$$\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}. \quad (1-51)$$

La sustitución de estos cambios en (1-50) conduce al resultado de que

$$\sum_i m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \sum_i \left\{ \frac{d}{dt} \left(m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_j} \right\},$$

y el segundo término del primer miembro de la ecuación (1-45) puede desarrollarse dando

$$\sum_j \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) \right) - \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) \right\} \delta q_j.$$

Identificando $\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$ con la energía cinética T del sistema, el principio D'Alembert

$$\sum_j \left[\left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right\} - Q_j \right] \delta q_j = 0. \tag{1-52}$$

Notemos que en un sistema de coordenadas cartesianas la derivada parcial de T respecto a q_j es nula. Así pues, hablando el lenguaje de la Geometría diferencial, este término se debe a la curvatura de las coordenadas q_j . Por ejemplo, en coordenadas polares es en la derivada parcial de T respecto a una coordenada angular donde aparece el término de la aceleración centripeta.

Hasta el momento no hemos impuesto otra restricción a la naturaleza de las ligaduras que la de efectuar un trabajo nulo en todo desplazamiento virtual. Las variables q_j pueden ser un sistema cualquiera de coordenadas para describir el movimiento del sistema. Sin embargo, si las ligaduras son holonomas, será posible encontrar sistemas de coordenadas q_j independientes que contengan implícitamente las condiciones de ligadura en las ecuaciones de transformación (1-38). Todo desplazamiento virtual δq_j será entonces independiente de δq_k y por tanto, la única manera de que se cumpla (1-52) es que se anulen por separado los coeficientes:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j. \tag{1-53}$$

En total hay n ecuaciones.

Las ecuaciones (1-53) suele llamárseles ecuaciones de Lagrange, si bien esta designación se reserva frecuentemente para la forma que toman las ecuaciones (1-53) cuando las fuerzas derivan de un potencial escalar V :

$$\mathbf{F}_i = -\nabla_i V.$$

En este caso, las fuerzas generalizadas pueden escribirse en la forma

$$Q_j = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = - \sum_i \nabla_i V \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j},$$

que tiene exactamente la misma expresión de la derivada parcial de una función $-V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N, t)$ respecto a q_j :

$$Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j}. \quad (1-54)$$

Las ecuaciones (1-53) se pueden escribir también en la forma

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial (T - V)}{\partial q_j} = 0. \quad (1-55)$$

Las ecuaciones del movimiento de la forma (1-55) no están limitadas necesariamente a sistemas conservativos; solamente si V no es función explícita del tiempo, es conservativo el sistema (cfr. p. 6). Sin embargo, tal como definimos aquí V no depende de las velocidades generalizadas. Luego podemos incluir un término en V en la derivada parcial respecto a \dot{q}_j :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial (T - V)}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial (T - V)}{\partial q_j} = 0.$$

O sea, definiendo una nueva función, la *lagrangiana* L , en la forma

$$L = T - V, \quad (1-56)$$

las ecuaciones (1-53) quedan en la forma

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0. \quad (1-57)$$

A menos que especifiquemos otra cosa, cuando hablemos de «ecuaciones de Lagrange» querremos significar las ecuaciones (1-57).

Debe hacerse notar que para un sistema de ecuaciones de movimiento particular no hay una elección única de lagrangiana tal que las ecuaciones (1-53) lleven a las ecuaciones de movimiento en las coordenadas generalizadas dadas. Así, en el Ejercicio 14 se demuestra que si $L(q, \dot{q}, t)$ es una lagrangiana adecuada y $F(q, t)$ es una función derivable *cualquiera* de las coordenadas generalizadas y el tiempo,

$$L'(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \frac{dF}{dt}$$

será también una lagrangiana que dará las mismas ecuaciones del movimiento. También es posible a menudo encontrar otras Lagrangianas además de las construidas por esta prescripción (v. Ejercicio 18). Aun cuando la ecuación (1-56) constituye siempre un camino adecuado para construir una lagrangiana para un sistema conservativo, no proporciona la única lagrangiana adecuada para el sistema dado.

1-5 POTENCIALES DEPENDIENTES DE LA VELOCIDAD Y FUNCIÓN DE DISIPACIÓN

Las ecuaciones de Lagrange se pueden poner en la forma (1-57) aun cuando no exista función potencial, V , en el sentido usual, con tal que las fuerzas generalizadas se obtengan de una función $U(q_j, \dot{q}_j)$ mediante la prescripción

$$Q_j = -\frac{\partial U}{\partial q_j} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} \right). \quad (1-58)$$

En tal caso, las ecuaciones (1-57) siguen deduciéndose de las (1-53) estando dada la lagrangiana por

$$L = T - U. \quad (1-59)$$

U puede llamarse «potencial generalizado» o «potencial dependiente de la velocidad».* La posibilidad de utilizar dicho «potencial» no es académica; se aplica a un tipo de campos de fuerzas muy importante, cual es, las fuerzas electromagnéticas que se ejercen sobre cargas móviles. Considerando su importancia, vale la pena que nos entretengamos en este tema.

En el sistema de unidades de Gauss, las ecuaciones de Maxwell son

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0, & \nabla \cdot \mathbf{D} &= 4\pi\rho, \\ \nabla \times \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} &= \frac{4\pi \mathbf{j}}{c}, & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0. \end{aligned} \quad (1-60)$$

* La historia de la designación dada a este potencial es curiosa. Aparentemente espoleado por la primitiva (y errónea) Electrodinámica clásica de Weber, la cual postulaba fuerzas dependientes de la velocidad, el matemático alemán E. Schering parece haber sido el primero en intentar seriamente incluir dichas fuerzas en el marco de la Mecánica, cfr. Gött, Abh. 18, 3 (1873). La primera edición de *Analytical Dynamics* (1904) de Whittaker le llama «función potencial de Schering», pero el nombre no perduró y se suprimió en ediciones posteriores. Más recientemente, Morgenstern y Szabó (*Vorlesungen über Theoretische Mechanik*, 1961) han utilizado el nombre de «potencial de Schering» para el potencial dependiente de la velocidad concreto que da la fuerza de Coriolis en un sistema de coordenadas giratorio. Nosotros preferimos el nombre «potencial generalizado», incluyendo en esta designación también la energía potencial ordinaria, función solamente de la posición.

La fuerza que se ejerce sobre una carga q no viene dada enteramente por la fuerza eléctrica

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} = -q\nabla\phi,$$

por lo que el sistema no es conservativo en este sentido. En vez de ello, la fuerza completa es

$$\mathbf{F} = q\left\{\mathbf{E} + \frac{1}{c}(\mathbf{v} \times \mathbf{B})\right\}. \quad (1-61)$$

E no es el gradiente de una función escalar, ya que $\nabla \times \mathbf{E} \neq 0$, pero de $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ se deduce que \mathbf{B} puede representarse por el rotacional de un vector,

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad (1-62)$$

donde \mathbf{A} es el llamado potencial vector magnético. Entonces, la ecuación del rotacional de \mathbf{E} queda en la forma

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0.$$

Luego, podemos escribir

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla\phi$$

o sea

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (1-63)$$

En función de los potenciales ϕ y \mathbf{A} , la llamada fuerza de Lorentz (1-61) se convierte en

$$\mathbf{F} = q\left\{-\nabla\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \frac{1}{c}(\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}))\right\}. \quad (1-64)$$

Los términos de la ecuación (1-64) se pueden poner en una forma más conveniente. Por ejemplo, consideremos la componente x

$$(\nabla\phi)_x = \frac{\partial\phi}{\partial x}$$

y

$$\begin{aligned} (\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}))_x &= v_y \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) - v_z \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \\ &= v_y \frac{\partial A_y}{\partial x} + v_z \frac{\partial A_z}{\partial x} + v_x \frac{\partial A_x}{\partial x} - v_y \frac{\partial A_x}{\partial y} - v_z \frac{\partial A_x}{\partial z} - v_x \frac{\partial A_x}{\partial x}, \end{aligned}$$

donde hemos sumado y restado el término

$$v_x \frac{\partial A_x}{\partial x}.$$

Ahora bien, la derivada total de A_x es

$$\frac{dA_x}{dt} = \frac{\partial A_x}{\partial t} + \left(v_x \frac{\partial A_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial A_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial A_x}{\partial z} \right),$$

donde el primer término corresponde a la variación explícita de A_x con el tiempo y el segundo término se debe al movimiento de la partícula con el tiempo, que hace cambiar el punto del espacio en donde se evalúa A_x . La componente x de $\mathbf{v} \times \nabla \times \mathbf{A}$ podrá, pues, escribirse

$$(\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}))_x = \frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) - \frac{dA_x}{dt} + \frac{\partial A_x}{\partial t}.$$

Efectuando estas sustituciones, la (1-64) queda en la forma

$$F_x = q \left\{ -\frac{\partial}{\partial x} \left(\phi - \frac{1}{c} \mathbf{v} \cdot \mathbf{A} \right) - \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial v_x} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) \right) \right\}. \quad (1-64')$$

Como el potencial escalar es independiente de la velocidad, esta expresión equivale a

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial v_x},$$

donde

$$U = q\phi - \frac{q}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}. \quad (1-65)$$

U es un potencial generalizado en el sentido de la ecuación (1-58) y la lagrangiana para una partícula cargada en un campo electromagnético puede escribirse

$$L = T - q\phi + \frac{q}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}. \quad (1-66)$$

Debe notarse que si no derivan de un potencial todas las fuerzas actúan sobre el sistema, la ecuaciones de Lagrange podrán siempre escribirse en la forma

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j,$$

donde L contiene el potencial de las fuerzas conservativas como antes y Q_j representa las fuerzas que *no* derivan de un potencial. Esta situación se presenta a menudo, cuando haya fuerzas de rozamiento. Sucede frecuentemente que la fuerza de rozamiento es proporcional a la velocidad de la partícula, con lo que su componente x tendrá la forma

$$F_{fx} = -k_x v_x.$$

Las fuerzas de rozamiento de este tipo se pueden deducir a partir de una función \mathcal{F} , llamada *función de disipación de Rayleigh*, definida por

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \sum_i (k_x v_{ix}^2 + k_y v_{iy}^2 + k_z v_{iz}^2), \quad (1-67)$$

donde la suma se extiende a todas las partículas del sistema. De esta definición se desprende que

$$F_{fx} = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial v_x},$$

o, simbólicamente,

$$\mathbf{F}_f = -\nabla_v \mathcal{F}. \quad (1-68)$$

También podemos dar una interpretación física de la función de disipación. El trabajo efectuado *por* el sistema *contra* el rozamiento es

$$dW_f = -\mathbf{F}_f \cdot d\mathbf{r} = -\mathbf{F}_f \cdot \mathbf{v} dt = (k_x v_x^2 + k_y v_y^2 + k_z v_z^2) dt.$$

Por tanto, $2\mathcal{F}$ es la disipación de energía por unidad de tiempo a causa del rozamiento. La componente de la fuerza generalizada resultante de la fuerza de rozamiento vendrá, pues, dada por

$$\begin{aligned} Q_j &= \sum_i \mathbf{F}_{if} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = -\sum \nabla_v \mathcal{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \\ &= -\sum \nabla_v \mathcal{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \dot{q}_j}, \quad \text{por (1.51),} \\ &= -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_j}. \end{aligned} \quad (1-69)$$

Las ecuaciones de Lagrange quedan ahora en la forma

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_j} = 0, \quad (1-70)$$

con lo que para obtener las ecuaciones del movimiento deberán especificarse dos funciones escalares, L y \mathcal{F} .

1-6 APLICACIONES SENCILLAS DE LA FORMULACIÓN LAGRANGIANA

En los apartados anteriores hemos visto que en el caso de sistemas en donde podamos definir una lagrangiana, es decir, sistemas holonomos con fuerzas aplicadas que deriven de un potencial ordinario o generalizado y ligaduras que no trabajen, tenemos una manera muy conveniente de establecer las ecuaciones del movimiento. A la formulación lagrangiana nos llevó el deseo de eliminar de las ecuaciones del movimiento las fuerzas de ligadura y al conseguir este fin hemos obtenido otros muchos beneficios. Al establecer la forma original de las ecuaciones del movimiento, ecuaciones (1-19), es necesario trabajar con muchos *vectores* fuerza y aceleración. Con el método de Lagrange sólo hemos de tra-

bajar con dos funciones *escalares*, T y V , lo cual simplifica mucho el problema. Podemos dar ahora un método rutinario inmediato para resolver todos los problemas de Mecánica a los que se pueda aplicar la formulación de Lagrange. Sólo hay que escribir T y V en coordenadas generalizadas, formar L a partir de aquéllas y sustituir en (1-57) para obtener las ecuaciones del movimiento. La necesaria transformación de T y V de coordenadas cartesianas a coordenadas generalizadas se obtiene aplicando las ecuaciones de transformación (1-38) y (1-46). Así, T viene dada en general por

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i \left(\sum_j \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right)^2.$$

Está claro que al desarrollar, la expresión de T en coordenadas generalizadas tendrá la forma

$$T = M_0 + \sum_j M_j \dot{q}_j + \frac{1}{2} \sum_{j,k} M_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k \quad (1-71)$$

donde M_0, M_j, M_{jk} son funciones definidas de las \mathbf{r} y t y por tanto de las q y t . En realidad, comparando se ve que

$$\begin{aligned} M_0 &= \sum_i \frac{1}{2} m_i \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right)^2, \\ M_j &= \sum_i m_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}, \end{aligned} \quad (1-72)$$

y

$$M_{jk} = \sum_i m_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k}.$$

Por tanto, la energía cinética de un sistema puede siempre escribirse en forma de suma de tres funciones homogéneas de las velocidades generalizadas,

$$T = T_0 + T_1 + T_2, \quad (1-73)$$

donde T_0 es independiente de las velocidades generalizadas, T_1 es lineal en las velocidades y T_2 es cuadrática en las velocidades. Si las ecuaciones de transformación no con-

tienen explícitamente el tiempo, cosa que puede ocurrir cuando las ligaduras sean independientes del tiempo (esclerónomas), tan sólo el último término de la ecuación (1-71) no se anulará y T será siempre una forma cuadrática homogénea de las velocidades generalizadas.

Vamos a considerar ejemplos sencillos de este procedimiento:

1. Partícula única en el espacio
 - a. Coordenadas cartesianas
 - b. Coordenadas polares planas
2. Máquina de Atwood
3. Ligadura dependiente del tiempo — cuenta que desliza por un alambre en rotación

1. (a) *Movimiento de una partícula: utilizando coordenadas cartesianas.* Las fuerzas generalizadas necesarias en la ecuación (1-53) son, evidentemente, F_x , F_y y F_z . Luego

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2),$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{z}} = m\dot{z},$$

y las ecuaciones del movimiento son

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) = F_x, \quad \frac{d}{dt}(m\dot{y}) = F_y, \quad \frac{d}{dt}(m\dot{z}) = F_z. \quad (1-74)$$

Hemos vuelto a las ecuaciones del movimiento de Newton.

(b) *Movimiento de una partícula: utilizando coordenadas polares planas.* Aquí debemos expresar T en función de \dot{r} y $\dot{\theta}$. Las ecuaciones de transformación, es decir, las ecuaciones (1-38), serán en este caso

$$x = r \cos \theta,$$

$$y = r \operatorname{sen} \theta,$$

En analogía con (1-46), las velocidades vienen dadas por

$$\dot{x} = \dot{r} \cos \theta - r\dot{\theta} \operatorname{sen} \theta,$$

$$\dot{y} = \dot{r} \operatorname{sen} \theta + r\dot{\theta} \cos \theta.$$

La energía cinética $T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$ se reducirá formalmente a

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2). \tag{1-75}$$

Se obtiene otra deducción de la ecuación (1-75) dándonos cuenta de que las componentes polares planas de la velocidad son \dot{r} a lo largo de \mathbf{r} y $r\dot{\theta}$ según la dirección perpendicular a \mathbf{r} , definida por el vector unitario \mathbf{n} . Por tanto, el cuadrado de la velocidad expresado en coordenadas polares será simplemente $\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2$. Las componentes de la fuerza generalizada se pueden obtener a partir de la definición, ecuación (1-49),

$$Q_r = \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \dot{r}} = \mathbf{F} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} = F_r,$$

$$Q_\theta = \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \dot{\theta}} = \mathbf{F} \cdot r\mathbf{n} = rF_\theta,$$

la que la derivada de \mathbf{r} respecto a θ es, por la definición de derivada, un vector de la dirección de \mathbf{n} (cfr. fig. 1-6). Hay dos coordenadas generalizadas y por tanto dos ecuaciones de Lagrange. Las derivadas que aparecen en la ecuación de r son

$$\frac{\partial T}{\partial r} = mr\dot{\theta}^2, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{r}} \right) = m\ddot{r}.$$

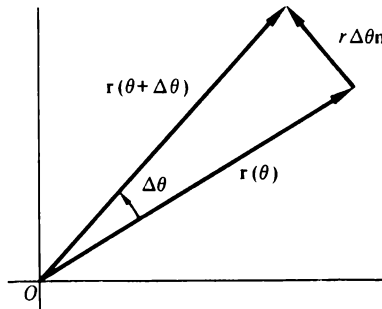


FIGURA 1-6
Derivada de \mathbf{r} respecto a θ .

y la propia ecuación es

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 = F_r,$$

en donde el segundo término es la aceleración centrípeta. Para la ecuación de θ tenemos las derivadas

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}, \quad \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = mr^2\ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta},$$

con lo que la ecuación queda en la forma

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = mr^2\ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta} = rF_\theta.$$

Observemos que el primer miembro es la derivada respecto al tiempo del momento cinético y el segundo es exactamente el momento aplicado, con lo que no hemos hecho más que volver a deducir la ecuación (1-26).

2. *Máquina de Atwood* —ejemplo de sistema conservativo con ligaduras holonomas y esclerónomas (la polea se supone sin rozamiento y sin masa). Claramente, sólo hay una coordenada independiente x , estando determinada la posición del otro peso por la ligadura de que la longitud de la cuerda entre ellos es l . La energía potencial es

$$V = -M_1gx - M_2g(l - x),$$

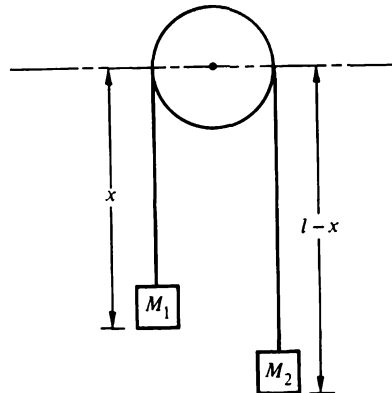


FIGURA 1-7
Máquina de Atwood

mientras que la energía cinética es

$$T = \frac{1}{2}(M_1 + M_2)\dot{x}^2.$$

Combinando ambas, la lagrangiana tiene la forma

$$L = T - V = \frac{1}{2}(M_1 + M_2)\dot{x}^2 + M_1gx + M_2g(l - x).$$

Sólo hay una ecuación del movimiento, que entraña las derivadas

$$\frac{\partial L}{\partial x} = (M_1 - M_2)g,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (M_1 + M_2)\dot{x},$$

con lo que tendremos

$$(M_1 + M_2)\ddot{x} = (M_1 - M_2)g,$$

o sea

$$\ddot{x} = \frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2}g,$$

que es el conocido resultado que se obtiene por medios más elementales. Este problema trivial pone de manifiesto que las fuerzas de ligadura —en este caso la tensión de la cuerda— no aparecen en ninguna parte en la formulación de Lagrange. Por la misma razón no se podrá hallar la tensión de la cuerda por el método de Lagrange.

3. *Cuenta que se desliza por un alambre en rotación uniforme en un espacio exento de fuerzas.* El alambre es recto y gira uniformemente alrededor de un eje fijo perpendicular al alambre. Se ha elegido este ejemplo como ilustración sencilla de ligadura que depende del tiempo, con lo que las ecuaciones de transformación contienen explícitamente el tiempo:

$$x = r \cos \omega t,$$

$$y = r \sin \omega t.$$

ω = velocidad angular de rotación.

Aun cuando podemos encontrar T (aquí lo mismo que L) por el mismo procedimiento utilizado para obtener (1-71), es más sencillo asumir directamente (1-75), expresando la

ligadura mediante la relación $\dot{\theta} = \omega$:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\omega^2).$$

Notemos que T no es función cuadrática homogénea de las velocidades generalizadas porque hay un término adicional que no contiene \dot{r} . La ecuación del movimiento será

$$m\ddot{r} - mr\omega^2 = 0$$

o sea

$$\ddot{r} = r\omega^2,$$

que es el conocido resultado de que la cuenta se mueve hacia afuera a causa de la aceleración centrípeta. De nuevo, el método no puede darnos la fuerza de ligadura que mantiene la cuenta en el alambre.

REFERENCIAS SUGERIDAS*

K. R. SYMON, *Mechanics*. Excelente texto de nivel intermedio más detallado de lo que es usual, que puede utilizarse con provecho como preliminar y a menudo como complemento de nuestro libro. Para la materia de este capítulo, léase con atención la discusión referente a los teoremas de conservación y los sistemas de masa variable (tales como los cohetes) en el Capítulo 4 y la consideración extensiva de las ligaduras en el Capítulo 9.

W. HAUSER, *Introduction to the Principles of Mechanics*. Otro texto de nivel intermedio con muchos puntos de vista recientes y originales. A destacar la discusión de las ecuaciones de Lagrange del movimiento, en la forma de la ecuación (1-53), como ecuaciones de Newton del movimiento en un espacio curvilíneo de coordenadas generalizadas.

C. W. KILMISTER y J. E. REEVE, *Rational Mechanics*. Mecánica a nivel intermedio presentada con gran aparato matemático y destinada a estudiantes de Matemáticas. Particularmente interesante es la extensa discusión acerca de las ligaduras y el intento simplificado de formulación axiomática de los conceptos axiomáticos de la Mecánica.

C. LANZOS, *The Variational Principles of Mechanics*. De contenido mucho más amplio que el que se desprende del título, este libro es en realidad una revisión de toda la Mecánica que hace hincapié en las bases de las distintas formulaciones. Contiene muchas notas históricas de importancia.

* Por conveniencia, las referencias al final de cada capítulo se consignan solamente con un título corto. La descripción bibliográfica completa se encuentra en la bibliografía al final del libro.

W. F. OSGOOD, *Mechanics*. Aun cuando se publicó hace tiempo, este libro sigue valiendo la pena. Los cinco primeros capítulos constituyen una introducción elemental al tema que se saborea deliciosamente gracias a la larga experiencia pedagógica del autor. En este aspecto, la atención del lector debe dirigirse especialmente a la página 102.

E. MACH, *The Science of Mechanics*. Análisis y crítica clásicos de los conceptos fundamentales de la Mecánica clásica. En sus ediciones anteriores, este libro hizo mucho para despejar filosóficamente el camino a la teoría de la Relatividad.

R. B. LINDSAY y H. MARGENAU, *Foundations of Physics*. El Capítulo 3 contiene un tratamiento claro de los fundamentos de la Mecánica clásica. Este libro, junto con el trabajo de Mach, puede ser un excelente punto de partida para una ulterior lectura de la naturaleza de las ideas básicas que lleva consigo la Mecánica.

P. W. BRIDGMAN, «Significance of the Mach Principle», *American Journal of Physics* **29**, 32-36, Enero 1961. Este artículo estudia por qué y hasta qué punto el sistema de referencia de las estrellas «fijas» puede tomarse como definidor operativamente de un sistema inercial.

C. TRUESDELL, *Essays in the History of Mechanics*. El estilo es muy personal y vigoroso, tolerante sin contradicción. Pero estos ensayos están impregnados de un sentido histórico intenso y apoyados por una profunda erudición. Tiene particular interés el capítulo «¿De dónde la ley del momento de la cantidad de movimiento?» que describe el desarrollo histórico de los distintos teoremas de conservación del momento cinético. Gran parte del mismo punto de vista, con mayor detalle matemático y haciendo hincapié en los sistemas continuos, se da en el apartado 196 de la referencia siguiente.

C. TRUESDELL y R. A. TOUPIN, *The Classical Field Theories*, libro de 567 páginas que forma parte del Vol. 3/1, *Encyclopedia of Physics*. Incidentalmente, la Bibliografía P, p. 788 y siguientes, de esta última obra, proporciona un conjunto de referencias (hasta 1957) acerca del tratamiento axiomático formal de la Mecánica.

E. T. WHITTAKER, *Analytical Dynamics*. Tratado conocido que presenta un tratamiento exhaustivo de la Mecánica analítica desde los puntos de vista antiguos. El desarrollo está marcado, lamentablemente, por un desprecio aparente de los diagramas (de los cuales sólo hay cuatro en todo el libro) y de la notación vectorial; y por un cariño hacia el tipo de problemas de Mecánica pedantes que hicieron famoso los exámenes del Cambridge Tripos. Sin embargo, permanece una fuente prácticamente única de discusión de muchos temas especializados. Para este capítulo haremos referencia principalmente al Capítulo II, especialmente el apartado 31, que trata los potenciales dependientes de la velocidad. En los apartados 92-94 del Capítulo VIII se trata la función de disipación.

LORD RAYLEIGH, *The Theory of Sound*. En el Capítulo IV, del Vol. I de este tratado clásico se introduce la función de disipación.

EJERCICIOS

1. Un núcleo, inicialmente en reposo, se desintegra radiactivamente emitiendo un electrón de cantidad de movimiento $1,73 \text{ MeV}/c$ y perpendicularmente a la dirección del electrón, un neutrino de cantidad de movimiento $1,00 \text{ MeV}/c$. (El MeV (millón de electrón-volt) es una unidad de energía, utilizada en Física moderna, igual a $1,60 \times 10^{-12} \text{ erg}$. Correspondientemente, el MeV/c es una unidad de cantidad de movimiento igual a $5,34 \times 10^{-23} \text{ gm-cm/s}$.) ¿En qué dirección retrocede el núcleo? ¿Cuál es su cantidad de movimiento en MeV/c ? Si la masa del núcleo residual es $3,90 \times 10^{-22} \text{ g}$, ¿cuál será su energía cinética en electrón-volt?

2. La *velocidad de escape* de una partícula de la Tierra es la mínima velocidad que debe tener en la superficie terrestre para que la partícula pueda escapar del campo gravitatorio terrestre. Si se desprecia la resistencia de la atmósfera, el sistema es conservativo. A partir del teorema de conservación de la suma de las energías cinética y potencial, demostrar que la velocidad de escape para la Tierra, ignorando la presencia de la Luna, es de $11,2 \text{ km/s}$.

3. Los cohetes son impulsados a causa de la cantidad de movimiento de los gases expulsados por la cola. Como éstos surgen de la reacción de los combustibles que lleva el cohete, la masa de éste no es constante sino que disminuye a medida que se gasta combustible. Demostrar que la ecuación del movimiento para un cohete que se proyecta verticalmente hacia arriba en un campo gravitatorio uniforme, despreciando la resistencia de la atmósfera, es

$$m \frac{dv'}{dt} = -v' \frac{dm}{dt} - mg,$$

donde m es la masa del cohete y v' es la velocidad de los gases expulsados relativa al cohete. Integrar esta ecuación para obtener v' en función de m , suponiendo una pérdida de masa por unidad de tiempo, constante. Demostrar, para un cohete que parte inicialmente del reposo, con v' igual a 2075 m/s y una pérdida de masa por segundo igual a $1/60$ de la masa inicial, que para alcanzar la velocidad de escape el cociente entre el peso del combustible y el del cohete vacío debe valer casi 300.

4. Demostrar que para una partícula de masa constante, la ecuación del movimiento implica la siguiente ecuación diferencial para la energía cinética:

$$\frac{dT}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v},$$

mientras que si la masa varía con el tiempo, la ecuación correspondiente es

$$\frac{d(mT)}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{p}.$$

5. Demostrar que la magnitud R del vector de posición del centro de masa trazado a partir de un origen arbitrario viene dada por la ecuación

$$M^2 R^2 = M \sum_i m_i r_i^2 - \frac{1}{2} \sum_{i,j} m_i m_j r_{ij}^2.$$

6. Supongamos que se sabe que un sistema de dos partículas obedece a las ecuaciones del movimiento (1-22) y (1-26). Demostrar, a partir de las ecuaciones del movimiento de las partículas individuales que las fuerzas internas entre partículas satisfacen las leyes débil y fuerte de acción y reacción. El razonamiento puede generalizarse a un sistema con un número arbitrario de partículas, proporcionando así el inverso de los razonamientos que conducen a las ecuaciones (1-22) y (1-26).

7. Las ecuaciones de ligadura del disco rodante, ecuaciones (1-39), son casos particulares de ecuaciones diferenciales lineales de ligadura de la forma

$$\sum_{i=1}^n g_i(x_1, \dots, x_n) dx_i = 0.$$

Una condición de ligadura de este tipo será holonoma solamente si puede encontrarse una función integrante $f(x_1, \dots, x_n)$ que la convierta en diferencial exacta. Claramente, la función debe ser tal que

$$\frac{\hat{c}(fg_i)}{\hat{c}x_j} = \frac{\hat{c}(fg_j)}{\hat{c}x_i}$$

para toda $i \neq j$. Demostrar que no se puede encontrar un tal factor integrante para una y otra de las ecuaciones (1-39).

8. Dos ruedas de radio a se montan en los extremos de un eje común de longitud b de tal manera que las ruedas giren independientemente. La combinación total rueda sin deslizar sobre un plano. Demostrar que hay dos ecuaciones de ligadura no holonomas,

$$\cos \theta dx + \text{sen } \theta dy = 0,$$

$$\text{sen} \theta dx - \cos \theta dy = a(d\phi + d\phi'),$$

(donde θ , ϕ y ϕ' tienen significados análogos a los del problema del disco único vertical y (x, y) son las coordenadas de un punto del eje equidistante de las dos ruedas) y una ecuación de ligadura holonoma,

$$\theta = C - \frac{a}{b}(\phi - \phi'),$$

donde C es constante.

9. Una partícula se mueve en el plano x - y bajo la acción de una ligadura consistente en que su vector velocidad está siempre dirigido hacia un punto del eje x cuya abscisa es una cierta función dada del tiempo $f(t)$. Demostrar que para $f(t)$ derivable, pero arbitraria por lo demás, la ligadura es no holonoma.

10. Dos puntos de masa m están unidos por una varilla rígida y sin peso de longitud l , el punto medio de la cual está obligado a moverse sobre una circunferencia de radio a . Escribir la energía cinética en coordenadas generalizadas.

11. Demostrar que las ecuaciones de Lagrange de la forma (1-53) se pueden escribir también en la forma siguiente:

$$\frac{\hat{c}\dot{T}}{\hat{c}\dot{q}_j} - 2 \frac{\hat{c}T}{\hat{c}q_j} = Q_j.$$

A esto se le da a veces el nombre de forma de *Nielsen* de las ecuaciones de Lagrange.

12. Un punto material se mueve por el espacio bajo la influencia de una fuerza derivable de un potencial generalizado de la forma

$$U(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = V(r) + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{L},$$

donde \mathbf{r} es el vector de posición trazado desde un punto fijo, \mathbf{L} es el momento cinético respecto a dicho punto y $\boldsymbol{\sigma}$ es un vector fijo en el espacio.

a) Hallar las componentes de la fuerza que se ejerce sobre la partícula en coordenadas cartesianas y en coordenadas polares esféricas, basándose en la ecuación (1-58).

b) Demostrar que las componentes en los dos sistemas de coordenadas están relacionadas entre sí como en la ecuación (1-49).

c) Obtener las ecuaciones del movimiento en coordenadas polares esféricas.

13. Una partícula se mueve en un plano bajo la influencia de una fuerza, dirigida hacia un centro de fuerzas, cuya magnitud es

$$F = \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{\dot{r}^2 - 2\ddot{r}r}{c^2} \right),$$

donde r es la distancia de la partícula al centro de fuerzas. Hallar el potencial generalizado que da lugar a dicha fuerza y a partir de él, la lagrangiana para el movimiento en un plano. (La expresión de F representa la fuerza entre dos cargas en la Electrodinámica de Weber.)

14. Si es L una lagrangiana para un sistema de n grados de libertad que satisfaga las ecuaciones de Lagrange, demostrar por sustitución directa que

$$L' = L + \frac{dF(q_1, \dots, q_n, t)}{dt},$$

también satisface a las ecuaciones de Lagrange, donde F es una función arbitraria, pero derivable, de sus argumentos.

15. Sea q_1, \dots, q_n un sistema de coordenadas generalizadas independientes para un sistema de n grados de libertad, con una lagrangiana $L(q, \dot{q}, t)$. Supongamos que lo transformamos en otro sistema de coordenadas independientes s_1, \dots, s_n por medio de ecuaciones de transformación

$$q_i = q_i(s_1, \dots, s_n, t), \quad i = 1, \dots, n.$$

(A una tal transformación se le da el nombre de *transformación de punto*.) Demostrar que si se expresa la lagrangiana en función de s_j, \dot{s}_j y t mediante las ecuaciones de transformación, L satisfará las ecuaciones de Lagrange respecto a las coordenadas s :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{s}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial s_j} = 0.$$

Dicho de otro modo, la forma de las ecuaciones de Lagrange es invariante bajo una transformación de punto.

16. Una lagrangiana para un sistema físico particular se puede escribir en la forma

$$L' = \frac{m}{2}(a\dot{x}^2 + 2b\dot{x}\dot{y} + c\dot{y}^2) - \frac{K}{2}(ax^2 + 2bxy + cy^2),$$

donde a , b y c son constantes arbitrarias pero sometidas a la condición $b^2 - ac \neq 0$. ¿Cuáles son las ecuaciones del movimiento? Examinar particularmente los dos casos $a = 0 = c$ y $b = 0$, $c = -a$. ¿Cuál es el sistema físico descrito por la anterior lagrangiana? Demostrar que la lagrangiana usual para este sistema definida por la ecuación (1-56) está relacionada con L' por una transformación de punto (cfr. Ejercicio 15). ¿Cuál es el significado de la condición impuesta al valor de $b^2 - ac$?

17. Obtener las ecuaciones de Lagrange para el movimiento de un péndulo esférico, es decir, una masa puntual suspendida de una varilla rígida sin peso.

18. Una partícula de masa m se mueve en una dimensión de tal manera que tiene la lagrangiana.

$$L = \frac{m^2 \dot{x}^4}{12} + m\dot{x}^2 V(x) - V^2(x),$$

donde V es una cierta función derivable de x . Hallar la ecuación del movimiento para $x(t)$ y describir la naturaleza física del sistema basándonos en esta ecuación.

19. Dos puntos materiales de masa m_1 y m_2 están unidos por un hilo que pasa por un agujero practicado en una mesa lisa de manera que m_1 se apoye sobre la superficie de la mesa y m_2 cuelgue suspendido del hilo. Suponiendo que m_2 sólo se mueva a lo largo de una recta vertical, ¿cuáles son las coordenadas generalizadas del sistema? Escribir las ecuaciones de Lagrange del sistema y si es posible, estudiar el significado físico que puede tener cada una de ellas. Reducir el problema a una sola ecuación diferencial de segundo orden y obtener una integral primera de la ecuación. ¿Cuál es su significado físico? (Considerar el movimiento solamente mientras ni m_1 ni m_2 atraviesen el agujero.)

20. Obtener la Lagrangiana y las ecuaciones del movimiento para el péndulo doble representado en la figura 1-4, en donde las longitudes de los péndulos son l_1 y l_2 y las masas correspondientes son m_1 y m_2 .

21. El campo electromagnético es invariante ante una transformación de los potenciales escalar y vector dada por

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \nabla\psi(\mathbf{r}, t),$$

$$\phi \rightarrow \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t},$$

donde ψ es arbitraria (pero derivable). ¿Qué efecto tendrá esta transformación sobre la lagrangiana de una partícula que se mueva en un campo electromagnético? ¿Se ve afectado el movimiento?

22. Obtener la ecuación del movimiento de una partícula que caiga verticalmente bajo la influencia de la gravedad cuando estén presentes fuerzas de rozamiento que se obtengan de una función de disipación $\frac{1}{2}k v^2$. Integrar la ecuación para obtener la velocidad en función del tiempo y demostrar que la velocidad máxima posible para una caída a partir del reposo es $v = mg/k$.

Capítulo 2

Principios variacionales y ecuaciones de Lagrange

2-1 PRINCIPIO DE HAMILTON

La deducción de las ecuaciones de Lagrange que hemos presentado en el capítulo anterior partía de considerar el estado instantáneo del sistema y pequeños desplazamientos virtuales respecto al estado instantáneo, es decir, partía de un «principio diferencial» como el principio de D'Alembert. También pueden obtenerse las ecuaciones de Lagrange a partir de un principio que considere el movimiento entero del sistema entre los tiempos t_1 y t_2 y pequeñas variaciones virtuales del movimiento entero respecto al movimiento real. A un principio de esta naturaleza le llamaremos «principio integral».

Antes de presentar el principio integral, deberemos enunciar con un lenguaje más preciso qué queremos significar con la frase «movimiento del sistema entre los tiempos t_1 y t_2 ». La configuración instantánea del sistema viene descrita por los valores de las n coordenadas generalizadas $q_1 \dots q_n$ y corresponde a un punto particular en un hiperespacio cartesiano en el cual las q forman los n ejes de coordenadas. Este espacio de n dimensiones se conoce, pues, por el nombre de espacio de las configuraciones. Al ir transcurriendo el tiempo, cambia el estado del sistema y el punto representativo del sistema se mueve en el espacio de las configuraciones describiendo una curva llamada «camino del movimiento del sistema». El «movimiento del sistema» se refiere, pues, al movimiento del punto representativo del sistema a lo largo de su camino en el *espacio de las configuraciones*. El tiempo se puede considerar formalmente como parámetro de la curva; a cada punto del camino se asocia uno o más valores del tiempo. Debe hacerse resaltar que el espacio de las configuraciones no tiene necesariamente ninguna relación con el espacio físico tridimensional, al igual que las coordenadas generalizadas no son necesariamente coordenadas de posición. El camino del movimiento en el espacio de las configuraciones no tendrá necesariamente ninguna semejanza con el camino que siga una partícula real cualquiera en el espacio; cada punto del camino del movimiento representa la configuración *entera* del sistema en un cierto instante dado.

El *principio de Hamilton* es un principio integral que describe el movimiento de los sistemas mecánicos para los cuales todas las fuerzas (salvo las de ligadura) pueden derivar de un potencial escalar generalizado que puede ser función de las coordenadas, velocidades y del tiempo. Siguiendo la terminología ideada por C. Lanczos, a dichos sistemas les llamaremos *monógenos*.* Cuando el potencial es función explícita de las coordenadas de posición solamente, el sistema monógeno será también conservativo (cfr. § 1-2). Para los sistemas monógenos, el principio de Hamilton se enuncia diciendo que *el movimiento del sistema entre el tiempo t_1 y el tiempo t_2 es tal que la integral curvilínea*

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L dt, \quad (2-1)$$

*donde $L = T - V$, tiene un valor estacionario para el camino del movimiento correcto.**

Es decir, de entre todos los caminos posibles por los cuales el punto representativo del sistema podría ir de su posición en el instante t_1 a su posición en el instante t_2 , recorrerá en la realidad el camino para el cual el valor de la integral (2-1) sea estacionario. Por «valor estacionario» de una integral curvilínea queremos significar que, a lo largo del camino dado, la integral tiene el mismo valor, salvo infinitésimos de primer orden, que a lo largo de todos los caminos vecinos (es decir, los que difieren de él en desplazamientos infinitesimales). (Cfr. fig. 2-1.) La noción de valor estacionario de una integral curvilínea corresponde, pues, en teoría de funciones ordinaria, a la anulación de la primera derivada.

Podemos resumir el principio de Hamilton diciendo que el movimiento es tal que la *variación* de la integral curvilínea I para t_1 y t_2 fijos, es nula:

$$\delta I = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t) dt = 0. \quad (2-2)$$

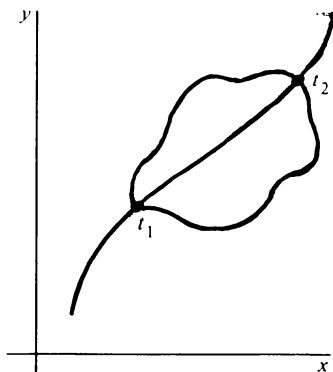


FIGURA 2-1

Camino del punto representativo del sistema en el espacio de las configuraciones.

* C. Lanczos, *The Variational Principles of Mechanics*, 4.^a ed. (Toronto: U. of Toronto Press, 1970), p. 30. El término significa que todas las fuerzas se generan a partir de una sola función.

Cuando el sistema de ligaduras sea holonomo, el principio de Hamilton, ecuación (2-2), será condición necesaria y suficiente para las ecuaciones de Lagrange, ecuaciones (1-57). Por tanto, puede demostrarse que el principio de Hamilton se deduce directamente de las ecuaciones de Lagrange (crf. Whittaker, *Analytical Dynamics*, 4.ª ed., p. 245). En vez de eso, vamos a demostrar el recíproco, o sea, que las ecuaciones de Lagrange se deducen del principio de Hamilton. Consideraremos que este teorema es el más importante. Que el principio de Hamilton sea condición suficiente para deducir las ecuaciones del movimiento, nos permite construir la Mecánica de sistemas monógenos tomando como base el principio de Hamilton en vez de las leyes de Newton del movimiento. Esta formulación presenta ventajas; por ejemplo, como la integral I es evidentemente invariante al sistema de coordenadas generalizadas utilizadas para expresar L , las ecuaciones del movimiento deben tener siempre la forma de Lagrange independientemente de cómo se transformen las coordenadas generalizadas. Más importante, la formulación en función de un principio variacional es el camino a seguir cuando intentemos describir sistemas aparentemente no mecánicos con las formas matemáticas de la Mecánica clásica, como sucede en la teoría de campos.

2-2 ALGUNAS TÉCNICAS DEL CÁLCULO DE VARIACIONES

Antes de demostrar que las ecuaciones de Lagrange se deducen de (2-2), debemos hacer una digresión acerca de los métodos del cálculo de variaciones, ya que uno de los principales problemas de este cálculo es hallar la curva para la cual una integral curvilínea dada tenga un valor estacionario.

Consideremos primeramente el problema en forma esencialmente unidimensional: tenemos una función $f(y, \dot{y}, x)$ definida sobre un camino $y = y(x)$ entre dos valores x_1 y x_2 , donde \dot{y} es la derivada de y respecto a x . Queremos encontrar un camino particular $y(x)$ tal que la integral curvilínea J de la función f entre x_1 y x_2 ,

$$\dot{y} \equiv \frac{dy}{dx},$$

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f(y, \dot{y}, x) dx, \quad (2-3)$$

tenga un valor estacionario relativo a los caminos que difiera infinitesimalmente de la función correcta $y(x)$. La variable x desempeña aquí el papel de parámetro t y sólo consideramos caminos variados para los cuales $y(x_1) = y_1, y(x_2) = y_2$. (Cfr. fig. 2-2). Nótese que el diagrama *no* representa el espacio de las configuraciones. En el espacio de la configuración unidimensional tanto el camino correcto como los variados son el segmento rectilíneo que une y_1 con y_2 ; los caminos sólo difieren en la relación funcional entre y y x).

* A la cantidad I se le da el nombre de *acción* o de *integral de acción*.

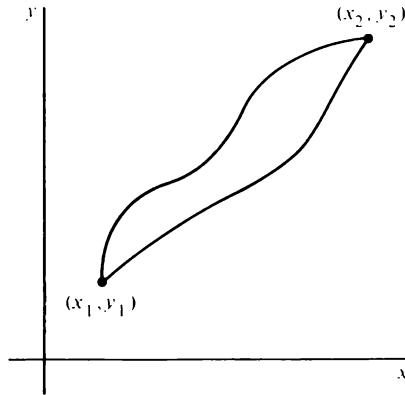


FIGURA 2-2

Caminos variados en el problema de extremo unidimensional.

Planteemos el problema en una forma que nos permita utilizar los métodos conocidos del cálculo diferencial para hallar los puntos estacionarios de una función. Como J debe tener un valor estacionario para el camino correcto relativo a *todo* camino próximo, la variación debe ser cero relativa a *algún* conjunto particular de caminos vecinos señalados por un parámetro infinitesimal α . Tal conjunto de caminos podríamos representarlo por $y(x, \alpha)$, representando $y(x, 0)$ al camino correcto. Por ejemplo, si seleccionamos una función cualquiera $\eta(x)$ que se anule en $x = x_1$ y $x = x_2$, un conjunto posible de caminos variados sería

$$y(x, \alpha) = y(x, 0) + \alpha \eta(x). \quad (2-4)$$

Por razón de sencillez, supongamos que tanto el camino correcto $y(x)$ como la función auxiliar $\eta(x)$ sean funciones continuas y sin singularidades entre x_1 y x_2 , con primera y segunda derivada continuas en el mismo intervalo. Para cualquiera de tales familias de curvas paramétricas, la J de la ecuación (2-3) será también función de α :

$$J(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} f(y(x, \alpha), \dot{y}(x, \alpha), x) dx, \quad (2-5)$$

y la condición de obtención de un punto estacionario es la conocida de que

$$\left(\frac{dJ}{d\alpha} \right)_{\alpha=0} = 0. \quad (2-6)$$

Por los métodos usuales de derivación bajo el signo integral encontramos que

$$\frac{dJ}{d\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \frac{\partial \dot{y}}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \frac{\partial \dot{y}}{\partial \alpha} \right\} dx. \quad (2-7)$$

Consideremos la segunda de estas integrales:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \frac{\partial \dot{y}}{\partial \alpha} dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial \alpha} dx.$$

Integrando por partes, la integral queda en la forma

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial \alpha} dx = \left. \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \frac{\partial y}{\partial \alpha} \right|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) \frac{\partial y}{\partial \alpha} dx. \quad (2-8)$$

Las condiciones impuestas a todas las curvas variadas son que pasen por los puntos (x_1, y_1) , (x_2, y_2) y por tanto, en x_1 y x_2 se anulará la derivada parcial de y respecto a α . Por tanto, el primer término de (2-8) se anula y la ecuación (2-7) se reduce a

$$\frac{dJ}{d\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) \frac{\partial y}{\partial \alpha} dx.$$

La condición de valor estacionario (ec. 2-6) es, pues, equivalente a la ecuación

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha} \right) dx = 0. \quad (2-9)$$

Ahora bien, la derivada parcial de y respecto a α que aparece en la ecuación (2-9) es una función de x que es arbitraria salvo en lo que respecta a la continuidad y condiciones en los puntos extremos. Por ejemplo, para la familia paramétrica particular de caminos variados dada por la ecuación (2-4), es la función arbitraria $\eta(x)$. Podemos, pues, aplicar a la ecuación (2-9) el llamado «lema fundamental» del cálculo de variaciones que dice que si

$$\int_{x_1}^{x_2} M(x)\eta(x) dx = 0 \quad (2-10)$$

para todas las funciones arbitrarias $\eta(x)$ continuas hasta la segunda derivada, $M(x)$ deberá ser idénticamente nula en el intervalo (x_1, x_2) . Aun cuando la demostración matemática formal del lema se puede encontrar en los textos de cálculo de variaciones citados en las referencias, la validez del lema es fácil de ver intuitivamente. Podemos imaginar que construimos una función η que sea positiva en la inmediata proximidad de un punto cualquiera elegido en el intervalo y nula en el resto. La ecuación (2-10) puede entonces ser válida solamente si $M(x)$ se anula en dicho punto elegido (arbitrariamente), lo que demuestra que M debe ser nula en todo el intervalo. De la ecuación (2-9) y del lema fundamental se deduce, por tanto, que J sólo puede tener un valor estacionario si

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) = 0. \quad (2-11)$$

La cantidad diferencial

$$\left(\frac{\partial J}{\partial x} \right)_0 dx \equiv \delta J \quad (2-12)$$

representa el apartamiento infinitesimal del camino variado respecto al camino correcto $y(x)$ en el punto x y por tanto corresponde al desplazamiento virtual introducido en el Capítulo 1 (de aquí la notación δy). Análogamente, la variación infinitesimal de J respecto al camino correcto puede designarse

$$\left(\frac{dJ}{dx} \right)_0 dx \equiv \delta J. \quad (2-13)$$

La aseveración de que J es estacionaria para el camino correcto podrá, pues, escribirse en la forma

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right\} \delta y dx = 0,$$

exigiendo que $y(x)$ satisfaga a la ecuación diferencial (2-11). La notación δ introducida en las ecuaciones (2-12) y (2-13) puede utilizarse como abreviatura conveniente para tratar la variación de integrales, recordando siempre que representa la manipulación de familias paramétricas de caminos variados tales como la ecuación (2-4).

Vamos a considerar algunos ejemplos sencillos de la aplicación de la ecuación (2-11) (que se asemeja claramente a una ecuación de Lagrange):

1. *Distancia más corta entre dos puntos de un plano.* En un plano, el elemento de

longitud de un arco es

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

y la longitud total de toda curva que vaya del punto 1 al punto 2 es

$$I = \int_1^2 ds = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx.$$

La condición de que la curva constituya el camino más corto es que I sea mínima. Es esto un ejemplo de problema de extremo expresado por la ecuación (2-3), siendo

$$f = \sqrt{1 + \dot{y}^2}.$$

Sustituyendo en (2-11) siendo

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} = \frac{\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}},$$

tenemos

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}} \right) = 0$$

o sea

$$\frac{\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}} = c,$$

donde c es constante. Esta solución sólo puede ser válida si

$$\dot{y} = a$$

donde a es una constante relacionada con c por

$$a = \frac{c}{\sqrt{1 - c^2}}$$

Pero esto es, evidentemente, la ecuación de una recta,

$$y = ax + b,$$

donde b es otra constante de integración. Estrictamente, sólo hemos demostrado que la recta constituye un camino extremo, si bien en este problema es evidente que es también un mínimo. Las constantes de integración a y b se determinan mediante la condición de que la curva pase por los dos puntos terminales $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$.

De manera análoga podríamos obtener la distancia más corta entre dos puntos sobre una superficie esférica, escribiendo la longitud del arco sobre la superficie esférica, en función de las coordenadas angulares de posición sobre dicha superficie. En general, a las curvas que dan la distancia más corta entre dos puntos sobre una superficie dada se les da el nombre de *geodésicas* de dicha superficie.

2. *Superficie de revolución mínima.* Supongamos que formamos una superficie de revolución tomando una curva que pase por dos puntos fijos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) y haciéndola girar alrededor del eje y (cfr. fig. 2-3). El problema estriba en hallar la curva para la cual es mínima el área de la superficie engendrada. El área de una franja de la superficie es $2\pi x ds = 2\pi x \sqrt{1 + \dot{y}^2} dx$ y el área total es

$$2\pi \int_1^2 x \sqrt{1 + \dot{y}^2} dx.$$

El extremo de esta integral viene dado de nuevo por (2-11) donde

$$f = x \sqrt{1 + \dot{y}^2}$$

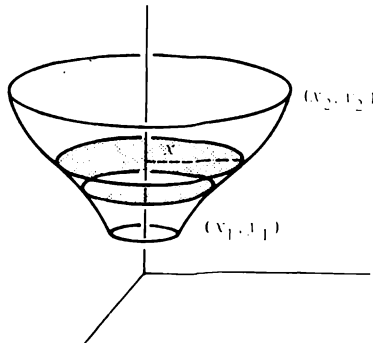


FIGURA 2-3
Superficie de revolución de área mínima.

y

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} = \frac{x\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}}$$

En este caso, la ecuación (2-11) queda en la forma

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{x\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}} \right) = 0$$

o sea

$$\frac{x\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}} = a,$$

donde a es una constante de integración evidentemente menor que el valor mínimo de x . Elevando al cuadrado ambos miembros y reduciendo términos semejantes, tenemos

$$\dot{y}^2(x^2 - a^2) = a^2$$

o despejando,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$

La integral general de esta ecuación diferencial, a la luz de la naturaleza de a , es

$$y = a \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} + b = a \operatorname{arccosh} \frac{x}{a} + b$$

o sea

$$x = a \cosh \frac{y - b}{a},$$

que es la ecuación de la catenaria. De nuevo, las constantes de integración a y b se determinan, en principio, por los requisitos de que la curva pase por los dos puntos terminales dados. Sin embargo, debemos advertir que cuando se examina en detalle la naturaleza de la solución resulta ser mucho más complicado de lo que sugieren estas consideraciones. Para ciertos pares de puntos terminales se podrán encontrar constantes de integración unívocas a y b . Pero para otros pares de puntos terminales, resultan *dos* catenarias solución, mientras que en otras regiones no pueden hallarse valores posibles de a y b . Además, debe recordarse que la ecuación (2-11) representa una condición para hallar curvas $y(x)$, continuas hasta las segundas derivadas, que hagan estacionaria a la integral. Las soluciones catenaria no representan siempre valores mínimos, sino que pueden dar «puntos de inflexión». Para ciertas combinaciones de puntos terminales, el mínimo absoluto de la superficie de revolución lo proporciona una curva compuesta de segmentos rectilíneos —desde el primer punto terminal paralelo al eje x hasta alcanzar el eje y , luego a lo largo del eje y hasta el punto $(0, y_2)$ y después en línea recta hasta el segundo punto terminal. Tal curva tiene primeras derivadas discontinuas y no podemos esperar encontrarla como solución de la ecuación (2-11). Este ejemplo es bueno para poner de relieve las restricciones que rodean a la derivación y el significado de la condición estacionaria. Encontraremos más detalles en algunos ejercicios y en los textos citados de cálculo de variaciones.

3. *El problema de la braquistócrona.* Este conocido problema consiste en hallar la curva que une dos puntos, a lo largo de la cual una partícula que parte del reposo bajo la influencia de la gravedad pasa del punto más alto al más bajo en un tiempo mínimo.

Si es v la celeridad a lo largo de la curva, el tiempo que se tarda en caer un arco de longitud ds será ds/v y el problema se reduce a hallar un mínimo de la integral

$$t_{12} = \int_1^2 \frac{ds}{v}.$$

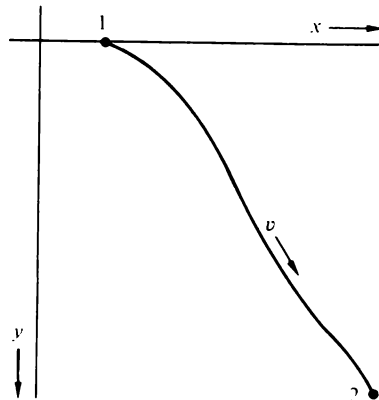


FIGURA 2-4
Braquistócrona.

Si se mide y hacia abajo desde el punto de partida del reposo, el teorema de conservación de la energía de la partícula se puede escribir en la forma

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgy$$

o sea

$$v = \sqrt{2gy}.$$

Entonces, la expresión de t_{12} será

$$t_{12} = \int_1^2 \frac{\sqrt{1 + \dot{y}^2}}{\sqrt{2gy}} dx,$$

y f se identifica por

$$f = \sqrt{\frac{1 + \dot{y}^2}{2gy}}.$$

La integración de la ecuación (2-11) con esta forma de f es inmediata y se deja como ejercicio al final del capítulo. El problema de la braquistócrona es famoso en la historia de la Matemática, ya que fue el análisis de este problema el que llevó a Juan Bernoulli al fundamento formal de cálculo de variaciones.

2-3 DEDUCCIÓN DE LAS ECUACIONES DE LAGRANGE A PARTIR DEL PRINCIPIO DE HAMILTON

El problema fundamental del cálculo de variaciones se generaliza fácilmente al caso en que f sea función de varias variables independientes y_i y de sus derivadas \dot{y}_i . (Desde luego, todas esas cantidades se consideran funciones de la variable paramétrica x). Entonces, se obtiene una variación de la integral J ,

$$\delta J = \delta \int_1^2 f(y_1(x); y_2(x), \dots, \dot{y}_1(x); \dot{y}_2(x), \dots, x) dx, \quad (2-14)$$

como antes, considerando J función de un parámetro α que rotula un posible conjunto de

curvas $y_i(x, \alpha)$. Así, podemos introducir α haciendo

$$y_1(x, \alpha) = y_1(x, 0) + \alpha \eta_1(x),$$

$$y_2(x, \alpha) = y_2(x, 0) + \alpha \eta_2(x),$$

(2-15)

donde $y_1(x, 0)$, $y_2(x, 0)$, etc. son las soluciones del problema de extremo (a obtener) y η_1 , η_2 , etc., son funciones de x independientes que se anulan en los puntos terminales y que son continuas hasta la segunda derivada, pero que por lo demás son completamente arbitrarias. El cálculo tiene lugar como antes. La variación de J se da en función de

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} d\alpha = \int_1^2 \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial \alpha} d\alpha \right) dx. \quad (2-16)$$

De nuevo, integramos por partes la integral del segundo sumatorio de la ecuación (2-16):

$$\int_1^2 \frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} \frac{\partial^2 y_i}{\partial \alpha \partial x} dx = \left. \frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} \frac{\partial y_i}{\partial \alpha} \right|_1^2 - \int_1^2 \frac{\partial y_i}{\partial \alpha} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} \right) dx,$$

donde el primer término se anula porque todas las curvas pasan por los puntos terminales fijos. Sustituyendo en (2-16), δJ queda

$$\delta J = \int_1^2 \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} \right) \delta y_i dx, \quad (2-17)$$

donde, en analogía con (2-12), la variación δy_i es

$$\delta y_i = \left(\frac{\partial y_i}{\partial \alpha} \right)_0 d\alpha.$$

Como las variables y son independientes, las variaciones δy_i también lo serán (p. ej., las funciones $\eta_i(x)$ serán independientes entre sí). Luego, por una ampliación evidente del lema fundamental (cfr. ec. 2-10), la condición de que δJ sea cero exige que se anulen por

separado los coeficientes de las δy_i :

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2-18)$$

Las ecuaciones (2-18) representan la generalización de (2-11) apropiada para varias variables y se conocen por el nombre de *ecuaciones diferenciales de Euler-Lagrange*. Sus soluciones representan curvas para las cuales la variación de una integral de la forma dada en (2-14) se anula. Otras generalizaciones del problema variacional fundamental son fácilmente posibles. Así, podemos tomar f como una función de derivadas de orden superior, \ddot{y} , \ddot{y}' , etc., que conducen a ecuaciones diferentes de la (2-18). O se puede ampliar a casos en los que haya varios parámetros x_j y la integral sea múltiple, conteniendo también tantas derivadas variables de y_i respecto a cada uno de los parámetros x_j . Finalmente, se pueden considerar variaciones en las cuales los puntos terminales *no* se mantengan fijos.

Para los fines presentes, es suficiente lo que hemos deducido aquí, ya que la integral del principio de Hamilton,

$$I = \int_1^2 L(q_i, \dot{q}_i, t) dt \quad (2-19)$$

tiene exactamente la forma estipulada en (2-14) con las transformaciones

$$\begin{aligned} x &\rightarrow t \\ y_i &\rightarrow q_i \\ f(y_i, \dot{y}_i, x) &\rightarrow L(q_i, \dot{q}_i, t). \end{aligned}$$

Al deducir las ecuaciones (2-18) se supuso que las variables y_i eran independientes. La condición correspondiente en relación con el principio de Hamilton es que sean independientes las coordenadas generalizadas q_i , lo que exige que las ligaduras sean holonomas. Las ecuaciones de Euler-Lagrange correspondientes a la integral I se convierten entonces en las ecuaciones de Lagrange del movimiento,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

y hemos conseguido nuestro propósito inicial, que era demostrar que las ecuaciones de Lagrange se deducen del principio de Hamilton —para sistemas monógenos con ligaduras holonomas.

2-4 EXTENSIÓN DEL PRINCIPIO DE HAMILTON A SISTEMAS NO HOLONOMOS

El principio de Hamilton puede extenderse, al menos de manera formal, para cubrir ciertos tipos de sistemas no holonomos. Al deducir las ecuaciones de Lagrange a partir del principio de Hamilton o del de D'Alembert, el requisito de ligaduras holonomas no aparece hasta el último paso, cuando se consideran independientes entre si las variaciones de q_i . En el caso de sistemas no holonomos, las coordenadas generalizadas no son independientes entre si y no es posible reducir las más por medio de ecuaciones de ligadura de la forma $f(q_1, q_2, \dots, q_n, t) = 0$. Por tanto, ya no es cierto que las q_i sean todas independientes.

Otra diferencia que hay que considerar al tratar el principio variacional es la manera en que se construyen los caminos variados. En el estudio de § 2-2 se indicó que δy (o δq) representa un desplazamiento virtual desde un punto del camino real hasta un cierto punto del camino variado cercano. Pero, con coordenadas independientes es el camino variado final el que importa y no cómo se construye. Cuando las coordenadas no son independientes, sino que están sometidas a relaciones de ligadura, resulta importante si el camino variado está construido o no por desplazamientos compatibles con las ligaduras. En particular, los desplazamientos virtuales pueden satisfacer o no, las ligaduras.

Parece, pues, que es posible un tratamiento razonablemente inmediato de los sistemas no holonomos tan sólo cuando las ecuaciones de ligadura puedan ponerse en la forma

$$\sum_k a_{lk} dq_k + a_{li} dt = 0, \quad (2-20)$$

es decir, una relación lineal entre las *diferenciales* de las q . El índice l indica que puede haber más de una de esas ecuaciones; supondremos que hay m ecuaciones en total, es decir, $l = 1, 2, \dots, m$. Observemos que los coeficientes a_{lk}, a_{li} pueden ser funciones de las q y del tiempo.

Podríamos esperar que los caminos variados, o lo que es equivalente, los desplazamientos que construyen el camino variado, satisfagan las ligaduras de la ecuación (2-20). No obstante, se ha demostrado que no se puede construir tal camino variado* a menos que sean integrables las ecuaciones (2-20), en cuyo caso las ligaduras son verdaderamente holonomas. De todas maneras, se puede obtener un principio variacional que lleva a las ecuaciones del movimiento correctas cuando se construyan los caminos variados a partir del movimiento real mediante desplazamientos virtuales. Las ecuaciones de ligadura válidas para los desplazamientos virtuales son, entonces,

$$\sum_k a_{lk} \delta q_k = 0, \quad (2-21)$$

y el camino variado no satisfará, en general, a las ecuaciones (2-20).

* Véase, p. ej., H. Rund, *The Hamilton-Jacobi Theory in the Calculus of Variations* (New York: Van Nostrand, 1966), Capítulo 5.

Podemos ahora utilizar las ecuaciones (2-21) para reducir los desplazamientos virtuales a los independientes. El método para eliminar estos desplazamientos virtuales sobrantes es el de los *multiplicadores indeterminados de Lagrange*. Si son válidas las ecuaciones (2-21), también será cierto que

$$\lambda_l \sum_k a_{lk} \delta q_k = 0, \quad (2-22)$$

donde los λ_l , $l = 1, 2, \dots, m$ son cantidades indeterminadas, funciones en general de las coordenadas y del tiempo t . Además, el principio de Hamilton,

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0, \quad (2-2)$$

se supone válido para el sistema no holonomo. Siguiendo el desarrollo de § 2-3, el principio de Hamilton implica entonces que

$$\int_1^2 dt \sum_k \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \delta q_k = 0. \quad (2-23)$$

Podemos combinar la ecuación (2-23) con las m ecuaciones de ligadura sobre los desplazamientos virtuales δq_k sumando las ecuaciones (2-22) para los valores de l e integrando el resultado respecto al tiempo entre el punto 1 y el punto 2:

$$\int_1^2 \sum_{k,l} \lambda_l a_{lk} \delta q_k dt = 0. \quad (2-24)$$

La suma de las ecuaciones (2-23) y (2-24) es entonces la relación

$$\int_1^2 dt \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} + \sum_l \lambda_l a_{lk} \right) \delta q_k = 0. \quad (2-25)$$

Las δq_k siguen sin ser independientes, desde luego; están ligadas por las m relaciones (2-21). Es decir, mientras se pueden elegir independientemente las $n - m$ primeras de ellas, las m últimas estarán fijas por las ecuaciones (2-21). No obstante, quedan a nuestra disposición los valores de los λ_l . Supongamos que los elegimos de manera que

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} + \sum_l \lambda_l a_{lk} = 0, \quad k = n - m + 1, \dots, n. \quad (2-26)$$

que corresponden a las ecuaciones de movimiento de las m últimas variables q_k . Determinados por (2-26) los λ_i , podemos escribir (2-25) en la forma

$$\int_1^2 dt \sum_{k=1}^{n-m} \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} + \sum_l \lambda_l a_{lk} \right) \delta q_k = 0. \quad (2-27)$$

Aquí, las únicas δq_k que intervienen son las independientes. Luego se deduce que

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} + \sum_l \lambda_l a_{lk} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n-m. \quad (2-28)$$

Combinando (2-26) y (2-28) tenemos finalmente el sistema completo de ecuaciones de Lagrange para sistemas no holonomos:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = \sum_l \lambda_l a_{lk}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (2-29)$$

Pero esto no es todo, ya que ahora tenemos $n + m$ incógnitas, cual son las n coordenadas q_k y los m multiplicadores de Lagrange λ_i , mientras que (2-29) nos da un total de sólo n ecuaciones. Desde luego, las ecuaciones adicionales necesarias son exactamente las ecuaciones de ligadura que enlazan las q_k (ec. 2-20) con la diferencia que ahora hay que considerarlas ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\sum_k a_{lk} \dot{q}_k + a_{li} = 0. \quad (2-30)$$

Las ecuaciones (2-30) y (2-29) juntas constituyen $n + m$ ecuaciones con $n + m$ incógnitas.

En este proceso hemos obtenido más información de la que buscábamos inicialmente. No sólo obtenemos las q_k que queríamos encontrar, sino que también obtenemos m multiplicadores λ_i . ¿Cuál es el significado físico de los λ_i ? Supongamos que quitáramos las ligaduras del sistema y aplicáramos en su lugar fuerzas exteriores Q'_k de manera que mantuvieran invariado el movimiento del sistema. Las ecuaciones del movimiento permanecerían las mismas. Evidentemente, estas fuerzas aplicadas extraordinarias deben ser iguales a las fuerzas de ligadura, ya que son las fuerzas aplicadas al sistema para que se satisfagan las condiciones de ligadura. Bajo la influencia de estas fuerzas Q'_k , las

ecuaciones del movimiento son

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = Q'_k. \quad (2-31)$$

Pero éstas deben ser idénticas a las ecuaciones (2-29). Por tanto, podemos identificar $\Sigma \lambda_r a_{rk}$ con las Q'_k , fuerzas generalizadas de ligadura. En este tipo de problema no eliminamos en realidad las fuerzas de ligadura de la formulación y se dan como parte de la respuesta.

Aun cuando no sea evidente, la versión del principio de Hamilton que hemos adoptado para sistemas no holonomos exige también que las ligaduras no trabajen en los desplazamientos virtuales. Esto puede verse muy bien escribiendo el principio de Hamilton en la forma

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} T dt - \delta \int_{t_1}^{t_2} U dt = 0.$$

Si la variación de la integral sobre el potencial generalizado se lleva a cabo por los procedimientos de § 2-3, el principio adopta la forma

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} T dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_k \left(\frac{\partial U}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_k} \right) \right) \delta q_k dt;$$

o, en virtud de la ecuación (1-58),

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} T dt = - \int_{t_1}^{t_2} \sum_k Q_k \delta q_k dt. \quad (2-32)$$

Así vestido, el principio de Hamilton dice que la diferencia de la integral temporal de la energía cinética entre dos caminos vecinos es igual a la integral temporal del trabajo efectuado en los desplazamientos virtuales entre los caminos, cambiada de signo. El trabajo que interviene es el efectuado sólo por las fuerzas que derivan del potencial generalizado. Si queremos que el mismo principio de Hamilton sea válido tanto para sistemas holonomos como no holonomos, debe exigirse que las fuerzas adicionales de ligaduras no holonomas no trabajen en los desplazamientos δq_k . Esta restricción es paralela a la condición anterior de que el trabajo virtual de las fuerzas de ligadura holonoma sea también nulo (cfr. § 1-4). En la práctica, la restricción no reduce mucho las aplicaciones, ya que la mayoría de problemas en los que se usa el formalismo no

holonomo están relacionados con la rodadura sin deslizamiento, en cuyo caso es evidente que las ligaduras no trabajan.

En verdad, si se hace desde un principio la hipótesis de que no trabajan las ligaduras, los razonamientos físicos que conducen a las ecuaciones (2-31) se pueden ampliar directamente para deducir la forma completa de las ecuaciones de Lagrange no holonomas, ecuaciones (2-29). La condición de que sea cero el trabajo virtual de las fuerzas de ligadura puede escribirse en la forma

$$\sum_k Q'_k \delta q_k = 0. \quad (2-33)$$

Al mismo tiempo, las ecuaciones de ligadura implican que

$$\sum_k a_{lk} \delta q_k = 0, \quad l = 1, 2, \dots, m. \quad (2-21)$$

Por tanto, la ecuación (2-33) se satisfará si las fuerzas constantes vienen dadas por

$$Q'_k = \sum_l \lambda_l a_{lk},$$

donde los λ_l son multiplicadores indeterminados (hasta ahora). El resto del tratamiento sigue las líneas dadas anteriormente a partir de las ecuaciones (2-28).*

Notemos que la ecuación (2-20) no constituye el tipo más general de ligadura no holonoma, p. ej., no incluye ecuaciones de ligadura en forma de inecuaciones. En cambio, incluye ligaduras holonomas. Una ecuación de ligadura holonoma

$$f(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n, t) = 0 \quad (2-34)$$

es equivalente a una ecuación diferencial,

$$\sum_k \frac{\partial f}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial f}{\partial t} dt = 0, \quad (2-35)$$

* En vista de lo difícil que es formular un principio variacional para sistemas no holonomos y lo relativamente fácil que es obtener directamente las ecuaciones del movimiento, es natural cuestionar la utilidad del método variacional en este caso. Por esta razón, de ahora en adelante limitaremos las discusiones de los principios variacionales y sus consecuencias a sistemas holonomos en los cuales sean independientes las coordenadas generalizadas.

que es formalmente igual a (2-20), con los coeficientes

$$a_{ik} = \frac{\partial f}{\partial q_k}, \quad a_{it} = \frac{\partial f}{\partial t}. \quad (2-36)$$

Por tanto, el método de los multiplicadores de Lagrange se puede utilizar también para ligaduras holonomas cuando (1) sea conveniente reducir todas las q a coordenadas independientes o (2) queramos obtener las fuerzas de ligadura.

Para ilustrar el método, consideremos el siguiente ejemplo un tanto trivial —un aro que ruede sin deslizar hacia la parte baja de un plano inclinado. En este caso, la ligadura de «rodadura» es en realidad holonoma, pero este hecho no tiene importancia en nuestro estudio. En cambio, la ligadura holonoma de que el aro esté sobre el plano inclinado estará contenida implícitamente en la elección de las coordenadas generalizadas.

Las dos coordenadas generalizadas son x , θ (fig. 2-5) y la ecuación de ligadura de la rodadura es

$$r d\theta = dx.$$

La energía cinética podemos descomponerla en energía cinética del movimiento del centro de masa más la energía cinética del movimiento alrededor del centro de masa:

$$T = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} M r^2 \dot{\theta}^2.$$

La energía potencial es

$$V = Mg(l - x) \text{sen } \phi,$$

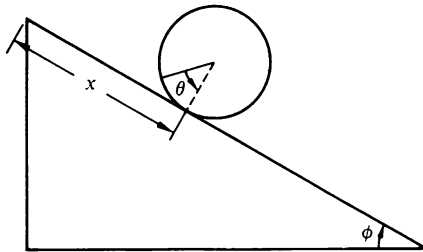


FIGURA 2-5
Aro que rueda por un plano inclinado.

donde l es la longitud del plano inclinado y la lagrangiana es

$$\begin{aligned} L &= T - V. \\ &= \frac{M\dot{x}^2}{2} + \frac{Mr^2\dot{\theta}^2}{2} - Mg(l-x)\text{sen}\phi. \end{aligned}$$

Como hay una ecuación de ligadura, sólo se necesitará un multiplicador de Lagrange λ . Los coeficientes que aparecen en la ecuación de ligadura son

$$\begin{aligned} a_\theta &= r, \\ a_x &= -1. \end{aligned}$$

Las dos ecuaciones de Lagrange serán, pues,

$$M\ddot{x} - Mg\text{sen}\phi + \lambda = 0, \quad (2-37)$$

$$Mr^2\ddot{\theta} - \lambda r = 0, \quad (2-38)$$

que junto con la ecuación de ligadura,

$$r\dot{\theta} = \dot{x}, \quad (2-39)$$

constituyen tres ecuaciones con las tres incógnitas θ , x , λ .

Derivando (2-39) respecto al tiempo, tenemos

$$r\ddot{\theta} = \ddot{x}.$$

Luego, de (2-38)

$$M\ddot{x} = \lambda$$

y la (2-37) se convierte en

$$\ddot{x} = \frac{g\text{sen}\phi}{2}.$$

junto con

$$\lambda = \frac{Mg \operatorname{sen} \phi}{2}$$

y

$$\ddot{j} = \frac{g \operatorname{sen} \phi}{2r}.$$

Luego el aro rueda plano abajo con sólo la mitad de la aceleración que tendría si deslizará por un plano de rozamiento y la fuerza de rozamiento de ligadura será $\lambda = Mg \operatorname{sen} \phi/2$.

De

$$\ddot{x} = v \frac{dv}{ds},$$

se obtiene $v = \sqrt{gl \operatorname{sen} \phi}$ en la parte inferior, que también se podría haber obtenido por medios elementales.

2-5 VENTAJAS DE UNA FORMULACIÓN DE PRINCIPIO VARIACIONAL

Aun cuando vemos que es posible ampliar la formulación original del principio de Hamilton (2-2) para incluir algunas ligaduras no holonomas, prácticamente, esta formulación de la Mecánica resulta muy útil cuando para el sistema pueda establecerse una lagrangiana de coordenadas independientes. La formulación del principio variacional se ha descrito justamente como «elegante», ya que en el compacto principio de Hamilton está contenida toda la Mecánica de sistemas holonomos con fuerzas derivables de potenciales. El principio tiene además el mérito de que sólo comporta magnitudes físicas que pueden definirse sin hacer referencia a un sistema particular de coordenadas generalizadas, a saber, las energías cinética y potencial. Por tanto, la formulación es automáticamente invariante respecto a la elección de las coordenadas del sistema.

Del principio variacional de Hamilton resulta también evidente por qué la lagrangiana está definida salvo la derivada total respecto al tiempo de una función cualquiera de las coordenadas y del tiempo, tal como se indicó al final de § 1-4. La integral temporal de dicha derivada total entre los puntos 1 y 2 sólo depende de los valores de la función arbitraria en los puntos terminales. Como la variación en los puntos terminales es nula, la adición a la lagrangiana de la derivada respecto al tiempo arbitraria no afecta al comportamiento variacional de la integral.

Otra ventaja es que la formulación de Lagrange puede ampliarse fácilmente para describir sistemas que no se consideran normalmente en Dinámica —tales como el campo

elástico, el campo electromagnético, las propiedades de campo de las partículas elementales. Consideraremos más adelante algunas de estas generalizaciones, pero vamos a considerar el caso siguiente como ejemplo sencillo de su aplicación fuera del marco usual de la Mecánica.

Supongamos que tenemos un sistema para el cual exista una lagrangiana.

$$L = \frac{1}{2} \sum_j L_j \dot{q}_j^2 + \frac{1}{2} \sum_{\substack{jk \\ j \neq k}} M_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k - \sum_j \frac{q_j^2}{2C_j} + \sum_j E_j(t) q_j \quad (2-40)$$

y una función de disipación

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \sum_j R_j \dot{q}_j^2. \quad (2-41)$$

Las ecuaciones de Lagrange son

$$L_j \frac{d^2 q_j}{dt^2} + \sum_{\substack{k \\ j \neq k}} M_{jk} \frac{d^2 q_k}{dt^2} + R_j \frac{dq_j}{dt} + \frac{q_j}{C_j} = E_j(t). \quad (2-42)$$

Estas ecuaciones del movimiento pueden interpretarse al menos de dos maneras: Podemos decir que las q son cargas, las L_j autoinducciones, las M_{jk} inducciones mutuas, las R_j resistencias, las C_j capacidades y las E_j fem exteriores. Entonces, las ecuaciones (2-42) constituyen un sistema de ecuaciones que describe a un sistema de redes mutuamente acopladas inductivamente, p. ej., para $j = 1, 2, 3$ tendríamos tres redes del tipo representado en la figura 2-6. Por otra parte, vemos que los dos primeros términos de L juntos constituyen una función cuadrática homogénea arbitraria de las velocidades generalizadas. Siempre que las ligaduras (holonomas) del sistema sean independientes del tiempo, la energía cinética T se podrá poner en dicha forma (cfr. § 1-6). Los coeficientes L_j, M_{jk} presentan el carácter de masas —son *términos inertes*. El término siguiente de la lagrangiana corresponde exactamente a la energía potencial de un sistema de resortes —osciladores armónicos— donde las fuerzas cumplen la ley de Hooke,

$$F = -kx,$$

que da por resultado un potencial

$$V = \frac{kx^2}{2},$$

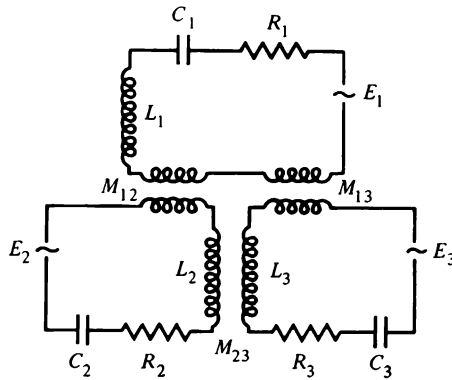


FIGURA 2-6

Sistema de circuitos acoplados al cual puede aplicarse la formulación de Lagrange.

de manera que las $1/C_j$ representan las constantes de los resortes. El último término corresponde al potencial debido a fuerzas activas $E_j = Q_j$ que son independientes de las coordenadas (p. ej., fuerzas gravitatorias) con la diferencia de que las E_j pueden ser fuerzas variables con el tiempo. Por último, la función de disipación corresponde a la existencia de fuerzas disipativas o viscosas, proporcionales a las velocidades generalizadas. Nos hallamos, pues, ante otra interpretación de las ecuaciones (2-40) y (2-41), o (2-42), que nos trae a la mente la imagen de un sistema complicado de masas sobre resortes que se mueven en un fluido viscoso y están accionadas por fuerzas exteriores.

Esta descripción de dos sistemas físicos diferentes por lagrangianas de la misma forma significa que todos los resultados y técnicas ideados para investigar uno de los sistemas se pueden asumir inmediatamente y aplicar al otro. En este caso particular, se ha proseguido intensamente el estudio del comportamiento de circuitos eléctricos y se han desarrollado algunas técnicas especiales, las cuales pueden aplicarse directamente a los sistemas mecánicos correspondientes. Se ha progresado mucho en la formulación de problemas eléctricos equivalentes para sistemas mecánicos o acústicos y recíprocamente. Expresiones que normalmente se reservan para circuitos eléctricos (reactancia, susceptancia, etc) constituyen los modos de expresión aceptados en gran parte de la teoría de vibraciones de sistemas mecánicos.*

Pero, además, existe un tipo de generalización de la Mecánica que se debe a una forma más sutil de equivalencia. Hemos visto que la Lagrangiana y el principio de Hamilton juntos forman una manera invariante compacta de implicar las ecuaciones del movimiento mecánicas. Esta posibilidad no está reservada solamente a la Mecánica; en casi todos los campos de la Física se pueden utilizar principios variacionales para expresar las «ecuaciones del movimiento», tanto si son ecuaciones de Newton, ecuaciones de Maxwell o la ecuación de Schrödinger. En consecuencia, cuando se utiliza un principio

* Para una exposición detallada, véase H. F. Olson, *Solutions of Engineering Problems by Dynamic Analogues* (New York: Van Nostrand, 1966).

variacional como base de la formulación, todos esos campos presentarán, al menos hasta cierto grado, una *analogía estructural*. Cuando los resultados experimentales muestran la necesidad de alterar el contenido físico de la teoría de un campo, este grado de analogía ha indicado muchas veces cómo pueden efectuarse alteraciones semejantes en otros campos. Así, los experimentos realizados a principios de siglo indicaron la necesidad de cuantizar la radiación electromagnética y las partículas elementales. Sin embargo, los métodos de cuantización se desarrollaron primero para la Mecánica de partículas, partiendo en esencia de la formulación de Lagrange de la Mecánica clásica. Describiendo el campo electromagnético mediante una lagrangiana y el correspondiente principio variacional de Hamilton, es posible pasar a los métodos de cuantización de partículas para construir una Electrodinámica cuántica (cfr. § 12-5 y § 12-6).

2-6 TEOREMAS DE CONSERVACIÓN Y PROPIEDADES DE SIMETRÍA

Hasta ahora nos hemos ocupado principalmente de obtener las ecuaciones del movimiento y poco hemos hablado de cómo resolverlas en un problema particular una vez obtenidas. En general, se trata de una cuestión matemática. Un sistema de n grados de libertad tendrá n ecuaciones diferenciales que son de segundo orden en el tiempo. La solución de cada ecuación requerirá dos integraciones que darán lugar, entre todas, a $2n$ constantes de integración. En un problema concreto, dichas constantes se determinan a partir de las condiciones iniciales, es decir, los valores iniciales de las n coordenadas generalizadas q_j y los valores iniciales de las n velocidades generalizadas \dot{q}_j . A veces, las ecuaciones del movimiento se integrarán mediante funciones conocidas, pero no siempre es así. En realidad, la mayoría de problemas no son integrables totalmente. No obstante, aun cuando no se puedan obtener soluciones completas, suele ser posible sacar mucha información referente a la naturaleza física del movimiento del sistema. Dicha información puede ser, para el físico, de mayor interés que la solución completa de las coordenadas generalizadas en función del tiempo. Por tanto, será importante ver cuánto podemos estipular acerca del movimiento de un sistema dado sin exigir una integración completa del problema.*

En muchos problemas, se pueden obtener de manera inmediata integrales primeras de las ecuaciones del movimiento; es decir, relaciones del tipo

$$f(q_1, q_2, \dots, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, t) = \text{constante} \quad (2-43)$$

que son ecuaciones diferenciales de primer orden. Estas integrales primeras son de interés porque no dicen algo físico acerca del sistema. En realidad, incluyen los principios de conservación obtenidos en el Capítulo 1.

Consideremos, por ejemplo, un sistema de puntos materiales sometidos a fuerzas que

* En este apartado y en los que siguen supondremos, a menos que se especifique otra cosa, que el sistema es tal que su movimiento viene descrito totalmente por el principio de Hamilton en su forma (2-2).

derivan de potenciales que sólo dependen de la posición. Entonces

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} &\equiv \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} \sum \frac{1}{2} m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) \\ &= m_i \dot{x}_i = p_{ix},\end{aligned}$$

que es la componente x de la cantidad de movimiento asociada a la partícula i -ésima. Este resultado nos sugiere una ampliación evidente del concepto de cantidad de movimiento. La cantidad de movimiento generalizada asociada a la coordenada q_j se define en la forma

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}. \quad (2-44)$$

A p_j se le llama también *cantidad de movimiento canónica* o *cantidad de movimiento conjugada*. Notemos que si q_j no es una coordenada cartesiana, p_j no tiene que tener necesariamente las dimensiones de una cantidad de movimiento. Es más, si hay un potencial que dependa de la velocidad, incluso en el caso de que sea q_j una coordenada cartesiana la cantidad de movimiento *generalizada* asociada a ella no será igual a la cantidad de movimiento *mecánica* usual. Así pues, en el caso de un grupo de partículas en el campo electromagnético la lagrangiana es (cfr. 1-66)

$$L = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{r}_i^2 - \sum_i q_i \phi(x_i) + \sum_i \frac{q_i}{c} \mathbf{A}(x_i) \cdot \dot{\mathbf{r}}_i$$

(aquí, q_i representa carga) y la cantidad de movimiento generalizada conjugada a x_i es

$$p_{ix} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m_i \dot{x}_i + \frac{q_i A_x}{c}, \quad (2-45)$$

es decir, la cantidad de movimiento mecánica más un término adicional.

Cuando la lagrangiana de un sistema no contenga una coordenada dada q_j (aun cuando pueda contener la velocidad correspondiente \dot{q}_j), diremos que la coordenada es *cíclica* o *ignorable*. Esta definición no es universal,* pero es la acostumbrada y vamos a utilizarla.

* Los dos términos suelen tomarse indistintamente y con el mismo significado que les hemos asignado. No obstante, algunos autores distinguen entre ambos, llamando coordenada cíclica a la que no esté en la energía cinética, T , y coordenada ignorable a la que no figure en la lagrangiana (cfr. Webster. *The Dynamics of Particles*, y Byerly, *Generalized Coordinates*). Ames y Murnaghan (*Theoretical Mechanics*) utilizan ambos términos indistintamente pero parece ser que los limitan a significar una coordenada que no figure en T . Lanczos (*Variational Principles of Mechanics*) ha resucitado un viejo término «kinosténica» como equivalente a cíclica o ignorable. Además, «cíclica» se utiliza a veces en otro sentido en relación con las variables periódicas (cfr. § 9-5 y Syngé, *Encyclopedia o Physics*, Vol. 3/1, p. 102).

La ecuación de Lagrange del movimiento,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0,$$

se reduce, para una coordenada cíclica, a

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = 0$$

o sea

$$\frac{dp_j}{dt} = 0,$$

lo que significa que

$$p_j = \text{constante.} \quad (2-46)$$

Luego, podemos enunciar como teorema de conservación general que *la cantidad de movimiento generalizada conjugada a una coordenada cíclica se conserva.*

La ecuación (2-46) constituye una integral primera de la forma (2-43) para las ecuaciones del movimiento. Puede utilizarse formalmente para eliminar del problema la coordenada cíclica, el cual se podrá entonces resolver por completo en función de las restantes coordenadas generalizadas. En pocas palabras, el procedimiento, originado por Routh, consiste en modificar la lagrangiana de manera que ya no sea función de la velocidad generalizada correspondiente a la coordenada cíclica, pero que en vez de ello contenga su cantidad de movimiento conjugada. La ventaja de esto es que puede considerarse que p_j sea una de las constantes de integración y las restantes integraciones sólo contendrán las coordenadas no cíclicas. Pospondremos el estudio detallado del método de Routh hasta haber tratado la formulación Hamiltoniana (a la cual se parece mucho).

Notemos que las condiciones para la conservación de las cantidades de movimiento generalizadas son más generales que los teoremas de conservación de la cantidad de movimiento y del momento cinético, antes deducidos. Por ejemplo, proporcionan un teorema de conservación para un caso en el cual se vulnere la ley de acción y reacción, cual es, cuando están presentes fuerzas electromagnéticas. Supongamos que tenemos una partícula en un campo en el cual ni ϕ ni \mathbf{A} dependen de x . Entonces, x no aparece en ninguna parte de L y es, por tanto, cíclica. En consecuencia, deberá conservarse la cantidad de movimiento canónica correspondiente p_x . Según (1-66), esta cantidad de movimiento tiene ahora la forma

$$p_x = m\dot{x} + \frac{qA_x}{c} = \text{constante} \quad (2-47)$$

En este caso, no es la cantidad de movimiento mecánica mx la que se conserva, sino su suma con qA_x/c . * A pesar de todo, sigue siendo cierto que los teoremas de conservación del Capítulo 1 están contenidos en la regla general para coordenadas cíclicas; con las restricciones adecuadas, la (2-46) deberá reducirse a los teoremas de § 1-2.

Consideremos primeramente una coordenada generalizada q_j , para la cual un cambio dq_j represente una traslación del sistema en conjunto en una dirección dada. Un ejemplo sería una de las coordenadas cartesianas del centro de masa del sistema. Está claro que q_j no puede aparecer en T , ya que las velocidades no se ven afectadas por un cambio de origen y por tanto la derivada parcial de T respecto a q_j debe ser nula. Además, supondremos sistemas conservativos para los cuales V no sea función de las velocidades, con lo que eliminamos anomalías tales como las fuerzas electromagnéticas. La ecuación de Lagrange del movimiento para una coordenada así definida se reducirá a

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \equiv \dot{p}_j = - \frac{\partial V}{\partial q_j} \equiv Q_j. \quad (2-48)$$

Vamos a demostrar que (2-48) es la ecuación del movimiento para la cantidad de movimiento total, es decir, que Q_j representa la componente de la fuerza total según la dirección de traslación de q_j y p_j es la componente de la cantidad de movimiento total según esta dirección. En general, la fuerza generalizada Q_j viene dada por la ecuación (1-49):

$$Q_j = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}.$$

Como dq_j corresponde a una traslación del sistema a lo largo de un eje, los vectores $\mathbf{r}_i(q_j)$ y $\mathbf{r}_i(q_j + dq_j)$ estarán relacionados de la manera que se indica en la figura 2-7. Por definición

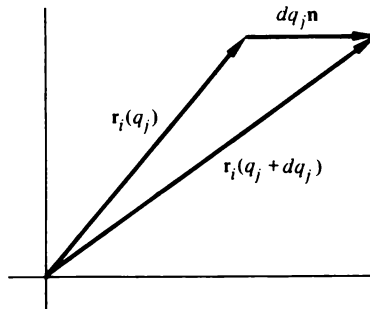


FIGURA 2-7
Cambio de un vector de posición ante una traslación del sistema.

* Puede demostrarse a partir de la Electrodinámica clásica que en estas condiciones, es decir, ni \mathbf{A} ni ϕ dependientes de x , qA_x/c es exactamente la componente x de la cantidad de movimiento electromagnética del campo asociado a la carga q .

de derivada, tenemos

$$\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \lim_{dq_j \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}_i(q_j + dq_j) - \mathbf{r}_i(q_j)}{dq_j} = \frac{dq_j}{dq_j} \mathbf{n} = \mathbf{n}, \quad (2-49)$$

donde \mathbf{n} es el vector unitario según la dirección de traslación. Luego

$$Q_j = \sum \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{n} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{F},$$

que, según dijimos, es la componente de la fuerza total en la dirección de \mathbf{n} . Para demostrar la segunda parte de lo enunciado, notemos que con la energía cinética escrita en la forma

$$T = \frac{1}{2} \sum m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2$$

la cantidad de movimiento conjugada es

$$\begin{aligned} p_j &= \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j}, \\ &= \sum_i m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}, \end{aligned}$$

utilizando la ecuación (1-51). Entonces, de la ecuación (2-49)

$$p_j = \mathbf{n} \cdot \sum_i m_i \mathbf{v}_i,$$

que también ahora, como se había predicho, es la componente de la cantidad de movimiento del sistema total según \mathbf{n} .

Supongamos ahora que sea cíclica la coordenada de traslación q_j que hemos estado tratando. Entonces q_j no podrá figurar en V y por tanto

$$-\frac{\partial V}{\partial q_j} \equiv Q_j = 0.$$

Pero esto no es más que el conocido teorema de conservación de la cantidad de movimiento —que si se anula una componente dada de la fuerza aplicada resultante, se conserva la componente correspondiente de la cantidad de movimiento.

De manera análoga puede demostrarse que si una coordenada cíclica q_j es tal que dq_j corresponde a una rotación del sistema de partículas alrededor de un eje, la conservación de su cantidad de movimiento conjugada corresponde a la conservación de un momento cinético. Por el mismo razonamiento antes empleado, T no puede contener a q_j , ya que una rotación del sistema de coordenadas no puede afectar a la magnitud de las velocidades. Por tanto, la derivada parcial de T respecto a q_j deberá ser nula, también ahora; y como V es independiente de \dot{q}_j obtenemos una vez más la ecuación (2-48). Pero ahora queremos demostrar que siendo q_j una coordenada de rotación la fuerza generalizada es la componente según el eje de rotación del momento resultante aplicado y p_j es la componente del momento cinético resultante respecto a dicho eje.

La fuerza generalizada Q_j viene dada por

$$Q_j = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \dot{q}_j},$$

pero ahora la derivada tiene un significado diferente del de antes. En el caso actual, el cambio de q_j debe corresponder a una rotación infinitesimal del vector \mathbf{r}_i , manteniéndose constante el módulo del vector. La figura 2-8 nos facilita la obtención del módulo de la derivada:

$$|d\mathbf{r}_i| = r_i \operatorname{sen} \theta dq_j$$

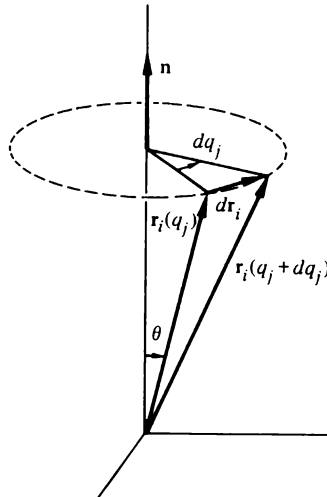


FIGURA 2-8

Cambio de un vector de posición ante una rotación del sistema.

y

$$\left| \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right| = r_i \operatorname{sen} \theta;$$

La dirección es perpendicular a \mathbf{r}_i y a \mathbf{n} . Está claro que la derivada se puede escribir en la forma vectorial

$$\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \mathbf{n} \times \mathbf{r}_i. \quad (2-50)$$

Con este resultado, la fuerza generalizada queda en la forma

$$\begin{aligned} Q_j &= \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{n} \times \mathbf{r}_i \\ &= \sum_i \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i \end{aligned}$$

que se reduce a

$$Q_j = \mathbf{n} \cdot \sum_i \mathbf{N}_i = \mathbf{n} \cdot \mathbf{N},$$

lo que demuestra la primera parte. Transformando análogamente p_j tendremos la demostración de la segunda parte del enunciado:

$$\begin{aligned} p_j &= \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \sum_i m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \dot{q}_j} = \sum_i \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i \\ &= \mathbf{n} \cdot \sum \mathbf{L}_i = \mathbf{n} \cdot \mathbf{L}. \end{aligned}$$

Resumiendo estos resultados vemos que si la coordenada de rotación q_j es cíclica, la Q_j , que es la componente según \mathbf{n} del momento aplicado, es nula y la componente \mathbf{L} según \mathbf{n} es constante. Aquí hemos recuperado el teorema de conservación del momento cinético a partir del teorema de conservación general relativo a las coordenadas cíclicas.

En este momento vale la pena que hagamos alguna observación acerca del significado de las coordenadas de traslación o rotación cíclicas en relación con las propiedades del sistema. Si es cíclica una coordenada correspondiente a un desplazamiento, quiere decir que una traslación del sistema, como si fuese rígido, no tiene efecto alguno sobre el problema. Dicho de otro modo, si el sistema es *invariante* ante una traslación según una

dirección dada, se conserva la cantidad de movimiento correspondiente. Análogamente, el hecho de que una coordenada de rotación sea cíclica (y por tanto se conserve el momento cinético conjugado) indica que el sistema es invariante ante una rotación en torno al eje dado. Por tanto, los teoremas de conservación de la cantidad de movimiento y del momento cinético están íntimamente relacionados con las *propiedades de simetría* del sistema. Si éste tuviera simetría de esfericidad, podríamos decir sin más que se conservan todas las componentes del momento cinético. O bien, si el sistema sólo es simétrico respecto al eje z , sólo se conservará L_z y lo mismo se diga para los otros ejes. Estas consideraciones acerca de la simetría se pueden aprovechar a menudo en problemas relativamente complicados para determinar por inspección si existen ciertas constantes del movimiento. Por ejemplo, supongamos que el sistema consistiera en un conjunto de puntos materiales que se muevan en un campo de potencial generado por fuentes fijas distribuidas uniformemente por un plano infinito, que tomáramos por plano $z = 0$. (Las fuentes podrían ser una distribución de masas si las fuerzas fuesen gravitatorias, o una distribución de cargas en el caso de fuerzas electrostáticas.) La simetría del problema es tal que la lagrangiana es invariante ante una traslación del sistema de partículas en las direcciones x o y (pero no en la dirección z) y también ante una rotación en torno al eje z . Se deduce inmediatamente que las componentes x e y de la cantidad de movimiento total, P_x y P_y , son constantes del movimiento junto con L_z , componente z del momento cinético total. No obstante, si las fuentes se limitaran al semiplano $x \geq 0$, se destruiría la simetría de traslación según el eje x y de la rotación en torno al eje z . En tal caso, podrían no conservarse P_x y L_z , pero P_y seguiría siendo una constante del movimiento. En los capítulos siguientes encontraremos varias veces las relaciones entre las constantes del movimiento y las propiedades de simetría del sistema.

Otro teorema de conservación que podríamos esperar obtener en la formulación de Lagrange es la conservación de la energía total en sistemas en donde las fuerzas deriven de potenciales que dependan sólo de la posición. En verdad, se puede demostrar un teorema de conservación para el cual la conservación de la energía total represente tan solo un caso particular. Consideremos una Lagrangiana genérica, la cual será función de las coordenadas q_j y de las velocidades \dot{q}_j y puede también depender explícitamente del tiempo. (La dependencia explícita del tiempo puede deberse a la variación con el tiempo de los potenciales exteriores o a ligaduras dependientes del tiempo). Entonces, la derivada total respecto al tiempo de L es

$$\frac{dL}{dt} = \sum_j \frac{\partial L}{\partial q_j} \frac{dq_j}{dt} + \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{d\dot{q}_j}{dt} + \frac{\partial L}{\partial t}. \quad (2-51)$$

De las ecuaciones de Lagrange,

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right),$$

y la (2-45) podrá escribirse en la forma

$$\frac{dL}{dt} = \sum_j \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \dot{q}_j + \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{d\dot{q}_j}{dt} + \frac{\partial L}{\partial t}$$

o bien

$$\frac{dL}{dt} = \sum_j \frac{d}{dt} \left(\dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) + \frac{\partial L}{\partial t}.$$

Se deduce por tanto que

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_j \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L \right) + \frac{\partial L}{\partial t} = 0. \quad (2-52)$$

La cantidad entre paréntesis se denomina a veces *función energía** y se representa por h :

$$h(q, \dot{q}, t) = \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L, \quad (2-53)$$

y podemos considerar que la ecuación (2-52) da la derivada total de h respecto al tiempo:

$$\frac{dh}{dt} = - \frac{\partial L}{\partial t}. \quad (2-54)$$

Si la lagrangiana no es función explícita del tiempo, es decir, si t no aparece explícitamente en L sino tan sólo implícitamente a través de la variación temporal de q y \dot{q} , la ecuación (2-54) nos dice que h se conserva; es una de las integrales primeras del movimiento y se le da a veces el nombre de integral de Jacobi. †

* La función energía h tiene igual valor que la hamiltoniana H (v. cap. 8). Le damos aquí otro nombre y símbolo para hacer resaltar que h se considera que es una función de n variables independientes q_j y de sus derivadas respecto al tiempo \dot{q}_j , (junto con el tiempo), mientras que la hamiltoniana se tratará como función de $2n$ variables independientes, q_j, p_j (y posiblemente el tiempo).

† Esta designación suele limitarse a una integral primera del problema de los tres cuerpos restringido. Sin embargo, en él la integral es simplemente un caso particular de la función energía h y existe algún precedente histórico de aplicación del nombre de integral de Jacobi a la situación más general.

En ciertas circunstancias, la función h es la energía total del sistema. Para determinar cuáles son estas circunstancias, recordemos que la energía cinética total de un sistema puede siempre escribirse en la forma

$$T = T_0 + T_1 + T_2, \quad (1-73)$$

donde T_0 es función de las coordenadas generalizadas solamente, $T_1(q, \dot{q})$ es lineal en las velocidades generalizadas y $T_2(q, \dot{q})$ es función cuadrática de las q . Para una amplia gama de sistemas y conjuntos de coordenadas generalizadas, la lagrangiana se puede descomponer análogamente según su comportamiento funcional respecto a las variables \dot{q} :

$$L(q, \dot{q}, t) = L_0(q, t) + L_1(q, \dot{q}, t) + L_2(q, \dot{q}, t). \quad (2-55)$$

Aquí, L_2 es una función homogénea de segundo grado (no meramente cuadrática) en \dot{q} mientras que L_1 es homogénea de primer grado en \dot{q} . No existe ninguna razón intrínseca a la Mecánica que exija que la lagrangiana sea del tipo representado por la ecuación (2-55), pero de hecho lo es en casi todos los problemas de interés. La lagrangiana tiene claramente esa forma cuando las fuerzas derivan de un potencial que no contenga las velocidades. Incluso en el caso de potenciales que dependan de las velocidades observamos que la lagrangiana para una partícula cargada en un campo electromagnético (ec. 1-66) satisface la ecuación (2-55). Ahora bien, recordemos que el teorema de Euler dice que si f es función homogénea de grado n en las variables x_i , se cumple*

$$\sum_i x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = n f. \quad (2-56)$$

Aplicado a la función h (ec. 2-53) para lagrangianas de la forma (2-55), este teorema implica que

$$h = 2L_2 + L_1 - L = L_2 - L_0. \quad (2-57)$$

Si las ecuaciones de transformación que definen las coordenadas generalizadas (ec. 1-38) no contienen explícitamente el tiempo, en virtud de las ecuaciones (1-68) $T = T_2$. Si, además, el potencial no depende de las velocidades generalizadas, será $L_2 = T$ y $L_0 = -V$, con lo cual

$$h = T + V = E. \quad (2-58)$$

* Podemos encontrarlo en la mayoría de textos de Cálculo superior; p. ej., W. Kaplan, *Advanced Calculus*, 2.ª ed., p. 139.

y la función energía coincide con la energía total. En estas circunstancias, si V no contiene implícitamente el tiempo tampoco lo hará L y en virtud de la ecuación (2-54) se conservará h que es ahora la energía total.

Debemos hacer hincapie en que las condiciones para la conservación de h son, en principio, distintas de las que identifican a h con la energía total. Podemos tener un sistema de coordenadas generalizadas tal que en un problema particular se conserve h pero no sea la energía total. Por otra parte, puede suceder que h sea la energía total, en la forma $T + V$, pero no se conserve. También podemos notar que mientras la lagrangiana está definida unívocamente para cada sistema por la prescripción

$$L = T - U$$

independiente de la elección de las coordenadas generalizadas, la función energía h depende en magnitud y forma funcional del sistema concreto de coordenadas generalizadas. Para un mismo sistema se pueden generar varias funciones energía h de diferente contenido físico que dependen de cómo se hayan tomado las coordenadas generalizadas.

Finalmente, podemos notar que cuando el sistema no sea conservativo, pero haya fuerzas de rozamiento que deriven de una función de disipación \mathcal{F} , puede demostrarse que \mathcal{F} está relacionada con la velocidad de disminución de h . Cuando las ecuaciones del movimiento vengan dadas por la ecuación (1-70), incluida la disipación, la ecuación (2-52) tiene la forma

$$\frac{dh}{dt} + \frac{\partial L}{\partial t} = \sum_j \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j.$$

Por la definición (ec. 1-67) \mathcal{F} es función homogénea de segundo grado de las \dot{q} . Por tanto, aplicando de nuevo el teorema de Euler, tenemos

$$\frac{dh}{dt} = -2\mathcal{F} - \frac{\partial L}{\partial t}. \quad (2-59)$$

Si L no es función explícita del tiempo y el sistema es tal que h sea lo mismo que la energía, la ecuación (2-59) nos dice que $2\mathcal{F}$ es la velocidad de disipación de energía,

$$\frac{dE}{dt} = -2\mathcal{F}, \quad (2-60)$$

cosa que ya se demostró (cfr. p. 29) en circunstancias menos generales.

REFERENCIAS SUGERIDAS

R. COURANT y D. HILBERT, *Methods of Mathematical Physics*, vol. 1. La literatura acerca del cálculo de variaciones asusta por su extensión y suele cubrir mucho más de lo que se necesita para los fines de este capítulo. La mayoría de tratados de «Matemáticas para físicos» contienen un breve estudio del cálculo de variaciones y el trabajo clásico de Courant y Hilbert da, en su Capítulo 4, una de las visiones más claras del tema.

R. WEINSTOCK, *Calculus of Variations*. Este es un libro con el cual un físico puede sentirse cómodo. Más de la mitad del libro se dedica a aplicaciones a problemas de la Física. El lema fundamental se trata al principio del Capítulo 3 y en su apartado 3-7 se describen algunas de las dificultades de la solución continua al problema de la superficie de revolución de área mínima.

G. A. BLISS, *Calculus of Variations*. De entre la antigua literatura acerca de cálculo de variaciones, este librito es notable por su detallado estudio de la naturaleza de las soluciones de algunos de los problemas tipo, tales como el de la braquistócrona. El capítulo 4 tiene todo lo que posiblemente necesitemos saber acerca de superficies de revolución de área mínima.

L. A. PARS, *An Introduction to the Calculus of Variations*. Revisión cuidadosa y concienzuda de los aspectos matemáticos más simples del cálculo de variaciones prestando cierta atención (menos de lo que cree el autor) a aplicaciones físicas. En el capítulo II se presenta el lema fundamental (y algunos teoremas afines). En la página 253 hay una breve nota acerca de sistemas no holonomos.

C. LANCZOS, *The Variational Principles of Mechanics*. Los cinco primeros capítulos de este libro constituyen una pausada revisión, sazónada por el punto de vista original del autor, del contenido del presente capítulo. El capítulo 10, que contiene notas históricas, es particularmente interesante. Esta es, probablemente, la mejor referencia para todo el capítulo, si bien el tratamiento difiere mucho del que hemos dado aquí.

E. WHITTAKER, *Analytical Dynamics*. El tratamiento que se da a los temas de este capítulo sigue siendo de interés, especialmente por muchas notas marginales esotéricas que no se encuentran en ninguna otra parte. En el capítulo III se estudian los teoremas de conservación, mientras que el principio de Hamilton y su deducción a partir de las ecuaciones de Lagrange (camino inverso del que hemos seguido en el presente capítulo) se encuentran en el capítulo IX. La presencia de un sistema de ecuaciones diferenciales en forma lagrangiana, pues, implica siempre la existencia de un principio variacional asociado. Por tanto, tiene cierto interés saber cuándo se puede poner en forma lagrangiana un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden. Este problema lo abordó por primera vez Helmholtz en 1887. Las condiciones que encontró y algunas consecuencias inherentes, están descritas en un trabajo admirable y detallado de P. Havas en *Nuovo Cimento Supplement*, vol. 5, p. 363 (1957).

L. D. LANDAU y E. M. LIFSHITZ, *Mecánica*. Este es el primer tomo del *Curso de Física Teórica*, publicado en español por Editorial Reverté, monumento al genio de Lev Landau. Contiene una cantidad de materia enorme en el breve espacio de 200 páginas (en la traducción española) y la lectura atenta de cualquier tema de este libro se verá bien recompensada. El estilo puede decirse que es de «razonamientos gesticulados» escritos en un papel y a veces se encuentran lagunas en el razonamiento, pero la visión física es maravillosa. Para el presente capítulo son especialmente importantes los capítulos I y II.

W. E. BYERLY, *Generalized Coordinates*. Felizmente aún disponible en reimpresión, este librito resulta especialmente valioso para los múltiples ejemplos detallados de la técnica lagrangiana para

plantear y resolver problemas mecánicos. La carencia de índice constituye un defecto deplorable que hace un tanto difícil la utilización del libro.

D. W. WELLS, *Lagrangian Dynamics*. Aunque a veces se le etiqueta de no sofisticado, este «bosquejo» contiene un tesoro de detalles y problemas prácticos que cubren una amplia variedad de aspectos de la Mecánica de Lagrange. El capítulo 6 contiene un tratamiento inusualmente detallado de las fuentes de rozamiento y disipativas dentro del marco lagrangiano (la «función de potencia» del autor es nuestra función de disipación). El capítulo 15 se dedica a las ecuaciones de Lagrange para sistemas eléctricos y su interacción con sistemas mecánicos. También son útiles los Capítulos 12 (acerca de fuerzas de ligadura) y 17 (acerca del principio de Hamilton).

H. F. OLSON, *Solution of Engineering Problems by Dynamical Analogies*. Este libro estudia con mucho detalle el problema de circuitos eléctricos equivalentes a sistemas mecánicos y acústicos e ilustra la aplicación de la teoría de circuitos a la solución de problemas puramente mecánicos o acústicos. Se introducen las lagrangianas per se y sólo se utilizan brevemente. Un punto de vista lagrangiano más penetrante caracteriza la referencia siguiente.

B. R. GOSSICK, *Hamilton's Principle and Physical Systems*. Aun cuando se estudian otros sistemas no mecánicos, se hace hincapie en aplicaciones de la Ingeniería eléctrica. El interés particular del autor se centra en los sistemas no conservativos (pero lineales) y amplía el concepto de función de disipación para incluir la pérdida de energía por radiación electromagnética.

H. RUND, *Hamilton-Jacobi Theory in the Calculus of Variations*. Se ha escrito mucho acerca del principio de Hamilton para sistemas no holonomos y la mayor parte está mal (incluidas algunas cosas que dijimos en la primera edición). El libro de Rund, aun siendo muy matemático, presenta algunos estudios interesantes de problemas «patológicos» que se encuentran en el mundo físico real y a los que haremos referencia de ahora en adelante en diversas ocasiones. Lo que es particularmente importante aquí es el apartado 5.5 acerca de sistemas dinámicos no holonomos, en donde se llega a la conclusión de que el principio de Hamilton, en la forma de la ecuación (2-2), sólo es aplicable a ligaduras holonomas. El método de los multiplicadores de Lagrange aquí utilizado, basado en caminos variados construidos a partir de desplazamientos virtuales, se detalla muchísimo más en un par de trabajos de H. Jeffreys y L. A. Pars, respectivamente, publicados en 1954 en el *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, vol. 7, p. 335 y p. 338.

EJERCICIOS

1. Demostrar que la distancia más corta entre dos puntos del espacio es la línea recta.
2. Demostrar que las geodésicas de una superficie esférica son círculos máximos, es decir, circunferencias cuyos centros coinciden con el centro de la esfera.
3. Completar la solución del problema de la braquistócrona iniciado en § 2-2 y demostrar que la curva buscada es una cicloide con una cúspide en el punto inicial en el cual se suelta la partícula. Demostrar también que si la partícula se proyecta con una energía cinética inicial $\frac{1}{2} m v_0^2$, la braquistócrona sigue siendo una cicloide que pasa por los dos puntos que tienen una cúspide a una altura z sobre el punto inicial dada por $v_0^2 = 2gz$.
4. Hallar la ecuación de Euler-Lagrange que describe la braquistócrona de una partícula que se mueva dentro de una Tierra esférica de densidad uniforme. Obtener una integral primera de esta

ecuación diferencial por analogía con la integral de Jacobi h . Con ayuda de esta integral, demostrar que la curva buscada es una hipocicloide (curva descrita por un punto de una circunferencia que rueda sobre el interior de una circunferencia mayor). Obtener una expresión del tiempo de recorrido a lo largo de la braquistócrona entre dos puntos de la superficie terrestre. ¿Cuánto tardaría en ir de Nueva York a Los Ángeles (supuestas separadas 3 000 millas) a lo largo de un túnel de braquistócrona (suponiendo ausencia de rozamiento) y cuál sería la máxima profundidad bajo la superficie terrestre del túnel de braquistócrona?

5. En el problema de la superficie de revolución de área mínima, examinar el caso simétrico $y_2 = y_1$, $x_2 = -x_1 > 0$ y expresar la condición para el parámetro a en forma de ecuación trascendente en función de las cantidades adimensionales $k = x_2/a$ y $\alpha = y_2/x_2$. Demostrar que para α mayor que un determinado valor α_0 son posibles dos valores de k , para $\alpha = \alpha_0$ sólo es posible un valor de k , mientras que si $\alpha < \alpha_0$ no puede hallarse ningún valor real de k (o a), por lo que en esa región no existirá solución catenaria. Hallar el valor de α_0 , numéricamente si es necesario.

6. La solución de línea quebrada descrita en el texto, en la cual el área de revolución es sólo la de los círculos extremos de radios y_1 e y_2 , respectivamente, se conoce por el nombre de *solución Goldschmidt*. Para la situación simétrica tratada en el Ejercicio 5, obtener una expresión del cociente entre el área generada por la solución catenaria y la dada por la solución Goldschmidt. El resultado debemos ponerlo en función de los parámetros k y α , solamente. Demostrar que para valores de α suficientemente grandes, al menos una de las catenarias de una área por debajo de la de la solución Goldschmidt. Demostrar, por otra parte, que si $\alpha = \alpha_0$, la solución Goldschmidt da una área menor que la catenaria.

7. Una cadena o cuerda de longitud indefinida pasa libremente por poleas situadas a alturas y_1 e y_2 sobre la superficie plana de la Tierra, estando separadas horizontalmente por una distancia $x_2 - x_1$. Si la cadena o cuerda tiene una densidad lineal uniforme, demostrar que el problema de hallar la curva supuesta entre las poleas es el mismo que el de la superficie mínima de revolución. (La transición a la solución Goldschmidt cuando se cambian las alturas y_1 e y_2 constituye una demostración en clase, espectacular).

8. Supongamos que se supiera experimentalmente que una partícula caía a una distancia dada y_0 en un tiempo $t_0 = \sqrt{2y_0/g}$, pero no se conociera el tiempo de caída para distancias distintas de y_0 . Supongamos, además, que se conoce la lagrangiana del problema pero que en vez de resolver la ecuación del movimiento para obtener y , se supone que la forma funcional es

$$\int_0^{t_0} L dt$$

Si se ajustan las constantes a y b siempre de manera que el tiempo correspondiente a una caída y_0 venga dado correctamente por t_0 , demostrar directamente que la integral

$$y = at + bt^2.$$

será un extremo para valores reales de los coeficientes solamente cuando $a = 0$ y $b = g/2$.

9. Cuando chocan dos bolas de billar, las fuerzas instantáneas que se ejercen son muy intensas pero

sólo actúan un tiempo infinitesimal Δt , de manera que la cantidad

$$\int_{\Delta t} F dt$$

sea finita. De dichas fuerzas se dice que son *impulsivas* y a la integral extendida al tiempo Δt se le da el nombre de *impulso* de la fuerza. Demostrar que cuando haya fuerzas impulsivas, las ecuaciones de Lagrange pueden transformarse en

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right)_f - \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right)_i = S_j,$$

donde los subíndices i y f se refieren a los estados del sistema antes y después del impulso, S_j es el impulso de la fuerza impulsiva generalizada correspondiente a q_j y L es la lagrangiana que incluye todas las fuerzas no impulsivas.

10. Se emplea la expresión *Mecánica generalizada* para designar una variedad de Mecánica clásica en la cual la lagrangiana contiene derivadas de q_i respecto al tiempo de orden superior al primero. Aplicando los métodos del cálculo de variaciones, demostrar que si hay una lagrangiana de la forma $L(q_i, \dot{q}_i, \ddot{q}_i, t)$ y se cumple el principio de Hamilton con la variación cero de q_i y de \dot{q}_i en los puntos terminales, las ecuaciones correspondientes de Euler-Lagrange serán

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i} \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

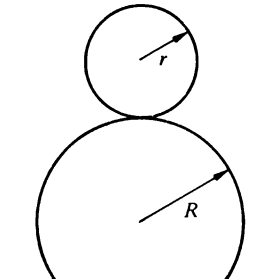
Apliquemos este resultado a la lagrangiana

$$L = -\frac{m}{2} q \ddot{q} - \frac{k}{2} q^2.$$

¿Reconocemos las ecuaciones del movimiento?

11. En la parte más alta de un aro vertical se coloca una partícula pesada. Calcular la reacción del aro sobre la partícula por medio de los multiplicadores indeterminados de Lagrange y de las ecuaciones de Lagrange. Hallar la altura a la cual se separa del aro la partícula.

12. Un aro uniforme de masa m y radio r rueda sin deslizar sobre un cilindro fijo de radio R , tal como se indica en la figura. La única fuerza exterior es la de la gravedad. Si el cilindro menor comienza a rodar partiendo del reposo en el punto más alto del cilindro mayor, hallar por el método de los multiplicadores de Lagrange el punto en el cual el aro se separa del cilindro.



13. Una forma del puente de impedancias de Wheatstone tiene, además de las cuatro resistencias usuales, una inductancia en una rama y una capacidad en la rama opuesta. Establecer L y \mathcal{F} para el puente desequilibrado, siendo las coordenadas las cargas de los elementos. Utilizando la ley de Kirchhoff para los nudos como ligaduras de las intensidades de corriente, obtener las ecuaciones de Lagrange del movimiento y demostrar que eliminando los multiplicadores λ se reducen a las ecuaciones usuales de las redes.

14. En ciertas situaciones, particularmente en sistemas unidimensionales, se pueden incorporar los efectos del rozamiento sin introducir la función de disipación. A título de ejemplo, hallar las ecuaciones del movimiento para la lagrangiana

$$L = e^{\gamma t} \left[\frac{m\dot{q}^2}{2} - \frac{kq^2}{2} \right].$$

¿Cómo describiríamos este sistema? ¿Existen constantes del movimiento? Supongamos que se efectúa una transformación de punto de la forma

$$s = e^{\gamma t} q.$$

¿Cuál es la lagrangiana efectiva en función de s ? Hallar la ecuación del movimiento para s . ¿Qué dicen estos resultados acerca de las cantidades que se conservan en el sistema?

15. Demostrar que si el potencial que hay en la lagrangiana contiene términos dependientes de la velocidad, la cantidad de movimiento canónica correspondiente a una coordenada de rotación θ de todo el sistema ya no es el momento cinético mecánico L_θ sino que viene dada por

$$p_\theta = L_\theta - \sum_i \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_i \times \nabla_{\mathbf{v}_i} U,$$

donde $\nabla_{\mathbf{v}_i}$ es el operador gradiente en el cual las derivadas lo son respecto a las componentes de la velocidad y \mathbf{n} es un vector unitario en la dirección de rotación. Si las fuerzas son de carácter electromagnético, la cantidad de movimiento canónica será, pues,

$$p_\theta = L_\theta + \sum_i \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_i \times \frac{q_i}{c} \mathbf{A}_i.$$

16. Sucede a veces que las coordenadas generalizadas aparecen separadamente en la energía cinética y en la energía potencial de tal manera que T y V pueden escribirse en la forma

$$T = \sum_i f_i(q_i) \dot{q}_i^2 \quad \text{y} \quad V = \sum_i V_i(q_i).$$

Demostrar que entonces se separan las ecuaciones de Lagrange y que el problema puede reducirse siempre a cuadraturas.

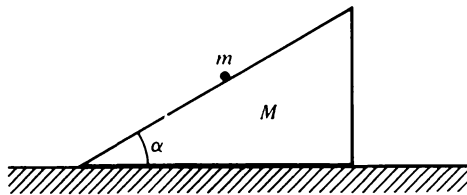
17. Un punto material está obligado a moverse sobre un aro sin masa de radio a solidario a un plano vertical que gira alrededor de la vertical con velocidad angular constante ω . Obtener las ecuaciones de Lagrange del movimiento suponiendo que las fuerzas exteriores son únicamente las debidas a la

gravedad. ¿Cuáles son las constantes del movimiento? Demostrar que si ω es mayor que un cierto valor crítico ω_0 , puede haber una solución en la cual la partícula permanece fija en el aro en un punto que no es el más bajo, pero que si $\omega < \omega_0$, el único punto estacionario para la partícula es el más bajo del aro. ¿Cuál es el valor de ω_0 ?

18. Una partícula se mueve en un campo de fuerzas conservativo creado por diversas distribuciones de masas. En cada caso, la fuerza generada por un elemento de volumen de la distribución deriva de un potencial proporcional a la masa del elemento de volumen y es función exclusiva de la distancia escalar al elemento de volumen. Para las siguientes distribuciones de masa fijas y homogéneas, indicar las cantidades que se conservan en el movimiento de la partícula:

- La masa está distribuida uniformemente en el plano $z = 0$.
- La masa está distribuida uniformemente en el semiplano $z = 0$, $y > 0$.
- La masa está distribuida uniformemente en un cilindro de revolución de longitud infinita cuyo eje es el eje z .
- La masa está distribuida uniformemente en un cilindro de revolución de longitud finita, cuyo eje es el eje z .
- La masa está uniformemente distribuida en un cilindro recto de sección recta elíptica y longitud infinita, cuyo eje es el eje z .
- La masa está uniformemente distribuida en una haltera cuyo eje es el eje z .
- La masa está en forma de hilo uniforme devanado formando un solenoide helicoidal infinito, cuyo eje es el eje z .

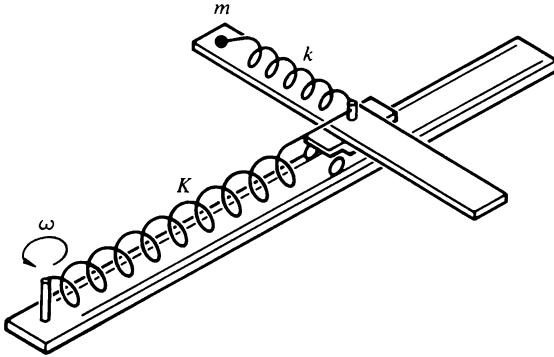
19. Una partícula de masa m desliza sin rozamiento por una cuña de ángulo α y masa M que puede deslizar sin rozamiento sobre una superficie lisa horizontal (cfr. figura). Tratando la ligadura de la partícula sobre la cuña por el método de los multiplicadores de Lagrange, hallar las ecuaciones del movimiento de la partícula y la cuña. Obtener también una expresión de las fuerzas de ligadura. Calcular el trabajo efectuado en el tiempo t por las fuerzas de ligadura que se ejercen sobre la partícula y sobre la cuña. ¿Cuáles son las constantes del movimiento del sistema? Contrastar los resultados obtenidos con la situación cuando la cuña está fija. [*Sugerencia:* Para la partícula podemos utilizar o un sistema de coordenadas cartesianas con y vertical, o uno con y normal a la cuña o, lo que es aún más instructivo, hacerlo en ambos sistemas.]



20. Un carrito se mueve a lo largo de railes sobre una viga rígida. El carrito está sujeto a un extremo de un resorte de longitud natural r_0 y constante k , cuyo otro extremo está fijo a la viga. Sobre el carrito hay otro sistema de carriles perpendicular al primero, a lo largo del cual se mueve una partícula de masa m , sujeta por un resorte unido a la viga, de constante k y longitud natural nula. La viga, los carriles y el carrito se supone que tienen masa nula. El sistema total se hace mover en un plano en torno al punto de amarre del primer resorte, con velocidad angular ω . La longitud del segundo resorte se considera en todo momento pequeña frente a r_0 .

- ¿Cuál es la energía del sistema? ¿Se conserva?
- Utilizando coordenadas generalizadas en el sistema del laboratorio, ¿cuál es la integral de Jacobi del sistema? ¿Se conserva?

- c) En función de las coordenadas generalizadas relativas a un sistema que gire con velocidad angular ω , ¿cuál es la lagrangiana? ¿Cuál es la integral de Jacobi? ¿Se conserva? Discutir la relación entre las dos integrales de Jacobi.



21. Supongamos que se mueve una partícula en el espacio sometida a un potencial conservativo $V(\mathbf{r})$ pero que está obligada siempre a moverse sobre una superficie cuya ecuación es $\sigma(\mathbf{r}, t) = 0$. (La dependencia explícita de t indica que la superficie puede estar en movimiento.) La fuerza instantánea de ligadura se toma siempre perpendicular a la superficie. Demostrar analíticamente que no se conserva la energía de la partícula si la superficie se mueve con el tiempo. ¿Cuál es, físicamente, la razón de que no se conserve la energía en esta circunstancia?

22. El oscilador armónico unidimensional tiene por lagrangiana $L = m\dot{x}^2/2 - kx^2/2$. Supongamos que no conociéramos la solución del movimiento, pero viéramos que el movimiento debiera ser periódico y por tanto se pudiera describir mediante una serie de Fourier de la forma

$$x(t) = \sum_{j=0} a_j \cos j\omega t$$

(tomando $t = 0$ en un punto de inversión del movimiento) donde ω es la pulsación (desconocida) del movimiento. Esta representación de $x(t)$ define un camino de varios parámetros para el punto representativo del sistema en el espacio de las configuraciones. Consideremos la integral de acción I para dos puntos t_1 y t_2 separados por el periodo $T = 2\pi/\omega$. Demostrar que con esta forma del camino del sistema, I es un extremo para x no nula sólo si $a_j = 0$, para $j \neq 1$, y sólo si $\omega^2 = k/m$.

Capítulo 3

Problema de los dos cuerpos

En este capítulo estudiaremos el problema de dos cuerpos que se mueven bajo la influencia de una fuerza central mutua y lo trataremos como aplicación de la formulación de Lagrange. No todos los problemas de fuerzas centrales son integrables mediante funciones conocidas. No obstante, intentaremos explorar el problema de la manera más inmediata posible con las herramientas que ya hemos desarrollado.

3-1 REDUCCIÓN AL PROBLEMA EQUIVALENTE DE UN CUERPO

Consideremos un sistema monógeno de dos puntos materiales de masas m_1 y m_2 , en el cual las únicas fuerzas son las debidas a un potencial de interacción U . Supondremos primeramente que U es una función cualquiera del vector entre las dos partículas, $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, o de sus velocidades relativas, $\dot{\mathbf{r}}_2 - \dot{\mathbf{r}}_1$, o de sus derivadas superiores de $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$. Un tal sistema tiene seis grados de libertad y por tanto seis coordenadas generalizadas independientes. Consideremos que éstas sean las tres componentes del vector de posición del centro de masa, \mathbf{R} , más las tres componentes del vector diferencia $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$. La lagrangiana tendrá entonces la forma

$$L = T(\dot{\mathbf{R}}, \dot{\mathbf{r}}) - U(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, \dots). \quad (3-1)$$

La energía cinética T es la suma de la energía cinética del movimiento del centro de masa más la energía cinética del movimiento en torno al centro de masa, T' :

$$T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{\mathbf{R}}^2 + T'$$

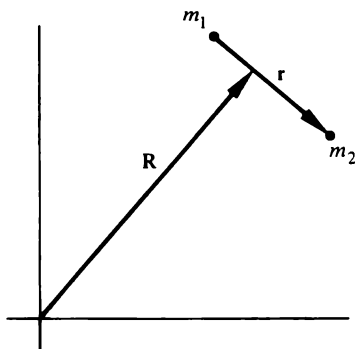


FIGURA 3-1
Coordenadas para el problema de los dos cuerpos.

siendo

$$T' = \frac{1}{2}m_1\dot{r}'_1{}^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{r}'_2{}^2.$$

Aquí, \mathbf{r}'_1 y \mathbf{r}'_2 son los vectores de posición de las dos partículas relativos al centro de masa y están relacionados con \mathbf{r} a través de

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'_1 &= -\frac{m_2}{m_1 + m_2}\mathbf{r}, \\ \mathbf{r}'_2 &= \frac{m_1}{m_1 + m_2}\mathbf{r}. \end{aligned} \tag{3-2}$$

Expresada en función de \mathbf{r} por medio de la ecuación (3-2), T' toma la forma

$$T' = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \dot{\mathbf{r}}^2$$

y la lagrangiana total (3-1) es

$$L = \frac{m_1 + m_2}{2} \dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \dot{\mathbf{r}}^2 - U(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, \dots). \tag{3-3}$$

Vemos que las tres coordenadas \mathbf{R} son cíclicas, por lo que el centro de masa o estará en reposo o se moverá uniformemente. Ninguna de las ecuaciones del movimiento para \mathbf{r} contendrá términos en los que intervenga \mathbf{R} o $\dot{\mathbf{R}}$. En consecuencia, en este caso resulta

particularmente sencillo el problema de la ignorancia. Bastará prescindir del primer término de la lagrangiana en todo el estudio que sigue.

El resto de la lagrangiana es exactamente lo que cabía esperar si tuviéramos un centro de fuerzas fijo con una partícula a una distancia r de él, que tuviera una masa

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \quad (3-4)$$

donde a μ se le da el nombre de *masa reducida*. Frecuentemente, la ecuación (3-4) se escribe en la forma

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}. \quad (3-5)$$

Así pues, el movimiento de dos cuerpos en torno a su centro de masa debido a una fuerza central se puede reducir siempre a un problema equivalente de un cuerpo.

3-2 ECUACIONES DEL MOVIMIENTO E INTEGRALES PRIMERAS

Vamos a limitarnos a fuerzas centrales conservativas, en donde el potencial es $V(r)$, función sólo de r , con lo que la fuerza está siempre dirigida a lo largo de r . Por los resultados del apartado anterior, sólo necesitamos considerar el problema de una partícula de masa m que se mueva en torno a un centro de fuerzas fijo que tomaremos por origen del sistema de coordenadas. Como la energía potencial sólo contiene la distancia radial, el problema tiene simetría esférica, es decir, cualquier rotación, en torno a cualquier eje fijo, puede no tener efecto alguno sobre la solución. Por tanto, una coordenada angular que represente rotación alrededor de un eje fijo debe ser cíclica. Estas propiedades de simetría dan lugar a una simplificación considerable del problema. Como el sistema tiene simetría esférica, el vector momento cinético total,

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p},$$

se conserva. Se deduce, por tanto, que \mathbf{r} es siempre perpendicular a la dirección fija de \mathbf{L} en el espacio. Esto sólo puede ser cierto si \mathbf{r} se encuentra siempre en un plano cuya normal sea paralela a \mathbf{L} . Si bien el rozamiento falla si \mathbf{L} es cero, en tal caso el movimiento debe tener lugar a lo largo de una recta que pase por el centro de fuerzas, ya que $\mathbf{L} = 0$ exige que \mathbf{r} sea paralelo a $\dot{\mathbf{r}}$, cosa que sólo puede cumplirse en un movimiento rectilíneo.* Por tanto, el movimiento bajo fuerza central es siempre un movimiento plano. Ahora bien, el movimiento de una partícula en el espacio está descrito por tres coordenadas; en coordenadas

* Formalmente: $\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\mathbf{n}_r + r\dot{\theta}\mathbf{n}_\theta$, luego $\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = 0$ exige que $\theta = 0$.

polares esféricas son el ángulo azimut θ , el ángulo cenital (o colatitud) ψ y la distancia radial r . Tomando el eje polar en la dirección de \mathbf{L} , el movimiento tendrá siempre lugar en un plano normal al eje polar. La coordenada ψ tendrá entonces sólo el valor constante $\pi/2$ y podremos prescindir de ella en el estudio que sigue. La conservación del vector momento cinético proporciona tres constantes del movimiento independientes (correspondientes a las tres componentes cartesianas). De hecho, dos de ellas, que expresan la *dirección* constante del momento cinético, se han utilizado para reducir el problema de tres grados de libertad a dos. La tercera de dichas constantes, correspondiente a la conservación del módulo de \mathbf{L} , sigue a nuestra disposición para completar la solución.

Expresada ahora en coordenadas polares, la lagrangiana es

$$\begin{aligned} L &= T - V \\ &= \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(r). \end{aligned} \quad (3-6)$$

Según ya vimos, θ es una coordenada cíclica cuya cantidad de movimiento canónica es el momento cinético del sistema:

$$p_{\theta} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}.$$

Una de las dos ecuaciones del movimiento será, simplemente,

$$\dot{p}_{\theta} = \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = 0 \quad (3-7)$$

con la integral inmediata

$$mr^2\dot{\theta} = l, \quad (3-8)$$

donde l es la magnitud constante del momento cinético. De (3-7) se deduce también que

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}r^2\dot{\theta}\right) = 0. \quad (3-9)$$

Se introduce el factor $\frac{1}{2}$ porque $\frac{1}{2}r^2\dot{\theta}$ es la *velocidad areolar* —área barrida por el vector de posición por unidad de tiempo. Esta interpretación se deduce del diagrama de la figura 3-2: el área barrida en un tiempo dt es

$$dA = \frac{1}{2}r(rd\theta),$$

y por tanto

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt}$$

La conservación del momento cinético es, pues, equivalente a decir que la velocidad areolar es constante. Tenemos aquí la demostración de la segunda ley de Kepler del movimiento planetario: el radio vector barre áreas iguales en tiempos iguales. Sin embargo, debemos recalcar que la constancia de la velocidad areolar es una propiedad del movimiento debido a una fuerza central y no está limitada a una ley de fuerza inversamente proporcional al cuadrado de la distancia.

La ecuación de Lagrange restante, para la coordenada r , es

$$\frac{d}{dt}(m\dot{r}) - m r \dot{\theta}^2 + \frac{\partial V}{\partial r} = 0. \quad (3 \cdot 10)$$

Designando por $f(r)$ el valor de la fuerza según r , $-\frac{\partial V}{\partial r}$, podemos escribir la ecuación en la forma

$$m\ddot{r} - m r \dot{\theta}^2 = f(r). \quad (3 \cdot 11)$$

Utilizando la integral primera (ec. 3-8), podemos eliminar $\dot{\theta}$ de la ecuación de movimiento, obteniendo una ecuación diferencial de segundo orden que sólo contiene r :

$$m\ddot{r} - \frac{l^2}{mr^3} = f(r). \quad (3 \cdot 12)$$

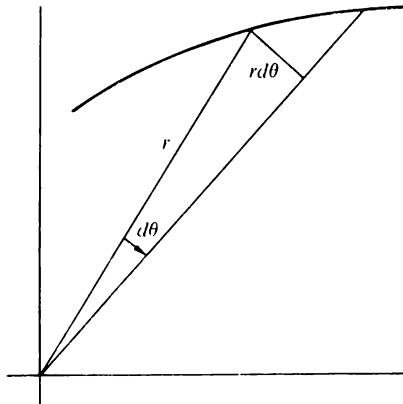


FIGURA 3-2

Área barrida por el vector de posición (radio vector) en un tiempo dt .

Disponemos aún de otra integral primera del movimiento, cual es la energía total, ya que las fuerzas son conservativas. Basándonos en el teorema general de la conservación de la energía podemos decir, de manera inmediata, que es constante del movimiento

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + V(r), \quad (3-13)$$

donde E es la energía del sistema. De otra manera, podríamos de nuevo deducir la integral primera directamente de las ecuaciones del movimiento (3-7) y (3-12). La última puede escribirse en la forma

$$m\ddot{r} = -\frac{d}{dr}\left(V + \frac{1}{2}\frac{l^2}{mr^2}\right). \quad (3-14)$$

Si multiplicamos por \dot{r} los dos miembros de la ecuación (3-14), el primer miembro queda en la forma

$$m\ddot{r}\dot{r} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{r}^2\right).$$

El segundo miembro puede escribirse análogamente como derivada total respecto al tiempo, ya que si $g(r)$ es una función cualquiera de r , la derivada total de g respecto al tiempo tiene la forma

$$\frac{d}{dt}g(r) = \frac{dg}{dr}\frac{dr}{dt}.$$

Luego, la ecuación (3-14) es equivalente a

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{r}^2\right) = -\frac{d}{dt}\left(V + \frac{1}{2}\frac{l^2}{mr^2}\right)$$

o sea

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{l^2}{mr^2} + V\right) = 0,$$

y por tanto

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{l^2}{mr^2} + V = \text{constante}. \quad (3-15)$$

La ecuación (3-15) constituye el enunciado de la conservación de la energía total, ya que utilizando (3-8) para l del segundo término del primer miembro podemos escribir

$$\frac{1}{2} \frac{l^2}{mr^2} = \frac{1}{2mr^2} m^2 r^4 \dot{\theta}^2 = \frac{mr^2 \dot{\theta}^2}{2},$$

y la ecuación (3-15) se reduce a la (3-13).

Estas dos integrales primeras nos dan dos de las cuadraturas necesarias para completar el problema. Como hay dos variables, r y θ , se necesitará un total de cuatro integraciones para resolver las ecuaciones del movimiento. Las dos primeras integraciones han dejado las ecuaciones de Lagrange en forma de dos ecuaciones de primer orden (3-8) y (3-15); las dos integraciones restantes pueden realizarse (formalmente) de diversas maneras. Tal vez el procedimiento más sencillo parte de la ecuación (3-15). Despejando \dot{r} tenemos

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m} \left(E - V - \frac{l^2}{2mr^2} \right)}, \quad (3\ 16)$$

o sea

$$dt = \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m} \left(E - V - \frac{l^2}{2mr^2} \right)}}. \quad (3\ 17)$$

Sea r_0 el valor que tiene r en el instante $t = 0$. La integral de los dos miembros de la ecuación entre el estado inicial y el estado en el instante t toma la forma

$$t = \int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m} \left(E - V - \frac{l^2}{2mr^2} \right)}}. \quad (3\ 18)$$

Esta expresión nos da t en función de r y de las constantes de integración E , l y r_0 . No obstante, se puede invertir, al menos formalmente, para dar r en función de t y de las constantes. Una vez hallada así r , se deduce inmediatamente θ a partir de la ecuación (3-8), que puede escribirse en la forma

$$d\theta = \frac{l dt}{mr^2}. \quad (3\ 19)$$

Si es θ_0 el valor inicial de θ , la integral de (3-19) será, simplemente,

$$\theta = l \int_0^t \frac{dt}{mr^2(t)} + \theta_0. \quad (3-20)$$

Las ecuaciones (3-18) y (3-20) son las dos ecuaciones que quedan y, formalmente, el problema se ha reducido a cuadraturas, con cuatro constantes de integración E, l, r_0, θ_0 . Estas constantes no son las únicas que pueden considerarse. Podríamos igualmente haber tomado $r_0, \theta_0, \dot{r}_0, \dot{\theta}_0$, pero desde luego E y l se pueden siempre determinar a partir de este conjunto de valores. Sin embargo, para muchas aplicaciones, el conjunto que contiene la energía y el momento cinético es el natural. En Mecánica cuántica, las constantes como r y θ , o \dot{r} y $\dot{\theta}$, carecen de significado, pero podemos seguir hablando de la energía del sistema o de su momento cinético. Las diferencias sobresalientes entre las Mecánicas clásica y cuántica aparecen en ambas teorías en las propiedades de E y l . Por tanto, para estudiar la transición a las teorías cuánticas será importante dar la descripción clásica del sistema en función de su energía y su momento cinético.

3-3 PROBLEMA UNIDIMENSIONAL EQUIVALENTE Y CLASIFICACIÓN DE ÓRBITAS

Aun cuando se haya resuelto formalmente el problema, desde un punto de vista práctico las integrales (3-18) y (3-20) suelen ser de difícil manejo y en todo caso concreto suele ser más conveniente efectuar la integración de alguna otra manera. Pero antes de obtener la solución para leyes de fuerza concreta, veamos qué podemos aprender del movimiento en el caso general, utilizando solamente las ecuaciones del movimiento y los teoremas de conservación, sin exigir soluciones explícitas.

Por ejemplo, en el caso de un sistema de energía y momento cinético conocidos, podemos determinar de manera inmediata la magnitud y dirección de la velocidad de la partícula en función de la distancia r . La magnitud v se deduce inmediatamente de la conservación de la energía en la forma

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + V(r)$$

o sea

$$v = \sqrt{\frac{2}{m}(E - V(r))}. \quad (3-21)$$

La velocidad radial —componente de $\dot{\mathbf{r}}$ según el vector de posición— se dio ya en la ecuación (3-16). Combinada con la magnitud v da suficiente información para obtener la

dirección de la velocidad.* Estos resultados y otros muchos, se pueden también obtener considerando un problema unidimensional equivalente.

La ecuación del movimiento en r , con θ expresada en función de l (ec. 3-12), sólo contiene r y sus derivadas. Es la misma ecuación que se obtendría para un problema unidimensional ficticio en el cual una partícula de masa m esté sometida a una fuerza

$$f' = f + \frac{l^2}{mr^3}. \quad (3-22)$$

El significado del término adicional queda claro si se escribe en la forma $mr\dot{\theta}^2 = mv_{\theta}^2/r$, que es la conocida fuerza centrífuga. Del teorema de conservación de la energía se puede obtener un enunciado equivalente. Según la ecuación (3-15), el movimiento de la partícula en r es el de un problema unidimensional con una energía potencial ficticia:

$$V' = V + \frac{1}{2} \frac{l^2}{mr^2}. \quad (3-22')$$

Para comprobarlo, observemos que

$$f' = -\frac{\partial V'}{\partial r} = f(r) + \frac{l^2}{mr^3},$$

que concuerda con la ecuación (3-22). El teorema de conservación de la energía puede, pues, escribirse también en la forma

$$E = V' + \frac{1}{2} m\dot{r}^2. \quad (3-15')$$

Como ilustración de este método de examen del movimiento, consideremos una gráfica de V' en función de r para el caso concreto de una fuerza atractiva inversamente proporcional al cuadrado de la distancia:

$$f = -\frac{k}{r^2}.$$

(Para k positiva, el signo menos asegura que la fuerza esté dirigida *hacia* el centro de

* Alternativamente, la conservación del momento cinético da la velocidad angular $\dot{\theta}$ y ésta, junto con \dot{r} da la magnitud y dirección de $\dot{\mathbf{r}}$.

fuerzas.) Para esta fuerza, la energía potencial es

$$V = -\frac{k}{r}$$

y el potencial ficticio correspondiente es

$$V' = -\frac{k}{r} + \frac{l^2}{2mr^2}$$

En la figura 3-3 podemos ver dicha gráfica; las dos líneas de trazos representan las componentes separadas

$$-\frac{k}{r} \quad \text{y} \quad \frac{l^2}{2mr^2},$$

y la línea de trazo continuo es la suma V' .

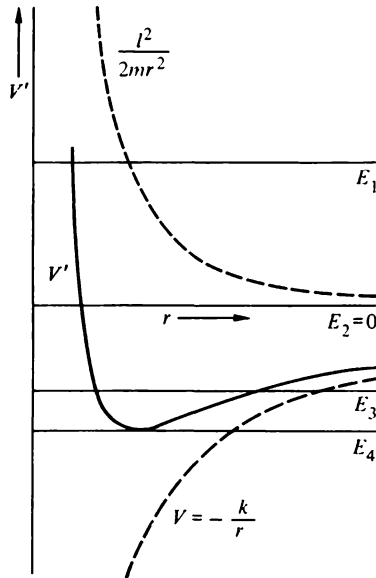


FIGURA 3-3

Potencial unidimensional equivalente para una fuerza atractiva inversamente proporcional al cuadrado de la distancia.

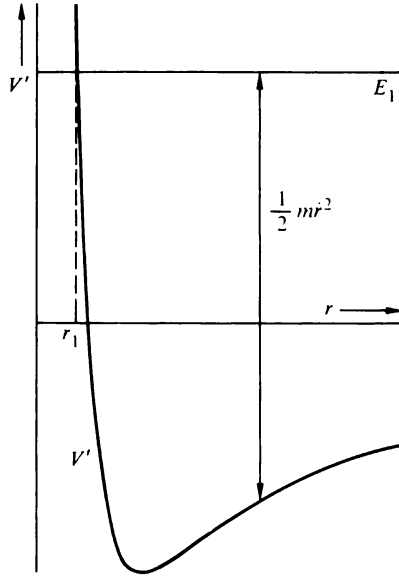


FIGURA 3-4

Movimiento ilimitado para una fuerza inversamente proporcional al cuadrado de la distancia.

Consideremos ahora el movimiento de una partícula que tenga la energía E_1 indicada en las figuras 3-3 y 3-4. Está claro que dicha partícula nunca podrá acercarse a una distancia inferior a r_1 (cfr. fig. 3-4). En caso contrario, con $r < r_1$, V' sería mayor que E_1 y según la ecuación (3-15') la energía cinética debería ser negativa, lo que correspondería a una velocidad imaginaria. En cambio, no existe límite superior para los valores posibles de r , por lo que la órbita no está acotada. Una partícula puede venir del infinito, chocar contra la «barrera centrífuga repulsiva», ser repelida y volver a alejarse infinitamente (cfr. fig. 3-5). La distancia entre E y V' es $\frac{1}{2} m \dot{r}^2$, es decir, proporcional al cuadrado de la velocidad radial y se anula, naturalmente, en el punto de inversión r_1 . Al mismo tiempo, la distancia entre E y V en la gráfica es la energía cinética $\frac{1}{2} m v^2$ para el valor de r dado. Por tanto, la distancia entre las curvas V y V' es $\frac{1}{2} m r^2 \theta^2$. Estas curvas nos dan, por tanto, la magnitud de la velocidad de la partícula y sus componentes para una distancia r cualquiera, a la energía y momento cinético dados. Esta información es suficiente para proporcionar una imagen aproximada de la forma de la órbita.

Para la energía $E_2 = 0$ (cfr. fig. 3-3) se obtiene una imagen aproximada parecida del comportamiento de la órbita. Pero para cualquier energía inferior, como la E_3 , indicada en la figura 3-6, tenemos un resultado muy diferente. Además de un

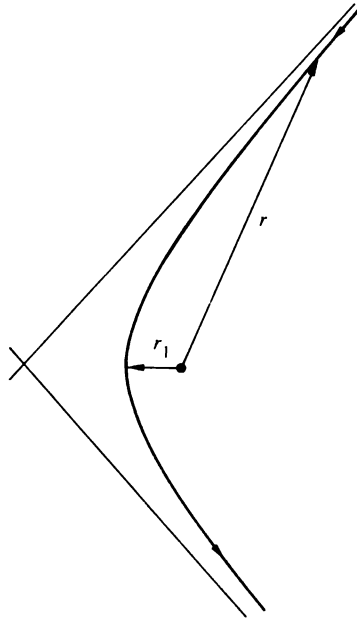


FIGURA 3-5

Imagen esquemática de la órbita para E_1 correspondiente a un movimiento ilimitado.

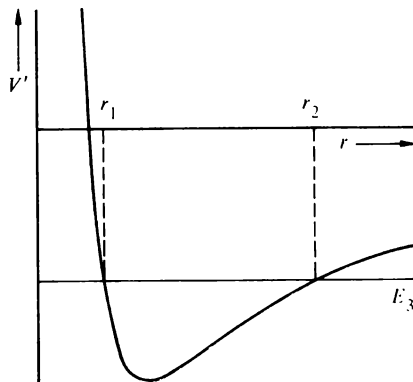


FIGURA 3-6

Potencial unidimensional equivalente para una fuerza inversamente proporcional al cuadrado de la distancia, que ilustra el movimiento acotado a energías negativas.

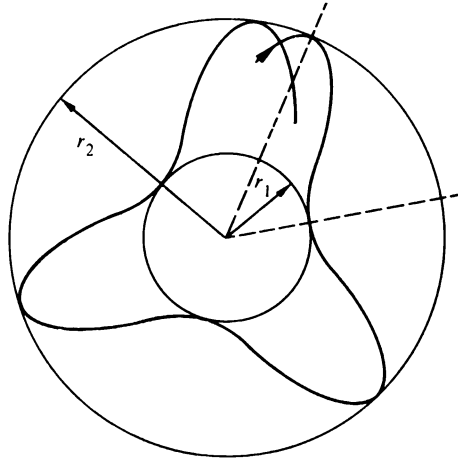


FIGURA 3-7

Ilustración esquemática de la naturaleza de las órbitas en el movimiento acotado.

límite inferior r_1 , hay también un valor máximo r_2 que no puede superar r con energía cinética positiva. El movimiento está entonces «limitado» y hay dos puntos de inversión, r_1 y r_2 , a las llamadas *distancias apsidales*. Esto no significa que las órbitas sean necesariamente cerradas. Todo lo que podemos decir es que están acotadas, contenidas entre dos circunferencias de radios r_1 y r_2 con puntos de inversión que se hallan siempre en dichas circunferencias (cfr. fig. 3-7).

Si la energía es E_4 justo la del mínimo del potencial ficticio, como se indica en la figura 3-8, los dos límites coinciden. En tal caso, el movimiento sólo es posible para un radio, $\dot{r} = 0$, y la órbita es circular. Recordando que la «fuerza» efectiva es la pendiente de la curva V cambiada de signo, el requisito para órbitas circulares es simplemente que f' valga cero, o sea

$$f(r) = -\frac{l^2}{mr^3} = -mr\dot{\theta}^2.$$

Tenemos aquí la conocida condición elemental de que la fuerza aplicada sea de igual magnitud y opuesta a la «fuerza efectiva invertida» o aceleración centrípeta.* Las propiedades

* El caso de $E < E_4$ no corresponde a movimiento físicamente posible, ya que entonces \dot{r}^2 sería negativa, o sea, \dot{r} debería ser imaginaria.

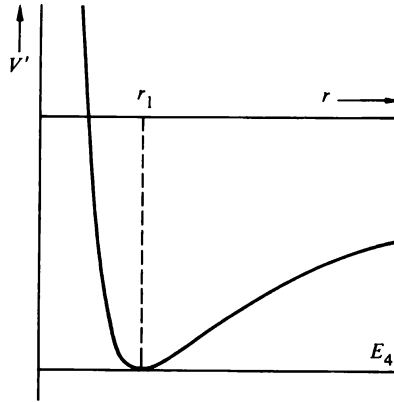


FIGURA 3-8

Potencial unidimensional equivalente de la ley de la fuerza inversamente proporcional al cuadrado de la distancia, que ilustra la condición de órbitas circulares.

de las órbitas circulares y las condiciones para ellas las estudiaremos con mayor detalle en § 3-6.

Recalquemos que todo este estudio de las órbitas para energías diferentes se ha realizado para un valor del momento cinético. Al cambiar l cambiarán los detalles cuantitativos de la curva V' pero ello no afectará a la clasificación general de los tipos de órbita.

En el caso de la ley de fuerza atractiva inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que hemos estudiado, veremos que la órbita correspondiente a E_1 es una hipérbola, la correspondiente a E_2 es una parábola y la correspondiente a E_3 es una elipse. En el caso de otras fuerzas, las órbitas pueden tener formas no tan sencillas. No obstante, la misma división cualitativa general en órbitas abiertas, limitadas y circulares será cierta para todo potencial atractivo que (1) disminuya más lentamente que $1/r^2$ cuando $r \rightarrow \infty$; (2) tienda a infinito más lentamente que $1/r^2$ cuando $r \rightarrow 0$. La primera condición asegura que el potencial predomina sobre el término centrífugo a las r grandes, mientras la segunda condición es tal que para r pequeña el término importante es el centrífugo.

La naturaleza cualitativa del movimiento se verá alterada si el potencial no cumple estos requisitos, si bien podremos aún utilizar el método del potencial equivalente para examinar las características de las órbitas. Por ejemplo, consideremos el potencial atractivo

$$V(r) = -\frac{a}{r^3}, \quad \text{siendo} \quad f = -\frac{3a}{r^4}.$$

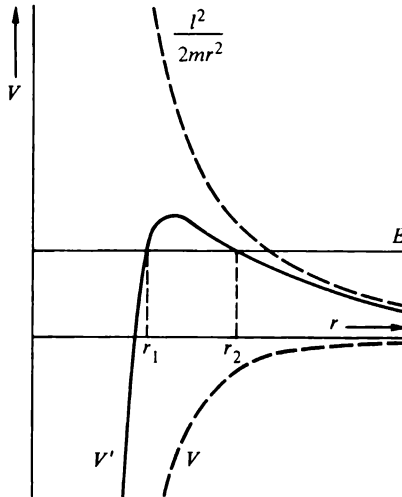


FIGURA 3-9

Potencial unidimensional equivalente para una fuerza atractiva inversamente proporcional a la cuarta potencia de la distancia.

En tal caso, el diagrama energético es el representado en la figura 3-9. Para una energía E hay dos tipos posibles de movimiento, según cuál sea el valor inicial de r . Si es r_0 menor que r_1 el movimiento será limitado, r se mantendrá siempre inferior a r_1 y la partícula pasará eventualmente por el centro de fuerzas. Si r es inicialmente mayor que r_2 , se mantendrá siempre en esa condición; el movimiento será ilimitado y la partícula no podrá nunca penetrar en el pozo de «potencial». De nuevo, la condición inicial $r_1 < r_0 < r_2$ no es posible físicamente.

Otro ejemplo interesante del método lo tenemos en el caso de una fuerza recuperadora lineal (oscilador armónico isótropo):

$$f = -kr, \quad V = \frac{1}{2}kr^2.$$

En el caso de momento cinético nulo, que corresponde al movimiento rectilíneo, $V' = V$ y

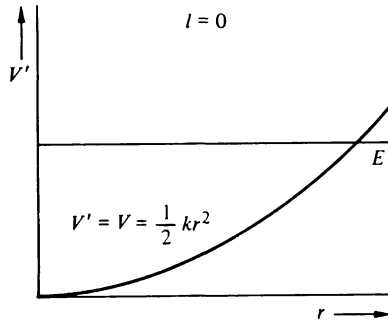


FIGURA 3-10

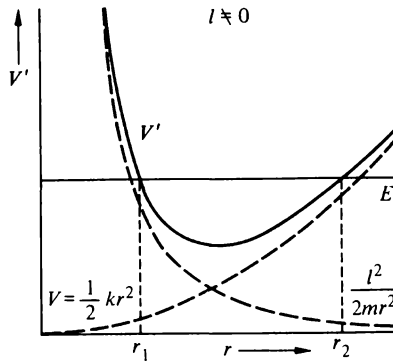


FIGURA 3-11

la situación es la representada en la figura 3-10. Para toda energía positiva el movimiento es limitado y según sabemos, armónico simple. Si $l \neq 0$ tenemos el estado representado en la figura 3-11. Entonces, el movimiento está siempre limitado para todas las energías físicamente posibles y no pasa por el centro de fuerzas. En este caso particular, se ve fácilmente que la órbita es elíptica, ya que si $\mathbf{f} = -kr$, las componentes x e y de la fuerza son

$$f_x = -kx, \quad f_y = -ky.$$

El movimiento total es, pues, el resultante de dos movimientos armónicos simples perpendiculares y de igual frecuencia, lo que conduce a una órbita elíptica. Ejemplo conocido es el del péndulo esférico para amplitudes pequeñas. La composición de dos oscilaciones sinusoidales perpendiculares cuyas frecuencias den por cociente un número racional da lugar a las conocidas figuras de Lissajous.* El movimiento debido a una fuerza central restauradora lineal da lugar, pues, a la más sencilla de las figuras de Lissajous.

3-4 TEOREMA DEL VIRIAL

Otra propiedad del movimiento debido a una fuerza central se puede deducir como caso particular de un teorema general válido para una gran variedad de sistemas —el *teorema del virial*. Tiene un carácter distinto del de los teoremas tratados anteriormente por ser de naturaleza *estadística*, es decir, trata de las medias temporales de distintas magnitudes mecánicas.

Considéremos un sistema general de puntos materiales de vectores de posición \mathbf{r}_i y fuerzas aplicadas \mathbf{F}_i (incluidas las fuerzas de ligadura). Las ecuaciones fundamentales del movimiento serán, pues,

$$\dot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{F}_i. \quad (1-1)$$

Nos interesa la cantidad

$$G = \sum_i \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{r}_i,$$

en donde el sumatorio se extiende a todas las partículas del sistema. La derivada temporal total de esta cantidad es

$$\frac{dG}{dt} = \sum_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \mathbf{p}_i + \sum_i \dot{\mathbf{p}}_i \cdot \mathbf{r}_i. \quad (3-23)$$

El primer término puede transformarse en la forma

$$\sum_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \mathbf{p}_i = \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i = \sum_i m_i v_i^2 = 2T,$$

* Véase, p. ej., K. R. Symon, *Mechanics*, 3.ª ed. (Reading, Massachusetts: Addison-Wesley, 1971), § 3-10.

mientras que el segundo, en virtud de la ecuación (1-1) es

$$\sum_i \dot{\mathbf{p}}_i \cdot \mathbf{r}_i = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i.$$

Por tanto, las ecuaciones (3-23) se reducen a

$$\frac{d}{dt} \sum_i \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{r}_i = 2T + \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i. \quad (3-24)$$

La media temporal de la ecuación (3-24) para un intervalo de tiempo τ se obtiene integrando los dos miembros respecto a t entre 0 y τ y dividiendo por τ :

$$\frac{1}{\tau} \int_0^\tau \frac{dG}{dt} dt \equiv \overline{\frac{dG}{dt}} = \overline{2T} + \overline{\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i}$$

o sea

$$\overline{2T} + \overline{\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i} = \frac{1}{\tau} [G(\tau) - G(0)]. \quad (3-25)$$

Si el movimiento es periódico, es decir, si todas las coordenadas se repiten al cabo de un cierto tiempo y si se toma τ de manera que sea el periodo, el segundo miembro de (3-25) se anulará. Podemos llegar a una conclusión análoga aun cuando el movimiento no sea periódico, con tal que las coordenadas y velocidades de todas las partículas se mantengan finitas de manera que haya una cota superior de G . Tomando τ suficientemente largo, el segundo miembro de la ecuación (3-25) se puede hacer tan pequeño como queramos. En ambos casos se deduce, pues, que

$$\overline{T} = -\frac{1}{2} \overline{\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i}. \quad (3-26)$$

La ecuación (3-26) se conoce por el nombre de *teorema del virial* y al segundo miembro se le da el nombre de *virial de Clausius*. En esta forma, el teorema resulta muy útil en la teoría cinética de los gases. Así, el teorema del virial puede utilizarse para deducir la ley de Boyle para los gases perfectos mediante el siguiente razonamiento.

Consideremos un gas constituido por N átomos confinados en un recipiente de volumen V . Supondremos además que el gas está a una temperatura T (no confundir esto con el símbolo de la energía cinética). Según el teorema de la equipartición de la energía que nos da la teoría cinética, la energía cinética media de cada átomo viene dada por $\frac{3}{2}kT$, donde k es la constante de Boltzmann, relación que, de hecho, constituye la definición de la temperatura. El primer miembro de la ecuación (3-26) será, pues,

$$\frac{3}{2}NkT.$$

En el segundo miembro de la ecuación (3-26), las fuerzas \mathbf{F}_i comprenden tanto las fuerzas de interacción entre átomos como las fuerzas de ligadura del sistema. Por definición, gas perfecto es aquél en el cual es despreciable la contribución de las fuerzas de interacción al virial. Esto sucede, p. ej., si el gas está tan enrarecido que los choques entre átomos son muchísimo menos numerosos que sus choques contra las paredes del recipiente. Estas paredes son las que constituyen las ligaduras del sistema y las fuerzas de ligadura, \mathbf{F}_i , están localizadas en la pared y actúan siempre que con ésta choque un átomo. Por tanto, la suma del segundo miembro de la ecuación (3-26) podrá sustituirse en el valor medio por una integral extendida a la superficie del recipiente. La fuerza de ligadura representa la reacción de la pared a las fuerzas de colisión ejercidas por los átomos sobre la pared, es decir, a la presión P . Tomando, como de costumbre, el vector unitario \mathbf{n} según la normal hacia afuera de la superficie, podremos escribir

$$d\mathbf{F}_i = -P\mathbf{n}dA,$$

o sea

$$\frac{1}{2}\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i = -\frac{P}{2}\int \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} dA.$$

Pero, según el teorema de Gauss,

$$\int \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} dA = \int \nabla \cdot \mathbf{r} dV = 3V.$$

El teorema del virial (ec. 3-26), en el caso del sistema representativo de un gas perfecto, podrá pues escribirse en la forma

$$\frac{3}{2}NkT = \frac{3}{2}PV,$$

que, suprimiendo el factor común a ambos miembros $\frac{3}{2}$, se convierte en la conocida ley de Boyle. Cuando contribuyan al virial fuerzas entre partículas, ya no se cumplirá la ley de los gases perfectos. El teorema del virial es, en la teoría cinética clásica, la herramienta principal para calcular la ecuación de estado correspondiente al gas no perfecto.

Aún podemos demostrar que si las fuerzas F_i son la suma de fuerzas F'_i que no sean de rozamiento más fuerzas de rozamiento f_i proporcionales a la velocidad, el virial sólo depende de las F'_i ; no hay contribución de las f_i . Desde luego, el movimiento del sistema no podrá extinguirse a consecuencia de las fuerzas de rozamiento. Deberá irse entregando constantemente energía al sistema para mantener el movimiento; de no ser así, *todas* las medias temporales se anularían al crecer τ indefinidamente. (Ver Ejercicio 4.)

Si las fuerzas derivan de un potencial, el teorema queda en la forma

$$\bar{T} = \frac{1}{2} \overline{\sum_i \nabla V \cdot \mathbf{r}_i}, \quad (3 \ 27)$$

y en el caso de una sola partícula que se mueva bajo la acción de una fuerza central, se reduce a

$$\bar{T} = \frac{1}{2} \overline{\frac{\partial V}{\partial r}} r. \quad (3 \ 28)$$

Si V es una función potencial de r ,

$$V = ar^{n+1},$$

donde se toma el exponente de manera que la ley de la fuerza varíe de igual manera que r^n , entonces

$$\frac{\partial V}{\partial r} r = (n+1)V,$$

y la ecuación (3-28) queda

$$\bar{T} = \frac{n+1}{2} \bar{V}. \quad (3 \ 29)$$

La aplicación del teorema de Euler para funciones homogéneas (cfr. p. 75) nos indica que la ecuación (3-29) es válida siempre que V sea función homogénea en r de grado $n+1$. En el caso particular de fuerzas inversamente proporcionales al cuadrado de la distancia, $n =$

= -2 y el teorema del virial toma la conocida forma:

$$\bar{T} = -\frac{1}{2}\bar{V}. \quad (3-30)$$

3-5 ECUACIÓN DIFERENCIAL DE LA ÓRBITA Y POTENCIALES DE FUERZAS INTEGRABLES

Al tratar detalles concretos de problemas de fuerzas centrales reales, conviene efectuar un cambio de la orientación de nuestro tratamiento. Hasta ahora, resolver un problema significaba hallar r y θ en función del tiempo siendo E , l , etc., constantes de integración. Pero muy a menudo, lo que realmente buscamos es la ecuación de la órbita, es decir, la dependencia entre r y θ , eliminando el parámetro t . En el caso de problemas de fuerzas centrales esta eliminación es particularmente sencilla, ya que t sólo figura en las ecuaciones del movimiento en forma de variable respecto a la cual se deriva. En verdad, una ecuación del movimiento, (3-8), no hace sino darnos una relación definida entre una variación infinitesimal dt y la variación $d\theta$ correspondiente:

$$l dt = mr^2 d\theta. \quad (3-31)$$

La relación correspondiente entre las derivadas respecto a t y respecto a θ es

$$\frac{d}{dt} = \frac{l}{mr^2} \frac{d}{d\theta}. \quad (3-32)$$

Estas relaciones se pueden utilizar para convertir la ecuación del movimiento (3-12) en una ecuación diferente para la órbita. Alternativamente, se pueden aplicar a la solución formal de las ecuaciones del movimiento (dadas en ec. 3-17) para proporcionar directamente la ecuación de la órbita. De momento, vamos a seguir la primera de estas posibilidades.

A partir de (3-32) podemos escribir una segunda derivada respecto a t

$$\frac{d^2}{dt^2} = \frac{l}{mr^2} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{l}{mr^2} \frac{d}{d\theta} \right),$$

y la ecuación de Lagrange para r , (3-12), queda en la forma

$$\frac{l}{r^2} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{l}{mr^2} \frac{dr}{d\theta} \right) - \frac{l^2}{mr^3} = f(r). \quad (3-33)$$

Para simplificar (3-33), notemos que

$$\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\theta} = - \frac{d(1/r)}{d\theta};$$

luego, si hacemos el cambio de variable $u = 1/r$, tenemos

$$\frac{l^2 u^2}{m} \left(\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \right) = - f \left(\frac{1}{u} \right). \quad (3-34a)$$

Como

$$\frac{d}{du} = \frac{dr}{du} \frac{d}{dr} = - \frac{1}{u^2} \frac{d}{dr},$$

la ecuación (3-34a) podrá también escribirse en función del potencial en la forma

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = - \frac{m}{l^2} \frac{d}{du} V \left(\frac{1}{u} \right). \quad (3-34b)$$

Una y otra forma de las ecuaciones (3-34) es, pues, una ecuación diferencial de la órbita si se conoce la ley de la fuerza f o el potencial V . Inversamente, si se conoce la ecuación de la órbita, es decir, si se da r en función de θ , podemos seguir el camino en sentido opuesto y obtener la ley de la fuerza $f(r)$.

Queremos, sin embargo, obtener resultados un tanto generales. Por ejemplo, a partir de (3-34) podemos demostrar que la órbita es simétrica respecto a los puntos de inversión del movimiento. Para ello, notaremos que si la órbita es simétrica será posible reflejarla respecto a la dirección del ángulo de inversión sin producir variación alguna. Si se eligen las coordenadas de manera que el punto de inversión corresponda a $\theta = 0$, la reflexión podrá hacerse matemáticamente sustituyendo θ por $-\theta$. La ecuación diferencial de la órbita (3-34) es, evidentemente, invariante ante tal sustitución. Además, las condiciones iniciales

$$u = u(0), \quad \left(\frac{du}{d\theta} \right)_0 = 0, \quad \text{para } \theta = 0,$$

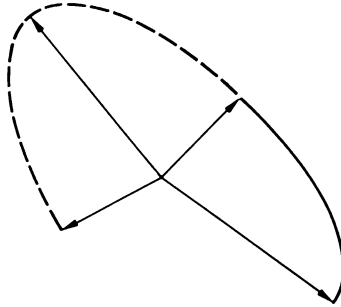


FIGURA 3-12

Extensión de la órbita por reflexión de una porción respecto a los vectores apsidales.

tampoco se verán afectadas en este caso. Luego, la ecuación de la órbita debe ser la misma tanto si la expresamos en función de θ como en función de $-\theta$, que es la conclusión que buscábamos. Por tanto, *la órbita es invariante ante una reflexión respecto a los vectores apsidales*. De hecho, esto significa que se puede trazar la órbita completa si se conoce la porción de la órbita comprendida entre dos puntos de inversión cualesquiera. La reflexión de la porción dada respecto a uno de los vectores apsidales produce una dilatación de la órbita en su proximidad y se puede repetir este proceso indefinidamente hasta completar el resto de la órbita, tal como se ilustra en la figura 3-12.

Para una ley de fuerza particular cualquiera, la ecuación real de la órbita debe obtenerse integrando la ecuación diferencial (3-34) en una u otra forma. No obstante, no es necesario seguir todos los detalles de la integración, puesto que ya se ha realizado la mayor parte del trabajo al resolver la ecuación del movimiento (3-12). Sólo queda eliminar t de la solución (3-17) por medio de (3-31), lo que da

$$d\theta = \frac{l \, dr}{mr^2 \sqrt{\frac{2}{m} \left(E - V(r) - \frac{l^2}{2mr^2} \right)}} \quad (3-35)$$

Con ligeras transformaciones, la integral de (3-35) es

$$\theta = \int_{r_0}^r \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{2mE}{l^2} - \frac{2mV}{l^2} - \frac{1}{r^2}}} + \theta_0 \quad (3-36)$$

o bien, si hacemos el cambio de variable $u = 1/r$,

$$\theta = \theta_0 - \int_{u_0}^{u''} \frac{du}{\sqrt{\frac{2mE}{l^2} - \frac{2mV}{l^2} - u^2}} \quad (3-37)$$

Al igual que en el caso de la ecuación del movimiento, la ecuación (3-37), para resolver formalmente el problema, no siempre es una solución ejecutable porque frecuentemente la integral no se puede expresar mediante funciones conocidas. En realidad, sólo se han estudiado ciertos tipos de leyes de fuerza. Las más importantes son las funciones potenciales de r ,

$$V = ar^{n+1} \quad (3-38)$$

con lo que la fuerza varía como lo hace la potencia n -ésima de r .* Con este potencial, la ecuación (3-37) queda en la forma

$$\theta = \theta_0 - \int_{u_0}^{u''} \frac{du}{\sqrt{\frac{2mE}{l^2} - \frac{2ma}{l^2} u^{-n-1} - u^2}} \quad (3-39)$$

También esta será integrable mediante funciones simples tan sólo en ciertos casos. Si la cantidad subradical no tiene potencias de u superiores al cuadrado, el denominador tiene la forma $\sqrt{\alpha u^2 + \beta u + \gamma}$ y se podrá efectuar la integración directamente mediante funciones circulares. Esta restricción equivale a exigir que

$$-n - 1 = 0, 1, 2,$$

o, excluyendo el caso $n = -1$,

$$n = -2, -3,$$

* En lo que sigue hay que excluir el caso $n = -1$. En el potencial (3-38) corresponde a un potencial constante, es decir, no hay fuerza alguna. Un caso igualmente anómalo se tiene si se usa el exponente directamente en la ley de la fuerza, ya que una fuerza que varíe como r^{-1} corresponde a un potencial logarítmico que no sería una ley potencial. El potencial logarítmico es inusual para el movimiento en torno a un punto; es más característico de una fuente *lineal*.

que corresponde a las leyes de fuerza inversamente proporcional al cuadrado o al cubo. Otro caso fácilmente integrable es el correspondiente a $n = 1$, es decir, a fuerza lineal; ya que entonces la ecuación (3-39) puede escribirse en la forma

$$\theta = \theta_0 - \int_{u_0}^u \frac{du}{\sqrt{\frac{2mE}{l^2} - \frac{2ma}{l^2} \frac{1}{u^2} - u^2}} \quad (3-39')$$

Si efectuamos la sustitución

$$u^2 = x, \quad du = \frac{dx}{2\sqrt{x}},$$

la ecuación (3-39') queda en la forma

$$\theta = \theta_0 - \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2mE}{l^2} x - \frac{2ma}{l^2} - x^2}}, \quad (3-40)$$

que tiene también la forma buscada. Así pues, una solución mediante funciones simples la obtendremos para los exponentes

$$n = 1, -2, -3.$$

Esto no quiere decir que no sean integrables otras potencias, sino que conducen a funciones que no son tan conocidas. Por ejemplo, existe una gama de exponentes para los cuales la ecuación (3-39) entraña *integrales elípticas*, expresándose la solución mediante *funciones elípticas*.

Por definición, una integral elíptica es

$$\int R(x, \omega) dx,$$

donde R es una función racional cualquiera de x y ω , definiéndose ω en la forma

$$\omega = \sqrt{\alpha x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 + \delta x + \eta}.$$

Desde luego, α y β no pueden ser simultáneamente nulas, ya que en tal caso la integral se podría evaluar mediante funciones circulares. Puede demostrarse (Whittaker y Watson, *Modern Analysis*, 4.ª ed., p. 512) que toda integral de ese tipo puede reducirse a formas que entrañan funciones circulares y las integrales elípticas de Legendre de primera, segunda y tercera especie. Existen tablas completas y detalladas de dichas integrales elípticas normalizadas y se han estudiado exhaustivamente sus propiedades y relaciones con las funciones elípticas. Intrínsecamente, no exigen un concepto lógico más elevado para su uso que el que exigen las funciones circulares; solamente, no son tan familiares. De la definición se ve que la integral de (3-39) se puede evaluar mediante funciones elípticas si

$$n = -4, -5.$$

Podemos intentar poner la integral en otra forma que lleve también a integrales elípticas multiplicando numerador y denominador por u^ρ donde ρ es un exponente indeterminado. Entonces, la integral queda en la forma

$$\int \frac{u^\rho du}{\sqrt{\frac{2mE}{l^2} u^{2\rho} - \frac{2ma}{l^2} u^{-n-1+2\rho} - u^{2(\rho+1)}}$$

donde la expresión subradical es un polinomio de grado superior al cuarto salvo si $\rho = 1$. Por tanto, la integral no será peor que la elíptica sólo si

$$-n - 1 + 2 = 0, 1, 2, 3, 4$$

o sea

$$n = +1, 0, -1, -2, -3.$$

Para $n = +1, -2, -3$ las soluciones se reducen a funciones circulares (ya hemos eliminado el caso $n = -1$), por lo que este procedimiento sólo lleva a funciones elípticas

para $n = 0$.

Podemos de nuevo obtener integrales del tipo elíptico en ciertos casos haciendo el cambio de variable $u^2 = x$. La integral en cuestión aparece entonces en la forma

$$\frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{2mE}{l^2}x - \frac{2ma}{l^2}x^{(1-n)/2} - x^2}},$$

que se reduce a la elíptica para

$$\frac{1-n}{2} = 3, 4$$

lo que lleva a los exponentes

$$n = -5, -7.$$

Por último, podemos hacer el truco de multiplicar por x numerador y denominador y la condición para obtener integrales elípticas o más sencillas será

$$\frac{1-n}{2} + 2 = 0, 1, 2, 3, 4$$

o sea

$$n = +5, +3, +1, -1, -3,$$

que conduce a nuevas posibilidades solamente para $n = +5, +3$. El número total de exponentes enteros que dan lugar a funciones elípticas es, pues,

$$n = +5, +3, 0, -4, -5, -7.$$

Aun cuando esto agota las posibilidades para exponentes enteros, mediante transformaciones adecuadas puede demostrarse que algunos exponentes fraccionarios conducen a

integrales elípticas.

3-6 CONDICIONES PARA ÓRBITAS CERRADAS (TEOREMA DE BERTRAND)

Aún no hemos sacado toda la información que puede obtenerse del problema unidimensional equivalente o de la ecuación de la órbita sin resolver explícitamente el movimiento. En particular, se puede deducir un teorema potente y que induzca a meditar acerca de los tipos de fuerzas centrales atractivas que lleven a *órbitas cerradas*, es decir, órbitas en las cuales la partícula llegue a trazar de nuevo sus propios pasos.

Ya hemos descrito un tipo de órbita cerrada, cual es la circunferencia centrada en el centro de fuerzas. Para todo l dado, esto tendrá lugar si el potencial equivalente $V'(r)$ tiene un mínimo o máximo a cierta distancia r_0 y si la energía E es igual a $V'(r_0)$. El requisito de que V' tenga un extremo equivale a la anulación de f' en r_0 , lo que conduce a la condición deducida anteriormente (cfr. p. 97),

$$f(r_0) = -\frac{l^2}{mr_0^3}, \quad (3-41)$$

que dice que la fuerza debe ser atractiva para que sean posibles las órbitas circulares. Además, la energía de la partícula debe venir dada por

$$E = V(r_0) + \frac{l^2}{2mr_0^2}, \quad (3-42)$$

que, por la ecuación (3-15), corresponde al requisito de que en una órbita circular \dot{r} es cero. Las ecuaciones (3-41) y (3-42) son elementales y conocidas. Implican que para toda fuerza central atractiva es posible tener una órbita circular a cierto radio arbitrario r_0 si el momento cinético l viene dado por la ecuación (3-41) y la energía de la partícula por la ecuación (3-42).

El carácter de la órbita circular depende de que el extremo de V' sea un mínimo, como en la figura 3-8, o un máximo, como en la figura 3-9. Si la energía es ligeramente superior a la necesaria para una órbita circular para el valor dado de l , en el caso de un mínimo de V' el movimiento, aun cuando ya no sea circular, seguirá estando acotado. En cambio, si V' presenta un máximo, la más leve elevación de E por encima del valor circular, ecuación (3-34), da lugar a un movimiento no acotado en el cual la partícula se mueve atravesando el centro de fuerzas y alejándose hacia el infinito para el potencial representado en la figura 3-9. Tomando la terminología del caso del equilibrio estático, diremos que la órbita circular que surge en la figura 3-8 es *estable*; la de la figura 3-9 es *inestable*. La estabilidad de la órbita circular está, pues, determinada por el signo de la segunda derivada de V' en el radio de la circunferencia, siendo estable cuando la segunda derivada es positiva

(V' cóncava) e inestable para V' convexa. Por tanto, tendremos órbita estable si

$$\frac{\partial^2 V'}{\partial r^2} \Big|_{r=r_0} = - \frac{\partial f}{\partial r} \Big|_{r=r_0} + \frac{3l^2}{mr_0^4} > 0.$$

Utilizando la ecuación (3-41), podemos escribir esta condición en la forma

$$\frac{\partial f}{\partial r} \Big|_{r=r_0} < - \frac{3f(r_0)}{r_0}, \quad (3-43)$$

o bien

$$\frac{d \ln f}{d \ln r} \Big|_{r=r_0} < -3. \quad (3-43')$$

Si la fuerza se comporta, en la proximidad del radio r_0 de la circunferencia, cumpliendo una ley potencial de r ,

$$f = - \frac{k}{r^{n+1}},$$

la condición de estabilidad, ecuación (3-43), quedará en la forma

$$- \frac{(n+1)k}{r_0^{n+2}} < - \frac{3k}{r_0^{n+2}}$$

o sea

$$n < 2. \quad (3-44)$$

Un potencial atractivo que cumpla una ley potencial que varíe más lentamente que $1/r^2$ será, pues, capaz de dar órbitas circulares estables para todos los valores de r_0 .

Si la órbita circular es estable, un pequeño incremento de la energía de la partícula por encima del valor correspondiente a órbita circular sólo se traducirá en una ligera variación de r en torno a r_0 . Puede demostrarse (cfr. Apéndice A) que para dichas pequeñas desviaciones respecto a las condiciones de circularidad, la partícula ejecuta un movimiento armónico simple en $u(\equiv 1/r)$ alrededor de u_0 :

$$u = u_0 + a \cos \beta\theta. \quad (3-45)$$

Aquí, a es la amplitud que depende de la desviación de la energía respecto al valor correspondiente a órbita circular y β es una cantidad que surge de un desarrollo en serie de Taylor de la ley de la fuerza $f(r)$ respecto al radio r_0 de la órbita circular. En el apéndice A se demuestra que β viene dada por

$$\beta^2 = 3 + \frac{r}{f} \frac{df}{dr} \Big|_{r=r_0}. \quad (3-46)$$

Cuando el vector de posición de la partícula barre por completo el plano, u efectúa β ciclos de su oscilación (cfr. fig. 3-13). Si es β un número racional, cociente p/q de dos enteros, al cabo de q revoluciones del vector de posición volverá a recorrerse la órbita, es decir, la órbita será *cerrada*.

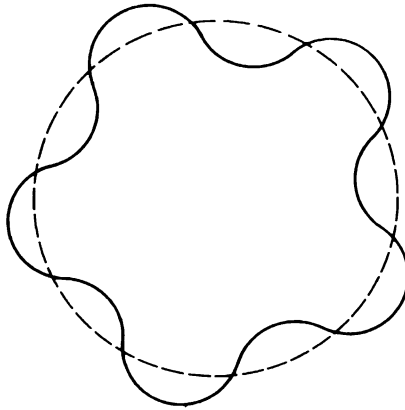


FIGURA 3-13

Órbita del movimiento en una fuerza central que se desvía ligeramente de una órbita circular.

Para cada r_0 tal que se cumpla la desigualdad (3-43), se puede establecer una órbita circular estable dándole a la partícula una energía y un momento cinético iniciales prescritos por las ecuaciones (3-41) y (3-42). De manera natural surge la cuestión de qué forma debe tener la ley de la fuerza para que la órbita ligeramente perturbada respecto a cualquiera de estas órbitas circulares sea cerrada. Está claro que en estas condiciones β no sólo debe ser un número racional, sino que debe ser el *mismo* número racional para todas las distancias a las que es posible una órbita circular. De no ser así, como β sólo puede tomar valores discretos, el número de periodos oscilatorios variará discontinuamente con r_0 y las órbitas no podrían ser cerradas en la discontinuidad. Con β^2 constante por doquier, la ecuación de definición de β^2 (ec. 3-46) se convierte de hecho en una ecuación diferencial para la ley de la fuerza f en función de la variable independiente r_0 . Podemos considerar la ecuación (3-46) escrita en función de r si tenemos presente que la ecuación sólo es válida en los dominios de r para los cuales son posibles las órbitas circulares. Una ligera reordenación de la ecuación (3-46) nos lleva a la ecuación

$$\frac{d \ln f}{d \ln r} = \beta^2 - 3, \tag{3-47}$$

que puede integrarse inmediatamente dando una ley de la fuerza:

$$f(r) = -\frac{k}{r^{3-\beta^2}}. \tag{3-48}$$

Todas las leyes de fuerza de esta forma, siendo β un número racional, conducen a órbitas cerradas para condiciones iniciales que sólo difieran *ligeramente* de las condiciones que definen una órbita circular. Entre las posibilidades que define la ecuación (3-48) se encuentran algunas fuerzas conocidas tales como las inversamente proporcionales al cuadrado de la distancia ($\beta \equiv 1$), pero también otros muchos comportamientos, tales como $f = -kr^{-2/3}$, ($\beta = \frac{2}{3}$).

Supongamos que las condiciones iniciales se desvíen más que ligeramente respecto a los requisitos para órbitas circulares; ¿seguirán dando órbitas circulares estas mismas leyes de fuerza? Podemos responder directamente la pregunta conservando un término adicional en el desarrollo en serie de Taylor de la ley de fuerza y resolviendo la ecuación de la órbita resultante. Aun cuando los cálculos que hay que realizar son elementales, resultan un tanto engorrosos. Los detalles se dan en el Apéndice A. Lo que se encuentra es que para desviaciones de orden superior al primero respecto a la circularidad, las órbitas sólo resultan cerradas para $\beta^2 = 1$ y $\beta^2 = 4$. El primero de estos valores de β^2 , según la ecuación (3-48), conduce a la ley de fuerza atractiva inversamente proporcional al cuadrado de la distancia; el segundo da una fuerza atractiva proporcional a la distancia radial —la ley de Hooke. Estas leyes de fuerza, y sólo éstas, podrían producir órbitas cerradas para cualquier combinación arbitraria de l y E ($E < 0$) y de hecho sabemos por solución directa de

la ecuación de la órbita que así es. Luego, *las únicas fuerzas centrales que dan lugar a órbitas cerradas para todas las partículas ligadas son la inversamente proporcional al cuadrado de la distancia y la ley de Hooke.**

He aquí un resultado notable que da por bien empleados los engorrosos cálculos que a él nos llevan. La observación astronómica nos ha llevado al hecho conocido de que los cuerpos celestes que están ligados se mueven siguiendo órbitas que, en primera aproximación, son cerradas. En la mayoría, las desviaciones respecto a una órbita cerrada son imputables a perturbaciones tales como la presencia de otros cuerpos. El predominio de órbitas cerradas es cierto tanto si consideramos solamente el Sistema Solar como si observamos los numerosos ejemplos de las estrellas binarias que se han examinado. Ahora bien, la ley de Hooke constituye una ley de fuerza cuya validez a todas las distancias resulta irreal, ya que implica una fuerza que crezca indefinidamente hasta el infinito. Así pues, la existencia de órbitas cerradas para una amplia gama de condiciones iniciales nos lleva por sí misma a la conclusión de que la fuerza gravitatoria es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia. Por ejemplo, no necesitamos utilizar el carácter elíptico de las órbitas para llegar a la ley de la fuerza gravitatoria.

Podemos enunciar esta conclusión de manera ligeramente diferente que tendrá más significado en la Física moderna. El movimiento orbital en un plano se puede considerar compuesto de dos movimientos oscilatorios, uno en r y otro en θ . Que la órbita sea cerrada equivale a decir que los períodos de las dos oscilaciones están conmensurados —que son *degenerados*. Luego, *el carácter degenerado de las órbitas en un campo gravitatorio fija la forma de la ley de fuerza*. Más adelante encontraremos otras formulaciones de la relación entre la degeneración y la naturaleza del potencial.

3-7 PROBLEMA DE KEPLER: FUERZA INVERSAMENTE PROPORCIONAL AL CUADRADO DE LA DISTANCIA

La ley inversamente proporcional al cuadrado de la distancia es la más importante de todas las leyes de fuerzas centrales y merece un tratamiento detallado. En este caso, la fuerza y el potencial pueden escribirse en la forma

$$f = -\frac{k}{r^2}, \quad V = -\frac{k}{r}. \quad (3-49)$$

Existen diversas maneras de integrar la ecuación de la órbita, siendo la más sencilla sus-

* Parece ser que a esta conclusión llegó por primera vez J. Bertrand, *Comptes Rendus*, 77, 849-853 (1873), por lo que se le da a veces el nombre de teorema de Bertrand. Véase más literatura al respecto en las referencias del final de este capítulo.

tituir (3-49) en la ecuación diferencial de la órbita (3-34):

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{-mf\left(\frac{1}{u}\right)}{l^2u^2} = \frac{mk}{l^2}. \tag{3-50}$$

Efectuando el cambio de variable $y = u - \frac{mk}{l^2}$, la ecuación diferencial queda en la forma

$$\frac{d^2y}{d\theta^2} + y = 0,$$

que tiene la solución inmediata

$$y = B \cos(\theta - \theta'),$$

siendo B y θ' las dos constantes de integración. En función de r , la solución es

$$\frac{1}{r} = \frac{mk}{l^2}(1 + e \cos(\theta - \theta')), \tag{3-51}$$

donde

$$e = B \frac{l^2}{mk}. \tag{3-52}$$

Resulta instructivo obtener la ecuación de la órbita a partir de la solución formal (3-39). Aun cuando este procedimiento es más largo que la integración sencilla de la ecuación (3-50), tiene la ventaja de que la importante constante de integración e se evalúa automáticamente en función de la energía E y el momento cinético l del sistema. Escri-

bamos (3-39) en la forma

$$\theta = \theta' - \int \frac{du}{\sqrt{\frac{2mE}{l^2} + \frac{2mku}{l^2} - u^2}}, \quad (3-53)$$

donde ahora se trata de una integral indefinida. La cantidad θ' que aparece en (3-53) es una constante de integración determinada por las condiciones iniciales y no tiene por qué ser el ángulo inicial θ_0 en el instante $t = 0$. La integral indefinida es de la forma típica,*

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha + \beta x + \gamma x^2}} = \frac{1}{\sqrt{-\gamma}} \arccos -\frac{\beta + 2\gamma x}{\sqrt{q}}, \quad (3-54)$$

donde

$$q = \beta^2 - 4\alpha\gamma.$$

Para aplicar esto a (3-53) debemos hacer

$$\alpha = \frac{2mE}{l^2}, \quad \beta = \frac{2mk}{l^2}, \quad \gamma = -1,$$

y el discriminante q será por tanto

$$q = \left(\frac{2mk}{l^2}\right)^2 \left(1 + \frac{2El^2}{mk^2}\right).$$

* Cfr., por ejemplo, B. O. Pierce, *A Short Table of Integrals*, 3.ª ed. n.º 161; 4.ª ed. n.º 166. Véase también I. S. Gradshteyn y I. W. Ryzhik, *Table of Integrals*, n.º 2.261 o M. R. Spiegel, *Mathematical Handbook* n.º 14.280. (Para una descripción completa de estos libros, véase la sección «Trabajos de Referencia» en la Bibliografía, p. 764.) Para obtener (3-45) hay que añadir la constante $-\pi/2$ al resultado que se da en todas estas tablas de integrales, procedimiento que es permisible por ser indefinida la integral.

Con estas sustituciones, la ecuación (3-53) queda en la forma

$$\theta = \theta' - \arccos \frac{\frac{l^2 u}{mk} - 1}{\sqrt{1 + \frac{2El^2}{mk^2}}}$$

Por último, despejando $u \equiv 1/r$, la ecuación de la órbita resulta ser

$$\frac{1}{r} = \frac{mk}{l^2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2El^2}{mk^2}} \cos(\theta - \theta') \right), \quad (3\ 55)$$

que concuerda con (3-51), con la diferencia de que e está expresada en función de E y l . A partir de la ecuación (3-55) podemos ahora identificar la constante de integración θ' con uno de los ángulos correspondientes a inversión del movimiento en la órbita. Notemos que en la ecuación de la órbita sólo aparecen tres de las cuatro constantes de integración y es ésta una propiedad característica de la órbita. En efecto, la cuarta constante sitúa la posición inicial de la partícula en la órbita. Si sólo queremos conocer la ecuación de la órbita, tal información carece de interés y por tanto no aparece en la respuesta. Desde luego, cuando se quiera completar la solución hallando r y θ en función del tiempo, deberemos dar la constante que falta. Así pues, si queremos integrar el teorema de conservación del momento cinético

$$mr^2 d\theta = l dt,$$

por medio de (3-55), habrá que especificar además el ángulo inicial θ_0 .

Ahora bien, la ecuación general de una cónica con un foco en el origen es

$$\frac{1}{r} = C(1 + e \cos(\theta - \theta')), \quad (3\ 56)$$

donde e es la excentricidad de la sección cónica. Por comparación con la ecuación (3-55) se deduce que la órbita es siempre una sección cónica de excentricidad

$$e = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{mk^2}}. \quad (3\ 57)$$

La naturaleza de la órbita depende del valor de e según el esquema siguiente:

$$\begin{aligned} e > 1, & \quad E > 0: & \quad \text{hipérbola,} \\ e = 1, & \quad E = 0: & \quad \text{parábola,} \\ e < 1, & \quad E < 0: & \quad \text{elipse,} \\ e = 0, & \quad E = -\frac{mk^2}{2l^2}: & \quad \text{circunferencia.} \end{aligned}$$

Esta clasificación concuerda con el estudio cualitativo de las órbitas basado en el diagrama energético del potencial unidimensional equivalente V' . Ahora, la condición de movimiento circular aparece de manera un tanto diferente, pero puede deducirse fácilmente como consecuencia de las condiciones de circularidad anteriores. En el caso de una órbita circular, T y V son constantes en el tiempo y según el teorema del virial

$$E \equiv T + V = -\frac{V}{2} + V = \frac{V}{2}.$$

Luego

$$E = -\frac{k}{2r_0}. \quad (3 \ 58)$$

Pero según la ecuación (3-41), para el equilibrio entre la fuerza central y la «fuerza efectiva», podemos escribir

$$-\frac{k}{r_0^2} = -\frac{l^2}{mr_0^3},$$

o sea

$$r_0 = \frac{l^2}{mk}. \quad (3 \ 59)$$

Con esta fórmula del radio orbital, la ecuación (3-58) queda en la forma

$$E = - \frac{mk^2}{2l^2},$$

como condición para movimiento circular.

En el caso de órbitas elípticas, puede demostrarse que el eje mayor sólo depende de la energía, teorema que reviste gran importancia en la teoría del átomo de Bohr. El semieje mayor es la semisuma de las dos distancias apsidales r_1 y r_2 (cfr. fig. 3-6). En dichos puntos, la velocidad radial es nula por definición y la conservación de la energía implica que las distancias apsidales sean, en consecuencia, las raíces de la ecuación

$$E - \frac{l^2}{2mr^2} + \frac{k}{r} = 0,$$

o sea de

$$r^2 + \frac{k}{E}r - \frac{l^2}{2mE} = 0. \tag{3-60}$$

Ahora bien, el coeficiente del término lineal de una ecuación de segundo grado es igual a la suma de las raíces cambiada de signo. Luego, el semieje mayor vendrá dado por

$$a = \frac{r_1 + r_2}{2} = - \frac{k}{2E}. \tag{3-61}$$

Notemos que en el límite circular, la ecuación (3-61) concuerda con la (3-58). En función del semieje mayor, la excentricidad de la elipse puede escribirse

$$e = \sqrt{1 - \frac{l^2}{mku}}, \tag{3-62}$$

(relación que utilizaremos en un capítulo posterior). Además, la ecuación (3-62) nos da la

expresión

$$\frac{l^2}{mk} = a(1 - e^2), \quad (3-63)$$

en función de la cual podemos escribir la ecuación (3-51) de la órbita elíptica en la forma

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos(\theta - \theta')}. \quad (3-64)$$

De la ecuación (3-64) se deduce que las dos distancias apsidales (que corresponden a que $\theta - \theta'$ valga cero y π , respectivamente) son iguales a $a(1 - e)$ y $a(1 + e)$, como era de esperar de las propiedades de la elipse.

3-8 MOVIMIENTO EN EL TIEMPO EN EL PROBLEMA DE KEPLER

La ecuación orbital para el movimiento bajo la acción de una fuerza central inversamente proporcional al cuadrado de la distancia podrá, pues, resolverse de manera relativamente inmediata con resultados que pueden darse mediante expresiones explícitas sencillas. Sin embargo, la descripción del movimiento de la partícula en el tiempo a medida que recorre la órbita es mucho más complicada. En principio, la relación entre la distancia radial r de la partícula y el tiempo (respecto a cierto punto de partida) viene dada por la ecuación (3-18), que en este caso toma la forma

$$t = \sqrt{\frac{m}{2k}} \int_{r_0}^r \frac{r \, dr}{\sqrt{r - \frac{r^2}{2a} - \frac{a(1 - e^2)}{2}}}, \quad (3-65)$$

Análogamente, el ángulo polar θ y el tiempo están relacionados por la conservación del momento cinético,

$$dt = \frac{mr^2}{l} d\theta.$$

que combinada con la ecuación (3-51) de la órbita conduce a

$$t = \frac{l^3}{mk^2} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{[1 + e \cos(\theta - \theta')]^2}. \quad (3-66)$$

Estas integrales pueden expresarse mediante funciones elementales. (Para la ec. (3-66) véase, p. ej., la fórmula 14.391 de *Mathematical Handbook of Formulas and Tables*, ed. por M. R. Spiegel.) Ahora bien, las relaciones son muy complejas y su inversión para dar r o θ en función de t plantea problemas colosales, particularmente cuando se exige la gran precisión necesaria para las observaciones astronómicas.

Para ilustrar algunas de estas implicaciones consideremos la situación del caso de movimiento parabólico ($e = 1$), en el cual se pueden efectuar las integraciones de manera muy sencilla. Se acostumbra a medir el ángulo polar plano a partir del radio vector en el punto de mayor acercamiento —punto al cual suele llamarse *perihelio*.* Este convenio corresponde a hacer igual a cero θ' en la ecuación (3-51) de la órbita. Correspondientemente, el tiempo se mide a partir del momento, T , de paso por el perihelio. Utilizando la identidad trigonométrica

$$1 + \cos \theta = 2 \cos^2 \frac{\theta}{2},$$

la ecuación (3-66) se reduce, para el movimiento parabólico, a la forma

$$t = \frac{l^3}{4mk^2} \int_0^{\theta} \sec^4 \frac{\theta}{2} d\theta.$$

La integración se efectúa fácilmente mediante el cambio de variable $x = \operatorname{tg}(\theta/2)$, que conduce a la integral

$$t = \frac{l^3}{2mk^2} \int_0^{\operatorname{tg}(\theta/2)} (1 + x^2) dx,$$

* Literalmente, este término debería limitarse a órbitas alrededor del Sol, siendo más general el término *periapsis*. No obstante, se acostumbra a decir perihelio cualquiera que sea el centro de fuerzas. Incluso en el caso de una nave espacial que orbite la Luna, las descripciones oficiales de los parámetros orbitales hablan de perihelio si bien sería más exacto decir pericintio.

o sea

$$t = \frac{l^3}{2mk^2} \left(\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \frac{\theta}{2} \right). \quad (3-67)$$

Es ésta una relación inmediata para t en función de θ ; la inversión para obtener θ en un instante dado exige resolver una ecuación cúbica en $\operatorname{tg}(\theta/2)$ y luego hallar el arc tg correspondiente. La distancia radial en el instante dado se da entonces mediante la ecuación orbital.

En el caso de movimiento elíptico, la ecuación (3-65) se integra más convenientemente mediante una variable auxiliar ψ , llamada *anomalía excéntrica** y definida por la relación

$$r = a(1 - e \cos \psi). \quad (3-68)$$

Comparando con la ecuación (3-64) de la órbita, queda claro que ψ también cubre el intervalo entre 0 y 2π cuando θ evoluciona a lo largo de una revolución completa y que el perihelio tiene lugar en $\psi = 0$ (donde $\theta = 0$ por convenio) y el afelio en $\psi = \pi = \theta$. Podemos dar a θ una interpretación geométrica, pero sólo tiene interés histórico (ver, p. j., McCuskey, *Introduction to Celestial Mechanics*, p. 45). Expresando E y l en función de a , e y k , la ecuación (3-65) podrá escribirse, para el movimiento elíptico, en la forma

$$t = \sqrt{\frac{m}{2k}} \int_{r_0}^r \frac{r dr}{\sqrt{r - \frac{r^2}{2a} - \frac{a(1-e^2)}{2}}}, \quad (3-69)$$

donde, por el convenio acerca del tiempo de partida, r_0 es la distancia al perihelio. La sustitución de r en función de ψ mediante la ecuación (3-68) reduce esta integral, tras algunas transformaciones, a la forma simple

$$t = \sqrt{\frac{ma^3}{n}} \int_0^\psi (1 - e \cos \psi) d\psi. \quad (3-70)$$

* El nombre está relacionado con la terminología de la astronomía medieval en la cual a θ se le daba el nombre de *anomalía verdadera*.

Primeramente, podemos notar que la ecuación (3-70) nos da una expresión del período, τ , del movimiento elíptico, si se extiende la integral a todo el dominio de ψ igual a 2π :

$$\tau = 2\pi a^3 \sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (3-71)$$

Este importante resultado también se puede obtener directamente a partir de las propiedades de la elipse. A partir de la conservación del momento cinético, la velocidad areolar resulta constante y viene dada por

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = \frac{l}{2m}. \quad (3-72)$$

Obtendremos el área A de la órbita integrando (3-72) para un periodo completo τ :

$$\int_0^\tau \frac{dA}{dt} dt = A = \frac{l\tau}{2m}.$$

Ahora bien, el área de la elipse vale

$$A = \pi ab,$$

donde, por definición de excentricidad, el semieje menor b está relacionado con a mediante la fórmula

$$b = a\sqrt{1 - e^2}.$$

Según (3-62), vemos que el semieje menor también puede escribirse en la forma

$$b = a^{1/2} \sqrt{\frac{l^2}{mk}},$$

y el período será, por tanto,

$$\tau = \frac{2m}{l} \pi a^{3/2} \sqrt{\frac{l^2}{mk}} = 2\pi a^{3/2} \sqrt{\frac{m}{k}},$$

tal como se encontró anteriormente. La ecuación (3-71) nos dice que, manteniéndose iguales las demás cosas, el cuadrado del período es proporcional al cubo del eje mayor y a esta conclusión suele dársele el nombre de tercera ley de Kepler.* En realidad, Kepler se ocupó del problema concreto del movimiento planetario en el campo gravitatorio del Sol. Sería un enunciado más preciso de esta ley el siguiente: Los cuadrados de los períodos de los distintos planetas son proporcionales a los cubos de sus ejes mayores. En esta forma, la ley sólo es aproximadamente cierta. Debemos recordar que el movimiento de un planeta alrededor del Sol es un problema de dos cuerpos y la m de (3-71) debe sustituirse por la masa reducida:

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2},$$

donde podemos considerar que m_1 corresponde al planeta y m_2 al Sol. Además, la fuerza gravitatoria de atracción es

$$f = -G \frac{m_1 m_2}{r^2},$$

con lo que la constante k será

$$k = G m_1 m_2. \quad (3-73)$$

* Las tres leyes de Kepler del movimiento planetario, publicadas hacia 1610, eran el resultado de su análisis pionero de las observaciones planetarias y sentaron la base de los grandes adelantos de Newton. La segunda ley, la correspondiente a la conservación de la velocidad areolar, es un teorema general para el movimiento debido a una fuerza central, según se indicó anteriormente. En cambio, la primera —que los planetas recorren órbitas elípticas que tienen al Sol en un foco— y la tercera están restringidas específicamente a la ley de la fuerza inversamente proporcional al cuadrado de la distancia.

en estas condiciones, la (3-71) queda en la forma

$$\tau = \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{G(m_1 + m_2)}} \approx \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{Gm_2}}, \quad (3-74)$$

si despreciamos la masa del planeta frente a la del Sol. La tercera ley de Kepler es, en realidad, la versión aproximada de la ecuación (3-74), ya que establece que τ es proporcional a $a^{3/2}$, siendo la misma la constante de proporcionalidad para todos los planetas. Sin embargo, la masa planetaria m_1 no siempre es totalmente despreciable frente a la del Sol; por ejemplo, Júpiter tiene una masa que es aproximadamente igual al 0,1% de la del Sol. Por otra parte, la tercera ley de Kepler es rigurosamente cierta para las órbitas electrónicas en el átomo de Bohr, ya que μ y k son entonces iguales para todas las órbitas de un átomo dado.

Volviendo al problema general de la posición en el tiempo para una órbita elíptica, podemos escribir la ecuación (3-70) introduciendo la frecuencia de revolución ω en la forma

$$\omega = \frac{2\pi}{\tau} = \sqrt{\frac{k}{ma^3}}. \quad (3-75)$$

La integral de la ecuación (3-70) se calcula fácilmente, dando

$$\omega t = \psi - e \sin \psi, \quad (3-76)$$

relación conocida por el nombre de *ecuación de Kepler*. La cantidad ωt barre el dominio de 0 a 2π , junto con ψ y θ , en el curso de una revolución orbital completa y por ello se denomina también anomalía, concretamente *anomalía media*.

Para hallar la posición en la órbita en un tiempo dado t , habría que invertir primeramente la ecuación de Kepler (3-76) para obtener la anomalía excéntrica correspondiente ψ . La ecuación (3-68) da entonces la distancia radial, mientras que el ángulo polar θ se puede expresar en función de ψ por comparación de la ecuación de definición (3-68) con la ecuación de la órbita (3-64):

$$1 + e \cos \theta = \frac{1 - e^2}{1 - e \cos \psi}.$$

Una pequeña transformación algebraica nos permite poner esta expresión en la forma

$$\cos \theta = \frac{\dot{\cos} \psi - e}{1 - e \cos \psi}. \quad (3-77)$$

Sumando y restando sucesivamente de la unidad los dos miembros de la ecuación (3-77) y dividiendo las dos ecuaciones resultantes, llegamos a

$$\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{\psi}{2}. \quad (3-78)$$

La ecuación (3-77) o la (3-78) nos dan, pues, θ conocida ψ . La solución de la ecuación de Kepler trascendente (3-76) que dé el valor de ψ correspondiente a un tiempo dado constituye un problema que ha llamado la atención de muchos matemáticos famosos desde que Kepler planteó la cuestión a principios del siglo XVII. Por ejemplo, Newton contribuyó con lo que hoy llamaríamos una solución analógica. Verdaderamente, podemos pretender que en la práctica necesitamos resolver la ecuación de Kepler con la aproximación del segundo de arco para toda la gama de excentricidades y ello constituiría el origen de muchos desarrollos de matemática numérica de los siglos XVIII y XIX. En los ejercicios de este capítulo se consideran algunos de los más de cien métodos de solución desarrollados en la época anterior a los ordenadores.

3-9 VECTOR DE LAPLACE-RUNGE-LENZ

El problema de Kepler se distingue también por la existencia de un vector conservativo adicional al momento cinético. En el caso de una fuerza central, la segunda ley de Newton del movimiento se puede escribir vectorialmente en la forma

$$\dot{\mathbf{p}} = f(r) \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (3-79)$$

El producto vectorial de $\dot{\mathbf{p}}$ por el vector momento cinético constante \mathbf{L} podrá, por tanto, desarrollarse en la forma

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{p}} \times \mathbf{L} &= \frac{mf(r)}{r} [\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}})] \\ &= \frac{mf(r)}{r} [\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}) - r^2 \ddot{\mathbf{r}}]. \end{aligned} \quad (3-80)$$

La ecuación (3-80) puede aún simplificarse teniendo en cuenta que

$$\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) = r\dot{r}$$

(o, de manera menos formal, la componente de la velocidad según la dirección radial es \dot{r}). Como \mathbf{L} es constante, la ecuación (3-80) podrá escribirse, tras algunas transformaciones, en la forma

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) = -mf(r)r^2 \left[\frac{\dot{\mathbf{r}}}{r} - \frac{\mathbf{r}\dot{r}}{r^2} \right],$$

o sea

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) = -mf(r)r^2 \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \right). \quad (3-81)$$

Si no especificamos la forma de $f(r)$ no podemos seguir adelante. Ahora bien, si $f(r)$ es inversamente proporcional a r^2 (problema de Kepler), la ecuación (3-81) podrá integrarse inmediatamente. Escribiendo, pues, $f(r)$ en la forma prescrita en la ecuación (3-49), la ecuación (3-81) se convierte en

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) = \frac{d}{dt} \left(\frac{mk\mathbf{r}}{r} \right),$$

que nos dice que para el problema de Kepler existe un *vector conservativo* \mathbf{A} definido por

$$\mathbf{A} = \mathbf{p} \times \mathbf{L} - mk \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (3-82)$$

Recientemente, los físicos han dado al vector \mathbf{A} el nombre de vector de Runge-Lenz, si

bien la prioridad corresponde a Laplace.*

De la definición de \mathbf{A} , se ve fácilmente que

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{L} = 0, \quad (3 \ 83)$$

ya que \mathbf{L} es perpendicular a $\mathbf{p} \times \mathbf{L}$ y \mathbf{r} es perpendicular a $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$. De esta ortogonalidad entre \mathbf{A} y \mathbf{L} se deduce que \mathbf{A} ha de ser un cierto vector fijo en el plano de la órbita. Si representamos por θ el ángulo que forma \mathbf{r} con la dirección fija de \mathbf{A} , el producto escalar de \mathbf{r} por \mathbf{A} vendrá dado por

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{r} = Ar \cos \theta = \mathbf{r} \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{L}) - mkr.$$

Ahora bien, permutando términos en el producto mixto, tenemos

$$\mathbf{r} \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{L}) = \mathbf{L} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = l^2,$$

con lo que la ecuación (3-84) queda en la forma

$$Ar \cos \theta = l^2 - mkr, \quad (3 \ 84)$$

o bien

$$\frac{1}{r} = \frac{mk}{l^2} \left(1 + \frac{A}{mk} \cos \theta \right). \quad (3 \ 85)$$

* Laplace presentó explícitamente las componentes de \mathbf{A} en la primera parte de su «*Traité de Mécanique Céleste*», publicado en 1799. El nombre de vector de Laplace, común en algunos tratados de Mecánica celeste es, pues, el adecuado. Aparentemente, W. R. Hamilton descubrió independientemente \mathbf{A} como cantidad conservada en 1845. La primera deducción en lenguaje vectorial, sustancialmente como la damos aquí, fue la de J. W. Gibbs hacia 1900. C. Runge repitió la deducción en un conocido texto alemán de Análisis vectorial (1919) y fue citado como referencia por W. Lenz en 1924 en un trabajo de Mecánica cuántica que trataba el átomo de hidrógeno perturbado. Desde entonces, las publicaciones acerca del vector de Laplace-Runge-Lenz han sido muy numerosas. Más detalles históricos se pueden encontrar en H. Goldstein, *American Journal of Physics*, **43**, 735 (1975) y **44**, 1123 (1976).

Así pues, el vector de Laplace-Runge-Lenz proporciona aún otra manera de deducir la ecuación de la órbita en el problema de Kepler. Comparando la ecuación (3-85) con la ecuación de la órbita en la forma dada por la ecuación (3-51) vemos que \mathbf{A} tiene la dirección del radio vector correspondiente al perihelio de la órbita y tiene por módulo

$$\mathbf{A} = mke. \quad (3-86)$$

En el problema de Kepler, pues, hemos identificado dos constantes vectoriales del movimiento, \mathbf{L} y \mathbf{A} , y una escalar E . Como un vector debe tener tres componentes independientes, esto corresponde en total a siete cantidades que se conservan. Ahora bien, un sistema como este con tres grados de libertad tiene seis constantes del movimiento independientes que corresponden, por ejemplo, a las tres componentes de la posición inicial de la partícula y a las tres de su velocidad inicial. Es más, las constantes del movimiento que hemos encontrado son todas funciones algebraicas de \mathbf{r} y \mathbf{p} que describen la órbita en su conjunto (orientación en el espacio, excentricidad, etc.); ninguna de estas siete cantidades que se conservan se refieren a dónde está localizada la partícula en el instante inicial. Como una de las constantes del movimiento debe referirse a esta información, por ejemplo en forma del tiempo de paso T por el perihelio, sólo podrá haber cinco constantes del movimiento independientes que describan el tamaño, forma y orientación de la órbita. Puede concluirse, por tanto, que no todas las cantidades que componen \mathbf{L} , \mathbf{A} y E , pueden ser independientes; de hecho, deberá haber dos relaciones entre dichas cantidades. Ya hemos obtenido una de esas relaciones, cual es la ortogonalidad entre \mathbf{A} y \mathbf{L} dada por la ecuación (3-83). La otra se deduce de la ecuación (3-86) cuando se expresa la excentricidad en función de E y l (ec. 3-57) y que lleva a

$$A^2 = m^2 k^2 + 2mEl^2, \quad (3-87)$$

confirmando así que sólo hay cinco constantes *independientes* entre las siete.*

El vector momento cinético y la energía contienen sólo cuatro constantes del movimiento independientes: por tanto, el vector de Laplace-Runge-Lenz añadirá una más. Es natural que nos preguntemos por qué en una ley de fuerza central general no puede existir una cantidad conservativa que junto con \mathbf{L} y E sirva para definir la órbita igual que lo hace el vector de Laplace-Runge-Lenz en el caso particular del problema de Kepler. La respuesta parece ser que sí se pueden construir cantidades conservativas de ese tipo, † pero en general son funciones un tanto peculiares del movimiento. Las constantes del movimiento relacionadas con la órbita definen entre ellas a ésta, es decir, conducen a la

* Parece ser que los razonamientos del párrafo anterior los presentó Laplace en 1799. También puso explícitamente de manifiesto la relación entre el módulo de \mathbf{A} y la excentricidad (ec. 3-86).

† Véase, p. ej., D. M. Fradkin, *Progress of Theoretical Physics* 37, 798, mayo 1967.

ecuación de la órbita que da r en función de θ . Hemos visto que, en general, las órbitas correspondientes a movimientos debidos a fuerzas centrales no suelen ser cerradas; los razonamientos de § 3-6 demostraban que las órbitas cerradas implicaban condiciones no tanto restrictivas impuestas a la forma de la ley de fuerza. Es una propiedad de las órbitas no cerradas que la curva llegará a pasar por un punto (r, θ) arbitrario cualquiera que esté entre las cotas de los puntos de retorno de r . Podemos ver esto intuitivamente partiendo de la naturaleza no cerrada de la órbita; al variar θ a lo largo de todo un ciclo, la partícula no deberá nunca recorrer de nuevo sus pasos sobre ninguna órbita anterior. Así pues, la ecuación de la órbita será tal que r sea una función multiforme de θ (módulo 2π), en realidad es una *función infinitiforme* de θ . La cantidad conservada correspondiente adicional a L y E que define la órbita deberá contener análogamente una función infinitiforme del movimiento de la partícula. Solamente cuando las órbitas sean cerradas o, más generalmente, cuando el movimiento sea *degenerado*, como en el caso del problema de Kepler, podemos esperar que la cantidad conservada adicional sea una función algebraica sencilla de r y p tal como el vector de Laplace-Runge-Lenz. Según estos razonamientos, podríamos esperar que existiera una analogía sencilla de un tal vector para el caso de la ley de Hooke en donde, según hemos visto, las órbitas son también degeneradas. Así sucede, con la diferencia de que la manera natural de formular la constante del movimiento no nos lleva a un vector sino a un tensor de segundo orden (v. § 9-7). Así pues, la existencia de una constante o integral del movimiento, además de E y L , que sea una función algebraica simple de movimiento, es suficiente para indicar que el movimiento es degenerado y las órbitas acotadas cerradas.

3-10 DISPERSIÓN EN UN CAMPO DE FUERZAS CENTRAL

Desde un punto de vista histórico, el interés acerca de las fuerzas centrales surgió en los problemas astronómicos del movimiento planetario. Sin embargo, no hay razón alguna para que sólo las consideremos en ese tipo de problemas; ya hemos mencionado las órbitas en el átomo de Bohr. Otra cuestión que podemos estudiar mediante la Mecánica clásica es la *dispersión* de partículas por campos de fuerzas centrales. Desde luego, si el tamaño de las partículas es de orden atómico, debemos esperar que los resultados específicos de un tratamiento clásico sean a menudo incorrectos desde un punto de vista físico, ya que en tales regiones suelen ser importantes los efectos cuánticos. A pesar de todo, hay muchas predicciones clásicas que siguen siendo válidas con buena aproximación. Más importante aún, los procedimientos de *descripción* de los fenómenos de dispersión son los mismos en la Mecánica clásica que en la cuántica; podemos aprender a hablar el lenguaje igualmente bien basándonos en la Física clásica.

En su formulación para un cuerpo, el problema de la dispersión se ocupa de la desviación de partículas por un *centro de fuerzas*. Consideremos un haz uniforme de partículas —da igual que sean electrones, partículas o planetas— todas de igual masa y energía que inciden sobre un centro de fuerzas. Podemos suponer que la fuerza disminuye tendiendo a cero a grandes distancias. El haz incidente se caracteriza especificando su *intensidad* I (también llamada densidad de flujo), la cual da el número de partículas que atraviesan en unidad de tiempo la unidad de superficie colocada normalmente al haz. Al acercarse una partícula al centro de fuerzas será atraída o repelida y su órbita se desviará

de la trayectoria rectilínea incidente. Después de haber pasado el centro de fuerzas, la fuerza que se ejerce sobre la partícula irá disminuyendo de manera que la órbita tenderá de nuevo a tener forma rectilínea. En general, la dirección final del movimiento no coincide con la incidente y diremos que la partícula se ha desviado o dispersado. Por definición, la *sección eficaz*, $\sigma(\Omega)$, de dispersión en una dirección dada es

$$\sigma(\Omega) d\Omega = \frac{\text{número de partículas dispersadas por unidad de tiempo en un ángulo sólido } d\Omega}{\text{intensidad incidente}}, \quad (3-88)$$

donde $d\Omega$ es un elemento de ángulo sólido en la dirección Ω . A menudo, a $\sigma(\Omega)$ se le llama también *sección eficaz diferencial de dispersión*. En el caso de fuerzas centrales debe haber una simetría total en torno al eje del haz incidente, por lo que el elemento de ángulo sólido podrá escribirse en la forma

$$d\Omega = 2\pi \sin\Theta d\Theta, \quad (3-89)$$

donde Θ es el ángulo que forman las direcciones desviada e incidente, al cual se le da el nombre de *ángulo de dispersión* (cfr. fig. 3-14, en la que se ilustra la dispersión repulsiva). Hagamos notar que la expresión «sección eficaz» se debe a que $\sigma(\Omega)$ tiene las dimensiones de una área.

Para una partícula dada cualquiera, las constantes de la órbita y por tanto la magnitud de la dispersión, están determinadas por su energía y su momento cinético. Conviene

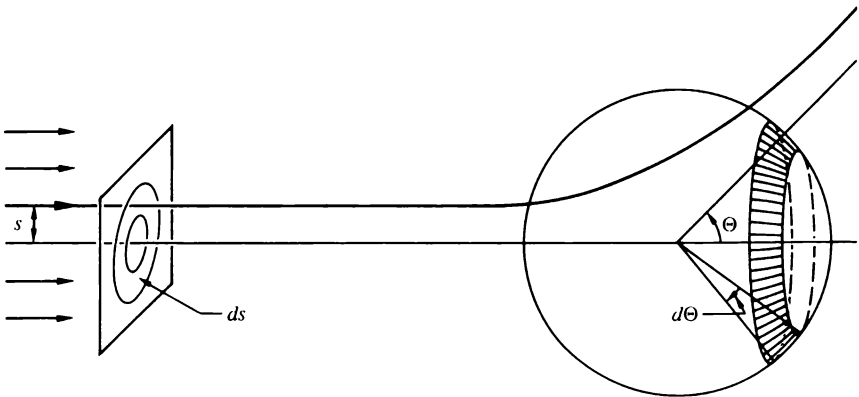


FIGURA 3-14

Dispersión de un haz incidente de partículas por un centro de fuerzas.

expresar el momento cinético en función de la energía y de una cantidad s llamada *parámetro de impacto* que es, por definición, la distancia del centro de fuerzas a la recta soporte de la velocidad incidente. Si es v_0 la celeridad incidente de la partícula, tendremos

$$l = mv_0 s = s\sqrt{2mE}. \quad (3 \ 90)$$

Una vez fijadas E y s , queda determinado unívocamente el ángulo de dispersión Θ .* De momento supondremos que valores de s diferentes no pueden llevar a un mismo ángulo de dispersión. Por tanto, el número de partículas dispersadas por un ángulo sólido $d\Omega$ comprendido entre Θ y $\Theta + d\Theta$ deberá ser igual al número de partículas incidentes cuyo parámetro de impacto esté comprendido entre los valores correspondientes s y $s + ds$:

$$2\pi I_s |ds| = 2\pi\sigma(\Theta) l \operatorname{sen}\Theta |d\Theta|. \quad (3 \ 91)$$

En la ecuación (3-91) se han introducido valores absolutos porque los números de partículas han de ser siempre positivos, mientras que s y Θ varían a menudo en sentidos opuestos. Si consideramos s función de la energía y del ángulo de dispersión correspondiente,

$$s = s(\Theta, E), \quad (3 \ 92)$$

la dependencia entre la sección eficaz diferencial y Θ vendrá dada por

$$\sigma(\Theta) = \frac{s}{\operatorname{sen}\Theta} \left| \frac{ds}{d\Theta} \right|. \quad (3 \ 93)$$

A partir de la ecuación de la órbita (3-36) se puede obtener directamente una expresión formal del ángulo de dispersión. También ahora, para mayor sencillez, consideraremos el caso de una dispersión puramente repulsiva (cfr. fig. 3-15). Como la

* En este punto de la formulación es donde se separan las Mecánicas clásica y cuántica. Característica fundamental de la Mecánica cuántica es el hecho de que no se pueda predecir inequívocamente la trayectoria de una partícula dada cualquiera. Sólo se pueden dar probabilidades de desviación en distintas direcciones.

órbita debe ser simétrica respecto a la dirección del periápside, el ángulo de dispersión vendrá dado por

$$\Theta = \pi - 2\Psi, \tag{3-94}$$

donde Ψ es el ángulo que forma la dirección de la asíntota incidente con la dirección del periápside. A su vez, Ψ puede obtenerse de la ecuación (3-36) haciendo $r_0 = \infty$ cuando $\theta_0 = \pi$ (dirección incidente), por consiguiente $\theta = \pi - \Psi$ cuando $r = r_m$, distancia de mayor acercamiento. Fácilmente se llega a

$$\Psi = \int_{r_m}^{\infty} \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{2mE}{l^2} - \frac{2mV}{l^2} - \frac{1}{r^2}}}. \tag{3-95}$$

Expresando l en función del parámetro de impacto s (ec. 3-90), resulta

$$\Theta = \pi - 2 \int_{r_m}^{\infty} \frac{s dr}{r \sqrt{r^2 \left[1 - \frac{V(r)}{E} \right] - s^2}}, \tag{3-96}$$

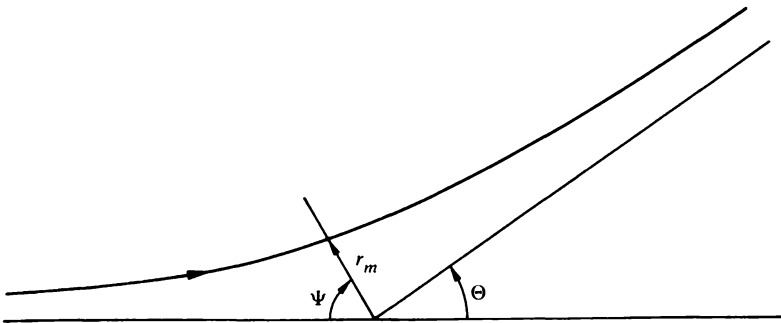


FIGURA 3-15

Relación de los parámetros de la órbita y el ángulo de dispersión en un ejemplo de desviación repulsiva.

o bien

$$\Theta = \pi - 2 \int_0^{u_m} \frac{s \, du}{\sqrt{1 - \frac{V(u)}{E} - s^2 u^2}} \quad (3-97)$$

Las ecuaciones (3-96) y (3-97) rara vez se utilizan, a no ser en el cálculo numérico directo del ángulo de dispersión. No obstante, cuando se disponga de una expresión analítica para las órbitas, se puede a menudo obtener la relación entre Θ y s casi por simple inspección. Ejemplo históricamente importante de un tal procedimiento lo tenemos en la dispersión repulsiva de partículas cargadas por causa de un campo coulombiano. El campo de fuerzas dispersor es el creado por una carga fija $-Ze$ al ejercerse sobre partículas incidentes que tienen carga $-Z'e$; por tanto, la fuerza se puede escribir en la forma

$$f = \frac{ZZ'e^2}{r^2},$$

es decir, se trata de una fuerza repulsiva inversamente proporcional al cuadrado de la distancia. Podemos trasladar aquí los resultados de § 3-7 sin más que escribir la constante de la fuerza en la forma

$$k = -ZZ'e^2. \quad (3-98)$$

La energía E es mayor que cero y la órbita será una hipérbola de excentricidad dada por*

$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{m(ZZ'e^2)^2}} = \sqrt{1 + \left(\frac{2Es}{ZZ'e^2}\right)^2}, \quad (3-99)$$

donde hemos tenido en cuenta la ecuación (3-90). Si se toma igual a π el ángulo θ' de la

* A fin de evitar confusiones con la carga del electrón e , representaremos la excentricidad, momentáneamente, por ϵ .

ecuación (3-51), el periápside corresponderá a $\theta = 0$ y la ecuación de la órbita queda en la forma

$$\frac{1}{r} = \frac{mZZ'e^2}{l^2} (\epsilon \cos \theta - 1). \quad (3-100)$$

La dirección Ψ de la asíntota de incidencia queda entonces determinada por la condición $r \rightarrow \infty$:

$$\cos \Psi = \frac{1}{\epsilon}$$

o sea, según la ecuación (3-94),

$$\text{sen} \frac{\Theta}{2} = \frac{1}{\epsilon}.$$

Luego

$$\cot^2 \frac{\Theta}{2} = \epsilon^2 - 1,$$

y utilizando la ecuación (3-99)

$$\cot \frac{\Theta}{2} = \frac{2Es}{ZZ'e^2}.$$

La relación funcional buscada entre el parámetro de impacto y el ángulo de dispersión será pues,

$$s = \frac{ZZ'e^2}{2E} \cot \frac{\Theta}{2}, \quad (3-101)$$

de manera que efectuando la transformación que exige la ecuación (3-93), encontramos que $\sigma(\Theta)$ viene dada por

$$\sigma(\Theta) = \frac{1}{4} \left(\frac{ZZ'e^2}{2E} \right)^2 \csc^4 \frac{\Theta}{2}. \quad (3-102)$$

La ecuación (3-102) da la famosa sección eficaz de dispersión de Rutherford, quien la dedujo para la dispersión de partículas α por los núcleos atómicos. La Mecánica cuántica da, en el límite no relativista, una sección eficaz coincidente con este resultado clásico.

En Física atómica tiene mucha importancia el concepto de *sección eficaz total de dispersión* σ_T , cuya definición es

$$\sigma_T = \int_{4\pi} \sigma(\Omega) d\Omega = 2\pi \int_0^\pi \sigma(\Theta) \sin\Theta d\Theta,$$

no obstante, si intentamos calcular la sección eficaz total para dispersión coulombiana sustituyendo la ecuación (3-102) en esta definición obtenemos un resultado infinito. La razón física de esto es fácil de ver. Según su definición, la sección eficaz total es el número de partículas que, por unidad de intensidad incidente, se dispersan en todas direcciones. Ahora bien, el campo coulombiano constituye un ejemplo de fuerza de «largo alcance»; sus efectos se extienden hasta el infinito. Las desviaciones muy pequeñas sólo tienen lugar en el caso de partículas de parámetro de impacto muy grande. Por tanto, todas las partículas de un haz incidente de extensión lateral infinita se desviarían más o menos y por tanto deberían incluirse en la sección eficaz total de dispersión. Queda claro, pues, que el valor infinito de σ_T no es peculiar del campo coulombiano; tiene lugar en Mecánica clásica siempre que el campo dispersor sea diferente de cero a todas las distancias, independientemente de lo grandes que sean.* Tan sólo si el campo de fuerza presenta «un corte», es decir, se anula más allá de cierta distancia, será finita la sección eficaz de dispersión. Físicamente, se presenta un tal corte en el campo coulombiano de un núcleo a causa de la presencia de los electrones atómicos que hacen de «pantalla» para el núcleo y anulan los efectos de su carga a distancias grandes.

* σ_T también es infinita para el campo coulombiano en Mecánica cuántica, ya que hemos dicho que la ecuación (3-98) también vale en ella. No obstante, no todas las fuerzas de «largo alcance» dan lugar a secciones eficaces totales infinitas en Mecánica cuántica. Resulta que todos los potenciales que tienden a cero a grandes distancias más rápidamente que $1/r^2$ producen una sección eficaz total de dispersión mecanocuántica finita. Cfr. Landau y Lifshitz, *Curso de Física Teórica*, Vol. 3, Mecánica cuántica. *Teoría no relativista*, Ed. Reverté, Barcelona, 1967, p. 547.

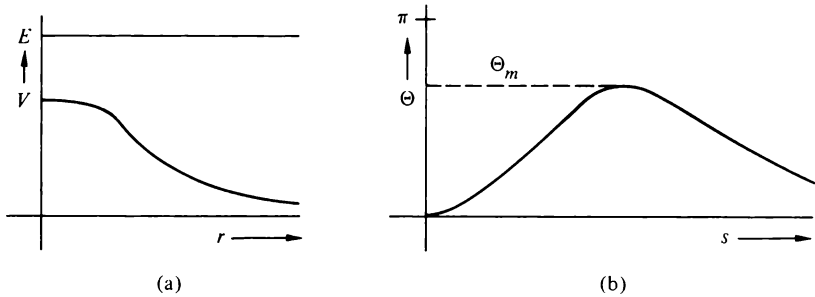


FIGURA 3-16

Potencial dispersor repulsivo no singular y curva bivalente del ángulo de dispersión Θ en función del parámetro de impacto s_0 para una energía suficientemente elevada.

En la dispersión de Rutherford, el ángulo de dispersión Θ es una función monótona lisa del parámetro de impacto s . En la ecuación (3-101) vemos que al disminuir s desde el infinito Θ crece monótonamente a partir de cero, alcanzando el valor π cuando s tiende a cero. No obstante, en los sistemas clásicos son posibles otros tipos de comportamiento que exigen cierta modificación de la prescripción (ec. 3-93) de la sección eficaz clásica. Por ejemplo, en el caso de un potencial repulsivo y una energía de la partícula que cualitativamente tenga la naturaleza representada en la figura 3-16(a) es fácil ver físicamente que la curva representativa de Θ en función de s puede comportarse en la forma indicada en la figura 3-16(b). Así pues, en el caso de parámetros de impacto de valor elevado, según hemos indicado anteriormente, la partícula se mantiene siempre a grandes distancias radiales del centro de fuerzas y sólo sufrirá pequeñas desviaciones. En el otro caso extremo ($s = 0$), la partícula se mueve en línea recta hacia el centro de fuerzas y si la energía es superior al máximo de la potencial, seguirá a través del centro sin desviarse nada. Por tanto, para los dos valores límite de s el ángulo de dispersión se anula. Para algún valor intermedio de s el ángulo de dispersión deberá pasar por un máximo Θ_m . Cuando $\Theta < \Theta_m$ habrán *dos* valores de s que puedan dar lugar a un mismo ángulo de dispersión. Cada uno de ellos contribuye a la sección eficaz de dispersión según un ángulo y en consecuencia, la ecuación (3-93) deberá modificarse tomando la forma

$$\sigma(\Theta) = \sum_i \frac{s_i}{\text{sen} \Theta} \left| \frac{ds}{d\Theta} \right|_i \tag{3-103}$$

Aquí el subíndice i distingue los distintos valores de s que dan lugar a un mismo valor de Θ .

De especial interés es la sección eficaz correspondiente al ángulo de dispersión máximo Θ_m . Como para este ángulo se anula la derivada de Θ respecto a s , de la ecuación (3-93) o de la (3-103) se deduce que la sección eficaz debe hacerse infinita

cuando $\Theta \rightarrow \Theta_m$. Pero para todos los ángulos mayores la sección eficaz es nula, ya que el ángulo de dispersión no puede ser mayor que Θ_m . El fenómeno de la subida infinita de la sección eficaz seguida de una desaparición brusca es muy parecido a lo que sucede en la Óptica geométrica de la dispersión de la luz solar por las gotas de lluvia. A causa de esta semejanza, el fenómeno se denomina *dispersión en arco iris*.

Los ejemplos presentados hasta ahora corresponden a dispersión puramente repulsiva. Si en la dispersión intervinieran fuerzas atractivas, podrían surgir más complicaciones. El efecto de la atracción sería tirar de la partícula hacia el centro en vez de producir la desviación repulsiva hacia afuera representada en la figura 3-15. En consecuencia, el ángulo Ψ que forma la dirección de incidencia con la dirección del periápside podrá ser mayor que $\pi/2$ y el ángulo de dispersión que da la ecuación (3-94) sería entonces negativo. Esto no constituye, en sí mismo, una gran dificultad ya que claramente es la magnitud de Θ la que interviene en la determinación de la sección eficaz. Ahora bien, en determinadas circunstancias, el ángulo Θ calculado mediante la ecuación (3-96) puede ser mayor que 2π . Es decir, la partícula que sufre dispersión puede dar una o más vueltas alrededor del centro de fuerzas antes de salir finalmente en la dirección desviada.

Para ver físicamente cómo puede suceder esto, consideremos un potencial dispersivo representado esquemáticamente por la curva $s = 0$ de la figura 3-17. Es corriente entre los potenciales intermoleculares que se suponen en muchos problemas de la teoría cinética —potencial atractivo a grandes distancias que disminuye más rápidamente que $1/r^2$ y que a pequeñas distancias se convierte en potencial repulsivo rápidamente creciente. Las otras curvas de la figura 3-17 muestran el potencial unidimensional efectivo $V'(r)$, ecuación (3-22'), correspondiente a diversos valores del parámetro de impacto s (o lo que es equivalente: diversos valores de l). Como la barrera centrífuga repulsiva predomina a grandes r para todos los valores de $s > 0$, el potencial equivalente correspondiente a valores pequeños de s presentará una cumbre. Consideremos ahora una partícula que incide con parámetro de impacto s_1 y con la energía E_1 correspondiente al máximo de la cumbre. Según indicamos en § 3-3, la diferencia entre E_1 y $V'(r)$ es proporcional al cuadrado de la velocidad radial a esa distancia. Cuando la partícula incidente alcanza la posición r_1 del máximo de V' , la velocidad radial es nula. Recordemos de lo visto en § 3-6 que tenemos aquí las condiciones para órbita circular inestable a la distancia r_1 . En ausencia de toda perturbación, una vez alcanzada r_1 , la partícula que incide con parámetros E_1 y s_1 recorrería indefinidamente un camino circular alrededor del centro de fuerzas a dicha distancia sin salir ya nunca. Para el mismo parámetro de impacto pero con una energía E ligeramente mayor que E_1 , no establecería una órbita circular real. No obstante, cuando la partícula está en la inmediata proximidad de r_1 la velocidad radial sería muy pequeña y la partícula se mantendría en la proximidad de la cumbre un tiempo desproporcionadamente grande. La velocidad angular, θ , no estaría de momento afectada por el máximo, estaría dada en r por

$$\dot{\theta} = \frac{l}{mr_1^2} = \frac{s_1}{r_1^2} \sqrt{\frac{2E}{m}}$$

Por tanto, en el tiempo que emplea la partícula en atravesar la región de la cumbre la

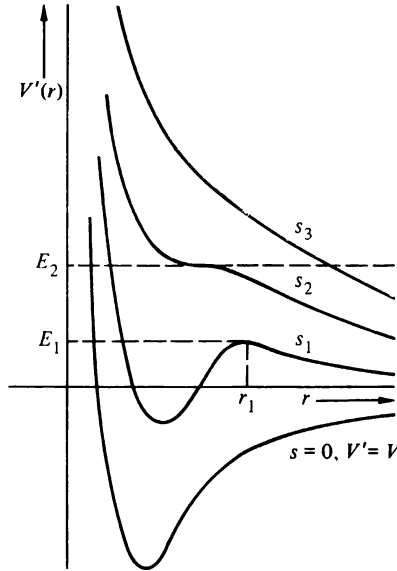


FIGURA 3-17

Potencial atractivo y repulsivo combinado y potencial unidimensional equivalente correspondiente para diversos valores del parámetro de impacto s .

velocidad angular puede haber hecho que la partícula describa ángulos mayores que 2π e incluso múltiplos de ellos. En tales casos se dice que la dispersión clásica presenta movimiento *orbital* o *espiral*.

Al aumentar el parámetro de impacto, el valle y la cumbre del potencial equivalente V' tienden a aplanarse, hasta que para un cierto parámetro s_2 sólo hay un punto de inflexión de V' en la energía E_2 (cfr. fig. 3-17). Para energías de la partícula superiores a E_2 ya no habrá movimiento orbital. Ahora bien, los efectos combinados de las componentes atractiva y repulsiva del potencial efectivo pueden llevar, incluso en tales casos, a desviación nula para algún valor finito del parámetro de impacto. A energías grandes y parámetros de impacto pequeños, los efectos de dispersión principales se deben a los potenciales fuertemente repulsivos a distancias pequeñas y la dispersión se asemeja cualitativamente en comportamiento a la dispersión de Rutherford.

Hemos visto que la partícula dispersada puede desviarse más de π cuando tiene lugar el movimiento orbital. Por otra parte, el ángulo de dispersión que se observa en el laboratorio está comprendido entre 0 y π . Será pues útil, en esos casos ambiguos, distinguir entre el *ángulo de desviación* Φ calculado por los segundos miembros de las ecuaciones (3-96) o (3-97) y el ángulo de dispersión Θ observado. Para un Φ dado, el ángulo Θ se determina mediante la relación

$$\Theta = \pm\Phi - 2m\pi, \quad m \text{ entero positivo}$$

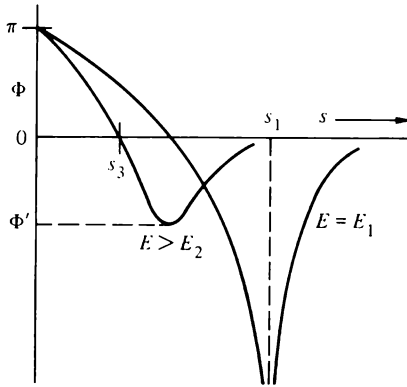


FIGURA 3-18

Curvas esquemáticas del ángulo de desviación Φ en función de s , para el potencial de la figura 3-17 a dos energías diferentes.

El signo y el valor de m deben tomarse de manera que Θ esté comprendido entre 0 y π . El sumatorio de la ecuación (3-103) se extiende a todos los valores de Φ que llevan a un mismo ángulo Θ . En la figura 3-18 podemos ver curvas esquemáticas de Φ en función de s para el potencial de la figura 3-17 a dos energías diferentes. El movimiento orbital que tiene lugar para $E = E_1$, presenta una singularidad en la curva en $s = s_1$. Cuando $E > E_2$, ya no tiene lugar el movimiento orbital pero hay un efecto de arco iris en $\Theta = -\Phi'$ (aun cuando hay sección eficaz no nula para ángulos de dispersión superiores). Observemos que Θ se anula en $s = s_3$, lo que significa, según la ecuación 3-93, que la sección eficaz se hace infinita en el sentido de avance por anulación de $\sin \Theta$. Análogamente, la sección eficaz puede hacerse infinita en el sentido de retroceso si

$$s \left| \frac{ds}{d\Theta} \right|$$

se mantiene finito en $\Theta = \pi$. Estos infinitos en los ángulos de dispersión hacia adelante o hacia atrás se denominan *dispersión de aureola*, en analogía con el fenómeno correspondiente de Óptica meteorológica.*

* La aureola de atrás es conocida por los que viajan en avión, quienes han observado el anillo de luz que rodea a la sombra del avión proyectada sobre las nubes que hay debajo. Incidentalmente, la descripción de los fenómenos de dispersión clásicos con la terminología de la Óptica geométrica no es ninguna coincidencia. Según vimos en § 10-8, la Mecánica clásica es de manera muy real el límite de la Mecánica cuántica con Óptica geométrica (representación por rayos) y para cada situación de dispersión en Mecánica clásica puede hallarse un problema correspondiente de Óptica geométrica.

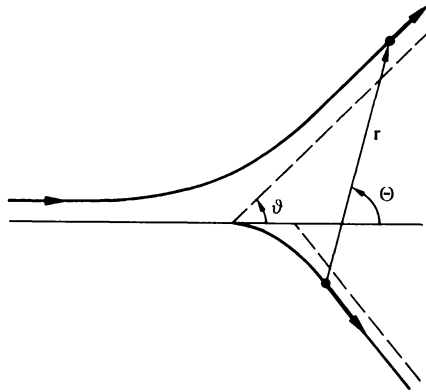


FIGURA 3-19

Dispersión de dos partículas vista en el sistema del laboratorio.

Recientemente, se ha producido un interés renovado de la dispersión clásica y de los cálculos de la sección eficaz clásica. En algunos casos, los efectos cuánticos son pequeños, como sucede en la dispersión de iones de baja energía en las redes cristalinas y los cálculos clásicos resultan útiles directamente. Incluso cuando sean importantes las correcciones cuánticas suele ser suficiente utilizar un método de aproximación (la aproximación «semiclásica») para el cual es necesario un conocimiento de la trayectoria clásica. Para casi todos los potenciales de interés práctico es imposible hallar una forma analítica de la órbita y la ecuación (3-96) (o formas variantes de ella) o se aproxima para regiones particulares de s o se integra numéricamente.

3-11 TRANSFORMACIÓN DEL PROBLEMA DE LA DISPERSIÓN A COORDENADAS DEL LABORATORIO

En el apartado anterior hemos tratado el problema de un cuerpo de la dispersión de una partícula por un centro de fuerzas fijo. En la práctica, la dispersión siempre comporta dos cuerpos. Por ejemplo, en la dispersión de Rutherford tenemos la partícula α y el núcleo atómico. La segunda partícula no está fija sino que retrocede a partir de su posición inicial a consecuencia de la dispersión. Como se ha demostrado que todo problema de fuerzas centrales de dos cuerpos se puede reducir al de un cuerpo, podríamos pensar que el único cambio consiste en sustituir m por la masa reducida μ . Sin embargo, la cuestión no es tan sencilla. El ángulo de dispersión medido realmente en el laboratorio, que representaremos por ϑ , es el ángulo que forman las direcciones final e incidente de la partícula desviada.* Por otra parte, el ángulo Θ calculado a partir del problema de un cuerpo equivalente es el ángulo que forman las direcciones final e inicial del vector relativo entre las dos partículas.

* No hay que confundir el ángulo de dispersión ϑ con la coordenada angular θ del vector relativo, r , entre las dos partículas.

Estos dos ángulos sólo serán iguales si la segunda partícula se mantiene quieta durante el proceso de dispersión. Sin embargo, en general, la segunda partícula, aunque esté en reposo inicialmente, se pone en movimiento a causa de la fuerza mutua que se ejercen entre sí las partículas y según se indica en la figura 3-19, los dos ángulos tendrán en tal caso valores diferentes. Por tanto, el problema de un cuerpo equivalente no da directamente el ángulo de dispersión medido en el sistema de coordenadas del laboratorio.

La relación entre los ángulos de dispersión Θ y ϑ se puede determinar examinando cómo tiene lugar la dispersión en un sistema de coordenadas que se mueva con el centro de masa de ambas partículas. En dicho sistema, la cantidad de movimiento total es, desde luego, nula y las dos partículas se moverán con cantidades de movimiento opuestas de igual módulo. En la figura 3-20 se ilustra la apariencia que el proceso de dispersión presenta a un observador en el sistema del centro de masa. Antes de la dispersión, las partículas se mueven directamente una contra otra; después, se alejan una de otra en sentidos opuestos de una misma dirección. El ángulo Θ que forman las direcciones inicial y final del vector relativo debe, por tanto, ser igual al ángulo de dispersión de una y otra partícula en el sistema del centro de masa. La relación entre los dos ángulos de dispersión Θ y ϑ se podrá, pues, obtener considerando la transformación entre el sistema del centro de masa y el sistema del laboratorio. Conviene aquí utilizar la terminología de § 3-1 con ligeras modificaciones:

- \mathbf{r}_1 y \mathbf{v}_1 son los vectores de posición y velocidad, después de la dispersión de la partícula incidente 1 en el sistema del laboratorio,
- \mathbf{r}'_1 y \mathbf{v}'_1 son los vectores de posición y velocidad, después de la dispersión, de la partícula 1 en el sistema del centro de masa y
- \mathbf{R} y \mathbf{V} son los vectores de posición y velocidad (constante) del centro de masa en el sistema del laboratorio.

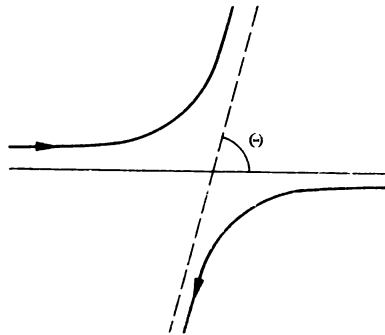


FIGURA 3-20

Dispersión de dos partículas vista en el sistema del centro de masa.

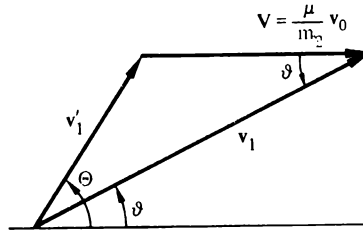


FIGURA 3-21

Relaciones entre las velocidades en los sistemas de coordenadas del centro de masa y del laboratorio.

Por definición, en todo instante

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{R} + \mathbf{r}'_1,$$

y en consecuencia

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{V} + \mathbf{v}'_1. \tag{3-104}$$

La figura 3-21 muestra gráficamente esta relación vectorial evaluada *después* de haber tenido lugar la dispersión; instante en el cual \mathbf{v}_1 y \mathbf{v}'_1 forman los ángulos ϑ y Θ , respectivamente, con el vector \mathbf{V} cuya dirección es la inicial. Como el blanco está inicialmente en reposo en el sistema del laboratorio, la velocidad incidente \mathbf{v}_0 de la partícula 1 en dicho sistema es igual a la velocidad relativa inicial de las partículas. En virtud de la conservación de la cantidad de movimiento del sistema, la velocidad constante del centro de masa vendrá dada por

$$(m_1 + m_2)\mathbf{V} = m_1\mathbf{v}_0,$$

o sea

$$\mathbf{V} = \frac{\mu}{m_2}\mathbf{v}_0. \tag{3-105}$$

En la figura 3-21 vemos que

$$v_1 \sin \vartheta = v'_1 \sin \Theta$$

y

$$v_1 \cos \vartheta = v'_1 \cos \Theta + V. \quad (3-106)$$

El cociente entre estas dos ecuaciones nos da una relación entre ϑ y Θ :

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{\operatorname{sen} \Theta}{\cos \Theta + \rho}, \quad (3-107)$$

donde ρ viene definido por

$$\rho \equiv \frac{\mu}{m_2} \frac{v_0}{v'_1}. \quad (3-108)$$

Se puede obtener una relación alternativa expresando v_1 en función de las otras celeridades mediante el teorema del coseno aplicado al triángulo de la figura 3-21:

$$v_1^2 = v_1'^2 + V^2 + 2v'_1 V \cos \Theta. \quad (3-109)$$

Cuando se utiliza esta relación para eliminar v_1 de la ecuación (3-106) y se expresa V en función de v_0 por medio de la ecuación (3-105), hallamos

$$\cos \vartheta = \frac{\cos \Theta + \rho}{\sqrt{1 + 2\rho \cos \Theta + \rho^2}}. \quad (3-110)$$

Estas dos relaciones siguen conteniendo un cociente de celeridades a través de ρ . Por la definición de centro de masa, la celeridad v'_1 de la partícula 1 en el sistema del centro de masa está relacionada con la celeridad relativa v mediante la ecuación (cfr. ec. 3-2):

$$v'_1 = \frac{\mu}{m_1} v.$$

Luego ρ también podrá escribirse en la forma

$$\rho = \frac{m_1}{m_2} \frac{v_0}{v}, \quad (3-108')$$

donde v es, recalquémoslo, la celeridad relativa *después* del choque. Cuando el choque es *elástico*, la energía cinética total de las dos partículas sigue siendo la misma y v debe ser igual a v_0 , por lo que ρ será, simplemente,

$$\rho = \frac{m_1}{m_2}, \text{ choque elástico} \quad (3-111)$$

independiente de las energías o celeridades. Si el choque fuese *inelástico*, la energía cinética total de las dos partículas cambia (p. ej., parte de la energía cinética pasa a energía interna de excitación del blanco). Como la energía cinética del movimiento del centro de masa debe mantenerse constante, en virtud de la conservación de la cantidad de movimiento, el cambio de energía debido al choque puede expresarse en la forma

$$\frac{\mu v^2}{2} = \frac{\mu v_0^2}{2} + Q. \quad (3-112)$$

El llamado valor Q del choque inelástico será, evidentemente, negativo, si bien el convenio de signos se toma de manera que esté de acuerdo con el que se utiliza para las reacciones atómicas y nucleares. Según la ecuación (3-112), el cociente entre las celeridades relativas antes y después del choque se puede escribir en la forma

$$\frac{v}{v_0} = \sqrt{1 + \frac{m_1 + m_2}{m_2} \frac{Q}{E}}, \quad (3-113)$$

donde E es la energía de la partícula incidente (en el sistema del laboratorio). Así pues, en el caso de dispersión inelástica ρ será

$$\rho = \frac{m_1}{m_2 \sqrt{1 + \frac{m_1 + m_2}{m_2} \frac{Q}{E}}}. \quad (\text{dispersión inelástica}) \quad (3-114)$$

Los ángulos de dispersión ϑ y Θ no sólo tienen, en general, distinto valor, sino que los valores de la sección eficaz diferencial dependen de cuál de los dos ángulos se tome como variable independiente para σ . La relación entre las dos formas funcionales se obtiene a partir de la observación de que en un experimento particular, el número de partículas dispersadas por un elemento de ángulo sólido dado debe ser el mismo tanto si medimos el suceso en función de ϑ como en función de Θ . Este enunciado lo podemos escribir en forma de ecuación de la manera siguiente:

$$2\pi I\sigma(\Theta)\text{sen}\Theta |d\Theta| = 2\pi I\sigma'(\vartheta)\text{sen}\vartheta |d\vartheta|,$$

o sea

$$\sigma'(\vartheta) = \sigma(\Theta) \frac{\text{sen}\Theta}{\text{sen}\vartheta} \left| \frac{d\Theta}{d\vartheta} \right| = \sigma(\Theta) \left| \frac{d(\cos\Theta)}{d(\cos\vartheta)} \right|, \quad (3-115)$$

donde $\sigma'(\vartheta)$ es la sección eficaz diferencial expresada en función del ángulo de dispersión en el sistema del laboratorio. La derivada se puede evaluar fácilmente a partir de la ecuación (3-110) y nos lleva al resultado

$$\sigma'(\vartheta) = \sigma(\Theta) \frac{(1 + 2\rho \cos\Theta + \rho^2)^{3/2}}{1 + \rho \cos\Theta}. \quad (3-116)$$

Quizá deberíamos recalcar que $\sigma(\Theta)$ *no* es la sección eficaz que mediría un observador en el sistema del centro de masa. Tanto $\sigma(\Theta)$ como $\sigma'(\vartheta)$ son secciones eficaces medidas en el sistema del laboratorio; simplemente, están expresadas en función de coordenadas diferentes. Un observador fijo en el sistema del centro de masa vería una densidad de flujo de partículas incidentes distinta de la que se mide en el sistema del laboratorio y habría que incluir esta transformación de la densidad de flujo si (por alguna razón) quisiéramos relacionar las secciones eficaces medidas en uno y otro sistema.

Los dos ángulos de dispersión presentan una relación particularmente sencilla en el caso de dispersión elástica cuando las dos partículas tienen igual masa. Se deduce entonces que $\rho = 1$ y según la ecuación (3-110) tenemos

$$\cos\vartheta = \sqrt{\frac{1 + \cos\Theta}{2}} = \cos\frac{\Theta}{2},$$

o sea

$$\vartheta = \frac{\Theta}{2}, \quad (\rho = 1).$$

Por tanto, en el caso de masas iguales no podrá haber ángulos de dispersión mayores que 90° en el sistema del laboratorio; toda la dispersión tiene lugar en el hemisferio de delante. Correspondientemente, la sección eficaz de dispersión vendrá dada en función de Θ según la ecuación (3-116) en la forma

$$\sigma'(\vartheta) = 4 \cos \vartheta \cdot \sigma(\Theta), \quad \vartheta \leq \frac{\pi}{2}, \quad (\rho = 1).$$

Incluso en el caso de dispersión isotropa según Θ , es decir, siendo $\sigma(\Theta)$ constante e independiente de Θ , la sección eficaz en función de ϑ varía como el coseno del ángulo.

Hemos visto que incluso en los choques elásticos, en los que se mantiene constante la energía cinética total, una colisión con un blanco inicialmente en reposo tiene como consecuencia una cesión de energía al blanco con la consiguiente disminución de la energía cinética de la partícula incidente. Dicho de otro modo, la colisión *frena* a la partícula incidente. El grado de enfrenamiento se puede obtener de la ecuación (3-109) si se expresan v'_1 y V en función de v_0 por medio de las ecuaciones (3-108) y (3-105), respectivamente:

$$\frac{v_1'^2}{v_0^2} = \left(\frac{\mu}{m_2 \rho} \right)^2 [1 + 2\rho \cos \Theta + \rho^2]. \quad (3-117)$$

En el caso de choque elástico, $\rho = m_1/m_2$ y la ecuación (3-117) se puede simplificar dando

$$\frac{E_1}{E_0} = \frac{1 + 2\rho \cos \Theta + \rho^2}{(1 + \rho)^2}, \quad (\text{choque elástico}) \quad (3-117')$$

donde E_0 es la energía cinética inicial de la partícula incidente en el sistema del laboratorio y E_1 la correspondiente energía después de la dispersión. Cuando las partículas tengan

masas iguales, esta relación queda en la forma

$$\frac{E_1}{E_0} = \frac{1 + \cos \Theta}{2} = \cos \vartheta.$$

Así pues, para el ángulo de dispersión máximo ($\Theta = \pi$, $\vartheta = \pi/2$), la partícula incidente pierde toda su energía y queda detenida en el sistema del laboratorio.

Esta cesión de energía cinética por dispersión constituye el principio que respalda la acción del «moderador» en un reactor de neutrones térmicos. Los neutrones rápidos producidos por fisión sufren dispersiones elásticas sucesivas hasta que su energía cinética se reduce a energías térmicas, a las cuales es más probable que originen fisiones a que sean capturados. Está claro que los mejores moderadores serán los elementos ligeros, idealmente el hidrógeno ($\rho = 1$). En un reactor nuclear, el hidrógeno sólo es práctico cuando está contenido como parte de una mezcla o de un compuesto, tal como el agua. Entre otros elementos ligeros útiles por sus propiedades moderadoras se cuentan el deuterio, de masa 2, y el carbono, de masa 12. El hidrógeno, presente en la parafina, agua y en los plásticos, se utiliza frecuentemente en el laboratorio para frenar neutrones.

A pesar de su actualidad en aplicaciones, estos cálculos de la transformación del sistema del laboratorio al sistema del centro de masa y de la cesión de energía cinética, no tienen naturaleza «moderna» ni «cuántica». Ni la Mecánica clásica que interviene es particularmente elevada o difícil. En esencia, lo que se ha utilizado es la conservación de la cantidad de movimiento y de la energía. Se pueden encontrar cálculos análogos en libros elementales, en los que se citan choques elásticos entre bolas de billar. Es precisamente, su naturaleza muy elemental la que da una amplia validez a estos cálculos. Mientras se conserve la cantidad de movimiento (cosa que se cumple en Mecánica cuántica) y se conozca el valor de Q , los detalles del proceso de dispersión carecen de importancia. De hecho, la proximidad de la partícula dispersora es una «caja negra» y sólo nos ocupamos de qué entra en ella y de qué sale de ella. No nos importa si los fenómenos que tienen lugar dentro de la caja son «clásicos» o «cuánticos». En consecuencia, las fórmulas de este apartado se podrán utilizar en el análisis de fenómenos cuya naturaleza es esencialmente cuántica como, por ejemplo, la dispersión neutrón-protón, mientras las energías sean suficientemente bajas para poder prescindir de los efectos relativistas. (El estudio del tratamiento relativista de la Cinemática de las colisiones puede verse en §7-7).

REFERENCIAS SUGERIDAS

E. T. WHITTAKER, *Analytical Dynamics*. Casi todos los textos de Mecánica dedican mucho tiempo al movimiento debido a fuerzas centrales y muy pocas de las muchas referencias pueden consignarse aquí. Los apartados 47-49 del tratado de Whittaker constituyen un estudio conciso del tema que, a pesar de su brevedad, trata muchos aspectos insólitos. Es, prácticamente, la única fuente para el análisis de qué leyes de fuerza son resolubles mediante funciones elípticas.

W. D. MACMILLAN, *Statics and the Dynamics of a Particle*. El capítulo XII de esta referencia proporciona un estudio elaboradísimo del movimiento por fuerzas centrales, incluyendo la consideración detallada de las órbitas para leyes de fuerza distintas de la inversamente proporcional al cuadrado de la distancia. El tratamiento es elemental y no utiliza la formulación de Lagrange. Se deduce la ecuación de Kepler, junto con formas variantes para distintos tipos de órbitas y se describen varios métodos de solución. Se menciona brevemente la constante del movimiento de Laplace-Runge-Lenz como «constante de integración» en el apartado 301.

L. D. LANDAU y E. M. LIFSHITZ, *Mecánica*. Como era de esperar, en su tratamiento del tema de movimiento y dispersión por fuerzas centrales, esta referencia incluye muchos puntos de vista originales y poco usuales. Se pone de manifiesto explícitamente la constancia del vector de Laplace-Runge-Lenz y se utiliza para deducir la ecuación de la órbita. La cinemática de las colisiones se describe con cierto detalle.

J. B. MARION, *Dinámica clásica de las partículas y sistemas*. Este fino texto de nivel intermedio tiene un capítulo inusitadamente detallado referente al movimiento por fuerzas centrales que incluye estudios de la ecuación de Kepler, estabilidad de órbitas circulares y algunos resultados elementales del famoso problema de los tres cuerpos. Como conviene a la intervención del autor en Física nuclear experimental, el capítulo acerca de la Cinemática de las colisiones y los cálculos de secciones eficaces presenta una cobertura excepcionalmente completa.

J. O. HIRSCHFELDER; D. F. CURTISS y B. B. BIRD, *Molecular Theory of Gases and Liquids*. Verdadera enciclopedia de la Físicoquímica de gases y líquidos, esta referencia es, probablemente, la mejor fuente referente a aplicaciones del teorema del virial clásico. Contiene también mucha materia relativa a los potenciales interatómicos y secciones eficaces de dispersión, si bien no están incluidos los adelantos sustanciales acerca del particular a partir de 1953.

S. W. MCCUSKEY, *Introduction to Celestial Mechanics*. El movimiento de dos cuerpos en un potencial mutuo en $1/r$ constituye la primera aproximación al movimiento de los planetas, satélites y vuelo espacial. Todos los libros de Mecánica celeste dedican, por tanto, considerable atención al «problema de Kepler». De la numerosa literatura acerca de Mecánica celeste sólo podemos citar aquí pocas obras. El libro de McCuskey cubre de manera compacta una amplia gama de información, incluyendo un estudio del movimiento en el tiempo en diversas órbitas y aborda el tema a un nivel relativamente elemental.

J. M. A. DANBY, *Fundamentals of Celestial Mechanics*. Escrito por un conocido y respetado maestro en Mecánica celeste, este texto cubre gran parte del área clásica de la Mecánica celeste a un nivel intermedio, con un fermento de la materia más reciente inspirado por el advenimiento de la era espacial y de los ordenadores. Muchísimos ejercicios y referencias. El movimiento en el tiempo y la ecuación de Kepler se tratan extensamente, si bien no se mencionan ni el vector de Laplace-Runge-Lenz ni el teorema de Bertrand.

H. C. PLUMMER, *An Introductory Treatise on Dynamical Astronomy*. Aun siendo relativamente antigua (1918, pero con reimpresión en 1960) sigue siendo la referencia más disponible del teorema de Bertrand y la presentación en este capítulo se ha basado en el tratamiento que le da Plummer. Se describe brevemente un método de demostración distinto en el tratado de F. Tisserand, *Traité de mécanique céleste*, tomo 1, capítulo I, §6. El libro de Plummer presenta también algunos trucos especiales para la solución aproximada de la ecuación de Kepler.

H. V. MCINTOSH, «Symmetry and Degeneracy» en *Group Theory and its Applications*, Vol. II, E. M. Loeb, ed. Este artículo contiene una entusiasta visión general de las simetrías internas de sistemas

físicos simples, desarrolladas de manera histórica. Aun cuando en el desarrollo predominan las palabras sobre las fórmulas, presupone que el lector tenga cierto conocimiento de la teoría de grupos y de la Mecánica cuántica. Ahora bien, es con mucho el mejor repaso de lo que se creía en 1970 que era la relación entre simetrías y degeneraciones. Se describen las simetrías tanto del problema de Kepler como del oscilador armónico, así como las implicaciones del teorema de Bertrand.

R. G. NEWTON, *Scattering Theory of Waves and Particles*. Aun cuando este libro se ocupa principalmente de la teoría cuántica de la dispersión, el Capítulo 5 trata la dispersión de partículas clásicas y realiza un estudio conciso del «movimiento orbital» y las «aureolas», basado en su mayor parte en la publicación fundamental de K. W. Ford y J. A. Wheeler, *Annals of Physics (N. Y.)* 7, 259 (1959).

EJERCICIOS

1. Una partícula de masa m está obligada a moverse bajo la acción de la gravedad sin rozamiento sobre el interior de un paraboloides de revolución cuyo eje es vertical. Hallar el problema unidimensional equivalente a este movimiento. ¿Qué condición debe cumplir la velocidad inicial de la partícula para producir movimiento circular? Hallar el periodo de las oscilaciones pequeñas respecto a este movimiento circular.

2. Una partícula se mueve en un campo de fuerzas centrales definido por el potencial

$$V = -k \frac{e^{-ar}}{r},$$

donde k y a son constantes positivas. Utilizando el método del potencial unidimensional equivalente, estudiar la naturaleza del movimiento, estableciendo las gamas de l y E apropiadas para cada tipo de movimiento. ¿Cuándo son posibles órbitas circulares? Hallar el periodo de las pequeñas oscilaciones radiales respecto al movimiento circular.

3. Dos partículas se mueven una respecto a otra según órbitas circulares bajo la influencia de fuerzas gravitatorias, con un periodo τ . En un instante dado se detiene bruscamente su movimiento y se sueltan después dejándolas caer una en otra. Demostrar que chocan al cabo de un tiempo $\tau/4\sqrt{2}$.

4. Consideremos un sistema en el cual las fuerzas que se ejerzan sobre las distintas partículas consistan en fuerzas conservativas \mathbf{F}_i y fuerzas de rozamiento \mathbf{f}_i proporcionales a la velocidad. Demostrar que para tal sistema el teorema del virial puede escribirse en la forma

$$\bar{T} = -\frac{1}{2} \sum_i \overline{\mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i},$$

con lo que el movimiento alcanza un estado estacionario y no puede extinguirse a consecuencia de las fuerzas de rozamiento.

5. Suponer que entre los átomos de un gas se ejercen interacciones de largo alcance en forma de fuerzas centrales que deriven de un potencial

$$U(r) = \frac{k}{r^m},$$

donde r es la distancia entre dos átomos cualesquiera y m es un entero positivo. Suponer además que respecto a un átomo dado cualquiera, los demás átomos se distribuyen por el espacio de manera que su densidad cúbica venga dada por el factor de Boltzmann:

$$\rho(r) = \frac{N}{V} e^{-U(r)/kT},$$

donde N es el número total de átomos en un volumen V . Hallar la adición al virial de Clausius resultante de estas fuerzas entre pares de átomos y calcular la corrección resultante para la ley de Boyle. Tómese N tan grande que permita sustituir las sumas por integrales. Aun cuando pueden hallarse resultados explícitos para cualquier m positivo, podemos simplificar los cálculos tomando $m = +1$.

6. a) Demostrar que si una partícula describe una órbita circular bajo la influencia de una fuerza central atractiva dirigida hacia un punto del círculo, la fuerza es inversamente proporcional a la quinta potencia de la distancia.

b) Demostrar que para la órbita descrita la energía total de la partícula es nula.

c) Hallar el periodo del movimiento.

d) Hallar \dot{x} , \dot{y} y v en función del ángulo en torno al círculo y demostrar que las tres cantidades son infinitas cuando la partícula pasa por el centro de fuerzas.

7. Demostrar que el problema de fuerzas centrales puede resolverse mediante funciones elípticas cuando la fuerza sea función de una potencia de la distancia que tenga los siguientes exponentes fraccionarios:

$$n = -\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{5}{3}, -\frac{7}{3}.$$

8. a) Para órbitas circulares y parabólicas en un potencial atractivo que varíe como $1/r$ que correspondan a un mismo momento cinético, demostrar que la distancia al perihelio de la parábola es igual a la mitad del radio del círculo.

b) Probar que en la misma fuerza central del apartado (a) la celeridad de una partícula en un punto cualquiera de una órbita parabólica es $\sqrt{2}$ veces mayor que la celeridad en una órbita circular que pase por el mismo punto.

9. Se observa que un meteoro choca contra la Tierra con una celeridad v , según un ángulo ϕ con el cenit. Supongamos que lejos de la Tierra la celeridad del meteoro era v' y que se movía en una dirección que formaba con el cenit un ángulo ϕ' ; siendo el efecto de la gravedad terrestre tirar de aquél llevándolo a una órbita hiperbólica que corte a la superficie de la Tierra. Demostrar cómo pueden determinarse v' y ϕ' a partir de v y ϕ en función de constantes conocidas.

10. Probar que en una órbita elíptica de Kepler de pequeña excentricidad e el movimiento angular de la partícula visto desde el foco *desocupado* de la elipse es uniforme (el foco desocupado es el foco que *no* es el centro de atracción) para un primer orden de e . Este teorema es el que hace que la imagen de Tolomeo del movimiento planetario constituya una aproximación razonablemente precisa. Según esta imagen, el Sol se supone que se mueve uniformemente recorriendo una circunferencia cuyo centro está separado de la Tierra una distancia llamada *ecuante*. Si se toma la ecuante como distancia entre los dos focos de la órbita elíptica correcta, el movimiento angular vendrá, pues, descrito por la imagen tolemeica con una precisión de primer orden en e .

11. Uno de los temas clásicos de ciencia ficción es un planeta gemelo («Planeta X») de la Tierra que tiene iguales masa, energía y cantidad de movimiento, pero que está en órbita desfasada 90° respecto a la Tierra de manera que quede oculto por el Sol. Sin embargo, a causa de la naturaleza elíptica de la órbita no estaría siempre totalmente oculto. Suponer que existe dicho planeta en la misma órbita de Kepler que la Tierra de manera que esté en el afelio cuando la Tierra esté en el perihelio. Con una aproximación de primer orden en e , calcular la separación angular máxima del gemelo y el Sol vistos desde la Tierra. ¿Podría verse desde la Tierra dicho gemelo? Suponer que el planeta gemelo estuviera en una órbita elíptica de igual tamaño y forma que la de la Tierra, pero girada 180° respecto a la órbita terrestre, de manera que la Tierra y su gemelo estuvieran en el perihelio en el mismo tiempo. Repetir los cálculos y comparar la visibilidad en los dos casos.

12. En el perigeo de una órbita gravitatoria elíptica, una partícula experimenta un impulso S (cfr. Ejercicio 9, cap. 2) en dirección radial, que lleva a la partícula a otra órbita elíptica. Determinar el nuevo semieje mayor, la excentricidad y la orientación del eje mayor en función de los primitivos.

13. Una distribución uniforme de polvo en el sistema solar añade a la atracción gravitatoria del Sol sobre un planeta una fuerza adicional

$$\mathbf{F} = -mC\mathbf{r},$$

donde m es la masa del planeta, C es una constante proporcional a la constante de la gravitación y a la densidad del polvo y \mathbf{r} es el radio vector del Sol al planeta (considerados ambos puntuales). Esta fuerza adicional es muy pequeña frente a la fuerza gravitatoria directa Sol-planeta.

- Calcular el periodo para una órbita circular de radio r_0 del planeta en este campo combinado.
- Calcular el periodo de las oscilaciones radiales respecto a esta órbita circular causadas por perturbaciones ligeras.
- Demostrar que las órbitas casi circulares pueden aproximarse a una elipse en precesión y hallar la frecuencia de esta precesión, ¿Tiene la precesión el mismo sentido o el opuesto que la velocidad angular orbital?

14. Demostrar que el movimiento de una partícula en el campo de potencial

$$V(r) = -\frac{k}{r} + \frac{h}{r^2}$$

es igual que el movimiento bajo el potencial de Kepler sólo cuando se expresa en función de un sistema de coordenadas en rotación o precesión en torno al centro de fuerzas.

En el caso de energía total negativa, demostrar que si el término potencial adicional es muy pequeño frente al potencial de Kepler, la celeridad angular de precesión de la órbita elíptica será

$$\dot{\Omega} = \frac{2\pi mh}{l^2 \tau}$$

Se observa que el perihelio de Mercurio tiene una precesión (después de la corrección de las perturbaciones planetarias conocidas) de unos 40'' de arco por siglo. Demostrar que esta precesión podría explicarse clásicamente si la cantidad adimensional

$$\eta = \frac{h}{ka}$$

(que es una medida del potencial perturbador inversamente proporcional al cuadrado de la distancia relativo al potencial gravitatorio) fuese del orden 7×10^{-8} . (La excentricidad de la órbita de Mercurio es 0,206 y su periodo es de 0,24 año.)

15. El término adicional del potencial que se comporta como r^{-2} en el problema anterior se parece mucho al término de barrera centrífuga del potencial unidimensional equivalente. ¿Por qué sucede entonces que el término de fuerza adicional origina una precesión de la órbita, mientras que una adición a la barrera, a través de un cambio de l , no lo hace?

16. Evaluar aproximadamente el cociente entre las masas del Sol y la Tierra, utilizando únicamente las duraciones del año y del mes lunar (27,3 días) y los radios medios de la órbita terrestre ($1,49 \times 10^8$ km) y de la órbita lunar ($3,8 \times 10^5$ km).

17. Demostrar que en el caso de movimiento elíptico en un campo gravitatorio la celeridad radial se puede escribir en la forma

$$\dot{r} = \frac{\omega a}{r} \sqrt{a^2 e^2 - (r - a)^2}$$

Introducir la anomalía excéntrica variable ψ en lugar de r y demostrar que la ecuación diferencial en ψ que resulta se puede integrar inmediatamente para dar la ecuación de Kepler.

18. Si es pequeña la excentricidad e , la ecuación de Kepler para la anomalía excéntrica ψ en función de ωt (ec. 3-76) se resuelve fácilmente en un ordenador por medio de una técnica iterativa que trate al término $e \text{ sen } \psi$ como término de orden inferior al de ψ . Representando por ψ_n la n -ésima solución iterativa, la relación de iteración evidente es

$$\psi_n = \omega t + e \text{ sen } \psi_{n-1}$$

Utilizando este método de iteración hallar la forma analítica de un desarrollo de ψ en potencias de e con términos de hasta, al menos, e^2 .

19. Desarrollando $e \operatorname{sen} \psi$ en serie de Fourier en ωt , demostrar que la ecuación de Kepler tiene la solución formal

$$\psi = \omega t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} J_n(ne) \operatorname{sen} \omega t,$$

donde J_n es la función de Bessel de orden n . Para argumentos pequeños, la función de Bessel se puede aproximar por medio de un desarrollo en serie de potencias del argumento. En consecuencia, deducir de este resultado los primeros términos del desarrollo de ψ en potencias de e . Una buena fuente de información acerca de las propiedades de las funciones de Bessel la tenemos en el «*Handbook of Mathematical Functions*» de Abramowitz y Stegun, especialmente en la página 360.

20. Si representamos por ρ a la diferencia $\psi - \omega t$, podremos escribir la ecuación de Kepler en la forma

$$\rho = e \operatorname{sen}(\omega t + \rho).$$

Se pueden obtener aproximaciones sucesivas a ρ desarrollando $\operatorname{sen} \rho$ en serie de Taylor en ρ y sustituyendo luego ρ por su expresión dada por la ley de Kepler. Demostrar que la primera aproximación a ρ es ρ_1 dada por

$$\operatorname{tg} \rho_1 = \frac{e \operatorname{sen} \omega t}{1 - e \cos \omega t},$$

y que la siguiente aproximación se halla a partir de

$$\operatorname{sen}(\rho_2 - \rho_1) = -e^3 \operatorname{sen}(\omega t + \rho_1)(1 + e \cos \omega t),$$

expresión que es precisa hasta los términos de orden e^4 .

21. El periodo de la Tierra entre pasos sucesivos por el perihelio («año anomalístico») es de 365,2596 días solares medios y la excentricidad de la órbita es 0,0167504. Suponiendo movimiento en una órbita elíptica kepleriana, ¿qué ángulo llega a moverse la Tierra en la órbita, partiendo del perihelio, en un tiempo igual a un cuarto del año anomalístico? Dar el resultado en grados con una precisión no inferior a un segundo de arco. Puede utilizarse cualquier método, incluido el cálculo numérico con una calculadora o con un ordenador.

22. En el movimiento hiperbólico en un potencial $1/r$ lo análogo de la anomalía excéntrica es F definida por

$$r = a(e \cosh F - 1),$$

donde $a(e - 1)$ es la distancia de mayor aproximación. Hallar lo análogo a la ecuación de Kepler dando t a partir del tiempo de mayor aproximación en función de F .

23. El *monopolo magnético* está definido (si existe) por una singularidad del campo magnético de la forma $\mathbf{B} = b\mathbf{r}/r^3$, donde b es una constante (medida de la carga magnética, si existiera). Supongamos que una partícula de masa m se mueva en el campo de un monopolo magnético y un campo de fuerzas centrales que deriva de un potencial $V(r) = -k/r$.

- a) Hallar la forma de la ecuación de Newton del movimiento, utilizando la fuerza de Lorentz dada por la ecuación (1-61). Teniendo en cuenta el producto $\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}}$ demostrar que aun cuando el momento cinético no se conserva (el campo de fuerzas no es central) existe un vector conservativo

$$\mathbf{D} = \mathbf{L} - \frac{qb}{c} \frac{\mathbf{r}}{r}$$

- b) Siguiendo paralelamente los pasos que llevan de la ecuación (3-79) a la (3-82), demostrar que para cierta $f(r)$ existe un vector conservativo análogo al vector de Laplace-Runge-Lenz en el cual \mathbf{D} desempeña el mismo papel que \mathbf{L} en el problema de las fuerzas de Kepler puras.

24. Si el vector velocidad, o la cantidad de movimiento, de una partícula se coloca con su origen en el centro de fuerzas, su extremo trazará lo que se llama *hodógrafa* de la partícula, curva muy antigua en la Historia de la Mecánica que ha revivido últimamente en relación con la Dinámica de los vehículos espaciales. Tomando el producto vectorial de \mathbf{L} por el vector \mathbf{A} de Laplace-Runge-Lenz, demostrar que la hodógrafa correspondiente a un movimiento elíptico de Kepler es, en función de la cantidad de movimiento, una circunferencia de radio mk/l con origen sobre el eje y desplazado una distancia A/l respecto al centro de fuerzas.

25. ¿Qué cambios se producirían, si se produjeran, en la dispersión de Rutherford si la fuerza de Coulomb fuese atractiva en vez de repulsiva?

26. Examinar la dispersión que produce una fuerza central repulsiva $f = kr^{-3}$. Demostrar que la sección eficaz diferencial viene dada por

$$\sigma(\Theta) d\Theta = \frac{k}{2E} \frac{(1-x) dx}{x^2(2-x)^2 \text{sen} \pi x}$$

donde x es el cociente Θ/π y E es la energía.

27. Un potencial de fuerzas centrales que se encuentra frecuentemente en Física nuclear es el *pozo rectangular*, definido por el potencial

$$\begin{aligned} V &= 0, & r > a, \\ &= -V_0, & r \leq a. \end{aligned}$$

Demostrar que la dispersión producida por dicho potencial en Mecánica clásica es igual a la refracción de rayos luminosos por una esfera de radio a e índice de refracción relativo

$$n = \sqrt{\frac{E + V_0}{E}}.$$

(Esta equivalencia pone de manifiesto por qué era posible explicar los fenómenos de refracción tanto mediante ondas de Huygens como con corpúsculos mecánicos de Newton.) Demostrar también que la sección eficaz diferencial es

$$\sigma(\Theta) = \frac{n^2 a^2 \left(n \cos \frac{\Theta}{2} - 1 \right) \left(n - \cos \frac{\Theta}{2} \right)}{4 \cos \frac{\Theta}{2} \left(1 + n^2 - 2n \cos \frac{\Theta}{2} \right)^2}.$$

¿Cuál es la sección eficaz total?

28. Consideremos un potencial de Coulomb repulsivo truncado definido en la forma

$$V = \begin{cases} \frac{k}{r}, & r > a, \\ \frac{k}{a}, & r \leq a. \end{cases}$$

En el caso de una partícula de energía total $E > k/a$, obtener expresiones para el ángulo de dispersión Θ en función de s/s_0 , donde s_0 es el parámetro de impacto para el cual el periápside se encuentra en el punto $r = a$. (Las fórmulas se pueden dar en forma explícita pero no son sencillas.) Efectuar una representación gráfica numérica de Θ en función de s/s_0 para el caso particular en que $E = 2k/a$. ¿Qué podemos deducir acerca de la sección eficaz de dispersión angular a partir de la dependencia entre Θ y s/s_0 en este caso particular?

29. Otra versión del potencial de Coulomb truncado tiene la forma

$$V = \begin{cases} \frac{k}{r} - \frac{k}{a}, & r > a \\ = 0, & r < a. \end{cases}$$

Obtener expresiones en forma explícita para el ángulo de dispersión y la sección eficaz diferencial. Es muy conveniente expresarlos en función de un parámetro que mida la distancia de mayor acercamiento en unidades de a . ¿Cuál es la sección eficaz total?

30. Demostrar que en el caso de dispersión repulsiva, la ecuación (3-96) que da el ángulo de dispersión en función del parámetro de impacto, s , puede escribirse en la forma

$$\Theta = \pi - 4s \int_0^1 \frac{\rho \, d\rho}{\sqrt{r_m^2 \left[1 - \frac{V}{E} \right] - s^2(1 - \rho^2)}}$$

o bien

$$\Theta = \pi - 4s \int_0^1 \frac{d\rho}{\sqrt{\frac{r_m^2}{\rho^2 E} [V(r_m) - V(r)] + s^2(2 - \rho^2)}}$$

cambiando la variable de integración a una cierta función $\rho(r)$. Demostrar que para un potencial repulsivo, el integrando no es nunca singular en el límite $r \rightarrow r_m$. Debido a los límites de integración definidos, estas formulaciones presentan ventajas en los cálculos numéricos de $\Theta(s)$ y permiten de manera natural el empleo de esquemas de cuadraturas de Gauss-Legendre.

31. Aplicar la formulación del ejercicio anterior para calcular numéricamente $\Theta(s)$ y la sección eficaz diferencial para el potencial repulsivo

$$V = \frac{V_0}{1 + r}$$

y para una energía total $E = 1,2V_0$. Sugerimos que una cuadratura de Gauss-Legendre de 16 puntos dará una precisión adecuada. ¿Presenta arco iris la dispersión?

32. Si un potencial repulsivo disminuye monótonamente con r , para energías grandes frente a $V(r_m)$ el ángulo de dispersión será pequeño. En estas condiciones, demostrar que la ecuación (3-97) se puede transformar de manera que el ángulo de desviación venga dado aproximadamente por

$$\Theta = \frac{1}{E} \int_0^1 \frac{[V(u_m) - V(u)] \, dy}{(1 - y^2)^{3/2}}$$

donde y es, evidentemente, u/u_m .

Demostrar, además, que si $V(u)$ es de la forma Cu^n , donde n es un entero positivo, en el límite de las energías elevadas la sección eficaz es proporcional a $\Theta^{-2(1+1/n)}$.

33. a) Demostrar que el ángulo de retroceso de la partícula blanco respecto a la dirección de incidencia de la partícula dispersada es, simplemente, $\Phi = \frac{1}{2}(\pi - \Theta)$.

b) Se observa que en dispersión elástica la sección eficaz de dispersión es isótropa en función de Θ . ¿Cuáles son las distribuciones de probabilidad correspondientes para la energía dispersada E_1 de la partícula incidente y para la energía de retroceso E_2 de la partícula blanco?

34. Demostrar que el ángulo de dispersión ϑ en el sistema del laboratorio está relacionado con la energía E_0 antes de la dispersión y la energía E_1 después, mediante la ecuación

$$\cos \vartheta = \frac{m_2 + m_1}{2m_1} \sqrt{\frac{E_1}{E_0}} - \frac{m_2 - m_1}{2m_1} \sqrt{\frac{E_0}{E_1}} + \frac{m_2 Q}{2m_1 \sqrt{E_0 E_1}}$$

Capítulo 4

Cinemática del cuerpo rígido

Ya hemos definido el cuerpo rígido diciendo que es un sistema de puntos materiales sometidos a las ligaduras holonomas consistentes en que las distancias entre todos los pares de puntos se mantienen constantes durante el movimiento. Aun siendo una idealización, el concepto es muy útil y la Mecánica del movimiento del cuerpo rígido merece una exposición completa. En este capítulo vamos a tratar principalmente la *Cinemática* de los cuerpos rígidos, es decir, la naturaleza y características de sus movimientos. Dedicaremos algún tiempo a desarrollar las técnicas matemáticas a emplear, las cuales tienen por sí mismas un gran interés y tienen muchas aplicaciones importantes a otros campos de la Física. Una vez sepamos describir el movimiento de cuerpos rígidos, en el capítulo siguiente se estudiará, dentro del marco de la formulación de Lagrange, cómo se genera dicho movimiento por parte de las fuerzas y momentos aplicados.

4-1 COORDENADAS INDEPENDIENTES PARA UN CUERPO RÍGIDO

Antes de estudiar el movimiento de un cuerpo rígido debemos establecer cuántas coordenadas independientes se necesitan para especificar su configuración. Un cuerpo rígido con N partículas puede tener, como máximo, $3N$ grados de libertad, si bien éstos pueden reducirse mucho a causa de las ligaduras, las cuales se pueden expresar mediante ecuaciones de la forma

$$r_{ij} = c_{ij}. \quad (4.1)$$

Aquí, r_{ij} es la distancia que separa las partículas i -ésima y j -ésima y las c son constantes. El número verdadero de grados de libertad no se puede obtener sin más que restar de $3N$ el

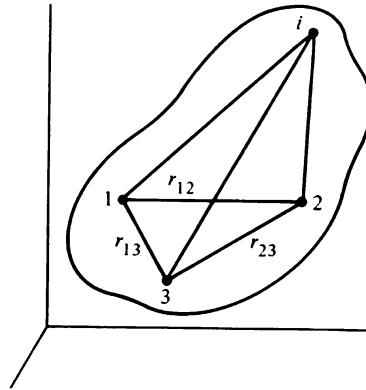


FIGURA 4-1

Esquema que ilustra la situación de un punto en un cuerpo rígido por sus distancias a tres puntos de referencia.

número de ecuaciones de ligadura, ya que existen $\frac{1}{2}N(N-1)$ ecuaciones posibles de la forma de la ecuación (4-1), lo cual excede de $3N$ cuando N es grande. En realidad, las ecuaciones (4-1) no son todas independientes. Para fijar un punto del cuerpo rígido no es necesario especificar sus distancias a *todos* los demás puntos del cuerpo; sólo se necesita especificar las distancias a otros tres puntos cualesquiera que no estén alineados (cfr. fig. 4-1). Así pues, una vez determinadas las posiciones de tres de las partículas del cuerpo, las ligaduras fijan las posiciones de las partículas restantes. Por tanto, el número de grados de libertad no puede ser mayor que nueve. Ahora bien, los tres puntos de referencia no son independientes; tienen impuestas de hecho tres ecuaciones de ligaduras rígidas,

$$r_{12} = c_{12}, \quad r_{23} = c_{23}, \quad r_{13} = c_{13},$$

que reducen a seis el número de grados de libertad. Que sólo sean necesarias seis coordenadas se puede ver también a partir de las consideraciones siguientes. Para establecer la posición de uno de los puntos de referencia deben darse tres coordenadas. Pero una vez fijado el punto 1, el punto 2 se podrá especificar con sólo dos coordenadas, ya que está obligado a moverse sobre una superficie esférica centrada en 1. Determinados estos dos puntos, el punto 3 sólo tiene un grado de libertad ya que sólo puede girar alrededor del eje que une los otros dos puntos. Por tanto, será suficiente un total de seis coordenadas.

Así pues, un cuerpo rígido en el espacio necesita seis coordenadas generalizadas independientes para especificar su configuración, independientemente de cuántas partículas pueda contener —incluso en el límite de un cuerpo continuo. Desde luego, además de la ligadura de rigidez el cuerpo puede estar sometido a otras ligaduras. Por ejemplo, el cuer-

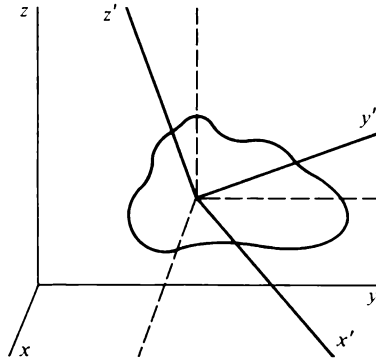


FIGURA 4-2

Los ejes sin acento representan un sistema exterior de ejes de referencia; los ejes con acento están fijos en el cuerpo rígido.

po puede estar obligado a moverse sobre una superficie, o tener un punto fijo. En tal caso, las ligaduras adicionales reducirán aún más el número de grados de libertad y por tanto el número de coordenadas independientes.

¿Cómo se asignarán dichas coordenadas? Notemos que la configuración de un cuerpo rígido queda especificada situando un sistema de ejes coordenados cartesianos fijo en el cuerpo rígido (ejes con acento en fig. 4-2) respecto a los ejes coordenados del espacio exterior al cuerpo. Está claro que para especificar las coordenadas del origen de este sistema de ejes «del cuerpo» son necesarias tres de las coordenadas. Las tres restantes deberán especificar la orientación de los ejes con acento respecto a un sistema de ejes paralelos a los ejes exteriores y de igual origen que el de ejes con acento.

Hay varias maneras de especificar la orientación de un sistema de ejes cartesianos respecto a otro sistema que tenga común con él el origen. El método más útil consiste en dar los cosenos directores de los ejes con acento respecto a los ejes sin acento. Así, el eje x' podría especificarse por sus tres cosenos directores $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ respecto a los ejes x, y, z . Si, como de costumbre, $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ son tres vectores unitarios dirigidos según x, y, z e $\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'$ realizan igual función en el sistema con acento (cfr. fig. 4-3), dichos cosenos directores vendrán definidos por

$$\alpha_1 = \cos(\mathbf{i}', \mathbf{i}) = \mathbf{i}' \cdot \mathbf{i}$$

$$\alpha_2 = \cos(\mathbf{i}', \mathbf{j}) = \mathbf{i}' \cdot \mathbf{j}$$

$$\alpha_3 = \cos(\mathbf{i}', \mathbf{k}) = \mathbf{i}' \cdot \mathbf{k}.$$

(4 2)

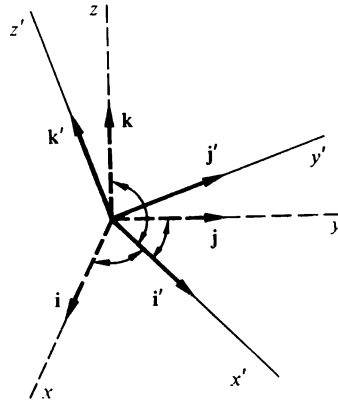


FIGURA 4-3

Cosenos directores del sistema de ejes del cuerpo respecto a un sistema exterior de ejes.

El vector \mathbf{i}' puede expresarse en función de \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} por medio de la relación

$$\mathbf{i}' = (i' \cdot \mathbf{i})\mathbf{i} + (i' \cdot \mathbf{j})\mathbf{j} + (i' \cdot \mathbf{k})\mathbf{k}$$

o sea

$$\mathbf{i}' = \alpha_1 \mathbf{i} + \alpha_2 \mathbf{j} + \alpha_3 \mathbf{k}. \quad (4 \ 3)$$

Análogamente, los cosenos directores del eje y' con x , y , z pueden designarse por β_1 , β_2 y β_3 y serán las componentes de \mathbf{j}' en el sistema de referencia sin acento:

$$\mathbf{j}' = \beta_1 \mathbf{i} + \beta_2 \mathbf{j} + \beta_3 \mathbf{k}. \quad (4 \ 4)$$

Para \mathbf{k}' puede escribirse una ecuación análoga a la (4-4), designando por las γ los cosenos directores del eje z' . Estos conjuntos de nueve cosenos directores especifican por completo la orientación de los ejes x' , y' , z' respecto al sistema x , y , z . Podríamos invertir el proceso y utilizar los cosenos directores para expresar los vectores unitarios \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} en función

de sus componentes según los ejes con acento. Podríamos así escribir

$$\mathbf{i} = (\mathbf{i} \cdot \mathbf{i}')\mathbf{i}' + (\mathbf{i} \cdot \mathbf{j}')\mathbf{j}' + (\mathbf{i} \cdot \mathbf{k}')\mathbf{k}' \quad (4-5)$$

o sea

$$\mathbf{i} = \alpha_1 \mathbf{i}' + \beta_1 \mathbf{j}' + \gamma_1 \mathbf{k}',$$

y ecuaciones análogas para \mathbf{j} y \mathbf{k} .

Los cosenos directores proporcionan también directamente las relaciones entre las coordenadas de un punto dado en un sistema y las correspondientes al otro sistema. Así, las coordenadas de un punto en un sistema de referencia dado son las componentes del vector de posición \mathbf{r} según los ejes del sistema. La coordenada x' vendrá dada en función de x , y , z por

$$x' = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{i}') = \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z,$$

y para las otras coordenadas obtenemos

$$y' = \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z \quad (4 \ 6)$$

$$z' = \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z.$$

Lo que acabamos de hacer para las componentes del vector \mathbf{r} podríamos hacerlo, evidentemente, para cualquier vector arbitrario. Si es \mathbf{G} un cierto vector, la componente de \mathbf{G} según el eje x' estará relacionada con sus componentes x , y , z por

$$G_{x'} = (\mathbf{G} \cdot \mathbf{i}') = \alpha_1 G_x + \alpha_2 G_y + \alpha_3 G_z,$$

etc. El sistema de nueve cosenos directores nos permite definir la transformación entre los dos sistemas de coordenadas.

Si los ejes con acento se toman fijos en el cuerpo, los nueve cosenos directores serán

funciones del tiempo cuando cambie la orientación del cuerpo en el transcurso del movimiento. En este sentido, las α , β y γ podrán considerarse coordenadas que describan la orientación instantánea del cuerpo respecto a un sistema de coordenadas fijo en el espacio pero con origen común con el sistema del cuerpo. Ahora bien, es evidente que no son coordenadas independientes ya que son nueve y hemos demostrado que sólo se necesitan tres coordenadas para especificar una orientación.

Las relaciones entre los cosenos directores provienen del hecho de que los vectores de base en ambos sistemas de coordenadas son ortogonales entre sí y tienen módulo unidad; en símbolos,

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0,$$

y

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1, \quad (4-7)$$

existiendo relaciones análogas entre \mathbf{i}' , \mathbf{j}' y \mathbf{k}' . Podemos obtener las condiciones que cumplen los nueve coeficientes formando todos los productos escalares posibles entre las tres ecuaciones para \mathbf{i} , \mathbf{j} y \mathbf{k} en función de \mathbf{i}' , \mathbf{j}' y \mathbf{k}' (como la ec. 4-5), utilizando las ecuaciones (4-7):

$$\begin{aligned} \alpha_l \alpha_m + \beta_l \beta_m + \gamma_l \gamma_m &= 0, & l, m &= 1, 2, 3; l \neq m, \\ \alpha_l^2 + \beta_l^2 + \gamma_l^2 &= 1, & l &= 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (4-8)$$

Estos dos sistemas de tres ecuaciones cada uno son exactamente suficientes para reducir de nueve a tres el número de cantidades independientes. Formalmente, podemos combinar en una las seis ecuaciones utilizando la δ de Kronecker de símbolo δ_{lm} , definida por

$$\begin{aligned} \delta_{lm} &= 1 & l &= m \\ &= 0 & l &\neq m. \end{aligned}$$

Podemos entonces escribir las ecuaciones (4-8) en la forma

$$\alpha_l \alpha_m + \beta_l \beta_m + \gamma_l \gamma_m = \delta_{lm}. \quad (4-9)$$

No será posible, pues, establecer una lagrangiana y las ecuaciones de movimiento subsiguientes tomando por coordenadas generalizadas los nueve cosenos directores. Para tal fin deberemos utilizar un conjunto de tres funciones de los cosenos directores, las cuales sean independientes. Más adelante describiremos algunos de dichos conjuntos de variables independientes, de entre los cuales el más importante es el de los ángulos de Euler. A pesar de todo, la utilización de los cosenos directores para describir las relaciones entre dos sistemas de coordenadas cartesianas tiene algunas ventajas importantes. Con su ayuda, muchos teoremas referentes al movimiento de cuerpos rígidos se pueden expresar con gran elegancia y generalidad y de una manera que conduce de manera natural a los métodos que se utilizan necesariamente en Relatividad restringida y en Mecánica cuántica. Es por ello que dicho modo de descripción merece que realicemos un estudio extenso.

4-2 TRANSFORMACIONES ORTOGONALES

Para estudiar más fácilmente las propiedades de los nueve cosenos directores conviene cambiar la notación y representar todas las coordenadas por x , distinguiendo los ejes por medio de subíndices:

$$\begin{aligned}x &\rightarrow x_1 \\y &\rightarrow x_2 \\z &\rightarrow x_3.\end{aligned}\tag{4 10}$$

Con lo que las ecuaciones (4-6) quedan en la forma

$$\begin{aligned}x'_1 &= \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 \\x'_2 &= \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 \\x'_3 &= \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3.\end{aligned}\tag{4 11}$$

Las ecuaciones (4-11) constituyen un grupo de ecuaciones de transformación de un sistema de coordenadas x_1, x_2, x_3 a un nuevo sistema x'_1, x'_2, x'_3 . En particular, forman un ejemplo de transformación *lineal* o *vectorial* definida por ecuaciones de transformación de la forma

$$\begin{aligned}x'_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\x'_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\x'_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3,\end{aligned}\tag{4 12}$$

donde a_{11}, a_{12}, \dots constituyen un conjunto cualquiera de coeficientes constantes (independientes de x, x'). * Para simplificar el aspecto de muchas expresiones haremos también uso del convenio de suma que introdujo Einstein: Siempre que en un término aparezca un índice dos o más veces se entenderá, sin que haya otros símbolos, que hay que sumar el término para todos los valores posibles de dicho índice. Así, las ecuaciones (4-12) podrán escribirse, de acuerdo con este convenio, de la forma más compacta

$$x'_i = a_{ij}x_j, \quad i = 1, 2, 3. \quad (4-12')$$

La aparición repetida del índice j indica que el segundo miembro de la ecuación (4-12') es una suma extendida al índice mudo j para todos los valores posibles (en este caso, $j = 1, 2, 3$). Puede existir alguna ambigüedad cuando haya potencias de una cantidad con índice y por ello, una expresión del tipo

$$\sum_i x_i^2$$

aparecerá bajo el convenio de suma en la forma

$$x_i x_i.$$

En lo que sigue, se supondrá siempre que aplicamos el convenio de suma al leer las ecuaciones, a menos que se especifique otra cosa. Cuando sea conveniente, o para suprimir ambigüedades, se podrá desarrollar explícitamente, en ocasiones, el símbolo de sumatorio, por ejemplo cuando deban excluirse de la suma ciertos valores del índice.

La transformación representada por las ecuaciones (4-11) sólo es un caso particular de la transformación lineal general (ec. 4-12) ya que los cosenos directores no son todos independientes. Podemos deducir aquí de nuevo las relaciones (4-8) entre los coeficientes, en función de la nueva notación. Como los dos sistemas de coordenadas son cartesianos, el módulo de un vector se da a través de la suma de los cuadrados de sus componentes. Además, como el vector real permanece siempre el mismo independientemente de qué sistema de coordenadas se utilice, el módulo del vector debe ser el mismo en ambos sistemas. En símbolos, la invariancia del módulo la podemos escribir en la forma

$$x'_i x'_i = x_i x_i. \quad (4-13)$$

* Las ecuaciones (4-12) no constituyen, desde luego, el sistema más general de ecuaciones de transformación (cfr. p. ej., los que llevan de las r a las q , ec. 1-38).

El primer miembro de la ecuación (4-13) será, pues,

$$a_{ij}a_{ik}X_jX_k,$$

y se reducirá al segundo miembro de la ecuación (4-13) si, y sólo si

$$\begin{aligned} a_{ij}a_{ik} &= 1 & j &= k \\ &= 0 & j &\neq k, \end{aligned} \quad (4 \ 14)$$

o, de manera más compacta, si

$$a_{ij}a_{ik} = \delta_{jk}, \quad j, k = 1, 2, 3. \quad (4 \ 15)$$

Cuando se expresan los coeficientes a_{ij} en función de las alfas, betas y gammas, las seis ecuaciones contenidas en la ecuación (4-15) coinciden con las ecuaciones (4-9).

Toda transformación lineal, (4-12), que tenga las propiedades exigidas por (4-15) recibe el nombre de transformación *ortogonal* y a la ecuación (4-15) se le llama *condición de ortogonalidad*. Así pues, el paso de coordenadas fijas en el espacio a coordenadas fijas en el cuerpo rígido (con origen común) se logrará por medio de una transformación ortogonal. La ordenación de cantidades de transformación (los cosenos directores) escrita en la forma

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad (4 \ 16)$$

se denomina *matriz de transformación* o matriz de cambio y la representaremos por una letra mayúscula **A**. Correspondientemente, a las cantidades a_{ij} se les da el nombre de *elementos* de la matriz de cambio.

Para dar un mayor significado a estas consideraciones formales, consideremos el ejemplo del movimiento en un plano, con lo que nos limitamos a sistemas de coordenadas bidimensionales. En tal caso, los índices de las relaciones anteriores sólo podrán tomar los valores 1, 2 y la matriz de cambio se reducirá a la forma

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

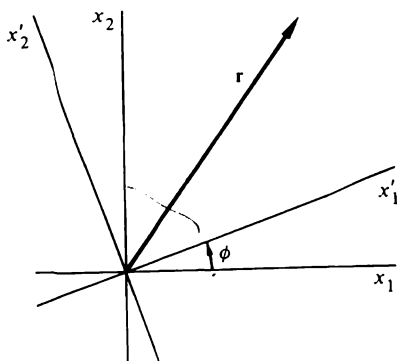


FIGURA 4-4

La rotación de los ejes de coordenadas equivale a una transformación ortogonal bidimensional.

Los cuatro elementos de la matriz están relacionados por tres condiciones de ortogonalidad:

$$a_{ij}a_{ik} = \delta_{jk}, \quad j, k = 1, 2,$$

y por tanto, sólo necesitaremos un parámetro independiente para especificar la transformación. Ahora bien, esta conclusión no es sorprendente. Una transformación bidimensional de un sistema de coordenadas cartesianas a otro corresponde a una rotación de los ejes en el plano (fig. 4-4) y dicha rotación puede quedar especificada por una sola cantidad: el ángulo de rotación ϕ . Expresadas en función de este único parámetro, las ecuaciones de transformación quedan en la forma

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1 \cos \phi + x_2 \operatorname{sen} \phi \\ x'_2 &= -x_1 \operatorname{sen} \phi + x_2 \cos \phi. \end{aligned}$$

Los elementos de la matriz serán, pues

$$\begin{aligned} a_{11} &= \cos \phi, & a_{12} &= \operatorname{sen} \phi, \\ a_{21} &= -\operatorname{sen} \phi, & a_{22} &= \cos \phi, \end{aligned} \quad (4-17)$$

con lo que la matriz \mathbf{A} podrá escribirse en la forma

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \text{sen } \phi \\ -\text{sen } \phi & \cos \phi \end{pmatrix}. \quad (4-17')$$

Las tres condiciones de ortogonalidad podemos desarrollarlas en las ecuaciones

$$\begin{aligned} a_{11}a_{11} + a_{21}a_{21} &= 1 \\ a_{12}a_{12} + a_{22}a_{22} &= 1 \\ a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} &= 0. \end{aligned}$$

Estas condiciones las cumple evidentemente la matriz (4-17'). ya que en función de los elementos (4-17) de la matriz queda

$$\begin{aligned} \cos^2 \phi + \text{sen}^2 \phi &= 1 \\ \text{sen}^2 \phi + \cos^2 \phi &= 1 \\ \cos \phi \text{sen } \phi - \text{sen } \phi \cos \phi &= 0. \end{aligned}$$

La matriz de cambio \mathbf{A} podemos considerar que es un *operador* que aplicado al sistema sin acento lo transforma en el sistema con acento. Simbólicamente, podríamos escribir este proceso en la forma

$$(\mathbf{r})' = \mathbf{A}\mathbf{r}, \quad (4-18)$$

lo cual significa lo siguiente: al operar la matriz \mathbf{A} sobre las componentes de un vector en el sistema sin acento da las componentes del vector en el sistema con acento. Debemos recalcar que, hasta ahora, en el desarrollo del tema, \mathbf{A} sólo actúa sobre el sistema de coordenadas, el vector queda inalterado y sólo buscamos sus componentes en dos sistemas diferentes de coordenadas. En consecuencia, en el primer miembro de la ecuación (4-18) hemos puesto \mathbf{r} entre paréntesis a fin de que quede claro que es el mismo vector el que figura en los dos miembros de la ecuación. Sólo varían sus componentes. Hemos visto que en el caso de dos dimensiones la transformación de coordenadas se reduce a una rotación y \mathbf{A} se identifica con el operador *rotación* en un plano.

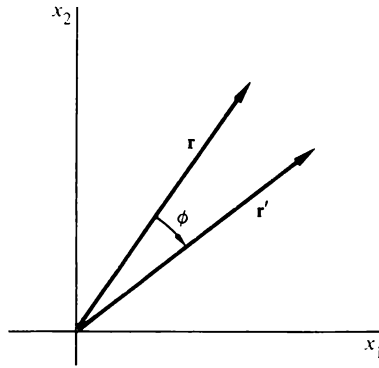


FIGURA 4-5

Interpretación de una transformación ortogonal como rotación del vector, dejando invariado el sistema de coordenadas.

A pesar de esto debemos señalar que, sin cambiar la matemática formal, \mathbf{A} también puede considerarse que es un operador que actúa sobre el *vector* \mathbf{r} , transformándolo en otro vector \mathbf{r}' :

$$\mathbf{r}' = \mathbf{A}\mathbf{r}, \quad (4-19)$$

estando expresados ambos vectores en el mismo sistema de coordenadas. Así, en dos dimensiones, en vez de hacer girar el sistema de coordenadas en sentido antihorario podemos hacer girar el vector \mathbf{r} en sentido *horario* un ángulo ϕ dando un nuevo vector \mathbf{r}' . Las componentes del nuevo vector estarán relacionadas con las del antiguo mediante las mismas ecuaciones (4-12) que describen la transformación de las coordenadas. Por tanto, desde un punto de vista formal, no será necesario utilizar el paréntesis en la ecuación (4-18); en vez de ello, podremos escribirla en la forma de la ecuación (4-19) e interpretarla tanto como operación sobre el sistema de coordenadas cuanto como operación sobre el vector. El álgebra sigue siendo la misma independientemente de cuál de estos dos puntos de vista sea el que sigamos. La interpretación como operador que actúa sobre las coordenadas será la más pertinente cuando se utilice la transformación ortogonal para especificar la orientación de un cuerpo rígido. En cambio, la noción de operador que transforma un vector en otro es la que tiene una aplicación más amplia. En el tratamiento matemático se empleará libremente una u otra interpretación, según convenga al caso tratado. Desde luego, debemos recalcar que la naturaleza de la operación representada por \mathbf{A} cambiará según cuál sea la interpretación que tomemos. Así, si \mathbf{A} corresponde a una rotación *antihoraria* de un ángulo ϕ cuando se aplique al sistema de coordenadas, corresponderá a una rotación de sentido *horario* cuando aplique al vector.

En otros tipos de transformaciones de coordenadas más generales que las transfor-

maciones ortogonales aparece frecuentemente la misma dualidad. A veces puede considerarse que sólo afectan al sistema de coordenadas, expresando alguna cantidad o función dada en un nuevo sistema de coordenadas. En otras ocasiones, se puede considerar que operan sobre la propia cantidad o función, transformándolas en nuevas cantidades en el mismo sistema de coordenadas. Cuando se tome la transformación de manera que sólo actúe sobre el sistema de coordenadas, hablamos del papel *pasivo* de la transformación. En el sentido *activo* se considera que la transformación altera al vector o a otra magnitud física. Estas dos interpretaciones de una transformación las encontraremos en diversas formulaciones de la Mecánica clásica que consideraremos más adelante (cfr. cap. 9) y aparecen en muchos campos de la Física.

Para desarrollar aún más la cinemática del cuerpo rígido en movimiento alrededor de un origen fijo, utilizaremos el Álgebra que rige la transformación de la matriz de cambio. En consecuencia, en el apartado siguiente se resumirán los aspectos elementales del Álgebra matricial con aplicación específica a las matrices ortogonales. A los que desconozcan esta rama de la Matemática, dicho apartado les proporcionará una introducción adecuada para sus fines inmediatos. También servirá para detallar la terminología y notación particulares que vamos a emplear. Los que ya estén familiarizados con el Álgebra matricial podrán, en cambio, prescindir del apartado y pasar directamente al 4-4.

4-3 PROPIEDADES FORMALES DE LA MATRIZ DE CAMBIO

Consideremos qué sucede cuando se efectúan dos transformaciones sucesivas que correspondan a dos desplazamientos sucesivos del cuerpo rígido. Representemos por **B** la primera transformación de **r** a **r'**:

$$x'_k = b_{kj}x_j, \quad (4-20)$$

y por **A** la transformación subsiguiente de **r'** a un tercer sistema de coordenadas **r''**:

$$x''_i = a_{ik}x'_k. \quad (4-21)$$

La relación entre x''_i y x_j podrá entonces obtenerse combinando las dos ecuaciones (4-20) y (4-21):

$$x''_i = a_{ik}b_{kj}x_j.$$

Esto puede escribirse también en la forma

$$x''_i = c_{ij}x_j, \quad (4-22)$$

donde

$$c_{ij} = a_{ik}b_{kj}. \quad (4-23)$$

La aplicación sucesiva de dos transformaciones ortogonales **A**, **B** equivale, pues, a una tercera transformación lineal **C**. También puede demostrarse que **C** es una transformación ortogonal a consecuencia de la ortogonalidad de **A** y **B**. La demostración detallada se deja como ejercicio. Simbólicamente, el operador **C** resultante puede considerarse como producto de los dos operadores **A** y **B**:

$$\mathbf{C} = \mathbf{AB},$$

y los elementos de la matriz c_{ij} son por definición los elementos de la matriz cuadrada que se obtiene al multiplicar las dos matrices cuadradas **A** y **B**.

Notemos que esta multiplicación de «matrices» o de operadores no es conmutativa.

$$\mathbf{BA} \neq \mathbf{AB},$$

ya que, por definición, los elementos de la transformación **D** = **BA** son

$$d_{ij} = b_{ik}a_{kj}, \quad (4-24)$$

que generalmente no concuerdan con los elementos de la matriz **C**, dados por la ecuación (4-23). Así pues, el sistema de coordenadas final depende del orden de aplicación de los operadores **A** y **B**, es decir, de que se aplique primero **A** y después **B**, o primero **B** y después **A**. En cambio, la multiplicación de matrices es asociativa; en un producto de tres o más matrices el orden de las *multiplicaciones* no tiene importancia:

$$(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC}). \quad (4-25)$$

La yuxtaposición de **A** y **r** en la ecuación (4-19), para indicar la operación de **A** sobre el sistema de coordenadas (o sobre el vector), decíamos que era simplemente simbólica. Ahora bien, al extender nuestro concepto a las matrices, puede tomarse también como indicativa de una multiplicación real de matrices. Hasta el momento actual, las matrices utilizadas han sido cuadradas, es decir, con igual número de filas que de columnas. No obstante, también podemos tener matrices de una sola columna, tales como las \mathbf{x} y \mathbf{x}'

definidas por

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}. \quad (4-26)$$

Por definición, el producto \mathbf{Ax} lo consideraremos como una matriz columna cuyos elementos son

$$(\mathbf{Ax})_i = a_{ij}x_j = x'_i.$$

Luego la ecuación (4-19) podrá también escribirse en forma de ecuación matricial

$$\mathbf{x}' = \mathbf{Ax}.$$

La *adición* de dos matrices, aun no siendo un concepto tan importante como el de la multiplicación, es una operación que se utiliza frecuentemente. La suma $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ es una matriz \mathbf{C} cuyos elementos son la suma de los elementos correspondientes de \mathbf{A} y \mathbf{B} :

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

De mayor importancia es la transformación inversa de \mathbf{A} , que es la operación que hace pasar de r' a r . A esta transformación la representaremos por \mathbf{A}^{-1} y a los elementos de esta matriz los designaremos por a'_{ij} . Tendremos entonces el sistema de ecuaciones

$$x_i = a'_{ij}x'_j, \quad (4-27)$$

que debe ser compatible con

$$x'_k = a_{ki}x_i. \quad (4-28)$$

Sustituyendo la x_i dada por (4-27) en la ecuación (4-28), ésta queda en la forma

$$x'_k = a_{ki} a'_{ij} x'_j. \quad (4-29)$$

Como las componentes de r' son independientes, la ecuación (4-29) sólo será correcta si la suma se reduce idénticamente a x'_k . Por tanto, el coeficiente x'_j deberá ser 1 para $j = k$ y cero para $j \neq k$; en símbolos,

$$a_{ki} a'_{ij} = \delta_{kj}. \quad (4-30)$$

Vemos fácilmente que el primer miembro de la ecuación (4-30) es el elemento matricial del producto $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}$, mientras que el segundo miembro es el elemento matricial de la llamada matriz unidad $\mathbf{1}$:

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La ecuación (4-30) podrá, pues, escribirse en la forma

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{1}, \quad (4-32)$$

la cual indica la razón de llamar matriz inversa a la \mathbf{A}^{-1} . La transformación correspondiente a $\mathbf{1}$ se denomina *transformación identidad*, la cual no produce cambio alguno en el sistema de coordenadas:

$$\mathbf{x} = \mathbf{1}\mathbf{x}.$$

Análogamente, multiplicando una matriz cualquiera \mathbf{A} por $\mathbf{1}$, en cualquier orden, \mathbf{A} queda inalterada:

$$\mathbf{1}\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{1} = \mathbf{A}.$$

Variando ligeramente el orden de la demostración de la ecuación (4-32), puede demostrarse que \mathbf{A} y \mathbf{A}^{-1} son conmutables. En vez de sustituir x_i en la ecuación (4-29) en función de x'_j , podríamos igualmente exigir compatibilidad eliminando x'_j entre las dos ecuaciones, llegando de manera análoga a

$$a'_{ij}a_{jk} = \delta_{ik}.$$

En notación matricial esto da

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{1}, \quad (4-33)$$

que demuestra lo enunciado.

Consideremos ahora la suma doble

$$a_{kl}a_{ki}a'_{ij},$$

que podemos escribir en la forma

$$c_{li}a'_{ij} \quad \text{siendo} \quad c_{li} = a_{kl}a_{ki}$$

o bien en la forma

$$a_{kl}d_{kj} \quad \text{siendo} \quad d_{kj} = a_{ki}a'_{ij}.$$

Aplicando las condiciones de ortogonalidad (4-15), la suma en la primera forma se reduce a

$$\delta_{li}a'_{ij} = a'_{lj}.$$

En cambio, la misma suma desde el segundo punto de vista y con ayuda de la ecuación (4-30), se puede escribir

$$a_{kl}\delta_{kj} = a_{jl}.$$

Por tanto, los elementos de la matriz directa \mathbf{A} y los de la matriz recíproca \mathbf{A}^{-1} están relacionados en la forma

$$a'_{ij} = a_{ji}. \quad (4-34)$$

En general, a la matriz que se obtiene de \mathbf{A} intercambiando filas de columnas se le llama *matriz traspuesta* y se indica con una tilde así: $\tilde{\mathbf{A}}$. La ecuación (4-34) establece pues que en el caso de *matrices ortogonales* la matriz recíproca se identifica con la traspuesta; simbólicamente:

$$\mathbf{A}^{-1} = \tilde{\mathbf{A}}. \quad (4-35)$$

Si sustituimos este resultado en la ecuación (4-33), obtenemos

$$\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{A} = \mathbf{1}, \quad (4-36)$$

que coincide con el sistema de condiciones de ortogonalidad (ec. 4-15) escrito en forma abreviada, según puede verificarse por desarrollo directo.* Análogamente, de la ecuación (4-30) se puede obtener otra forma de las condiciones de ortogonalidad sustituyendo (4-34):

$$a_{ki}a_{ji} = \delta_{kj}. \quad (4-37)$$

* Podemos obtener (4-35) directamente de las condiciones de ortogonalidad en la forma (4-36) y la brevedad de la demostración nos indica lo potentes que son los métodos simbólicos. Multipliquemos (4-36) por \mathbf{A}^{-1} a la derecha:

$$\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1},$$

y en virtud de (4-32) resulta

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A}^{-1}.$$

En forma simbólica, la ecuación (4-37) se puede escribir

$$\mathbf{A}\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{1}$$

y puede deducirse directamente de (4-36) multiplicándola a la izquierda por \mathbf{A} y a la derecha por \mathbf{A}^{-1} .

Se dice que una matriz rectangular es de dimensión $m \times n$ si tiene m filas y n columnas. Es decir, si el elemento matricial es a_{ij} , i tomará los valores enteros de 1 a m y j de 1 a n . Evidentemente, la traspuesta de una tal matriz tiene la dimensión $n \times m$. Si un vector matriz columna se considera que es una matriz rectangular de dimensión $m \times 1$, la traspuesta del vector será de dimensión $1 \times m$, es decir, una matriz de una sola fila. El producto \mathbf{AB} de dos matrices rectangulares sólo existirá si el número de columnas de \mathbf{A} es igual al número de filas de \mathbf{B} . Esta es una consecuencia inmediata de la definición de la operación multiplicación que lleva a un elemento matricial:

$$c_{ij} = a_{ik}b_{kj}.$$

Desde este punto de vista, el producto de un vector matriz columna por una matriz cuadrada no existe. El único producto que puede formarse con estas cantidades es el de una matriz cuadrada por una matriz de una sola columna. Ahora bien, observemos que una matriz de una sola fila, es decir, traspuesta de un vector, puede premultiplicar a una matriz cuadrada. Sin embargo, en el caso de un vector es frecuente que no tenga consecuencias la distinción entre la matriz columna y su traspuesta. Por tanto, el símbolo \mathbf{x} se podrá utilizar para representar una matriz columna o una matriz fila, según sea el caso.* Así, en la expresión \mathbf{Ax} , en donde \mathbf{A} es una matriz cuadrada, el símbolo \mathbf{x} representa una matriz columna, mientras que en la expresión \mathbf{xA} representa a los mismos elementos ordenados en una sola fila. Debemos notar que la componente i -ésima de \mathbf{Ax} se puede escribir en la forma

$$A_{ij}x_j = x_j(\tilde{\mathbf{A}})_{ji}.$$

Por tanto, tenemos una útil propiedad de conmutación del producto de un vector por una matriz cuadrada y es que

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{x}\tilde{\mathbf{A}}.$$

* El signo de traspuesta sobre las matrices vector se conservará a veces, cuando sea útil para recalcar la distinción entre matrices columna y fila.

Una matriz cuadrada que sea igual a su traspuesta,

$$A_{ij} = A_{ji},$$

se dice (por razones obvias) que es *simétrica*. Cuando la traspuesta sea la matriz cambiada de signo,

$$A_{ij} = -A_{ji},$$

se dice que la matriz es *antisimétrica* o *hemisimétrica*. Es evidente que en las matrices antisimétricas los elementos de la diagonal principal son todos nulos. En el caso de una matriz cuadrada cualquiera \mathbf{A} , la matriz \mathbf{A}_s definida por

$$\mathbf{A}_s = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \tilde{\mathbf{A}})$$

es simétrica y podremos definir la matriz antisimétrica

$$\mathbf{A}_a = \frac{1}{2}(\mathbf{A} - \tilde{\mathbf{A}}).$$

Resulta evidente que

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_s + \mathbf{A}_a,$$

y

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A}_s - \mathbf{A}_a.$$

Asociada a la noción de matriz traspuesta está su compleja conjugada a la que los físicos llaman *matriz adjunta*, la cual se indica mediante un obelisco, †:

$$\mathbf{A}^\dagger = (\tilde{\mathbf{A}})^* \quad (4.38)$$

donde el asterisco * representa, como de costumbre el complejo conjugado. Análogamente a la definición (4-36) de matriz ortogonal, tenemos una *matriz unitaria* **A** que satisface la condición

$$\mathbf{A}^\dagger \mathbf{A} = \mathbf{1}. \quad (4-39)$$

En el problema de especificar la orientación de un cuerpo rígido la matriz de cambio debe ser real, ya que son reales \mathbf{x} y \mathbf{x}' . Entonces no habrá distinción entre la ortogonalidad y la propiedad unitaria o entre las matrices traspuesta y adjunta. Brevemente, una matriz ortogonal real es unitaria. Pero pronto tendremos ocasión en este capítulo y más adelante en relación con la Relatividad, de introducir matrices complejas. Entonces será muy importante la mencionada distinción. Muchas propiedades de la matriz traspuesta tienen sus análogos evidentes en la matriz adjunta. Sin embargo, debemos advertir que la adjunta de una matriz vector no equivale al vector a causa del posible efecto de la conjugación compleja. Una matriz que sea idéntica a su adjunta se denomina *autoadjunta* o *hermítica*.*

Las dos interpretaciones del operador como transformador de un vector o del sistema de coordenadas quedan englobadas en una si intentamos hallar la transformación de un operador bajo un cambio de coordenadas. Consideremos que **A** es un operador que actúa sobre un vector **F** (o una matriz columna **F**) para dar un vector **G**:

$$\mathbf{G} = \mathbf{A}\mathbf{F}.$$

Si se transforma el sistema de coordenadas mediante una matriz **B**, las componentes del vector **G** en el nuevo sistema vendrán dadas por

$$\mathbf{B}\mathbf{G} = \mathbf{B}\mathbf{A}\mathbf{F},$$

que también puede escribirse en la forma

$$\mathbf{B}\mathbf{G} = \mathbf{B}\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{F}. \quad (4-40)$$

* Advertimos al lector que al término «matriz adjunta» se le da un significado totalmente diferente en gran parte de la literatura matemática, en donde tiene que ver con la inversa de una matriz. Por tanto, los matemáticos deben luchar frecuentemente con toscas designaciones tales como «matriz traspuesta compleja conjugada» (traspuesta conjugada, en español). Los significados que utilizamos aquí de adjunta y autoadjunta han quedado incrustadas en Física a través de su empleo en Mecánica cuántica.

La ecuación (4-40) puede interpretarse diciendo que el operador \mathbf{BAB}^{-1} actuando sobre el vector \mathbf{F} expresado en el nuevo sistema, da un vector \mathbf{G} , expresado igualmente en las nuevas coordenadas. Podemos pues considerar que \mathbf{BAB}^{-1} es la forma que adopta el operador \mathbf{A} cuando se transforma a un nuevo sistema de ejes:

$$\mathbf{A}' = \mathbf{BAB}^{-1}. \quad (4-41)$$

Toda transformación de una matriz que tenga la forma de la ecuación (4-41) se denomina *transformación de semejanza*.

En este momento resulta apropiado considerar las propiedades del determinante formado con los elementos de una matriz cuadrada. Como de costumbre, representaremos dicho determinante mediante barras verticales, en la forma: $|\mathbf{A}|$. Notemos que la definición de multiplicación de matrices es la misma que la de multiplicación de determinantes (cfr. Bôcher, *Introduction to Higher Algebra*, p. 26). Por tanto

$$|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}|.$$

Como el determinante de la matriz unidad vale 1, la forma según determinantes de las condiciones de ortogonalidad (4-36) podrá escribirse

$$|\tilde{\mathbf{A}}| \cdot |\mathbf{A}| = 1.$$

Además, como el valor de un determinante no varía al intercambiar filas y columnas, podemos escribir

$$|\mathbf{A}|^2 = 1, \quad (4-42)$$

lo cual implica que el determinante de una matriz ortogonal sólo puede valer $+1$ ó -1 . (En el apartado siguiente consideraremos el significado geométrico de estos dos valores.)

Cuando la matriz no sea ortogonal, su determinante no tendrá, desde luego, estos valores tan sencillos. Sin embargo, podemos demostrar que el valor del determinante es invariante ante una transformación de semejanza. Multiplicando la ecuación (4-41) de la matriz transformada por \mathbf{B} a la derecha, obtenemos la relación

$$\mathbf{A}'\mathbf{B} = \mathbf{BA},$$

o, en forma de determinantes

$$|\mathbf{A}'| \cdot |\mathbf{B}| = |\mathbf{B}| \cdot |\mathbf{A}|.$$

Como el determinante de \mathbf{B} es, simplemente, un número no nulo,* podemos dividir ambos miembros por $|\mathbf{B}|$ para obtener el resultado que buscábamos:

$$|\mathbf{A}'| = |\mathbf{A}|.$$

Quando tratemos más adelante el movimiento del cuerpo rígido, utilizaremos todas estas propiedades de las transformaciones matriciales, particularmente las correspondientes a matrices ortogonales. Necesitaremos también otras propiedades, las cuales deduciremos cuando lo exija la ocasión.

4-4 ÁNGULOS DE EULER

Ya dijimos (cfr. p. 165) que los nueve elementos a_{ij} no resultan adecuados para tomarlos como coordenadas generalizadas por no ser cantidades independientes. Las seis relaciones (4-9) o (4-15) que expresan las condiciones de ortogonalidad reducen a tres, desde luego, el número de elementos independientes. Pero para caracterizar el movimiento de un cuerpo rígido existe un requisito adicional que deben cumplir los elementos matriciales además de los que implica la ortogonalidad. En el apartado anterior señalamos que el determinante de una matriz ortogonal real podría tener el valor $+1$ o el -1 . Sin embargo, el razonamiento siguiente demuestra que una matriz ortogonal cuyo determinante valga -1 no puede representar un desplazamiento físico de un cuerpo rígido.

Consideremos una matriz simple cuyo determinante valga -1 :

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -1.$$

La transformación \mathbf{S} tiene por efecto cambiar el signo de cada una de las componentes o de

* Si fuese nulo podría no existir operador inverso \mathbf{B}^{-1} (en virtud de la regla de Cramer), lo cual es necesario para que tenga sentido la ecuación (4-41).

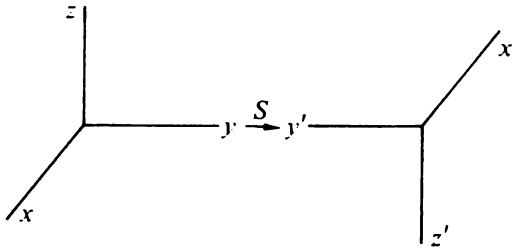


FIGURA 4-6
Inversión de los ejes de coordenadas.

los ejes de coordenadas (cfr. fig. 4-6). Tal operación transforma un sistema de coordenadas dextrogiro en otro levogiro y se denomina *inversión* o *reflexión* de los ejes de coordenadas.

Por la misma naturaleza de esta operación, queda claro que la inversión de un sistema dextrogiro en otro levogiro no puede lograrse mediante ningún cambio *rígido* de orientación de los ejes de coordenadas. Por tanto, una inversión no corresponderá nunca a un desplazamiento físico de un cuerpo rígido. Lo que es cierto para S lo será igualmente para toda matriz cuyo determinante valga -1 , ya que dicha matriz se puede escribir en forma de producto de S por una matriz cuyo determinante valga $+1$ y por tanto incluye la operación de inversión. En consecuencia, no podrá describir un cambio de orientación rígido. Por tanto, las transformaciones que representen el movimiento de un cuerpo rígido deberán limitarse a matrices cuyo determinante valga $+1$. Otro método para llegar a esta conclusión parte del hecho de que la matriz de cambio debe evolucionar de manera continua a partir de la matriz unidad la cual, desde luego, tiene $+1$ por determinante. Sería incompatible con la continuidad del movimiento que el determinante de la matriz cambiase repentinamente, en algún instante, de su valor inicial $+1$ a -1 . Las transformaciones ortogonales con determinante igual a $+1$ se denominan *propias* y las de determinante -1 *impropias*.

Para describir el movimiento de cuerpos rígidos en la formulación de Lagrange de la Mecánica será, pues, necesario buscar tres parámetros independientes que especifiquen la orientación de un cuerpo rígido de tal manera que la matriz ortogonal de cambio correspondiente tenga su determinante igual a $+1$. Tan sólo cuando hayamos encontrado tales coordenadas generalizadas podremos escribir la lagrangiana del sistema y obtener las ecuaciones de Lagrange para el movimiento. En la literatura se han descrito algunos conjuntos de dichos parámetros, si bien el más corriente y útil lo constituyen los *ángulos de Euler*. Vamos a definir estos ángulos y mostrar cómo se pueden expresar en función de ellos los elementos de la matriz ortogonal de cambio.

Podemos efectuar la transformación de un sistema de coordenadas cartesianas a otro por medio de tres rotaciones sucesivas efectuadas en un orden concreto. Se definen entonces los ángulos de Euler como los tres ángulos de rotación sucesivos. Dentro de ciertos

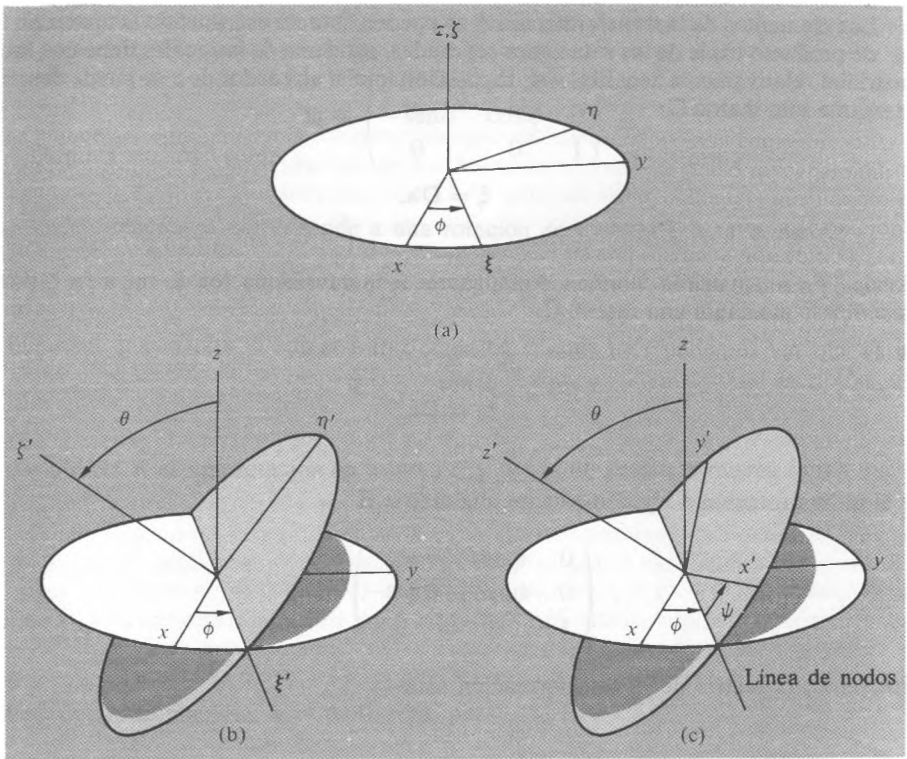


FIGURA 4-7
Rotaciones que definen a los ángulos de Euler.

límites, la elección de los ángulos de rotación es arbitraria. El principal convenio que vamos a seguir se utiliza mucho en Mecánica celeste, Mecánica aplicada y frecuentemente en Física molecular y del estado sólido. Más adelante describiremos otros convenios.

El orden que vamos a emplear se inicia haciendo girar el sistema de ejes inicial xyz un ángulo ϕ alrededor del eje z en sentido antihorario y rotulando $\xi\eta\zeta$ a los ejes del sistema de coordenadas que resulta. En la segunda etapa, se hacen girar los ejes intermedios, $\xi\eta\zeta$, alrededor del eje ξ en sentido antihorario un ángulo θ para dar lugar a otro sistema intermedio: los ejes $\xi'\eta'\zeta'$. El eje ξ' es la intersección de los planos $x\xi$ y $\xi'\eta'$ y se denomina *línea de nodos*. Por último, los ejes $\xi'\eta'\zeta'$ se hacen girar en sentido antihorario un ángulo ψ alrededor del eje ζ' para dar el sistema de ejes $x'y'z'$ buscado. En la figura 4-7 podemos ver las distintas etapas mencionadas. Así pues, los ángulos de Euler θ , ϕ y ψ especifican totalmente la orientación del sistema $x'y'z'$ respecto al xyz y pueden, por tanto, ser las tres coordena-

das generalizadas necesarias. †

Los elementos de la transformación A se pueden obtener escribiendo la matriz en forma de producto triple de las rotaciones separadas, cada una de las cuales tiene una forma matricial relativamente sencilla. Así, la rotación inicial alrededor de z se puede describir mediante una matriz D :

$$\xi = D\mathbf{x},$$

donde ξ y \mathbf{x} son matrices columna. Análogamente, la transformación de $\xi\eta\zeta$ a $\xi'n'\zeta'$ puede describirse mediante una matriz C ,

$$\xi' = C\xi.$$

y la última rotación a $x'y'z'$ mediante una matriz B

$$\mathbf{x}' = B\xi'.$$

Por tanto, la matriz de la transformación total

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$$

es el producto de las matrices sucesivas,

$$A = BCD.$$

Ahora bien, la transformación D es una rotación alrededor de z y por tanto tiene una ma-

† En la literatura antigua se encuentran algunas variaciones secundarias incluso en este convenio. Las diferencias no son muy grandes, pero a menudo son suficientes para frustrar una comparación fácil de las fórmulas finales, tales como las de los elementos de la matriz. La mayor confusión surge, tal vez, en el uso ocasional de sistemas de coordenadas levogiros (en Osgood y Margenau y Murphy). Algunos autores europeos concuerdan con lo dicho por nosotros, salvo en el significado de ϕ y ψ que están permutados.

triz de la forma (cfr. ec. 4-17)

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \text{sen} \phi & 0 \\ -\text{sen} \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4-43)$$

La transformación **C** corresponde a una rotación en torno a ξ , con la matriz

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \text{sen} \theta \\ 0 & -\text{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (4-44)$$

y por último, **B** es una rotación en torno a ζ' y por tanto tendrá la misma forma que **D**:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \cos \psi & \text{sen} \psi & 0 \\ -\text{sen} \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4-45)$$

El producto de matrices $\mathbf{A} = \mathbf{BCD}$ será, pues

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \phi - \cos \theta \text{sen} \phi \text{sen} \psi & \cos \psi \text{sen} \phi + \cos \theta \cos \phi \text{sen} \psi & \text{sen} \psi \text{sen} \theta \\ -\text{sen} \psi \cos \phi - \cos \theta \text{sen} \phi \cos \psi & -\text{sen} \psi \text{sen} \phi + \cos \theta \cos \phi \cos \psi & \cos \psi \text{sen} \theta \\ \text{sen} \theta \text{sen} \phi & -\text{sen} \theta \cos \phi & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (4-46)$$

La transformación inversa de las coordenadas del cuerpo a las coordenadas espaciales

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{x}'$$

vendrá dada inmediatamente por la matriz traspuesta $\tilde{\mathbf{A}}$:

$$\mathbf{A}^{-1} = \tilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \phi - \cos \theta \text{sen} \phi \text{sen} \psi & -\text{sen} \psi \cos \phi - \cos \theta \text{sen} \phi \cos \psi & \text{sen} \theta \text{sen} \phi \\ \cos \psi \text{sen} \phi + \cos \theta \cos \phi \text{sen} \psi & -\text{sen} \psi \text{sen} \phi + \cos \theta \cos \phi \cos \psi & -\text{sen} \theta \cos \phi \\ \text{sen} \theta \text{sen} \phi & \text{sen} \theta \cos \phi & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (4-47)$$

La verificación de la multiplicación y la demostración de que A representa una matriz ortogonal propia, se deja como ejercicio.

Notemos que el orden de rotaciones utilizado para definir la orientación final del sistema de coordenadas es, hasta cierto punto, arbitrario. La rotación inicial podría tomarse en torno a uno cualquiera de los tres ejes cartesianos. En las dos rotaciones subsiguientes, la única limitación es que no puede haber dos rotaciones sucesivas en torno a un mismo eje. Por tanto, en la definición de los ángulos de Euler podrá haber un total de doce convenios (en un sistema de coordenadas dextrogiro). Los dos convenios utilizados más frecuentemente sólo difieren en la elección de eje para la segunda rotación. En las definiciones de ángulos de Euler descritas anteriormente, que se utilizarán en todo el libro, la segunda rotación tiene lugar respecto al eje x intermedio. A esta elección la llamaremos *convenio x* . En Mecánica cuántica, Física nuclear y Física de las partículas se acostumbra a tomar la segunda rotación definidora en torno al eje y intermedio* y a esta forma la llamaremos *convenio y* .

En aplicaciones técnicas relativas a la orientación de vehículos en movimiento tales como naves espaciales y satélites se utiliza corrientemente un tercer convenio. Los convenios x e y tienen el inconveniente de que cuando el sistema de coordenadas con acento difiere poco del sistema sin acento, los ángulos ϕ y ψ no pueden distinguirse, ya que entonces sus ejes de rotación respectivos z y z' son casi coincidentes. A fin de salvar este inconveniente se toman las rotaciones en torno a ejes diferentes. La primera rotación tiene lugar en torno al eje vertical y da el ángulo de *guiñada*. La segunda tiene lugar alrededor de un eje perpendicular fijo en el vehículo y normal al eje de figura; la mide el ángulo de *inclinación* o *picado*. Por último, el tercer ángulo es el de rotación en torno al eje de figura del vehículo y es el *ángulo de balanceo*. Como en las rotaciones intervienen los tres ejes, a este convenio se le da el nombre de *convenio xyz* (aun cuando el orden de los ejes pueda ser diferente). A este último convenio se le llama a veces ángulos de *Tait-Bryan*.

Aun cuando en este libro sólo utilizaremos el convenio x , a fin de comprender las referencias se consignan en el Apéndice B todas las fórmulas en que intervienen los ángulos de Euler, tales como las matrices de rotación, según los convenios y y xyz .

4-5 PARÁMETROS DE CAYLEY-KLEIN Y CANTIDADES RELACIONADAS CON ELLOS

Hemos visto que para especificar la orientación de un cuerpo rígido sólo se necesitan tres cantidades independientes. A pesar de todo, hay ocasiones en las que conviene utilizar sistemas de variables que contengan un número mayor que el mínimo de cantidades para describir una rotación aun cuando no sean adecuadas como coordenadas generalizadas. Así, Felix Klein introdujo el sistema de cuatro parámetros que lleva su nombre para facilitar la integración de problemas giroscópicos complicados. Los ángulos de Euler son de difícil utilización en el cálculo numérico a causa del gran número de funciones trigono-

* A este respecto parece haber sido decisivo el empleo de Wigner en *Group Theory and Its Applications to the Quantum Mechanics of Atomic Spectra* y de Rose en *Elementary Theory of Angular Momentum*.

métricas que intervienen y las representaciones mediante cuatro parámetros se adaptan mucho mejor a la utilización en ordenadores. Además, los sistemas de cuatro parámetros son de gran interés teórico en ramas de la Física que se salen del ámbito de este libro cuando intervengan rotaciones o simetrías de revolución. Vale la pena, pues, dedicar algún espacio a la descripción de estos sistemas ampliados de parámetros. No obstante, en el estudio del movimiento del cuerpo rígido que realizaremos en el capítulo siguiente no utilizaremos directamente ninguno de los resultados de este apartado.

En los apartados anteriores empleamos en ocasiones un espacio real bidimensional con ejes x_1 y x_2 para ilustrar las propiedades de las transformaciones ortogonales. Vamos ahora a considerar un espacio bidimensional diferente, que tenga esta vez ejes complejos denotados u y v . En un tal espacio, una transformación lineal general adopta la forma

$$\begin{aligned} u' &= \alpha u + \beta v, \\ v' &= \gamma u + \delta v, \end{aligned} \quad (4-48)$$

con la correspondiente matriz de cambio

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}. \quad (4-49)$$

Esta \mathbf{Q} tiene ocho cantidades a especificar, ya que cada uno de sus elementos es complejo. Para reducir la transformación a tres cantidades independientes habrá que imponer a \mathbf{Q} condiciones adicionales. En gran parte del tratamiento que sigue, bastará exigir que la transformación sea tal que \mathbf{Q} sea unitaria:

$$\mathbf{Q}^* \mathbf{Q} = \mathbf{1} = \mathbf{Q} \mathbf{Q}^*. \quad (4-50)$$

La condición de unitaria implica también que el *módulo* del determinante de \mathbf{Q} debe ser igual a la unidad:

$$|\mathbf{Q}|^* |\mathbf{Q}| = 1. \quad (4-51)$$

En forma desarrollada, la ecuación (4-50) puede escribirse en forma de las ecuaciones

$$\begin{aligned} \alpha\alpha^* + \gamma\gamma^* &= 1, \\ \beta\beta^* + \delta\delta^* &= 1, \\ \alpha^*\beta + \gamma^*\delta &= 0. \end{aligned} \quad (4-52)$$

Las dos primeras ecuaciones (4-52) son reales, mientras la última es compleja con lo que entre todas constituyen cuatro condiciones. Para que los elementos de \mathbf{Q} sólo contengan tres cantidades independientes habrá que imponer una condición adicional, exigiendo que el determinante valga exactamente +1; es decir,

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1. \quad (4-53)$$

La ecuación (4-53) es compleja, por lo que podemos pensar que entraña dos condiciones. Pero la propiedad de unitaria, expresada por la ecuación (4-50) o las ecuaciones (4-52), fija ya la magnitud del determinante y la ecuación (4-53) sólo sirve para fijar el ángulo de fase. Así pues, sólo una de las condiciones implícitas en la ecuación (4-53) es independiente del requisito de ser unitaria ya impuesto. Las matrices con determinantes +1 se denominan *unimodulares*.* Las transformaciones en un espacio complejo bidimensional con matrices de cambio unimodulares unitarias contendrán, por tanto, sólo tres cantidades independientes que es el número exigido para especificar la orientación de un cuerpo rígido.

Parte de la reducción a parámetros independientes se puede realizar sin demasiada dificultad. Así, de la última de las ecuaciones (4-52) podemos escribir

$$\delta = -\alpha^* \frac{\beta}{\gamma^*}, \quad (4-54)$$

que cuando se sustituye en la ecuación (4-53) del determinante da

$$-\frac{\beta}{\gamma^*}(\alpha\alpha^* + \gamma\gamma^*) = 1.$$

La primera ecuación (4-52) dice que la cantidad entre paréntesis es la unidad y por tanto

$$\beta = -\gamma^*. \quad (4-55)$$

De (4-54) se deduce entonces que

$$\delta = \alpha^*. \quad (4-56)$$

* La designación no es universal (ni tampoco totalmente compatible con el significado literal) pero ha sido ampliamente aceptada.

A consecuencia de estas cuatro condiciones (ec. 4-55 y 4-56), la matriz \mathbf{Q} podría también escribirse en la forma

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^* & \alpha^* \end{pmatrix} \quad (4-57)$$

quedando una condición (deducible de una cualquiera de las dos primeras ec. 4-52 o de la ec. 4-53):

$$\alpha\alpha^* + \beta\beta^* = 1. \quad (4-58)$$

No obstante, a menudo preferimos dejar la matriz en la forma (4-49).

Consideremos ahora \mathbf{Q} solamente como matriz unitaria en un espacio complejo bidimensional. Sea \mathbf{P} un operador matricial en este espacio que tenga la forma concreta

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} z & x - iy \\ x + iy & -z \end{pmatrix}. \quad (4-59)$$

Matemáticamente, x, y, z se pueden considerar simplemente como tres cantidades reales cualesquiera; desde un punto de vista físico se interpretarán como coordenadas de un punto del espacio. Supongamos que la matriz \mathbf{P} se transforma por medio de la matriz \mathbf{Q} de la manera siguiente:

$$\mathbf{P}' = \mathbf{Q}\mathbf{P}\mathbf{Q}^\dagger. \quad (4-60)$$

Por ser unitaria \mathbf{Q} , la adjunta \mathbf{Q}^\dagger es igual a la inversa \mathbf{Q}^{-1} y la ecuación (4-60) sólo representa la transformación de semejanza de \mathbf{P} cuando se somete el espacio uv a la transformación unitaria \mathbf{Q} . Obsérvese que \mathbf{P} es una matriz hermitica. Además, la suma de los elementos de la diagonal principal de \mathbf{P} , llamada *traza* de la matriz, es ahora nula. Podemos demostrar que la propiedad de hermiticidad y la traza de la matriz son invariantes ante una transformación de semejanza (cfr. los ejercicios del final del capítulo). Por tanto, \mathbf{P}' debe ser igualmente autoadjunta y tener traza nula, cosa que sólo puede ser cierta si tiene la forma

$$\mathbf{P}' = \begin{pmatrix} z' & x' - iy' \\ x' + iy' & -z' \end{pmatrix}, \quad (4-61)$$

donde x', y', z' son cantidades reales. El determinante de \mathbf{P} también es invariante ante la transformación de semejanza (4-60), por lo que podremos escribir la igualdad siguiente:

$$|\mathbf{P}| = -(x^2 + y^2 + z^2) = -(x'^2 + y'^2 + z'^2) = |\mathbf{P}'|.$$

Podemos darnos cuenta de que este resultado constituye la condición de ortogonalidad; exige que la longitud del vector $r = xi + yj + zk$ permanezca invariable en la transformación. A cada matriz unitaria \mathbf{Q} en el espacio bidimensional complejo, corresponde una transformación ortogonal real en el espacio tridimensional ordinario.

Las consideraciones siguientes nos ayudan a penetrar en la naturaleza de esta asociación. Designemos por \mathbf{B} la matriz ortogonal real que hace pasar de las coordenadas \mathbf{x} a las \mathbf{x}' .

$$\mathbf{x}' = \mathbf{B}\mathbf{x},$$

y denotemos por \mathbf{Q}_1 la matriz unitaria asociada,

$$\mathbf{P}' = \mathbf{Q}_1\mathbf{P}\mathbf{Q}_1^\dagger.$$

Con la matriz \mathbf{A} podemos realizar una segunda transformación ortogonal de \mathbf{x}' a \mathbf{x}'' ,

$$\mathbf{x}'' = \mathbf{A}\mathbf{x}',$$

con la matriz asociada \mathbf{Q}_2 ,

$$\mathbf{P}'' = \mathbf{Q}_2\mathbf{P}'\mathbf{Q}_2^\dagger.$$

Ahora bien, la transformación directa de \mathbf{x} a \mathbf{x}'' la da la matriz \mathbf{C} definida por

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}\mathbf{B}.$$

Correspondientemente, la transformación directa de \mathbf{P} a \mathbf{P}'' la efectuará una transformación de semejanza con cierta matriz \mathbf{Q}_3 , que debe por tanto estar asociada a \mathbf{C} . No

obstante, también podemos obtener la transformación de P a P' a partir de la ecuación

$$P'' = Q_2 Q_1 P Q_1^\dagger Q_2^\dagger.$$

Es fácil demostrar que

$$Q_1^\dagger Q_2^\dagger = (Q_2 Q_1)^\dagger.$$

Como el producto de dos matrices unitarias es otra matriz unitaria, se deduce que Q_3 debe identificarse con el producto $Q_2 Q_1$:

$$Q_3 = Q_2 Q_1.$$

Así pues, la correspondencia entre las matrices unitarias complejas 2×2 y las matrices ortogonales reales 3×3 es tal que toda relación entre las matrices de un sistema la cumplen también las matrices correspondientes del otro sistema. Los dos sistemas de matrices se dice que son *homomorfos*. Los razonamientos acerca de la asociación de las matrices Q a la transformación ortogonal sólo han utilizado hasta ahora la propiedad de ser unitarias las matrices Q . Como una matriz compleja 2×2 unitaria tiene cuatro cantidades independientes, está claro que habrán muchas matrices Q posibles que correspondan a una misma transformación ortogonal. El requisito adicional de que el determinante de Q valga $+1$ reduce la multiplicidad de matrices Q equivalentes, según veremos, a un par de matrices. Además, el requisito de unimodularidad se verá que restringe la asociación a transformaciones ortogonales con determinante $+1$.

Se ha utilizado a menudo la «jerga» matemática de la teoría de grupos, sobre todo en los últimos años, para dar otra descripción de los dos tipos de matrices que están así en correspondencia. Es fácil demostrar (cfr. ejercicios) que tanto las matrices ortogonales propias reales como las matrices unimodulares complejas tienen la «propiedad de grupo». El grupo de matrices ortogonales propias reales 3×3 se representa por $O^+(3)$, correspondiendo el supraíndice «más» al signo del determinante.* El grupo de matrices unimodulares unitarias complejas 2×2 se representa, correspondientemente, por $SU(2)$ (special unitary). Así pues, la correspondencia que hemos deducido antes se establece entre el grupo $O^+(3)$ y el grupo $SU(2)$.

Podemos escribir los elementos de una matriz ortogonal en función de los elementos de

* Frecuentemente se usa la designación $SO(3)$ —S de special— en vez de $O^+(3)$.

la matriz homomorfa \mathbf{Q} . Según (4-55) y (4-56), la adjunta de \mathbf{Q} es

$$\mathbf{Q}^* = \begin{pmatrix} \alpha^* & \gamma^* \\ \beta^* & \delta^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}.$$

Para simplificar el cálculo introduciremos en la notación las abreviaturas x_+ y x_- definidas en la forma

$$x_+ = x + iy$$

$$x_- = x - iy$$

La matriz transformada \mathbf{P}' se escribirá entonces en la forma

$$\mathbf{P}' = \begin{pmatrix} z' & x'_- \\ x'_+ & -z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z & x_- \\ x_+ & -z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}$$

o bien, efectuando las multiplicaciones indicadas,

$$\mathbf{P}' = \begin{pmatrix} (\alpha\delta + \beta\gamma)z - \alpha\gamma x_- + \beta\delta x_+ & -2\alpha\beta z + \alpha^2 x_- - \beta^2 x_+ \\ 2\gamma\delta z - \gamma^2 x_- + \delta^2 x_+ & -(\alpha\delta + \beta\gamma)z + \alpha\gamma x_- - \beta\delta x_+ \end{pmatrix}. \quad (4-62)$$

Igualando los términos matriciales, podremos escribir las ecuaciones de transformación entre los sistemas de coordenadas con acento y sin acento de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} x'_+ &= 2\gamma\delta z & -\gamma^2 x_- + \delta^2 x_+ \\ x'_- &= -2\alpha\beta z & +\alpha^2 x_- - \beta^2 x_+ \\ z' &= (\alpha\delta + \beta\gamma)z & -\alpha\gamma x_- + \beta\delta x_+. \end{aligned} \quad (4-63)$$

Por último, los elementos matriciales a_{ij} se pueden obtener en función de α , β , γ y δ comparando las ecuaciones (4-63) con las ecuaciones de transformación (4-14). Así, la

última de las ecuaciones (4-63) puede escribirse en la forma

$$z' = (\beta\delta - \alpha\gamma)x + i(\alpha\gamma + \beta\delta)y + (\alpha\delta + \beta\gamma)z,$$

de la cual se deduce inmediatamente que

$$a_{31} = (\beta\delta - \alpha\gamma), \quad a_{32} = i(\alpha\gamma + \beta\delta), \quad a_{33} = \alpha\delta + \beta\gamma.$$

Mediante este proceso, es fácil encontrar que la matriz de cambio completa es

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\alpha^2 - \gamma^2 + \delta^2 - \beta^2) & \frac{i}{2}(\gamma^2 - \alpha^2 + \delta^2 - \beta^2) & \gamma\delta - \alpha\beta \\ \frac{i}{2}(\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2 - \delta^2) & \frac{1}{2}(\alpha^2 + \gamma^2 + \beta^2 + \delta^2) & -i(\alpha\beta + \gamma\delta) \\ \beta\delta - \alpha\gamma & i(\alpha\gamma + \beta\delta) & \alpha\delta + \beta\gamma \end{pmatrix}. \quad (4-64)$$

La ecuación (4-64) nos da una matriz que especifica la orientación de un cuerpo rígido y se expresa totalmente en función de las cantidades α , β , γ y δ . Estas cuatro cantidades, al igual que los ángulos de Euler, proporcionan una manera de establecer la orientación del cuerpo; suele llamárseles *parámetros de Cayley-Klein*.^{*} Desde luego, las cuatro cantidades complejas están ligadas por las relaciones (4-55) y (4-56) y la condición determinante dada por la ecuación (4-58). La realidad de los elementos matriciales de \mathbf{A} (ec. 4-64) puede ponerse inmediatamente de manifiesto con ayuda de las ecuaciones (4-55) y (4-56) escribiendo α y β explícitamente en función de sus partes real e imaginaria:

$$\begin{aligned} \alpha &= e_0 + ie_3, \\ \beta &= e_2 + ie_1. \end{aligned} \quad (4\ 65)$$

* La matriz \mathbf{A} (ec. 4-64), no concuerda con la forma correspondiente dada, p. ej., en Whittaker, p. 12. Esto es así, en esencia, a causa de una elección inicial diferente de la matriz \mathbf{P} . Evidentemente, hay muchas maneras de establecer una matriz cuyo determinante valga $-r^2$ y la elección concreta es cuestión de convenio. La forma (4-59) utilizada aquí se ha tomado de manera que concuerde con la utilizada corrientemente en Mecánica cuántica.

(El por qué de esta elección aparentemente rara de símbolos se aclarará más adelante, cfr. 213). En función de estas cuatro cantidades reales, la condición determinante dada por la ecuación (4-58) queda en la forma

$$e_0^2 + e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 1. \quad (4-66)$$

Con una transformación algebraica sencilla se ve que la matriz **A** dada por la ecuación (4-64) se puede escribir en función de los cuatro parámetros reales en la forma

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} e_0^2 + e_1^2 - e_2^2 - e_3^2 & 2(e_1e_2 + e_0e_3) & 2(e_1e_3 - e_0e_2) \\ 2(e_1e_2 - e_0e_3) & e_0^2 - e_1^2 + e_2^2 - e_3^2 & 2(e_2e_3 + e_0e_1) \\ 2(e_1e_3 + e_0e_2) & 2(e_2e_3 - e_0e_1) & e_0^2 - e_1^2 - e_2^2 + e_3^2 \end{pmatrix}. \quad (4-67)$$

Queda ahora claro que los elementos matriciales son reales. † También puede ponerse fácilmente de manifiesto que la matriz **A** en función de estos parámetros no se puede poner en la forma de la transformación de inversión **S**. El examen de los elementos no diagonales y de sus traspuestos indica que se anulan todos si se anulan al menos tres de los parámetros. Entonces no se puede tomar el parámetro restante no nulo de manera que los tres elementos diagonales (o sólo uno de ellos) valgan -1 . Por tanto, la representación de **A** mediante la ecuación (4-64) o la (4-67) no podrá describir una inversión de coordenadas ni ninguna transformación ortogonal impropia. Los parámetros de Cayley-Klein se pueden expresar en función de los ángulos de Euler correspondientes; si hay necesidad, por comparación directa de los elementos de la ecuación (4-64) con los elementos expresados en función de ϕ , θ y ψ . No obstante, resulta más sencillo e instructivo construir primeramente las matrices **Q** correspondientes a las rotaciones sucesivas separadas que definen los ángulos de Euler y luego combinarlas para formar la matriz completa. Así, el ángulo ϕ se ha definido mediante una rotación en torno al eje z , donde la transformación, en función de x_+ , x_- y z aparece en la forma

$$x'_+ = e^{-i\phi} x_+$$

$$x'_- = e^{i\phi} x_-$$

$$z' = z.$$

† A los cuatro parámetros reales e_0, e_1, e_2, e_3 (o ligeras variantes de los mismos) se les da a veces en la literatura el nombre de parámetros de Cayley-Klein, si bien lo más correcto históricamente es llamarles *parámetros de Euler*.

Comparando estas ecuaciones con (4-63) queda claro que para esta rotación simple, los elementos de la matriz \mathbf{Q} deben tener la forma

$$\gamma = \beta = 0, \quad \alpha^2 = e^{i\phi}, \quad \delta^2 = e^{-i\phi},$$

o sea

$$\mathbf{Q}_\phi = \begin{pmatrix} e^{i\phi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\phi/2} \end{pmatrix}. \quad (4-68)$$

Notemos que estos elementos matriciales satisfacen automáticamente las condiciones (4-55), (4-56) y (4-58).

La siguiente rotación (en el convenio x) tiene lugar en torno al nuevo eje x girándose un ángulo θ en sentido *antihorario* y la identificación de los elementos matriciales correspondientes se produce de manera análoga, si bien los cálculos resultan un tanto engorrosos. Diremos, simplemente, que la matriz \mathbf{Q} correspondiente es

$$\mathbf{Q}_\theta = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & i \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \\ i \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}. \quad (4-69)$$

Como comprobación, podemos verificar directamente que

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & i \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \\ i \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z & x_- \\ x_+ & -z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & -i \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \\ -i \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} z \cos \theta - y \operatorname{sen} \theta & x - i(y \cos \theta + z \operatorname{sen} \theta) \\ x + i(y \cos \theta + z \operatorname{sen} \theta) & -z \cos \theta + y \operatorname{sen} \theta \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

que nos lleva a la transformación buscada:

$$x' = x$$

$$y' = y \cos \theta + z \operatorname{sen} \theta$$

$$z' = -y \operatorname{sen} \theta + z \cos \theta.$$

La rotación final que define ψ , tiene lugar de nuevo en torno a un eje z de manera que

$$\mathbf{Q}_\psi = \begin{pmatrix} e^{i\psi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\psi/2} \end{pmatrix}. \quad (4-70)$$

En § 4-4 obteníamos la matriz ortogonal para la transformación completa y era el producto de las matrices separadas de cada una de las tres rotaciones. Del homomorfismo de las matrices ortogonales reales 3×3 con las matrices \mathbf{Q} se deduce que la \mathbf{Q} para la transformación completa viene dada análogamente por el producto de las tres matrices de rotación \mathbf{Q}_ψ , \mathbf{Q}_θ , \mathbf{Q}_ϕ :

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_\psi \mathbf{Q}_\theta \mathbf{Q}_\phi = \begin{pmatrix} e^{i\psi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\psi/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & i \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \\ i \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\phi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\phi/2} \end{pmatrix},$$

o sea

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} e^{i(\psi+\phi)/2} \cos \frac{\theta}{2} & i e^{i(\psi-\phi)/2} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \\ i e^{-i(\psi-\phi)/2} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} & e^{-i(\psi+\phi)/2} \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}. \quad (4-71)$$

Los parámetros de Cayley-Klein en función de los ángulos de Euler será, pues,

$$\begin{aligned} \alpha &= e^{i(\psi+\phi)/2} \cos \frac{\theta}{2}, & \beta &= i e^{i(\psi-\phi)/2} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}, \\ \gamma &= i e^{-i(\psi-\phi)/2} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}, & \delta &= e^{-i(\psi+\phi)/2} \cos \frac{\theta}{2}, \end{aligned} \quad (4-72)$$

lo que completa la identificación buscada. Las representaciones de los ángulos de Euler para los cuatro parámetros de Euler reales las proporcionan de manera inmediata las

ecuaciones (4-72):

$$\begin{aligned} e_0 &= \cos \frac{\phi + \psi}{2} \cos \frac{\theta}{2}, & e_2 &= \operatorname{sen} \frac{\phi - \psi}{2} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}, \\ e_1 &= \cos \frac{\phi - \psi}{2} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}, & e_3 &= \operatorname{sen} \frac{\phi + \psi}{2} \cos \frac{\theta}{2}. \end{aligned} \quad (4-72')$$

En el Apéndice B se consignan las fórmulas correspondientes para los parámetros de Cayley-Klein y Euler en función de los ángulos de Euler definidos según los otros convenios.

Hagamos notar que la matriz \mathbf{P} puede escribirse en forma de suma de tres matrices de traza nula:

$$\mathbf{P} = x\sigma_1 + y\sigma_2 + z\sigma_3, \quad (4-73)$$

donde $\sigma_1, \sigma_2,$ y σ_3 se denominan *matrices de giro de Pauli*:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (4-74)$$

Conviene pensar en estas tres matrices como si fueran las componentes de un vector* con lo que la ecuación (4-73) podrá escribirse simbólicamente en la forma compacta

$$\mathbf{P} = \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\sigma}. \quad (4-73')$$

Junto con la matriz unidad

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

* Adoptamos esta notación por conveniencia ya que, desde luego, las matrices individuales no se transforman como lo hacen las componentes de un vector en el espacio de configuración. En verdad, deben tener la misma representación para todos los sistemas de coordenadas espaciales, si no la ecuación (4-73) no sería válida.

las matrices de giro de Pauli constituyen un sistema de cuatro matrices independientes. En consecuencia, toda matriz 2×2 que contenga cuatro cantidades independientes se podrá expresar en forma de función lineal de ellas. Así, expresada en función de los parámetros de Euler, la matriz \mathbf{Q} se podrá escribir en la forma

$$\mathbf{Q} = e_0 \mathbf{1} + i(e_1 \sigma_1 + e_2 \sigma_2 + e_3 \sigma_3). \quad (4-74)$$

forma que empieza a explicar por qué se han elegido esos símbolos para los parámetros. † Las matrices \mathbf{Q} para una rotación en torno a un eje de coordenadas se pueden expresar en función de las σ de manera particularmente sencilla. Por ejemplo, la \mathbf{Q}_θ para la rotación alrededor del eje x (ec. 4-69) puede escribirse en la forma

$$\mathbf{Q}_\theta = \mathbf{1} \cos \frac{\theta}{2} + i \sigma_1 \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}. \quad (4-75)$$

Análogamente, la matriz \mathbf{Q}_ϕ para la rotación alrededor del eje z tiene la forma

$$\mathbf{Q}_\phi = \begin{pmatrix} \cos \frac{\phi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\phi}{2} & 0 \\ 0 & \cos \frac{\phi}{2} - i \operatorname{sen} \frac{\phi}{2} \end{pmatrix} = \mathbf{1} \cos \frac{\phi}{2} + i \sigma_3 \operatorname{sen} \frac{\phi}{2}, \quad (4-76)$$

y puede compararse directamente que una rotación alrededor del eje y tiene la misma forma matricial que en (4-76) sustituyendo σ_3 por σ_2 . Todas las matrices de rotación elemental vienen, pues, dadas por expresiones análogas que sólo contienen la matriz unidad y la matriz σ correspondiente. Por tanto, cada una de las matrices de giro de Pauli está asociada a la rotación en torno a un eje particular y puede pensarse que es el *girador unidad* para dicho eje.

Haciendo uso de las propiedades de multiplicación de las matrices de giro de Pauli, puede demostrarse (cfr. Ejercicio 13) que la matriz de rotación elemental \mathbf{Q}_θ dada por la

† El perito en Matemática un tanto arcaica reconocerá en la ecuación (4-74) una matriz cuaternio, cantidad inventada en 1843 por Sir William R. Hamilton. Aquí e_0 es el escalar (cuaternio) y la cantidad entre paréntesis es el vector del cuaternio.

ecuación (4-75) puede escribirse simbólicamente en la forma

$$\mathbf{Q}_\theta = e^{i\boldsymbol{\sigma}_1(\theta/2)}. \quad (4-77)$$

La exponencial de una matriz se toma como abreviatura del desarrollo en serie de la exponencial, cuyo primer término es la matriz unidad $\mathbf{1}$. En relación con esto podemos hacer notar que si \mathbf{B} es una matriz hermitica,

$$\mathbf{A} = e^{i\mathbf{B}}$$

será unitaria (cfr. Ejercicio 12). Como las matrices de giro de Pauli son manifiestamente hermiticas, se cumple claramente la condición de que sean unitarias las matrices \mathbf{Q} .

Es característico de los parámetros de Cayley-Klein y de las matrices que los contienen que siempre estén presentes semiángulos y esta característica lleva a ciertas propiedades peculiares del espacio uv . Por ejemplo, un giro de 2π radianes alrededor del eje z en el espacio ordinario no hace más que reproducir el sistema de coordenadas original. Así pues, si en la matriz \mathbf{D} del apartado anterior hacemos $\phi = 2\pi$, será $\cos \phi = 1$, $\sin \phi = 0$ y \mathbf{D} se reduce a la matriz unidad $\mathbf{1}$ la cual corresponde a la transformación identidad. En cambio, si se efectúa la misma sustitución en \mathbf{Q}_θ (ec. 4-68), obtenemos

$$\mathbf{Q}_{2\pi} = \begin{pmatrix} e^{i\pi} & 0 \\ 0 & e^{-i\pi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

que es -1 y no $\mathbf{1}$. Al mismo tiempo, la matriz $\mathbf{1} \ 2 \times 2$ debe corresponder también a la transformación identidad tridimensional. Luego hay dos matrices \mathbf{Q} , $\mathbf{1}$ y $-\mathbf{1}$, que corresponden a la matriz unidad 3×3 . En general, si una matriz \mathbf{Q} corresponde a una cierta matriz ortogonal real, también corresponderá a ésta la matriz $-\mathbf{Q}$. El homomorfismo entre los dos sistemas comporta pues, en este caso, una correspondencia uno a uno, o *isomorfismo*, entre la matriz 3×3 y el *par* de matrices $(\mathbf{Q}, -\mathbf{Q})$ y no entre las matrices individuales. En este sentido podemos decir que la matriz \mathbf{Q} es una función *bivalente* de la matriz ortogonal tridimensional correspondiente.

Tal situación paradójica no causa estragos a nuestro sentido común. Tal como lo hemos presentado, el espacio uv es totalmente un artificio matemático, ideado solamente para establecer una correspondencia entre matrices 3×3 y 2×2 de cierto tipo. No podemos exigir ni esperar que tal espacio tenga las mismas propiedades que el espacio físico tridimensional. Los matemáticos han prestado mucha atención a las propiedades del espacio uv y han llamado *espinorial* al vector complejo bidimensional en dicho espacio. En la Mecánica cuántica, el espacio espinorial resulta algo más próximo a la realidad física, ya que la inclusión de los efectos del «spin» del electrón, la función de onda, o parte de ella,

debe hacerse con un espinorial. Los semiángulos y la propiedad bivalente resultante están íntimamente relacionados con el hecho de que el spin es un semientero.* Penetrar más en este tema nos obligaría a salirnos del ámbito de la Mecánica clásica.

4-6 TEOREMA DE EULER REFERENTE AL MOVIMIENTO DEL CUERPO RÍGIDO

Lo visto en los apartados anteriores proporciona una técnica matemática completa para describir los movimientos de un cuerpo rígido. En todo instante, la orientación del cuerpo se puede concretar mediante una transformación ortogonal, cuyos elementos se pueden expresar en función de un sistema adecuado de parámetros. Al transcurrir el tiempo, la orientación variará y por tanto la matriz de cambio será función del tiempo y podrá escribirse en la forma $A(t)$. Si los ejes del cuerpo se toman coincidentes con los ejes espaciales en el instante $t = 0$, la transformación será inicialmente la transformación identidad:

$$A(0) = 1.$$

En un instante posterior, $A(t)$ será diferente, en general, de la transformación identidad, pero como el movimiento físico debe ser continuo $A(t)$ deberá ser función continua del tiempo. Podemos, pues, decir que la transformación evoluciona *continuamente a partir de la transformación identidad*.

Con este método de descripción del movimiento y utilizando solamente la aparatada matemática que hemos presentado, estamos ya en condiciones de obtener las características importantes del movimiento del cuerpo rígido. De importancia fundamental es el

Teorema de Euler: el corrimiento general de un cuerpo rígido con un punto fijo es una rotación alrededor de un cierto eje.

Si tomamos por origen del sistema de ejes del cuerpo al punto fijo, el corrimiento del cuerpo rígido no comporta traslación alguna de los ejes del cuerpo; el único cambio es el de orientación. El teorema dice entonces que el sistema de ejes del cuerpo se puede obtener, en todo instante t , se puede obtener mediante una rotación del sistema de ejes inicial (tomado coincidente con el sistema espacial). Dicho de otro modo, la *operación* implícita en la matriz A que describe el movimiento físico del cuerpo rígido es una *rotación*. Ahora

* Aun cuando la función de onda puede ser bivalente ante la rotación, todas las propiedades observables físicamente permanecen, desde luego, monovalentes. Una rotación de dos vueltas completas, es decir, de 4π radianes, correspondería a $Q_{2\pi}^2$ y ésta es siempre la matriz unidad $+1$. Dirac ha señalado la correspondiente curiosidad topológica de que una trenza de fibras hecha torciendo dos vueltas puede desenredarse, es decir, volverse a su estado original, sin nuevas rotaciones, pero una trenza formada por una sola vuelta completa no. (Ver M. Gardner, *New Mathematical Diversions from Scientific American* (St. Louis, Missouri: Fireside, 1971) cap. 2; v. también *Scientific American*, dic. 1959, p. 166).

bien, es característico de la rotación que una dirección, cual es el eje de rotación, no queda afectada por la operación. Así pues, todo vector soportado por el eje de rotación debe tener las mismas componentes en los ejes iniciales y en los finales. La otra condición necesaria para la rotación, que permanezca invariable el módulo de todo vector, la proporcionan automáticamente las condiciones de ortogonalidad. Luego, quedará demostrado el teorema de Euler si podemos demostrar que existe un vector \mathbf{R} que tenga las mismas componentes en ambos sistemas. Utilizando notación matricial para el vector,

$$\mathbf{R}' = \mathbf{A}\mathbf{R} = \mathbf{R}. \quad (4-78)$$

La ecuación (4-78) constituye un caso particular de la ecuación más general:

$$\mathbf{R}' = \mathbf{A}\mathbf{R} = \lambda\mathbf{R}, \quad (4-79)$$

donde λ es una constante que puede ser compleja. Los valores de λ para los cuales tiene solución la ecuación (4-79) se denominan *valores propios* de la matriz. El problema de hallar los vectores que satisfagan la ecuación (4-79) se denomina, pues, *problema de valores propios* para la matriz dada y la ecuación (4-79) es la llamada *ecuación de los valores propios*. Correspondientemente, los vectores solución son los *vectores propios* de \mathbf{A} . El teorema de Euler lo podremos, pues, enunciar con el siguiente lenguaje:

La matriz ortogonal real que especifica el movimiento físico de un cuerpo rígido con un punto fijo tiene siempre el valor propio +1.

La ecuación (4-79) de los valores propios se puede escribir en la forma

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{1})\mathbf{R} = 0, \quad (4-80)$$

o, en forma desarrollada,

$$\begin{aligned} (a_{11} - \lambda)X + a_{12}Y + a_{13}Z &= 0, \\ a_{21}X + (a_{22} - \lambda)Y + a_{23}Z &= 0, \\ a_{31}X + a_{32}Y + (a_{33} - \lambda)Z &= 0. \end{aligned} \quad (4-81)$$

Las ecuaciones (4-81) constituyen un sistema de tres ecuaciones homogéneas en las com-

ponentes X, Y, Z del vector propio \mathbf{R} . Como tales, nunca podrán dar valores definidos de las tres componentes sino sólo cocientes entre las componentes. Físicamente, esto corresponde a la circunstancia de que sólo puede fijarse la *dirección* del vector propio; su módulo queda indeterminado. El producto de una constante por un vector propio es otro vector propio. En todo caso, por ser homogéneas, las ecuaciones (4-81) sólo pueden tener solución cuando sea nulo el determinante de los coeficientes:

$$|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{1}| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (4-82)$$

La ecuación (4-82) se denomina ecuación *característica* o ecuación *secular* de la matriz, y los valores de λ para los cuales se satisface la ecuación son los valores propios buscados. El teorema de Euler se reduce a decir que para las matrices ortogonales reales consideradas, la ecuación secular debe tener la raíz $\lambda = +1$.

En general, la ecuación secular tendrá tres raíces a las que corresponderán tres vectores propios. Por ser más conveniente, en lo que sigue utilizaremos la notación X_1, X_2, X_3 en vez de la X, Y, Z . Con dicha notación, las componentes de los vectores propios las representaremos por X_{ik} , donde el primer subíndice indica la componente particular y el segundo de cuál de los tres vectores propios se trata. Entonces, podremos representar un elemento genérico del grupo de ecuaciones (4-81) escribiendo (con sumatorio explícito)

$$\sum_j a_{ij} X_{jk} = \lambda_k X_{ik}$$

o bien

$$\sum_j a_{ij} X_{jk} = \sum_j X_{ij} \delta_{jk} \lambda_k. \quad (4-83)$$

Los dos miembros de la ecuación (4-83) tienen la forma de producto de matrices; el primer miembro es el producto de \mathbf{A} por una matriz \mathbf{X} que tenga por elementos X_{ik} y el segundo miembro es el producto de \mathbf{X} por una matriz cuyo elemento jk -ésimo es $\delta_{jk} \lambda_k$. La última matriz es diagonal y los elementos de su diagonal son los valores propios de \mathbf{A} . Por tanto, a esta matriz la designaremos por λ :

$$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}. \quad (4-84)$$

La ecuación (4-83) implica, pues, la ecuación matricial

$$\mathbf{AX} = \mathbf{X}\lambda,$$

o bien, multiplicando a la izquierda por \mathbf{X}^{-1} ,

$$\mathbf{X}^{-1}\mathbf{AX} = \lambda. \quad (4-85)$$

Ahora bien, el primer miembro tiene la forma de una transformación de semejanza que opera sobre \mathbf{A} . (Sólo hay que representar \mathbf{X}^{-1} por \mathbf{Y} para reducirla a la forma de la ecuación (4-41). Luego, la ecuación (4-85) nos proporciona otro método para abordar el problema de los valores propios: Intentamos diagonalizar \mathbf{A} mediante una transformación de semejanza. Cada columna de la matriz utilizada para efectuar la transformación de semejanza consiste en las componentes de un vector propio. Los elementos de la forma diagonalizada de \mathbf{A} son los valores propios correspondientes.

El teorema de Euler se puede demostrar directamente utilizando la propiedad de ortogonalidad de $\tilde{\mathbf{A}}$. Consideremos la expresión

$$(\mathbf{A} - \mathbf{1})\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{1} - \tilde{\mathbf{A}}. \quad (4-86)$$

Si tomamos los determinantes de las matrices que forman uno y otro miembro (cfr. p. 182), podemos escribir la igualdad

$$|\mathbf{A} - \mathbf{1}||\tilde{\mathbf{A}}| = |\mathbf{1} - \tilde{\mathbf{A}}|.$$

Para describir el movimiento de un cuerpo rígido, la matriz $\mathbf{A}(t)$ debe corresponder a una rotación propia; por tanto, el determinante de \mathbf{A} y de su traspuesta, debe valer $+1$. Además, como el determinante de la traspuesta de una matriz es, en general, igual al de la matriz, podemos suprimir los signos traspuestos en la ecuación (4-86):

$$|\mathbf{A} - \mathbf{1}| = |\mathbf{1} - \mathbf{A}|. \quad (4-87)$$

La ecuación (4-87) nos dice que el determinante de una matriz particular es igual al determinante de la matriz cambiada de signo. Supongamos que \mathbf{B} es una matriz $n \times n$.

Propiedad muy conocida de los determinantes es que

$$|-\mathbf{B}| = (-1)^n |\mathbf{B}|.$$

Como estamos en un espacio tridimensional ($n = 3$), está claro que la ecuación (4-87) valdrá para toda rotación propia arbitraria sólo si

$$|\mathbf{A} - \mathbf{1}| = 0. \quad (4-88)$$

Comparando la ecuación (4-88) con la ecuación secular (4-82), se ve que uno de los valores propios que satisfacen a la ecuación (4-82) debe ser siempre $\lambda = +1$, que es el resultado buscado del teorema de Euler.

Observemos cómo la demostración del teorema de Euler hace resaltar la importancia del número de dimensiones del espacio que se considera. En espacios con un número par de dimensiones, la ecuación (4-87) es una identidad para todas las matrices y no se cumple el teorema de Euler. Así pues, para dos dimensiones no hay ningún vector *en el espacio* que quede inalterado por una rotación. El eje de rotación es perpendicular al plano y por tanto se sale del espacio.

Resulta fácil ahora determinar las propiedades de los otros valores propios en tres dimensiones. Llamemos λ_j al valor propio $+1$. El determinante de toda matriz no se ve afectado por una transformación de semejanza (ver p. 182). Luego, en virtud de las ecuaciones (4-84) y (4-85) y de las propiedades de \mathbf{A} por ser rotación propia

$$|\mathbf{A}| = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = \lambda_1 \lambda_2 = 1. \quad (4-89)$$

Además, como \mathbf{A} es una matriz real, si λ es solución de la ecuación secular (4-82), su complejo conjugado λ^* también deberá ser solución.

Si un valor propio dado λ_j es complejo, el vector propio correspondiente \mathbf{R}_j que satisface a la ecuación (4-79) será también complejo en general. Aún no nos hemos ocupado de las propiedades de los vectores complejos sometidos a transformaciones ortogonales reales y existen ciertas modificaciones a efectuar sobre las definiciones anteriores. El cuadrado de la longitud o módulo de un vector complejo \mathbf{R} es $\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^*$ o, en notación matricial $\tilde{\mathbf{R}}\mathbf{R}^*$, donde el signo de traspuesto del vector de la izquierda indica que está representado por una matriz fila. Ante una transformación ortogonal, el cuadrado del módulo es invariante:

$$\tilde{\mathbf{R}}'\mathbf{R}'^* = (\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{R}})\mathbf{A}\mathbf{R}^* = \tilde{\mathbf{R}}\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{A}\mathbf{R}^* = \tilde{\mathbf{R}}\mathbf{R}^*.$$

Supongamos ahora que \mathbf{R} sea un vector propio complejo correspondiente a un valor propio complejo λ . Por tanto, según la ecuación (4-79), tenemos

$$\tilde{\mathbf{R}}' \mathbf{R}'^* = \lambda \lambda^* \tilde{\mathbf{R}} \mathbf{R}^*,$$

que nos lleva a la conclusión de que *todos los valores propios tienen módulo unidad*:

$$\lambda \lambda^* = 1. \quad (4\ 90)$$

De estas propiedades sacamos la conclusión de que hay tres distribuciones posibles de valores propios. Si todos los valores propios son reales, entonces sólo son posibles dos situaciones:

1. Todos los valores propios son iguales a $+1$. La matriz de cambio es entonces precisamente la $\mathbf{1}$, caso que podemos considerar que es trivial.

2. Un valor propio es $+1$ y los otros dos son iguales a -1 . Esta transformación puede caracterizarse por una inversión en dos ejes de coordenadas quedando invariable el tercero. Es igualmente una rotación de ángulo π alrededor de la dirección del eje invariado.

Si no son reales todos los valores propios, sólo queda una posibilidad adicional:

3. Un valor propio es $+1$ y los otros dos son complejos conjugados de las formas $e^{i\Phi}$ y $e^{-i\Phi}$.

Un enunciado más completo del teorema de Euler es, pues, que toda matriz ortogonal no trivial tiene un valor propio *y sólo uno* igual a $+1$.

Los cosenos directores del eje de rotación se pueden entonces obtener haciendo $\lambda = 1$ en las ecuaciones (4-81) y despejando X , Y y Z .* El ángulo de rotación se puede obtener análogamente sin dificultad. Mediante una cierta transformación de semejanza será siempre posible transformar la matriz \mathbf{A} a un sistema de coordenadas en el cual el eje z esté dirigido según el eje de rotación. En dicho sistema de coordenadas \mathbf{A}' representa una rotación de ángulo Φ alrededor del eje z y por tanto tendrá la forma

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} \cos \Phi & \text{sen } \Phi & 0 \\ -\text{sen } \Phi & \cos \Phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

* Si la ecuación secular admite raíces múltiples, los vectores propios correspondientes no podrán hallarse de manera tan sencilla (cfr. § 5-4 y 6-2). No siempre será posible diagonalizar totalmente una matriz general cuando no sean distintos todos los valores propios. Estas excepciones carecen de importancia en las consideraciones actuales, ya que el teorema de Euler muestra que para todas las matrices ortogonales no triviales, $+1$ es raíz simple.

La traza de \mathbf{A}' es, simplemente,

$$1 + 2 \cos \Phi.$$

Como la traza es siempre invariante ante una transformación de semejanza, la traza de \mathbf{A} respecto a todo sistema de coordenadas inicial deberá tener la misma forma

$$\text{Tr } \mathbf{A} = a_{ii} = 1 + 2 \cos \Phi, \quad (4.91)$$

que nos da el valor de Φ en función de los elementos de la matriz. El ángulo de rotación Φ debe identificarse también con el ángulo de fase de los valores propios complejos λ , ya que la suma de los valores propios es precisamente la traza de \mathbf{A} en su forma diagonal (ec. 4-84). En virtud del teorema de Euler y de las propiedades de los valores propios, dicha suma vale

$$\text{Tr } \mathbf{A} = \sum_i \lambda_i = 1 + e^{i\Phi} + e^{-i\Phi} = 1 + 2 \cos \Phi.$$

Vemos que los casos en los cuales todos los valores propios son reales son, en realidad, casos particulares de \mathbf{A} en los que los valores propios sean complejos. Cuando todos los λ_i valgan $+1$ tenemos un ángulo de rotación $\Phi = 0$ (transformación identidad), mientras que el caso en el cual haya un valor propio doble -1 corresponde a $\Phi = \pi$, según ya dijimos.

Los preceptos referentes a la dirección del eje de rotación y al ángulo de rotación no carecen de ambigüedad. Evidentemente, si es \mathbf{R} un vector propio, también lo será $-\mathbf{R}$, ya que no se especifica el sentido de la dirección del eje de rotación. Además, $-\Phi$ satisface la ecuación (4-91) si la satisface Φ . Está claro que la solución de valores propios no fija unívocamente la matriz de transformación ortogonal \mathbf{A} . De la ecuación secular en forma de determinante (ec. 4-82) se deduce que la matriz inversa $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}$ tiene los mismos valores y vectores propios que \mathbf{A} . No obstante, las ambigüedades se pueden mejorar asignando Φ a \mathbf{A} y $-\Phi$ a \mathbf{A}^{-1} , y fijando el sentido de los ejes de rotación mediante la regla del tornillo a derechas.

Por último, debemos mencionar un corolario inmediato del teorema de Euler llamado a veces

Teorema de Chasles: el corrimiento más general de un cuerpo rígido es una traslación más una rotación.

La demostración detallada la vamos a dejar. Simplemente, suprimiendo la ligadura al movimiento con un punto fijo se introducen tres grados de libertad de traslación para el

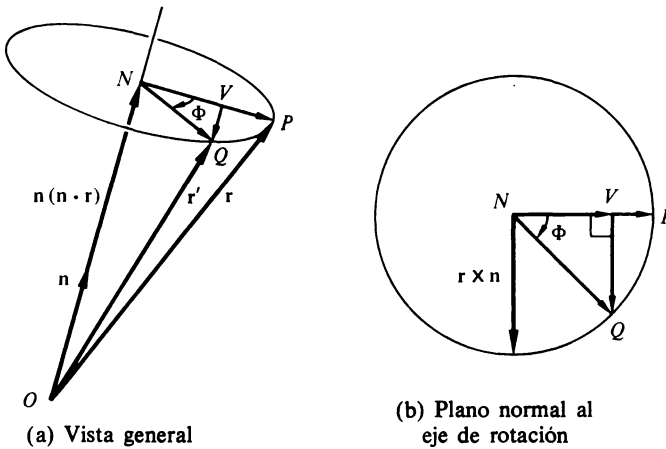


FIGURA 4-8

Diagramas vectoriales para deducir la fórmula de la rotación.

origen del sistema de ejes del cuerpo.*

4-7 ROTACIONES FINITAS

La orientación relativa de dos sistemas de coordenadas cartesianas con origen común se ha descrito mediante diversas representaciones, entre las cuales se cuentan los tres ángulos de rotación sucesivos de Euler que transforman un sistema de coordenadas en otro. En el apartado anterior hemos visto que la transformación de coordenadas se puede efectuar mediante una sola rotación en torno a una dirección adecuada. Será, pues, natural buscar una representación del cambio de coordenadas en función de los parámetros de la rotación —el ángulo de rotación y los cosenos directores del eje de rotación.

Dicha representación se puede deducir con ayuda de un Álgebra vectorial sencilla. Para tal fin es conveniente tratar la transformación en su sentido activo, es decir, en uno que haga girar el vector en un sistema fijo de coordenadas (v. p. 172). Recordemos que una rotación antihoraria del sistema de coordenadas aparece entonces en forma de rotación de sentido *horario* del vector. En la figura 4-8(a) la posición inicial del vector r es la \vec{OP} y la

* M. Chasles (1793-1881) demostró también una forma más potente del teorema, cual es que es posible elegir el origen del sistema de coordenadas del cuerpo de tal manera que la traslación tenga la dirección del eje de rotación. A dicha combinación se le da el nombre de *movimiento helicoidal*. En la actualidad parece utilizarse poco esta versión del teorema de Chasles, así como la elaborada matemática de los movimientos helicoidales desarrollada en el siglo XIX. Véase Routh, *Elementary Dynamics of a Rigid Body*, 5.ª ed., (London: Macmillan, 1891), pp. 194-198.

posición final \mathbf{r}' es la \overrightarrow{OQ} , mientras que el vector unitario según el eje de rotación es el \mathbf{n} . La distancia entre O y N tiene por valor $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}$, por lo que el vector \overrightarrow{ON} se puede escribir en la forma $\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})$. La figura 4-8(b) es un diagrama de los vectores en el plano normal al eje de rotación. El vector \overrightarrow{NP} se puede también describir en la forma $\mathbf{r} - \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})$, si bien su módulo es igual al de los vectores \overrightarrow{NQ} y $\mathbf{r} \times \mathbf{n}$. Para obtener la relación buscada entre \mathbf{r}' y \mathbf{r} , construiremos \mathbf{r}' en forma de suma de tres vectores:

$$\mathbf{r}' = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NV} + \overrightarrow{VQ}$$

o sea

$$\mathbf{r}' = \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}) + [\mathbf{r} - \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})] \cos \Phi + (\mathbf{r} \times \mathbf{n}) \text{sen} \Phi.$$

Reagrupando términos se llega al resultado final:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} \cos \Phi + \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})[1 - \cos \Phi] + (\mathbf{r} \times \mathbf{n}) \text{sen} \Phi. \quad (4-92)$$

A la ecuación (4-92) la llamaremos *fórmula de la rotación*.* Debemos hacer resaltar que la ecuación (4-92) es válida para toda rotación, independientemente de cuál sea su magnitud y por tanto constituye una versión para rotación finita (en sentido horario) de la descripción dada en la página 71 de la variación de un vector ante una rotación infinitesimal. (Ver también p. 217.)

La fórmula (4-92) para la rotación se puede poner en forma más útil introduciendo un escalar e_0 y un vector \mathbf{e} de componentes e_1, e_2 y e_3 definidos en la forma

$$\begin{aligned} e_0 &= \cos \frac{\Phi}{2}, \\ \mathbf{e} &= \mathbf{n} \text{sen} \frac{\Phi}{2}. \end{aligned} \quad (4-93)$$

* Aparentemente, no tiene una designación epónima. Hamel (*Theoretische Mechanik*, p. 103) la adscribe al matemático francés O. Rodrigues (1794-1851), pero se trata probablemente de un error. Presumiblemente, quien la puso primero en forma vectorial fue Gibbs (*Vector Analysis*, p. 338), pero la fórmula básica es muy anterior.

Estas cuatro cantidades están relacionadas evidentemente por la condición

$$e_0^2 + e^2 = e_0^2 + e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 1. \quad (4-94)$$

Se deduce que las funciones trigonométricas de Φ se pueden expresar de la manera siguiente

$$\cos \Phi = 2e_0^2 - 1 = e_0^2 - e^2 = e_0^2 - e_1^2 - e_2^2 - e_3^2,$$

y

(4-95)

$$\mathbf{n} \operatorname{sen} \Phi = 2e_0 \mathbf{e}.$$

Con ayuda de estos resultados y alguna transformación, la ecuación (4-92) se puede escribir en la forma

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r}(e_0^2 - e_1^2 - e_2^2 - e_3^2) + 2\mathbf{e}(\mathbf{e} \cdot \mathbf{r}) + 2(\mathbf{r} \times \mathbf{e})e_0. \quad (4-96)$$

La ecuación (4-96) establece que las componentes \mathbf{r}' son funciones lineales de las componentes de \mathbf{r} . En realidad, es una forma vectorial de las ecuaciones de transformación lineales correspondientes a la matriz ortogonal \mathbf{A} de rotación. Los elementos matriciales a_{ij} se pueden obtener en función de las e sin más que desarrollar la ecuación (4-96) para cada x'_i y reunir los coeficientes de x_j . Por ejemplo, según la ecuación (4-96) x' está relacionada con x, y, z por medio de

$$x' = x(e_0^2 - e_1^2 - e_2^2 - e_3^2) + 2e_1(e_1x + e_2y + e_3z) + 2(ye_3 - ze_2)e_0,$$

y por tanto

$$a_{11} = e_0^2 + e_1^2 - e_2^2 - e_3^2,$$

$$a_{12} = 2(e_1e_2 + e_0e_3),$$

$$a_{13} = 2(e_1e_3 - e_0e_2).$$

La comparación con la forma matricial de la ecuación (4-67) indica que hay una concordancia total con los elementos matriciales que en ella figuran y por tanto las e definidas

por la ecuación (4-93) coinciden con los parámetros de Euler introducidos en §(4-5) (de aquí la elección de la notación). La ecuación (4-94) es, pues, la misma que la condición (4-66).

La identificación de los parámetros de Euler nos permite ahora expresar muchos resultados anteriores en función del ángulo de rotación y de la dirección del eje de rotación. Así, la primera de las ecuaciones (4-72') combinada con la ecuación (4-93) nos da de manera inmediata el ángulo de rotación en función de los ángulos de Euler:

$$\cos \frac{\Phi}{2} = \cos \frac{\phi + \psi}{2} \cos \frac{\theta}{2}. \quad (4-97)$$

Desde luego, este resultado también puede obtenerse, con ayuda de la Trigonometría, a partir de la traza de la matriz \mathbf{A} (ec. 4-46). La matriz unimodular 2×2 \mathbf{Q} , homomorfa con la matriz de rotación \mathbf{A} , también puede escribirse en función de los parámetros de la rotación, partiendo de la ecuación (4-74) escrita en la forma

$$\mathbf{Q} = e_0 \mathbf{1} + ie \cdot \boldsymbol{\sigma}.$$

En virtud de la ecuación (4-93), \mathbf{Q} aparece también en la forma

$$\mathbf{Q} = \mathbf{1} \cos \frac{\Phi}{2} + in \cdot \boldsymbol{\sigma} \operatorname{sen} \frac{\Phi}{2}. \quad (4-98)$$

La ecuación (4-98) es la generalización inmediata de la ecuación (4-75) a un eje de rotación arbitrario y se podría haber obtenido a partir de ella mediante un cambio de coordenadas adecuado. De manera semejante, la analogía correspondiente a la ecuación (4-77), la representación exponencial de \mathbf{Q}_θ , es

$$\mathbf{Q} = e^{in \cdot \boldsymbol{\sigma} (\Phi/2)}, \quad (4-99)$$

con las mismas consideraciones en lo que se refiere al significado de la exponencial de una matriz.

4-8 ROTACIONES INFINITESIMALES

En los apartados anteriores se han asociado diversas matrices a la descripción de la orientación de un cuerpo rígido. No obstante, el número de elementos matriciales ha sido siempre mayor que el número de variables independientes y se les han tenido que añadir diversas condiciones subsidiarias. Ahora que hemos establecido que se puede obtener cualquier orientación dada mediante una sola rotación en torno a un eje determinado, nos sentimos tentados de intentar asociar un vector, caracterizado por tres cantidades independientes, al corrimiento finito de un cuerpo rígido con un punto fijo. Es cierto que se sugiere por sí misma una dirección —la del eje de rotación— y cualquier función del ángulo de rotación parecería ser una magnitud adecuada. Pero pronto vemos que tal correspondencia no se puede establecer con éxito. Supongamos que **A** y **B** son dos tales «vectores» asociados a las transformaciones **A** y **B**. Entonces, para calificarlos de vectores deberán ser conmutativos en la adición:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}.$$

Pero hemos visto que la adición de dos rotaciones, es decir, una rotación efectuada después de otra, corresponde al producto \mathbf{AB} de las dos matrices. No obstante, la multiplicación de matrices no es conmutativa, $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$, y por tanto **A**, **B** no son conmutativos en la adición, por lo que no podrán aceptarse como vectores. Esta conclusión de que la suma de rotaciones finitas depende del orden de las rotaciones, queda de manifiesto en forma contundente mediante un experimento sencillo. Así, la figura 4-9 ilustra la secuencia de sucesos en la rotación de un bloque, primero 90° en torno al eje z' fijo en el bloque y luego 90° en torno al eje y' , mientras que la figura 4-10 presenta las mismas rotaciones en el orden contrario. Las posiciones finales en una y otra secuencia son marcadamente diferentes.

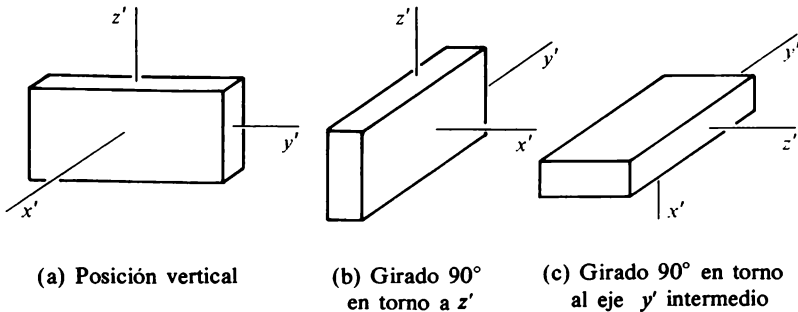


FIGURA 4-9

Efecto de dos rotaciones realizadas en un orden dado.

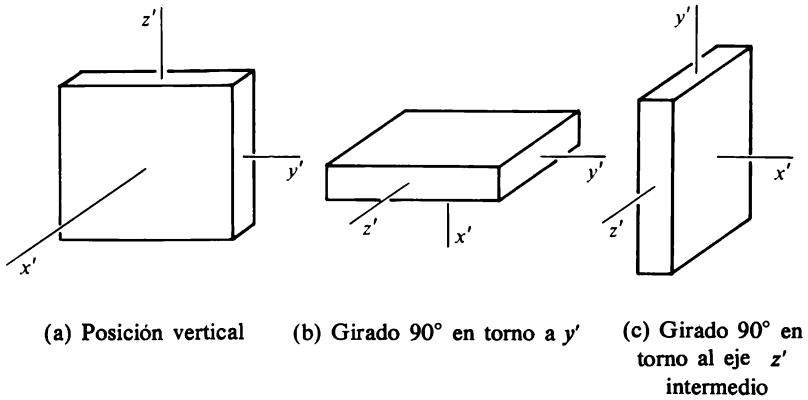


FIGURA 4-10

Las dos rotaciones de la figura 4-9, efectuadas en el orden contrario.

Así pues, aun cuando una rotación finita no se puede representar por un solo vector, no ocurre lo mismo si se consideran sólo *rotaciones infinitesimales*. Una rotación infinitesimal es una transformación ortogonal de ejes de coordenadas en la cual las componentes de un vector son casi iguales en los dos sistemas de ejes. El cambio es infinitesimal. Así pues, la componente x'_1 de un cierto vector r (en la interpretación pasiva de la transformación) sería prácticamente igual que x_1 , siendo pequeñísima la diferencia:

$$x'_1 = x_1 + \epsilon_{11}x_1 + \epsilon_{12}x_2 + \epsilon_{13}x_3. \quad (4-100)$$

Los elementos matriciales ϵ_{11} , ϵ_{12} , etc., deben considerarse infinitesimales, por lo que en los cálculos subsiguientes sólo habrá que conservar el primer orden de ϵ_{ij} que no se anule. Para toda componente genérica x'_i las ecuaciones de transformación infinitesimal se pueden escribir en la forma

$$x'_i = x_i + \epsilon_{ij}x_j$$

o bien

$$x'_i = (\delta_{ij} + \epsilon_{ij})x_j. \quad (4-101)$$

La cantidad δ_{ij} es el elemento de la matriz unidad y, en notación matricial, la ecuación (4-101) se escribirá

$$\mathbf{x}' = (\mathbf{1} + \boldsymbol{\epsilon})\mathbf{x}. \quad (4-102)$$

La ecuación (4-102) nos dice que la forma típica de la matriz de una transformación infinitesimal es $\mathbf{1} + \boldsymbol{\epsilon}$, es decir, es casi la transformación identidad, que difiere a lo máximo en un operador infinitesimal.

Podemos ver ahora que la secuencia de operaciones es indiferente para las transformaciones infinitesimales; dicho de otro modo, *conmutan*. Si $\mathbf{1} + \boldsymbol{\epsilon}_1$ y $\mathbf{1} + \boldsymbol{\epsilon}_2$ son dos transformaciones infinitesimales, uno de los posibles productos es

$$\begin{aligned} (\mathbf{1} + \boldsymbol{\epsilon}_1)(\mathbf{1} + \boldsymbol{\epsilon}_2) &= \mathbf{1}^2 + \boldsymbol{\epsilon}_1\mathbf{1} + \mathbf{1}\boldsymbol{\epsilon}_2 + \boldsymbol{\epsilon}_1\boldsymbol{\epsilon}_2 \\ &= \mathbf{1} + \boldsymbol{\epsilon}_1 + \boldsymbol{\epsilon}_2, \end{aligned} \quad (4-103)$$

despreciando infinitésimos de orden superior. El producto en el orden contrario sólo permutaría $\boldsymbol{\epsilon}_1$ y $\boldsymbol{\epsilon}_2$; ello no tiene efecto alguno sobre el resultado, ya que la adición de matrices es siempre conmutativa. La propiedad conmutativa de las transformaciones infinitesimales suprime la objeción a su representación por vectores.

La matriz inversa para una transformación infinitesimal se obtiene fácilmente. Si es $\mathbf{A} = \mathbf{1} + \boldsymbol{\epsilon}$ la matriz de la transformación, la inversa será

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{1} - \boldsymbol{\epsilon}. \quad (4-104)$$

Como demostración, notemos que el producto $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}$ se reduce a la matriz unidad,

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = (\mathbf{1} + \boldsymbol{\epsilon})(\mathbf{1} - \boldsymbol{\epsilon}) = \mathbf{1},$$

de acuerdo con la definición de matriz inversa (ec. 4-32). Además, la ortogonalidad de \mathbf{A} implica que $\tilde{\mathbf{A}} \equiv (\mathbf{1} + \tilde{\boldsymbol{\epsilon}})$ debe ser igual a \mathbf{A}^{-1} dada por la ecuación (4-104). Luego la matriz infinitesimal es antisimétrica:*

$$\tilde{\boldsymbol{\epsilon}} = -\boldsymbol{\epsilon}.$$

* En este apartado hemos supuesto implícitamente que una transformación ortogonal infinitesimal corresponde a una rotación. En cierto sentido, esta hipótesis es evidente; sería contradictorio hablar de «inversión infinitesimal». Formalmente, la aseveración se deduce de la antisimetría de $\boldsymbol{\epsilon}$. Todos los elementos diagonales de $\mathbf{1} + \boldsymbol{\epsilon}$ son entonces la unidad y hasta el primer orden de magnitud de las cantidades pequeñas, el determinante de la transformación vale siempre +1, que es la característica de una rotación.

Como los elementos diagonales de una matriz antisimétrica son necesariamente nulos, en toda matriz antisimétrica 3×3 sólo podrá haber tres elementos distintos. Por tanto, no se pierde generalidad al escribir ϵ en la forma

$$\epsilon = \begin{pmatrix} 0 & d\Omega_3 & -d\Omega_2 \\ -d\Omega_3 & 0 & d\Omega_1 \\ d\Omega_2 & -d\Omega_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4-105)$$

Las tres cantidades $d\Omega_1, d\Omega_2, d\Omega_3$, está claro que deben identificarse con los tres parámetros independientes que especifican la rotación. Vamos a demostrar que estas tres cantidades constituyen también las componentes de un tipo particular de vector. En virtud de la ecuación (4-102), el *cambio* de las componentes de un vector ante la transformación infinitesimal del sistema de coordenadas puede expresarse mediante la ecuación matricial

$$\mathbf{x}' - \mathbf{x} \equiv d\mathbf{x} = \epsilon \mathbf{x}, \quad (4-106)$$

que en forma desarrollada, con ϵ dada por (4-105), queda en la forma

$$\begin{aligned} dx_1 &= x_2 d\Omega_3 - x_3 d\Omega_2 \\ dx_2 &= x_3 d\Omega_1 - x_1 d\Omega_3 \\ dx_3 &= x_1 d\Omega_2 - x_2 d\Omega_1. \end{aligned} \quad (4-107)$$

El segundo miembro de cada una de las ecuaciones (4-107) tiene la forma de una componente del producto vectorial del vector \mathbf{r} por un vector $d\Omega$ que tenga por componentes $d\Omega_1, d\Omega_2, d\Omega_3$. Podemos por tanto escribir las ecuaciones (4-107) en la forma equivalente

$$d\mathbf{r} = \mathbf{r} \times d\Omega. \quad (4-108)$$

† No podemos insistir demasiado en que $d\Omega$ no sea la diferencial de un vector. La combinación $d\Omega$ representa un vector diferencial, es decir, un vector de módulo diferencial. Lamentablemente, la notación sólo aplica la característica de vector a Ω , pero debe quedar claro al lector que no existe ningún vector del cual $d\Omega$ represente la diferencial. Según hemos visto, una rotación finita *no puede* representarse por un solo vector.

El vector \mathbf{r} se transforma ante una matriz ortogonal \mathbf{B} según las relaciones (cfr. ec. 4-20)

$$x'_i = b_{ij}x_j. \quad (4-109)$$

Si $d\Omega$ ha de ser un vector en el mismo sentido que \mathbf{r} , deberá transformarse ante \mathbf{B} de la misma manera. Según veremos, $d\Omega$ supera la mayor parte de esta prueba, si bien en un aspecto no llega a graduarse como vector. Una manera de examinar las propiedades de transformación de $d\Omega$ es encontrar cómo se transforma la matriz ϵ ante un cambio de coordenadas. Según vimos en § 4-3, la matriz transformada ϵ' se obtiene mediante una transformación de semejanza:

$$\epsilon' = \mathbf{B} \epsilon \mathbf{B}^{-1}.$$

Como en una transformación de semejanza ortogonal se conserva la propiedad de antisimetría de una matriz (v. Ejercicio 3), ϵ' también puede ponerse en la forma de la ecuación (4-105) con elementos no nulos $d\Omega'_i$. El estudio detallado de estos elementos, que damos en el Apéndice C, muestra que ϵ se transforma ante la transformación de semejanza de manera que

$$d\Omega'_i = |\mathbf{B}| b_{ij} d\Omega_j. \quad (4-110)$$

La transformación de $d\Omega$ es, pues, casi igual que la de \mathbf{r} , pero se diferencia en el factor $|\mathbf{B}|$ que es el determinante de la matriz de transformación.

Sin embargo, hay una manera más sencilla de revelar las características vectoriales de $d\Omega$ y verificar sus propiedades de transformación dadas por la ecuación (4-110). En el apartado anterior se dedujo una fórmula para el cambio de las componentes de \mathbf{r} ante una rotación finita Φ del sistema de coordenadas. Haciendo tender Φ a un valor infinitesimal $d\Phi$ se puede obtener una fórmula correspondiente a una rotación infinitesimal. En este paso al límite, el $\cos \Phi$ de la ecuación (4-92) tiende a la unidad y $\sin \Phi$ tiende a Φ ; la expresión resultante para el cambio infinitesimal de \mathbf{r} es entonces

$$\mathbf{r}' - \mathbf{r} \equiv d\mathbf{r} = \mathbf{r} \times \mathbf{n} d\Phi. \quad (4-111)$$

Comparando con la ecuación (4-108) vemos que $d\Omega$ es un vector determinado por

$$d\Omega = \mathbf{n} d\Phi. \quad (4-112)$$

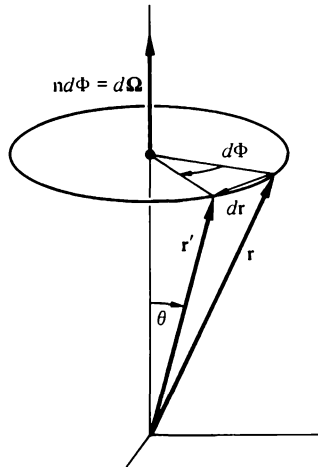


FIGURA 4-11

Cambio que produce en un vector una rotación infinitesimal del mismo en sentido horario.

Desde luego, la ecuación (4-111) se puede deducir directamente sin recurrir a la fórmula para la rotación finita. Considerado en su sentido activo, el cambio de coordenadas infinitesimal corresponde a una rotación de un vector \mathbf{r} que gira un ángulo $d\Phi$ en sentido *horario* en torno al eje de rotación, situación representada en la figura 4-11.* En ella vemos que el módulo de $d\mathbf{r}$ en primer orden de aproximación de $d\Phi$ es

$$dr = r \operatorname{sen}(\theta) d\Phi,$$

y la dirección de $d\mathbf{r}$ es, en este límite, perpendicular a \mathbf{r} y a $d\Omega = n d\Phi$. Por último, el sentido de $d\mathbf{r}$ es el de avance de un tornillo a derechas que gire llevando \mathbf{r} sobre $d\Omega$. Así pues, la figura 4-11 muestra que, en módulo, dirección y sentido, $d\mathbf{r}$ es el que predice la ecuación (4-111).

Queda aún por estudiar las propiedades de transformación de $d\Omega$, definido por la ecuación (4-112). Según sabemos por Álgebra vectorial elemental,[†] existen dos tipos de vectores en lo que respecta a propiedades de transformación ante una inversión. Los vectores que se transforman de acuerdo con la ecuación (4-109) se denominan *vectores polares*. Ante una inversión tridimensional, $S_{ij} = -\delta_{ij}$, todas las componentes de un vector

* La figura 4-11 es la versión de rotación en sentido horario de la figura 2-8.

[†] Véase, p. ej., J. B. Marion, *Principles of Vector Analysis*, pp. 42-49.

polar cambian de signo. En cambio, las componentes de los *vectores axiales* o *pseudovectores* no cambian de signo ante una inversión. El ejemplo más sencillo de vector axial es el producto vectorial de dos vectores polares,

$$\mathbf{C} = \mathbf{D} \times \mathbf{F},$$

en donde las componentes del producto vectorial vienen dadas, como de costumbre, por las definiciones:

$$C_i = D_j F_k - F_j D_k, \quad i, j, k \text{ en orden cíclico.} \quad (4-113)$$

Las componentes de \mathbf{D} y \mathbf{F} cambian de signo ante la inversión, por lo que no variarán las de \mathbf{C} . Muchas cantidades físicas conocidas constituyen ejemplos de vectores axiales, tales como el momento cinético $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ y la intensidad de campo magnético. La ley de transformación de un vector axial es de la forma de la ecuación (4-110). En el caso de transformaciones ortogonales propias no podremos distinguir entre vectores axiales y polares, pero en el caso de transformaciones impropias, es decir, que entrañan inversión, el determinante $|\mathbf{B}|$ vale -1 y los dos tipos de vectores se comportan de manera diferente. †

En la interpretación pasiva de la transformación, es fácil ver por qué ante una inversión se comportan los vectores polares como lo hacen. El vector no queda afectado por la transformación pero los ejes de coordenadas y por tanto sus componentes, cambian de signo. ¿Qué diferencia hay en el caso de un vector axial? Resulta que un vector axial lleva siempre consigo el convenio del sentido de rotación como queda implícito, por ejemplo, en la definición (ec. 4-113) de producto vectorial. Ante una inversión, un sistema de coordenadas dextrogiro pasa a ser levogiro y el requisito de orden cíclico de la ecuación (4-113) implica un cambio análogo del convenio del tornillo a derechas al convenio del tornillo a izquierdas. Por tanto, incluso en la interpretación pasiva, existe un verdadero cambio en el sentido del producto vectorial ante la inversión.

Vemos ahora claramente por qué se transforma $d\Omega$ como vector axial de acuerdo con la ecuación (4-110). Algebraicamente, vemos que como \mathbf{r} y $d\mathbf{r}$ (en la ec. 4-111) son vectores polares, \mathbf{n} y por tanto $d\Omega$ deberán ser vectores axiales. Geométricamente, la inversión de las coordenadas corresponde al paso de una ley de tornillo a derechas a otra de tornillo a izquierdas para definir el sentido de \mathbf{n} .

El estudio del producto vectorial nos proporciona una oportunidad para introducir una notación que resultará utilísima en el futuro. Por definición, el *símbolo de permutación* o *densidad de Levi-Civita** ϵ_{ijk} es cero cuando sean iguales dos cualesquiera de los índices

† Al producto escalar de un pseudovector por un vector polar se le llama *pseudoescalar*. Mientras un escalar verdadero es totalmente invariante ante una transformación ortogonal, un pseudoescalar cambia de signo ante una rotación impropia.

* También llamado *tensor alternante* o *tensor isótropo de orden 3*.

ijk , mientras que valdrá $+1$ ó -1 según que ijk sea una permutación par o impar de 1, 2, 3. Así pues, en función del símbolo de permutación, la ecuación (4-113) de las componentes de un producto vectorial puede escribirse en la forma

$$C_i = \epsilon_{ijk} D_j F_k \quad (4-113')$$

(donde hemos utilizado el habitual convenio de suma). Además, la fórmula de la rotación (4-96) en función de los parámetros de Euler se puede escribir en la forma

$$x'_i = x_i(e_0^2 - e_k e_k) + 2e_i e_j x_j + 2\epsilon_{ijk} e_0 x_j e_k, \quad (4-114)$$

donde la suma se extiende a los valores 1, 2, 3 para los índices que se repiten. Los elementos de la matriz ortogonal de transformación \mathbf{A} pueden ahora expresarse de manera inmediata en función de los parámetros de Euler, atendiendo al coeficiente de x_j en la ecuación (4-114):

$$a_{ij} = \delta_{ij}(e_0^2 - e_k e_k) + 2e_i e_j + 2\epsilon_{ijk} e_0 e_k. \quad (4-115)$$

Fácil es ver que esta fórmula tan compacta describe en verdad todos los elementos matriciales de la ecuación (4-67).

Las descripciones de rotación presentadas hasta ahora en este capítulo se han desarrollado a fin de representar la orientación de un cuerpo rígido. Se ha hecho resaltar que las transformaciones comportan en primer lugar la rotación del *sistema de coordenadas*. La interpretación «activa» correspondiente de la rotación de un vector en un sistema de coordenadas fijo implica, pues, una rotación en sentido opuesto, es decir, en sentido horario. Pero para tal cuestión existen muchas zonas de la Mecánica o de la Física general en las que nos ocupamos de los efectos de la rotación del *sistema físico* y de los vectores a él asociados. Ya hemos señalado (§ 2-6) la relación existente entre la invariancia del sistema en rotación y la conservación del momento cinético. En dichas aplicaciones es necesario considerar las consecuencias de la rotación de vectores en el sentido antihorario usual. A fines de referencia, vamos a consignar aquí algunas fórmulas de rotación vistas anteriormente, pero para rotación de vectores en sentido antihorario. *Todas las ecuaciones y enunciados desde aquí hasta el final del apartado sólo son aplicables a dichas rotaciones antihorarias.*

La fórmula (4-92) para la rotación se convierte en

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} \cos \Phi + \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})[1 - \cos \Phi] + (\mathbf{n} \times \mathbf{r}) \operatorname{sen} \Phi, \quad (4-92')$$

y la rotación infinitesimal correspondiente (ec. 4-111) toma la forma

$$d\mathbf{r}' = d\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} = (\mathbf{n} \times \mathbf{r}) d\Phi. \quad (4-111')$$

Además, la matriz compleja asociada 2×2 \mathbf{Q} adquiere la forma

$$\mathbf{Q} = \mathbf{1} \cos \frac{\Phi}{2} - i\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \operatorname{sen} \frac{\Phi}{2}, \quad (4-98')$$

con la representación exponencial correspondiente

$$\mathbf{Q} = e^{-i\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}(\Phi/2)}. \quad (4-99')$$

La matriz antisimétrica de la rotación infinitesimal (ec. 4-105) queda en la forma

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{pmatrix} 0 & -d\Omega_3 & d\Omega_2 \\ d\Omega_3 & 0 & -d\Omega_1 \\ -d\Omega_2 & d\Omega_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -n_3 & n_2 \\ n_3 & 0 & -n_1 \\ -n_2 & n_1 & 0 \end{pmatrix} d\Phi, \quad (4-105')$$

donde n_i son las componentes del vector unitario dirigido según el eje de rotación. Representando por $d\mathbf{x}$ la variación infinitesimal $\mathbf{x}' - \mathbf{x}$, la ecuación (4-102) podrá tomar la forma de ecuación diferencial matricial respecto al ángulo de rotación:

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\Phi} = -\mathbf{N}\mathbf{x}, \quad (4-116)$$

donde \mathbf{N} es la matriz del último miembro de la ecuación (4-105') cuyos elementos son $N_{ij} = \epsilon_{ijk} n_k$. Otra representación útil consiste en escribir la $\boldsymbol{\epsilon}$ de la ecuación (4-105') en la forma

$$\boldsymbol{\epsilon} = n_i \mathbf{M}_i d\Phi$$

donde \mathbf{M}_i son las tres matrices

$$\mathbf{M}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4-117)$$

A las matrices \mathbf{M}_i se les llama *generadores de rotación infinitesimal* y tienen la interesante propiedad de que sus productos son tales que

$$\mathbf{M}_i \mathbf{M}_j - \mathbf{M}_j \mathbf{M}_i \equiv [\mathbf{M}_i, \mathbf{M}_j] = \epsilon_{ijk} \mathbf{M}_k. \quad (4-118)$$

La diferencia entre los dos productos de matrices, o *conmutador*, se llama también *corchete de Lie* de \mathbf{M}_i y la ecuación (4-118) define el *Álgebra de Lie* del grupo de rotaciones parametrizado en función del ángulo de rotación. El penetrar más en la teoría de grupos de la rotación nos llevaría muy lejos, pero tendremos ocasión de referirnos a estas propiedades de la operación rotación.

4-9 VELOCIDAD DE VARIACIÓN DE UN VECTOR

El concepto de rotación infinitesimal proporciona una herramienta potente para la descripción del movimiento de un cuerpo rígido a lo largo del tiempo. Consideremos un vector arbitrario \mathbf{G} que intervenga en el problema mecánico, tal como el vector de posición de un punto del cuerpo, o el momento cinético total. Usualmente, dicho vector variará con el tiempo al moverse el cuerpo, si bien la variación dependerá muchas veces del sistema de coordenadas al cual se refieran las observaciones. Por ejemplo, si el vector fuese el radio vector que va del origen del sistema de coordenadas solidario al cuerpo a un punto del cuerpo rígido, dicho vector aparecería constante cuando se midiera en el sistema de ejes solidario al cuerpo. En cambio, para un observador fijo en el sistema de ejes del espacio las componentes del vector, medidas en los ejes espaciales, variarían con el tiempo si el cuerpo estuviera en movimiento.

La variación en un tiempo dt de las componentes de un vector genérico \mathbf{G} vistas por un observador en el sistema de ejes del cuerpo será diferente de la correspondiente variación vista por un observador en el sistema del espacio. Basándonos en razonamientos físicos, podemos deducir una relación entre las dos variaciones diferenciales de \mathbf{G} . Podemos escribir que la única diferencia entre ambas es el efecto de rotación de los ejes del cuerpo:

$$(d\mathbf{G})_{\text{espacio}} = (d\mathbf{G})_{\text{cuerpo}} + (d\mathbf{G})_{\text{rot}}.$$

Consideremos ahora un vector fijo en el cuerpo rígido. Al girar el cuerpo, el observador fijo en él no percibe cambio alguno de las componentes del vector, es decir, no hay variación respecto a los ejes del cuerpo. La única contribución a $(d\mathbf{G})_{\text{espacio}}$ es entonces el efecto de la rotación del cuerpo. Pero como el vector está fijo en el sistema del cuerpo, gira con él en sentido *antihorario* y la variación del vector que se observa desde el espacio es la dada por la ecuación (4-111') y por tanto $(d\mathbf{G})_{\text{rot}}$ vendrá dada por

$$(d\mathbf{G})_{\text{rot}} = d\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{G}.$$

Para un vector arbitrario, la variación relativa a los ejes del espacio es la suma de los dos efectos:

$$(d\mathbf{G})_{\text{espacio}} = (d\mathbf{G})_{\text{cuerpo}} + d\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{G}. \quad (4-119)$$

La *velocidad de variación* del vector \mathbf{G} vista por los dos observadores se obtendrá dividiendo los términos de la ecuación (4-119) por el elemento de tiempo dt que se considera:

$$\left(\frac{d\mathbf{G}}{dt} \right)_{\text{espacio}} = \left(\frac{d\mathbf{G}}{dt} \right)_{\text{cuerpo}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{G}. \quad (4-120)$$

En donde $\boldsymbol{\omega}$ es la *velocidad angular* instantánea del cuerpo definida por la relación*

$$\boldsymbol{\omega} dt = d\boldsymbol{\Omega}. \quad (4-121)$$

El vector $\boldsymbol{\omega}$ está soportado por el eje de rotación infinitesimal entre t y $t + dt$, dirección que recibe el nombre de *eje instantáneo de rotación*. El módulo de $\boldsymbol{\omega}$ mide la velocidad instantánea de rotación del cuerpo.

Podemos dar una deducción más formal de la ecuación básica (4-120) utilizando la matriz ortogonal de transformación entre las coordenadas del espacio y del cuerpo. La componente de \mathbf{G} según el eje i -ésimo del espacio está relacionada con las componentes según los ejes del cuerpo:

$$G_i = \tilde{a}_{ij} G'_j = a_{ji} G'_j.$$

* Como $\boldsymbol{\omega}$ no es la derivada de ningún vector, se dice a veces que es un vector *no holonomo*, por analogía con las ligaduras diferenciables no integrables.

Al irse moviendo el cuerpo, variarán las componentes G_j así como los elementos a_{ij} de la matriz de cambio. Luego la variación de G_i en un elemento de tiempo dt es

$$dG_i = a_{ji} dG'_j + da_{ji} G'_j. \quad (4-122)$$

Sin que se pierda por ello generalidad, podemos tomar los ejes del espacio y del cuerpo coincidentes instantáneamente en el tiempo t . Por tanto, las componentes en ambos sistemas serán instantáneamente iguales, si bien las diferenciales *no* serán iguales ya que los dos sistemas están en movimiento uno respecto a otro. Así pues, $G'_j = G_j$ pero $a_{ji} dG'_j = = dG'_i$, en donde el acento recalca que la diferencial se mide en el sistema de ejes del cuerpo. La variación de la matriz A en el tiempo dt será, pues, una variación respecto a la matriz unidad y por tanto corresponde a la matriz ϵ de la rotación infinitesimal. Luego

$$da_{ji} = (\dot{\epsilon})_{ij} = -\epsilon_{ij},$$

utilizando la propiedad de ser ϵ antisimétrica. Poniéndolos en función del símbolo de permutación ϵ_{ijk} , los elementos de ϵ son tales que (cfr. ec. 4-105)

$$-\epsilon_{ij} = -\epsilon_{ijk} d\Omega_k = \epsilon_{ikj} d\Omega_k.$$

Podemos ahora escribir la ecuación (4-122) en la forma

$$dG_i = dG'_i + \epsilon_{ikj} d\Omega_k G_j.$$

Démonos cuenta de que el último término del segundo miembro es la expresión de la componente i -ésima de un producto vectorial, por lo que la expresión final de la relación entre diferenciales en ambos sistemas es

$$dG_i = dG'_i + (d\Omega \times G)_i, \quad (4-123)$$

que coincide con la componente i -ésima de la ecuación (4-119).

La ecuación (4-119) no es tanto una ecuación acerca de un vector particular \mathbf{G} como un enunciado de la transformación de la derivada temporal de un sistema de coordenadas a otro. La naturaleza arbitraria del vector \mathbf{G} utilizado en la deducción se puede poner de relieve escribiendo la ecuación (4-120) en forma de operador que actúe sobre un vector

dato. El operador sería:

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_e = \left(\frac{d}{dt}\right)_r + \omega \times \quad (4-124)$$

en donde los subíndices e y r indican derivadas respecto al tiempo en los sistemas de ejes del espacio y del cuerpo (rotatorio), respectivamente. La ecuación vectorial resultante podrá, desde luego, referirse a cualquier sistema de ejes, fijos o móviles. Pero debemos recalcar de nuevo que la velocidad de variación sólo es relativa al sistema de coordenadas que se especifique. Cuando la derivada temporal de un vector lo es respecto a un sistema de coordenadas, se podrán tomar sus componentes según otro sistema de ejes coordenados solamente *después* de haber efectuado la derivación.

A menudo conviene expresar el vector velocidad angular en función de los ángulos de Euler y sus derivadas respecto al tiempo. La rotación infinitesimal general asociada a ω puede considerarse que consiste en tres rotaciones infinitesimales sucesivas con velocidades angulares $\omega_\phi = \dot{\phi}$, $\omega_\theta = \dot{\theta}$, $\omega_\psi = \dot{\psi}$. A consecuencia de la propiedad vectorial de las rotaciones infinitesimales, el vector ω puede obtenerse sumando los tres vectores velocidad angular. Lamentablemente, las direcciones de ω_ϕ , ω_θ y ω_ψ no están situadas simétricamente: ω_ϕ está dirigida según el eje z del espacio, ω_θ según la línea de nodos, mientras que ω_ψ lo está según el eje z' del cuerpo. No obstante, podemos utilizar las transformaciones ortogonales **B**, **C**, **D** de § 4-4 para tener las componentes de esos vectores según cualquier sistema de ejes que queramos.

El sistema de ejes del cuerpo resulta ser el más útil para tratar las ecuaciones de movimiento y por tanto vamos a obtener las componentes de ω para dicho sistema de coordenadas. Como ω_ϕ es paralela al eje z del espacio, sus componentes según los ejes del cuerpo las obtendremos aplicando la transformación ortogonal total **A** = **BCD** (4-46):

$$(\omega_\phi)_{x'} = \dot{\phi} \text{sen} \theta \text{sen} \psi, \quad (\omega_\phi)_{y'} = \dot{\phi} \text{sen} \theta \cos \psi, \quad (\omega_\phi)_{z'} = \dot{\phi} \cos \theta.$$

La línea de nodos, que tiene la dirección de ω_θ , coincide con el eje ξ' , por lo que las componentes de ω_θ respecto a los ejes del cuerpo se obtendrán aplicando solamente la transformación ortogonal final **B** (4-45):

$$(\omega_\theta)_{x'} = \dot{\theta} \cos \psi, \quad (\omega_\theta)_{y'} = -\dot{\theta} \text{sen} \psi, \quad (\omega_\theta)_{z'} = 0.$$

No es necesaria ninguna transformación para las componentes de ω_ψ que está dirigida según el eje z' . Sumando estas componentes de las distintas velocidades angulares, las

componentes de ω respecto a los ejes del cuerpo resultan ser

$$\begin{aligned}\omega_x &= \dot{\phi} \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \psi + \dot{\theta} \cos \psi \\ \omega_y &= \dot{\phi} \operatorname{sen} \theta \cos \psi - \dot{\theta} \operatorname{sen} \psi \\ \omega_z &= \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}.\end{aligned}\tag{4-125}$$

Para expresar las componentes de ω según el sistema de ejes del espacio en función de los ángulos de Euler se pueden utilizar técnicas semejantes.*

4-10 FUERZA DE CORIOLIS

La ecuación (4-124) es la ley cinemática fundamental en la que se basan las ecuaciones dinámicas del movimiento de un cuerpo rígido. Pero su validez no se ciñe solamente al movimiento de un cuerpo rígido. Podemos utilizarla siempre que queramos estudiar el movimiento de una partícula, o de un sistema de partículas, respecto a un sistema de coordenadas en rotación. Un problema importantísimo de esta última categoría es la descripción del movimiento de una partícula relativo a ejes de coordenadas que giren con la Tierra. Recordemos que en § 1-1 definíamos los sistemas inerciales diciendo que son aquellos en los que son válidas las leyes de Newton. Para muchos fines, un sistema de coordenadas fijo en la Tierra en rotación constituye una aproximación suficiente a un sistema inercial. Sin embargo, el sistema de coordenadas en el cual las estrellas locales están fijas se aproxima aún más al sistema inercial ideal. Un examen detallado indica que hay efectos observables que surgen de la rotación de la Tierra respecto a este sistema casi inercial. La ecuación (4-124) proporciona las modificaciones necesarias de las ecuaciones de movimiento relativas al sistema *no inercial* fijo en la Tierra en rotación.

El paso inicial consiste en aplicar la ecuación (4-124) al vector de posición \mathbf{r} que va del origen del sistema terrestre a la partícula dada:

$$\mathbf{v}_e = \mathbf{v}_r + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r},\tag{4-126}$$

donde \mathbf{v}_e y \mathbf{v}_r son las velocidades de la partícula relativas a los sistemas de ejes del espacio y rotatorio, respectivamente y $\boldsymbol{\omega}$ es la velocidad angular (constante) de la Tierra relativa al sistema inercial. En el segundo paso se utiliza la ecuación (4-124) para obtener la

* La ecuación (4-125) se refiere al convenio x para los ángulos de Euler. En el Apéndice B se dan las fórmulas correspondientes para los otros convenios de los ángulos de Euler.

velocidad de variación de \mathbf{v}_e :

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\mathbf{v}_s}{dt}\right)_e &= \mathbf{a}_s = \left(\frac{d\mathbf{v}_s}{dt}\right)_r + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_e \\ &= \mathbf{a}_r + 2(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r) + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}), \end{aligned} \quad (4-127)$$

donde se ha sustituido \mathbf{v}_r por su valor obtenido de la ecuación (4-126) y donde \mathbf{a}_e y \mathbf{a}_r son las aceleraciones de la partícula en los dos sistemas. Por último, la ecuación de movimiento, que en el sistema inercial es simplemente

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}_e,$$

se desarrolla, cuando se expresa en las coordenadas en rotación, según la ecuación

$$\mathbf{F} - 2m(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r) - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = m\mathbf{a}_r. \quad (4-128)$$

A un observador en el sistema en rotación le parece, pues, que la partícula se mueve bajo la influencia de una fuerza efectiva \mathbf{F}_e :

$$\mathbf{F}_e = \mathbf{F} - 2m(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r) - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}). \quad (4-129)$$

Examinemos la naturaleza de los términos que figuran en la ecuación (4-129). El último término es un vector normal a $\boldsymbol{\omega}$ y dirigido hacia afuera. Además, su módulo es $m\omega^2 r \sin \theta$. Vemos, pues, que este término no es más que la fuerza centrífuga. Cuando la partícula esté en reposo respecto al sistema móvil, la fuerza centrífuga será el único término aditivo en la expresión de la fuerza efectiva. En cambio, cuando se mueva la partícula, entra en juego el término central conocido por el nombre de fuerza de *Coriolis*. El orden de magnitud de estas dos fuerzas puede calcularse fácilmente para el caso de una partícula situada en la superficie terrestre. La Tierra gira en sentido antihorario respecto al polo Norte con una velocidad angular relativa a las estrellas fijas:

$$\omega = \left(\frac{2\pi}{24 \times 3600}\right) \left(\frac{366,5}{365,5}\right) = 7,292 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$$

El primer paréntesis de esta expresión da la velocidad angular relativa al radio vector respecto al Sol. La cantidad del segundo paréntesis es el cociente entre el número de días sidéreos de un año y el número correspondiente de días solares. Es el factor de corrección para dar la velocidad angular relativa a las estrellas fijas. Con este valor de ω y siendo r igual al radio ecuatorial, la aceleración centripeta máxima será

$$\omega^2 r = 3,38 \text{ cm/ s}^2 \text{ ,}$$

o sea, un 0,3% de la aceleración de la gravedad. Aun siendo pequeña, esta aceleración no es despreciable. No obstante, los efectos medidos de la gravedad representan la combinación del campo gravitatorio de la distribución de masa de la Tierra y los efectos de la aceleración centripeta. Se acostumbra a hablar de la suma de ambos llamándole campo de la *gravedad* terrestre, para distinguirla de su campo *gravitatorio*.

La situación la complica aún más el efecto de la aceleración centripeta que achata a la Tierra en su rotación. Si la Tierra fuese completamente fluida, el efecto de la rotación sería deformarla dándole forma de elipsoide cuya forma fuese la de una superficie equipotencial del campo de la gravedad combinado. El nivel de los mares de la Tierra se adapta muy aproximadamente a este elipsoide de equilibrio (salvo las variaciones locales de vientos y mareas) y define lo que se llama el *geoide* de la Tierra. Salvo en lo que se refiere a perturbaciones locales, la fuerza de la gravedad será perpendicular a la superficie equipotencial del geoide. En consecuencia, la vertical local será, por definición, la dirección perpendicular al geoide en el punto dado de la superficie. Para los fenómenos que tienen lugar en la proximidad de un punto particular de la superficie terrestre, los términos de aceleración centripeta de la ecuación (4-129) pueden considerarse incluidos en la aceleración de la gravedad g , que estará orientada según la dirección de la vertical local. El módulo de g varía, desde luego, con la latitud terrestre. Los efectos de la aceleración centripeta y del achatamiento de la Tierra se combinan para hacer que g sea aún 0,53% menor en el Ecuador que en los Polos.

Incidentalmente, la fuerza centrífuga que se ejerce sobre una partícula a causa de la revolución de la Tierra alrededor del Sol es apreciable frente a la gravedad, pero está equilibrada casi totalmente por la atracción gravitatoria del Sol. Desde luego, este equilibrio entre la fuerza centrífuga y la atracción gravitatoria es lo que mantiene a la Tierra (y a todo lo que está sobre ella) en órbita alrededor del Sol.

La fuerza de Coriolis que se ejerce sobre una partícula en movimiento es perpendicular a ω y a \mathbf{v} .* En el hemisferio norte, en donde ω sale del suelo, la fuerza de Coriolis, $2m(\mathbf{v} \times \omega)$ tiende a desviar a un proyectil disparado a lo largo de la superficie terrestre hacia la derecha de su dirección de movimiento; cfr. fig. 4-12. La desviación de Coriolis tiene sentido opuesto en el hemisferio sur y es nula en el ecuador, donde ω es horizontal. El módulo de la aceleración de Coriolis es siempre menor que

$$2\omega v \simeq 1,5 \times 10^{-4} v,$$

* De ahora en adelante, suprimiremos el subíndice r de v_r ya que tomaremos todas las velocidades respecto a los ejes de coordenadas en rotación.

que para una velocidad de 10^5 cm/s (unos 3600 km/h) es de 15 cm/s², o sea de unos 0,015 g. Ordinariamente, una aceleración así es muy pequeña, si bien hay casos en que resulta importante. Para considerar un ejemplo artificial, supongamos un proyectil que se dispare horizontalmente en el polo norte. La aceleración de Coriolis tendría por módulo $2\omega v$, con lo que la desviación lineal al cabo de un tiempo t sería ωvt^2 ; y la desviación angular sería igual a la lineal dividida por la distancia recorrida:

$$\theta = \frac{\omega vt^2}{vt} = \omega t, \quad (4-130)$$

que es el ángulo que gira la Tierra en el tiempo t . Físicamente, este resultado significa que un proyectil disparado en el polo norte no tiene movimiento de rotación inicial y por tanto su trayectoria en el espacio inercial será una recta, debiéndose la desviación aparente a la Tierra que gira bajo él. Podemos tener una idea de la magnitud del efecto sustituyendo un tiempo de vuelo de 100 segundos —nada insólito en el caso de proyectiles grandes— en la ecuación (4-130). Entonces, la desviación angular es del orden de 7×10^{-3} radianes, unos $0,4^\circ$, que no es despreciable. Evidentemente, el efecto será aún más importante en el caso de misiles de largo alcance que tienen un tiempo de vuelo mucho mayor.

La fuerza de Coriolis desempeña también un papel importante en muchos fenómenos oceanográficos y meteorológicos en los que se producen desplazamientos de masas de materia a grandes distancias, tales como el esquema de circulación de los vientos alisios y el curso de la Corriente del Golfo. La descripción completa de estos fenómenos exige la solución de problemas complicados de Hidrodinámica en los cuales la aceleración de

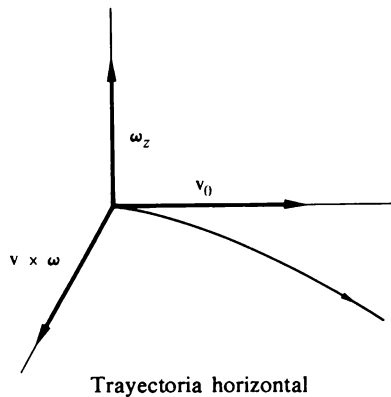


FIGURA 4-12

Dirección de la desviación de Coriolis en el hemisferio norte.

Coriolis sólo es uno entre los muchos términos que intervienen. No obstante, se puede dar una indicación de la contribución de las fuerzas de Coriolis considerando una imagen muy simplificada de un problema meteorológico particular —la circulación de vientos horizontales a gran escala. Las masas de aire tienden a moverse, siendo iguales a las demás condiciones, de las regiones de presión elevada a las regiones de presión baja —el llamado flujo del gradiente de presiones. En la dirección vertical, el gradiente está aproximadamente equilibrado por fuerzas gravitatorias con lo que solamente habrán movimientos de masas de aire persistentes de largo alcance en el plano horizontal —que es lo que percibimos en forma de vientos. Las fuerzas del gradiente de presiones son muy modestas y comparables en magnitud a las fuerzas de Coriolis que se ejercen sobre las masas de aire que se mueven con velocidades usuales. Idealmente, en ausencia de fuerzas de Coriolis, las direcciones del viento serían perpendiculares a las isobaras, según se indica en la figura 4-13. Sin embargo, las fuerzas de Coriolis desvían el viento hacia la derecha de su dirección en el sentido que se indica en la figura. La desviación hacia la derecha prosigue hasta que el vector viento sea paralelo a las isobaras y la fuerza de Coriolis tenga sentido contrario a la fuerza del gradiente de presiones e idealmente la equilibre. El viento sigue entonces paralelo a las isobaras, circulando en el hemisferio norte en sentido antihorario respecto a un centro de bajas presiones. En el hemisferio sur, la fuerza de Coriolis se ejerce en sentido opuesto y el sentido ciclónico (es decir, la circulación alrededor de un centro de bajas presiones) es horario. (A una tal circulación del viento, que se ha desviado poniéndose paralelo a las isobaras, se le da el nombre de *viento geostrófico*.) En esta imagen simplificada se ha despreciado el efecto del rozamiento. A altitudes atmosféricas inferiores a varios kilómetros, se hacen importantes los efectos de rozamiento de la viscosidad turbulenta y la dirección de equilibrio del viento no resulta nunca exactamente paralela a las isobaras, como se indica en la figura 4-14.

Otro ejemplo clásico en el cual la fuerza de Coriolis da lugar a un efecto mensurable es la desviación respecto a la vertical de una partícula que cae libremente. Como la veloci-

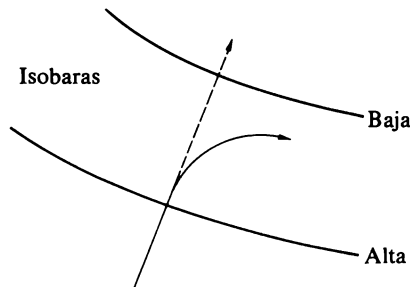


FIGURA 4-13

Desviación del viento respecto a la dirección del gradiente de presiones a causa de la fuerza de Coriolis (representada para el hemisferio norte).

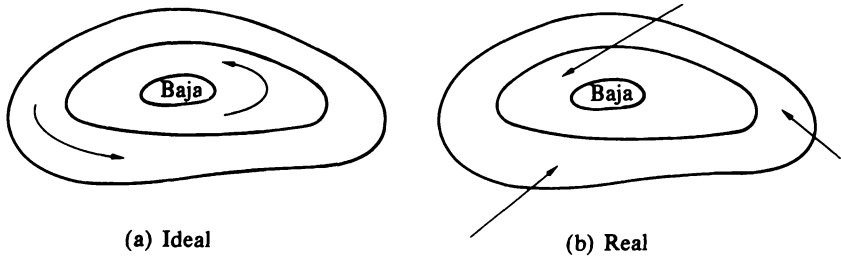


FIGURA 4-14
Esquema de ciclones en el hemisferio norte.

dad de la partícula es casi vertical y ω está en el plano vertical Norte-Sur, la fuerza desviadora $2m(\mathbf{v} \times \omega)$ está dirigida de Este a Oeste. Así pues, en el hemisferio norte, un cuerpo que caiga libremente se desviará hacia el Este. El cálculo de la desviación se simplifica mucho tomando el eje z del sistema de coordenadas terrestre según la vertical hacia arriba tal como se definió anteriormente. Si se toma el eje y dirigido hacia el Norte, la ecuación de movimiento en la dirección x (hacia el Este) será

$$\begin{aligned}
 m \frac{d^2 x}{dt^2} &= -2m(\omega \times \mathbf{v})_x \\
 &= -2m\omega v_z \text{sen} \theta,
 \end{aligned}
 \tag{4-131}$$

donde θ es la colatitud. El efecto sobre v_z de la fuerza de Coriolis constituiría una pequeña corrección de la desviación, la cual es muy pequeña en sí misma. Por tanto, podremos calcular la velocidad vertical que aparece en (4-131) como si no hubieran fuerzas de Coriolis:

$$v_z = -gt$$

y

$$t = \sqrt{\frac{2z}{g}}$$

Con estos valores, se puede integrar fácilmente la ecuación (4-131) y da la desviación

$$x = \frac{\omega g}{3} t^3 \operatorname{sen} \theta$$

o sea

$$x = \frac{\omega}{3} \sqrt{\frac{(2z)^3}{g}} \operatorname{sen} \theta.$$

Podemos obtener el orden de magnitud de la desviación suponiendo $\theta = \pi/2$ (que corresponde al Ecuador) y $z = 100$ m. La desviación será entonces, aproximadamente,

$$x \simeq 2,2 \text{ cm.}$$

El experimento real es difícil de efectuar, pues la pequeña desviación puede quedar frecuentemente enmascarada por los efectos de las corrientes de aire, la viscosidad u otras influencias perturbadoras.*

Más fácil de observar es el conocido experimento del péndulo de Foucault. Si se pone en oscilación un péndulo en el polo norte en un plano dado del espacio, la componente normal al plano de su cantidad de movimiento es nula y seguirá oscilando en este plano invariable mientras la Tierra gira bajo él. Para un observador en la Tierra, el plano de oscilación parece dar una vuelta por día. En otras latitudes, el resultado es más complicado pero el fenómeno es cualitativamente el mismo y dejamos como ejercicio el cálculo detallado.

También en Física atómica aparecen efectos debidos a los términos de Coriolis. Así, en las moléculas poliatómicas pueden coexistir dos tipos de movimiento: la molécula *gira* como conjunto rígido y los átomos *vibran* alrededor de sus posiciones de equilibrio. Estas vibraciones hacen que los átomos tengan movimiento relativo al sistema de coordenadas giratorio de la molécula. El término de Coriolis será, pues, distinto de cero y hará que los átomos se muevan en una dirección perpendicular a las oscilaciones originales. De esta manera, las perturbaciones de los espectros moleculares a causa de las fuerzas de Coriolis aparecen en forma de interacciones entre los niveles de rotación y de vibración de la molécula.

* Es fácil demostrar, utilizando la ecuación (4-131), que una partícula lanzada hacia arriba caerá al suelo al *oeste* del punto de lanzamiento inicial.

REFERENCIAS SUGERIDAS

R. R. STOLL, *Linear Algebra and Matrix Theory*. La parte del libro referente a Álgebra lineal es voluminosa, poco asequible y no sirve gran cosa a nuestros fines. Esta referencia se ha elegido deliberadamente como muestra de un método de ataque pasado de moda y cachazudo que exhibe una tendencia hacia los espacios euclídeos y a frecuentes ejemplos tridimensionales. La Física de este capítulo no exige un nivel más elevado de desarrollo matemático.

G. ARFKEN, *Mathematical Methods for Physicists*. Los textos con títulos de este estilo suelen presentar tratamientos de matrices y transformaciones lineales siendo el texto de Arfken representativo de los mejores de éstos. El Capítulo 4 acerca de matrices y determinantes es particularmente importante y contiene una colección de problemas útiles. Se estudian las matrices de Pauli, junto con sus generalizaciones cuadrimensionales, las matrices de Dirac.

H. JEFFREYS y B. S. JEFFREYS, *Methods of Mathematical Physics*. Aun cuando sea un texto algo viejo, es muy rico en aplicaciones físicas surgidas de la larga experiencia que tiene el autor en investigación en Física teórica. Muchos temas del presente capítulo los encontramos en los Capítulos 3 y 4, incluido un tratamiento de las matrices de spin de Pauli y su relación con las matrices de rotación tridimensionales. La sección acerca de los ángulos de Euler es prácticamente ininteligible y no sólo a causa de un diagrama pobre. Las aptas e ingeniosas citas que encabezan cada capítulo, casi valen ellas solas el precio de la admisión. La que se da para el Capítulo 7 es, probablemente, una cita equivocada pero por ello resulta de lo más satírico.

J. B. MARION, *Principles of Vector Analysis*. Aun cuando no es sino una publicación de bolsillo, el autor se extiende en detalles acerca de las propiedades de la matriz de transformación ortogonal y de las propiedades de transformación de vectores axiales y polares. En este apartado y en otros posteriores, utiliza mucho el signo de permutación, p. ej., al deducir identidades vectoriales complicadas.

J. L. SYNGE y A. SCHILD, *Tensor Calculus*. Esta conocida monografía cubre ampliamente muchos aspectos de los tensores entre los que se cuentan algunos de especial interés para lo visto en este capítulo. El § 4.2 considera de mala gana propiedades de los tensores en el espacio plano (en este libro sólo vamos a considerar espacio plano), especialmente las del símbolo de permutación. En el Capítulo 7 se consideran tensores relativos, o pseudotensores, que son las generalizaciones tensoriales de los pseudovectores. Dos capítulos consideran aplicaciones físicas, incluida la Dinámica, desde un punto de vista poco usual.

A. I. BORISENKO e I. E. TARAPOV, *Vector and Tensor Analysis with Applications*. Aun cuando está escrito todo él tendiendo a las aplicaciones de la Física, los métodos y puntos de vista difieren a menudo de los que utilizamos aquí. Los autores tienen gran tendencia a trabajar con los vectores unitarios \mathbf{n}_i según ejes ortogonales. Por ejemplo, utilizan la representación $\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{n}_j \times \mathbf{n}_k$ para el símbolo de permutación en una demostración de las propiedades de transformación de un tensor antisimétrico de iguales características que ϵ .

E. T. WHITTAKER, *Analytical Dynamics*. El Capítulo I contiene la materia pertinente para nuestros fines. El apartado referente a los ángulos de Euler es difícil de seguir por no haber *ningún* diagrama. Conviene hacer referencia a nuestra nota de pie de página de § 4-5 al comparar sus resultados con nuestras ecuaciones. En el § 12 se estudia la relación entre los parámetros de Cayley-Klein y la llamada transformación homográfica.

L. A. PARS, *A Treatise on Analytical Dynamics*. Tratado monumental que viene a ser un sucesor del

Whittaker puesto al día, dentro de la tradición escolar de Cambridge. Es un libro muy completo que, al igual que el Whittaker, es muy rico en erudición. El Capítulo VIII está dedicado a la teoría de rotaciones y contiene, entre otras cuestiones, tres demostraciones distintas de la fórmula de la rotación. La versión fuerte del teorema de Chasles (v. nota pie página 209) se demuestra geométricamente de una manera sencilla que estaría fuera de lugar en los *Principia* de Newton.

G. HAMEL, *Theoretische Mechanik*. Aquellos a los que sea accesible el alemán encontrarán que esta referencia contiene una enciclopedia casi completa de información de la Cinemática de la rotación rígida, principalmente en los apartados 8 y 9 del Capítulo 2. Los ejemplos son un estudio inmediato de la relación de la proyección estereográfica a los parámetros de Cayley-Klein y de Euler, así como de la representación de cuaternios de la rotación. El mundo de la Física en el que se desarrolla el tratamiento es el del año 1925. El libro termina con un apartado de 260 páginas de ejercicios y sus soluciones.

T. C. BRADBURY, *Theoretical Mechanics*. Aun cuando se califica de texto de nivel intermedio, en él se tratan muchos temas de interés, algunos desde un punto de vista no muy usual. Los capítulos 1 y 3 cubren el mismo fundamento que aquí acerca de matrices, si bien de manera algo más intensiva. Se discuten explícitamente las propiedades del símbolo de permutación. Para el movimiento en un sistema en rotación se establece una lagrangiana efectiva en la cual la fuerza de Coriolis se deriva de un potencial dependiente de la velocidad, introducido de manera un tanto ad hoc. Proporciona una útil herramienta para el estudio del movimiento en tales sistemas no inerciales.

E. J. SALETAN y A. H. CROMER, *Theoretical Mechanics*. Escrito desde un punto de vista superior, este texto utiliza al máximo la Matemática moderna a un nivel abstracto mediano. Las matrices y sus aplicaciones a la Mecánica se presentan en el Capítulo 4 como parte de un estudio de espacios vectoriales lineales. En el capítulo siguiente aparece la Cinemática de la rotación, incluidos los ángulos de Euler en el convenio x . En el Capítulo 9 se presenta brevemente una visión de las rotaciones desde el punto de partida de la teoría de grupos y álgebras de Lie.

F. D. STACEY, *Physics of the Earth*. El campo de «gravedad» observado en la superficie de la Tierra en rotación se complica a causa de la desviación de la forma de la Tierra respecto a una esfera. Los capítulos 2 y 3 de este libro contienen, entre otras cosas, un estudio detallado pero compacto de dichos efectos. No se mencionan los fenómenos de la fuerza de Coriolis.

G. HERZBERG, *Infrared and Raman Spectra*. En este libro, especialmente en el Capítulo IV, apartados 1 y 2, se estudian exhaustivamente el efecto de las fuerzas de Coriolis sobre los espectros de las moléculas poliatómicas, aun cuando es preciso un fundamento de la teoría de las oscilaciones pequeñas (v. nuestro cap. 6) y de la Mecánica cuántica para tener una buena comprensión. Para un breve tratamiento clásico véase, de todas maneras, las páginas 372-375.

S. L. HESS, *Introduction to Theoretical Meteorology*. Este libro presenta, en los capítulos 11 y 12, una presentación cuidadosa y detallada de los efectos de la fuerza de Coriolis sobre los vientos atmosféricos. En el Capítulo 13 se efectúa un estudio de los términos de Coriolis en el llamado teorema de la circulación de la Dinámica de fluidos. Las deducciones son penosas y vuelven a los principios primitivos, si bien a un nivel elemental.

EJERCICIOS

1. Demostrar que el producto de matrices es asociativo. Demostrar que el producto de dos matrices

ortogonales es también ortogonal.

2. Demostrar las siguientes propiedades de las matrices traspuesta y adjunta:

$$\begin{aligned}\widetilde{AB} &= \widetilde{B}\widetilde{A}, \\ (AB)^\dagger &= B^\dagger A^\dagger.\end{aligned}$$

3. Demostrar que la traza de una matriz es invariante ante cualquier transformación de semejanza. Demostrar también que la propiedad de antisimetría de una matriz se conserva ante una transformación ortogonal de semejanza, mientras que la propiedad de hermiticidad es invariante ante toda transformación de semejanza unitaria.

4. a) Examinando los valores propios de una matriz A real 3×3 antisimétrica, demostrar que $1 \pm A$ es no singular.

b) Demostrar luego que, en las mismas condiciones, la matriz

$$B = (1 + A)(1 - A)^{-1}$$

es ortogonal.

5. Obtener los elementos matriciales de la matriz rotación general en función de los ángulos de Euler (ec. 4-46) efectuando las multiplicaciones de las sucesivas matrices rotación componentes. Comprobar directamente que los elementos matriciales cumplen las condiciones de ortogonalidad.

6. a) Hallar la ecuación vectorial que describe la reflexión de r en un plano cuyo vector unitario normal es n .

b) Demostrar que si l_i , $i = 1, 2, 3$, son los cosenos directores de n , la matriz de transformación tendrá por elementos

$$A_{ij} = \delta_{ij} - 2l_i l_j,$$

y comprobar que A es una matriz ortogonal impropia.

7. El sistema de ejes del cuerpo se puede relacionar con el sistema del espacio en función de los ángulos de Euler mediante el siguiente conjunto de rotaciones:

- 1) Rotación alrededor del eje x un ángulo θ .
- 2) Rotación alrededor del eje z' un ángulo ψ .
- 3) Rotación alrededor del antiguo eje z un ángulo ϕ .

Demostrar que esta secuencia conduce a los mismos elementos de la matriz de transformación que la frecuencia de rotaciones dada en el libro. [Sugerencia: No es necesario efectuar la multiplicación explícita de las matrices rotación.]

8. Si \mathbf{A} es la matriz de una rotación de 180° alrededor de un eje cualquiera, demostrar que si

$$\mathbf{P}_\pm = \frac{1}{2}(\mathbf{1} \pm \mathbf{A}),$$

será $\mathbf{P}_\pm^2 = \mathbf{P}_\pm$. Obtener los elementos de \mathbf{P}_\pm en un sistema adecuado cualquiera y hallar una interpretación geométrica de la operación \mathbf{P}_+ y \mathbf{P}_- sobre un vector cualquiera \mathbf{F} .

9. Expresar la ligadura de «rotadura» de una esfera sobre una superficie plana en función de los ángulos de Euler. Demostrar que las condiciones no son integrables y que, por tanto, la ligadura no es holonoma.

10. a) Demostrar que la matriz rotación en la forma de la ecuación (4-67) no puede ponerse en la forma de la matriz de la transformación inversión \mathbf{S} .

b) Comprobar por multiplicación directa que la matriz de la ecuación (4-67) es ortogonal.

11. Demostrar que toda rotación puede representarse por reflexión sucesiva en dos planos que pasen ambos por el eje de rotación formando entre ellos un ángulo plano de $\Phi/2$.

12. Si \mathbf{B} es una matriz cuadrada y \mathbf{A} es la exponencial de \mathbf{B} , definida por el desarrollo en serie de la exponencial,

$$\mathbf{A} \equiv e^{\mathbf{B}} = \mathbf{1} + \mathbf{B} + \frac{1}{2}\mathbf{B}^2 + \cdots + \frac{\mathbf{B}^n}{n!} + \cdots,$$

probar las siguientes propiedades:

- $e^{\mathbf{B}}e^{\mathbf{C}} = e^{\mathbf{B}+\mathbf{C}}$ con tal que \mathbf{B} y \mathbf{C} conmuten.
- $\mathbf{A}^{-1} = e^{-\mathbf{B}}$
- $e^{\mathbf{C}}\mathbf{B}e^{-\mathbf{C}} = \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{C}^{-1}$
- \mathbf{A} es ortogonal si \mathbf{B} es antisimétrica.
- $e^{i\mathbf{B}}$ es unitaria si \mathbf{B} es hermitica.

13. Demostrar que \mathbf{Q}_θ se puede escribir simbólicamente en la forma

$$\mathbf{Q}_\theta = e^{i\sigma_1(\theta/2)}$$

donde la exponencial representa su desarrollo en serie, cuyo primer término es 1.

14. a) Demostrar que las tres matrices spin de Pauli anticonmutan entre si, es decir, que

$$\sigma_i\sigma_j = -\sigma_j\sigma_i, \quad i \neq j$$

y que cumplen las relaciones de conmutación

$$\sigma_i \sigma_j - \sigma_j \sigma_i \equiv [\sigma_i, \sigma_j] = 2i \epsilon_{ijk} \sigma_k.$$

b) Probar que $\sigma_i^2 = 1$, para todos los valores de i .

c) Si σ representa el vector de componentes σ_i , demostrar que si \mathbf{A} y \mathbf{B} son dos vectores cualesquiera, se cumplirá

$$(\sigma \cdot \mathbf{A})(\sigma \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + i \sigma \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}),$$

y por tanto

$$[\sigma \cdot \mathbf{A}, \sigma \cdot \mathbf{B}] = 2i \sigma \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}).$$

15. En un sistema de ejes en el cual z es el eje de rotación de una rotación finita, la matriz rotación viene dada por la ecuación (4-44) en donde se haya sustituido θ por el ángulo de rotación finito Φ . Deducir la fórmula de rotación (ec. 4-92) cambiando a un sistema de coordenadas arbitrario, expresando la matriz ortogonal de transformación en función de los cosenos directores del eje de rotación finita.

16. a) Basándose en la ecuación (4-73') demostrar que

$$\mathbf{r}' \cdot \sigma = \mathbf{r} \cdot \sigma + [\mathbf{Q}, \sigma \cdot \mathbf{r}] \mathbf{Q}^\dagger.$$

b) Con este resultado y utilizando para \mathbf{Q} la representación (4-98) y utilizando también el Ejercicio 12, deducir la fórmula de rotación (ec. 4-92).

17. a) Supongamos que se efectúan dos rotaciones de coordenadas sucesivas de ángulos Φ_1 y Φ_2 , equivalentes a una sola rotación de ángulo Φ . Demostrar que $\Phi_1, \Phi_2, \text{ y } \Phi$ pueden considerarse como lados de un triángulo esférico cuyo ángulo opuesto a Φ está dado por el ángulo que forman los dos ejes de rotación.

b) Demostrar que una rotación alrededor de un eje dado cualquiera puede obtenerse como producto de dos rotaciones sucesivas, cada una de 180° .

18. a) Verificar que el símbolo de permutación cumple la siguiente identidad en función de los símbolos delta de Kronecker:

$$\epsilon_{ijp} \epsilon_{rmp} = \delta_{ir} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jr}.$$

b) Demostrar que

$$\epsilon_{ijp} \epsilon_{ijk} = 2 \delta_{pk}.$$

19. Demostrar que las componentes de la velocidad angular según el sistema de ejes del espacio vienen dadas en función de los ángulos de Euler por las expresiones

$$\omega_x = \dot{\theta} \cos \phi + \dot{\psi} \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi,$$

$$\omega_y = \dot{\theta} \operatorname{sen} \phi - \dot{\psi} \operatorname{sen} \theta \cos \phi,$$

$$\omega_z = \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\phi}.$$

20. Demostrar que el parámetro de Euler e_0 tiene la ecuación de movimiento

$$-2\dot{e}_0 = e_1 \omega_x + e_2 \omega_y + e_3 \omega_z,$$

donde el acento denota al sistema de ejes del cuerpo. Hallar las ecuaciones correspondientes a los otros tres parámetros de Euler y a los parámetros complejos de Cayley-Klein α y β .

21. Comprobar directamente que los generadores matriciales de rotación infinitesimal, \mathbf{M}_i , dados por las ecuaciones (4-117) cumplen las relaciones de conmutación

$$[\mathbf{M}_i, \mathbf{M}_j] = \epsilon_{ijk} \mathbf{M}_k.$$

22. Se lanza verticalmente hacia arriba una partícula con celeridad inicial v_0 , alcanza una altura máxima y cae al suelo. Demostrar que la desviación de Coriolis cuando llega al suelo es de sentido contrario y de magnitud cuádruple que la desviación de Coriolis que se obtendría dejándola caer partiendo del reposo desde dicha altura máxima.

23. Se dispara horizontalmente un proyectil a lo largo de la superficie terrestre. Demostrar que, en primera aproximación, la desviación angular respecto a la dirección de disparo resultante de la fuerza de Coriolis varía linealmente con el tiempo a razón de

$$\omega \cos \theta,$$

donde ω es la frecuencia angular de la rotación terrestre y θ es la colatitud, estando la desviación dirigida hacia la derecha en el hemisferio norte.

24. El experimento del péndulo de Foucault consiste en poner en movimiento un péndulo largo, en un punto de la superficie de la Tierra en rotación, con su cantidad de movimiento inicial contenida en el plano vertical que contiene a la lenteja del péndulo y al punto de suspensión. Demostrar que el movimiento subsiguiente se puede describir diciendo que el plano de oscilación gira uniformemente $2\pi \cos \theta$ radianes por día, donde θ es la colatitud. ¿Cuál es el sentido de rotación? Puede utilizarse la aproximación de oscilaciones pequeñas, si se desea.

Capítulo 5

Ecuaciones de movimiento del cuerpo rígido

En el Capítulo 4 se han presentado todas las herramientas cinemáticas necesarias para estudiar el movimiento de un cuerpo rígido. Los ángulos de Euler constituyen un sistema de tres coordenadas, definidas un tanto asimétricamente, es verdad, pero así y todo adecuadas para ser utilizadas como coordenadas generalizadas que describan la orientación del cuerpo rígido. Además, el método de las transformaciones ortogonales y el Álgebra matricial inherente proporcionan una potente y elegante técnica para el estudio de las características del movimiento de un cuerpo rígido. Ya hemos visto una aplicación de esa técnica en la deducción de la ecuación (4-124) que relaciona las velocidades de variación de un vector que se miden en el sistema del espacio y en el sistema del cuerpo. Vamos a utilizar ahora esas herramientas para obtener las ecuaciones dinámicas del movimiento de un cuerpo rígido en su forma más conveniente. Con la ayuda de las ecuaciones del movimiento, podremos estudiar algunos problemas sencillos pero muy importantes del movimiento de un cuerpo rígido.

5-1 MOMENTO CINÉTICO Y ENERGÍA CINÉTICA DEL MOVIMIENTO ALREDEDOR DE UN PUNTO

El teorema de Chasles dice que todo desplazamiento genérico de un cuerpo rígido puede representarse por una traslación más una rotación. El teorema nos sugiere que debería ser posible desdoblarse el problema del movimiento del cuerpo rígido en dos fases separadas, una que sólo concierna al movimiento de traslación del cuerpo y la otra al movimiento de rotación. Desde luego, si un punto del cuerpo está fijo la separación será evidente, ya que sólo habrá movimiento de rotación alrededor del punto fijo, sin que haya traslación. Pero incluso en un movimiento de tipo general dicha separación suele ser posible. Las seis coordenadas necesarias para describir el movimiento se han agrupado ya en dos conjuntos

de acuerdo con dicha división: las tres coordenadas cartesianas de un punto fijo del cuerpo rígido para describir el movimiento de traslación y por ejemplo, los tres ángulos de Euler para el movimiento alrededor del punto. Si, además, tomamos el centro de masa como origen del sistema del cuerpo, en la ecuación (1-28) el momento cinético total se divide naturalmente en contribuciones por parte de la traslación del centro de masa y de la rotación alrededor del centro de masa. El primer término sólo contendrá las coordenadas cartesianas del centro de masa y el último sólo las coordenadas angulares. Según la ecuación (131) podemos efectuar una división análoga para la energía cinética total T , la cual puede escribirse en la forma

$$T = \frac{1}{2} M v^2 + T'(\phi, \theta, \psi),$$

que es la suma de la energía cinética de todo el cuerpo como si estuviera concentrado en el centro de masa, más la energía cinética del movimiento alrededor del centro de masa.

A menudo, la energía potencial se puede dividir análogamente, interviniendo en cada término sólo uno de los conjuntos de coordenadas: el traslatorio o el rotatorio. Así, la energía potencial en un campo gravitatorio uniforme sólo dependerá de la coordenada cartesiana vertical del centro de gravedad.* O si la fuerza que se ejerce sobre un cuerpo se debe a un campo magnético uniforme \mathbf{B} que actúa sobre su momento dipolar magnético \mathbf{M} , la energía potencial será proporcional a $\mathbf{M} \cdot \mathbf{B}$, en donde sólo interviene la orientación del cuerpo. Casi todos los problemas resolubles en la práctica permiten, ciertamente, una tal separación. En tal caso, el problema mecánico total se desdobra en dos, ya que la lagrangiana, $L = T - V$, se divide en dos partes, una que sólo contiene las coordenadas de traslación y la otra sólo las angulares. Estos dos grupos de coordenadas estarán totalmente separados y se podrán resolver independientemente uno de otro los problemas traslatorio y rotatorio. Por tanto, importará obtener expresiones del momento cinético y de la energía cinética del movimiento alrededor de un punto fijo del cuerpo. Para ello utilizaremos frecuentemente la ecuación (4-124) que relaciona derivadas relativas a un sistema de coordenadas fijo en cierto punto del cuerpo rígido. Es intuitivamente evidente que el ángulo de rotación del desplazamiento de un cuerpo rígido, así como también el vector velocidad angular instantánea, es independiente de la elección del origen del sistema de ejes del cuerpo. La esencia de la ligadura del cuerpo rígido es que todas sus partículas se mueven y giran juntas. No obstante, podemos construir fácilmente una demostración formal. Sean \mathbf{R}_1 y \mathbf{R}_2 los vectores de posición, respecto a un sistema de coordenadas fijo, de los orígenes de dos sistemas de coordenadas solidarios al cuerpo (cfr. fig. 5-1). Representaremos por \mathbf{R} al vector diferencia:

$$\mathbf{R}_2 = \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}.$$

* Desde luego, el centro de gravedad coincide con el centro de masa en un campo gravitatorio uniforme.

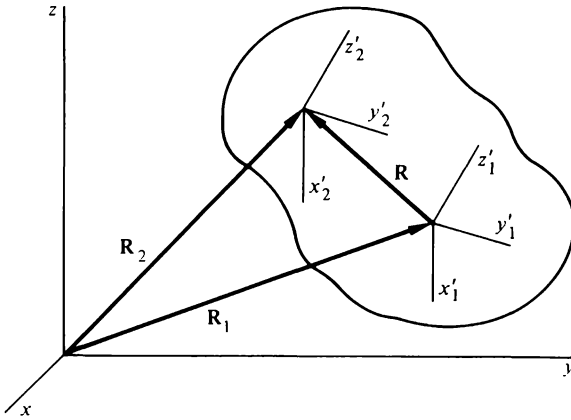


FIGURA 5-1

Relación vectorial entre sistemas de coordenadas en el cuerpo rígido de orígenes diferentes.

Si se considera que el origen del segundo sistema de ejes es un punto definido respecto al primero, la derivada temporal de \mathbf{R}_2 relativa a los ejes del espacio vendrá dada por

$$\left(\frac{d\mathbf{R}_2}{dt}\right)_s = \left(\frac{d\mathbf{R}_1}{dt}\right)_s + \left(\frac{d\mathbf{R}}{dt}\right)_s = \left(\frac{d\mathbf{R}_1}{dt}\right)_s + \omega_1 \times \mathbf{R}.$$

El último paso resulta de la ecuación (4-124), recordando que las derivadas de \mathbf{R} relativas a todo sistema de ejes solidarios al cuerpo rígido deben ser nulas y siendo ω_1 el vector velocidad angular apropiado para el primer sistema de coordenadas. Alternativamente, podemos considerar que el origen del primer sistema de coordenadas está fijo en el segundo sistema con un vector de posición $-\mathbf{R}$. De igual manera, pues, la derivada del vector de posición \mathbf{R}_1 para este origen relativa a los ejes del espacio fijos se puede escribir en la forma

$$\left(\frac{d\mathbf{R}_1}{dt}\right)_s = \left(\frac{d\mathbf{R}_2}{dt}\right)_s - \left(\frac{d\mathbf{R}}{dt}\right)_s = \left(\frac{d\mathbf{R}_2}{dt}\right)_s - \omega_2 \times \mathbf{R}.$$

La comparación de estas dos expresiones demuestra, como era de esperar, que los dos

vectores velocidad angular deben ser iguales:

$$\omega_1 = \omega_2.$$

El vector velocidad angular es el mismo para todos los sistemas de coordenadas solidarios al sistema rígido.

Cuando un cuerpo rígido se mueve con un punto en reposo, el momento cinético resultante respecto a este punto es

$$\mathbf{L} = m_i(\mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i), \quad (5-1)$$

(utilizando el convenio de suma) donde \mathbf{r}_i y \mathbf{v}_i son los vectores de posición y velocidad, respectivamente, de la partícula i -ésima relativos al punto dado. Como \mathbf{r}_i es un vector fijo respecto al cuerpo, la velocidad \mathbf{v}_i respecto al sistema de ejes del espacio se deberá únicamente al movimiento de rotación del cuerpo rígido respecto al punto fijo. Según la ecuación (4-124), \mathbf{v}_i será, pues,

$$\mathbf{v}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i. \quad (5-2)$$

Luego, la ecuación (5-1) podrá escribirse en la forma

$$\mathbf{L} = m_i(\mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i)),$$

o sea, desarrollando el doble producto vectorial,

$$\mathbf{L} = m_i(\boldsymbol{\omega}r_i^2 - \mathbf{r}_i(\mathbf{r}_i \cdot \boldsymbol{\omega})). \quad (5-3)$$

Desarrollando de nuevo, la componente x del momento cinético queda en la forma

$$L_x = \omega_x m_i(r_i^2 - x_i^2) - \omega_y m_i x_i y_i - \omega_z m_i x_i z_i, \quad (5-4)$$

habiendo expresiones análogas para las otras componentes de \mathbf{L} . Así pues, cada una de las componentes del momento cinético es función lineal de todas las componentes del vector

velocidad angular. *El vector momento cinético está relacionado con la velocidad angular mediante una transformación lineal.* Para poner de relieve la semejanza de (5-4) con las ecuaciones de una transformación lineal, (4-12), podemos escribir L_x en la forma

$$L_x = I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z. \quad (5-5)$$

Análogamente, para L_y y L_z tendremos

$$\begin{aligned} L_y &= I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z, \\ L_z &= I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z. \end{aligned} \quad (5-5)$$

Los nueve coeficientes I_{xx} , I_{xy} , etc., son los nueve elementos de la matriz de transformación. A los elementos de la diagonal se les llama *coeficientes momento de inercia* y tienen la forma ilustrada por

$$I_{xx} = m_i(r_i^2 - x_i^2), \quad (5-6)$$

mientras que los elementos de fuera de la diagonal se llaman *productos de inercia*, siendo uno de ellos

$$I_{xy} = -m_i x_i y_i. \quad (5-7)$$

En las ecuaciones (5-6) y (5-7) los elementos matriciales tienen la forma correspondiente al caso en que el cuerpo rígido esté compuesto por partículas discretas. En el caso de cuerpos continuos, la suma se sustituye por una integral de volumen y las masas de las partículas quedan sustituidas por una expresión en función de la densidad. Así, el elemento diagonal I_{xx} aparecerá en la forma

$$I_{xx} = \int_V \rho(\mathbf{r})(r^2 - x^2) dV. \quad (5-6')$$

Con un ligero cambio de notación podríamos establecer una notación válida para todos los elementos matriciales en el caso de cuerpos continuos. Si denotamos los ejes de

coordenadas por $x_j, j = 1, 2, 3$, el elemento matricial I_{jk} se podrá escribir en la forma

$$I_{jk} = \int_V \rho(\mathbf{r})(r^2 \delta_{jk} - x_j x_k) dV. \quad (5.8)$$

Hasta ahora no hemos especificado qué sistema de coordenadas se ha utilizado para definir las componentes de \mathbf{L} . De ahora en adelante, será conveniente tomarlo fijo en el cuerpo.* Las distintas distancias x_i, y_i, z_i serán, entonces, constantes en el tiempo, con lo que los elementos matriciales serán análogamente constantes, peculiares del cuerpo en cuestión, y dependerán del origen y orientación del sistema de ejes del cuerpo elegido en el cual se expresen aquéllas.

Las ecuaciones (5-5) que relacionan las componentes de \mathbf{L} y $\boldsymbol{\omega}$ pueden resumirse mediante una sola ecuación con operador,

$$\mathbf{L} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}, \quad (5.9)$$

donde el símbolo \mathbf{I} representa el operador cuyos elementos matriciales son los coeficientes de inercia que aparecen en las ecuaciones (5-5). De las dos interpretaciones que hemos dado al operador de una transformación lineal (cfr. § 4-2), está claro que aquí debemos considerar que \mathbf{I} actúa sobre el vector $\boldsymbol{\omega}$ y no sobre el sistema de coordenadas. Los vectores \mathbf{L} y $\boldsymbol{\omega}$ son dos vectores físicamente diferentes, que tienen dimensiones diferentes y no son simplemente un mismo vector expresado en dos sistemas de coordenadas diferentes. A diferencia del operador de rotación, \mathbf{I} tendrá dimensiones —masa por cuadrado de una longitud— y no está restringido por condiciones de ortogonalidad. La ecuación (5-9) debe leerse diciendo que el operador \mathbf{I} al actuar sobre el vector $\boldsymbol{\omega}$ da lugar al vector \mathbf{L} que es físicamente nuevo. Aunque haremos uso de las técnicas del Álgebra de matrices desarrolladas en el estudio del operador rotación, ahora hemos de prestar mucha atención a la naturaleza y al carácter físico del operador en sí. No obstante, deberemos estudiar antes alguna Matemática preliminar. Los que ya estén familiarizados con los tensores y afinos pueden pasar ya directamente al § 5-3.

5-2 TENSORES Y AFINOS

Podemos considerar que la cantidad \mathbf{I} define el cociente entre \mathbf{L} y $\boldsymbol{\omega}$:

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{L}}{\boldsymbol{\omega}},$$

* En el Capítulo 4, a un tal sistema lo denotábamos con acentos. Como rara vez vamos a utilizar componentes según los ejes del espacio, de ahora en adelante prescindiremos de dicho convenio a fin de simplificar la notación. A menos que especifiquemos otra cosa, las coordenadas que utilizaremos en el resto del capítulo se referirán a sistemas fijos en el cuerpo rígido.

ya que el producto de \mathbf{l} por ω da \mathbf{L} . Ahora bien, el cociente entre dos cantidades no es frecuentemente un miembro de la misma clase que dividiendo o divisor, sino que puede pertenecer a una clase más complicada. Así, el cociente de dos enteros no es, en general, otro entero sino un número racional. Análogamente, el cociente de dos vectores, como bien sabemos, no puede definirse de manera coherente dentro de la clase de vectores. No es sorprendente, por tanto, encontrar que \mathbf{l} sea un nuevo tipo de cantidad llamada *tensor de segundo orden*.

En un espacio cartesiano tridimensional, para nuestros fines podemos definir un tensor \mathbf{T} de orden N diciendo que es una cantidad que tiene 3^N componentes $T_{ijk\dots}$ (con N índices) y se transforma ante una transformación ortogonal de coordenadas, \mathbf{A} , según el siguiente esquema:*

$$T'_{ijk\dots}(\mathbf{x}') = a_{il}a_{jm}a_{kn}\dots T_{lmn\dots}(\mathbf{x}). \quad (5-10)$$

Según esta definición, un tensor de orden cero tendrá una sola componente, la cual es invariante ante las transformaciones ortogonales. Por tanto, *un escalar es un tensor de orden cero*. Un tensor de primer orden tiene tres componentes que se transforman de la manera siguiente:

$$T'_i = a_{ij}T_j.$$

Comparando con las ecuaciones de transformación (4-12') para un vector, vemos que *un tensor de primer orden es totalmente equivalente a un vector*. † Por último, las nueve componentes de un tensor de segundo orden se transforman del siguiente modo:

$$T'_{ij} = a_{ik}a_{jl}T_{kl}. \quad (5-11)$$

* En un espacio cartesiano (es decir, con ejes rectilíneos ortogonales) no hay distinción alguna entre índices «covariantes» y «contravariantes» y no será necesaria esta terminología. Hablando con propiedad, los tensores que definimos aquí deben denominarse «tensores cartesianos» (cfr. J. L. Synge y A. Schild, *Tensor Calculus*, Toronto 1949, pp. 127-136). No obstante, como este tipo de tensor es el único que vamos a utilizar (salvo en § 7-3) omitiremos el adjetivo en lo que sigue.

† Un *pseudotensor* en tres dimensiones se transforma igual que un tensor salvo ante la inversión. En general, la ecuación de transformación para un pseudotensor de orden N es (cfr. ec. 4-110)

$$T'_{ijk\dots} = |\mathbf{A}|a_{il}a_{jm}a_{kn}\dots T_{lmn\dots}$$

Como el movimiento de un cuerpo rígido sólo comporta rotaciones propias, no volveremos a utilizar el pseudotensor general.

En rigor, debemos distinguir entre el tensor de segundo orden T y la matriz cuadrada formada con sus componentes. Un tensor sólo está definido en función de sus propiedades de transformación ante transformaciones ortogonales de coordenadas. En cambio, una matriz no está restringida en absoluto en cuanto a las transformaciones que puede sufrir y se puede considerar de manera totalmente independiente de sus propiedades ante algún tipo particular de transformación. A pesar de todo, no debemos insistir demasiado en esta distinción. En el dominio restringido de las transformaciones ortogonales hay una identidad práctica. Las componentes del tensor y los elementos de la matriz se manejan de igual manera; y a cada ecuación tensorial corresponderá una ecuación matricial y recíprocamente. Según la ecuación (4-41), las componentes de una matriz cuadrada V se transforman ante un cambio lineal de coordenadas definido por la matriz A de acuerdo con una transformación de semejanza:

$$V' = AVA^{-1}.$$

Para una transformación ortogonal tenemos, pues,

$$V' = AV\tilde{A}$$

o sea

$$V'_{ij} = a_{ik}v_{kl}a_{jl}. \quad (5-13)$$

Comparando con la ecuación (5-11) vemos que las componentes de la matriz se transforman, ante una transformación ortogonal, de igual manera que las componentes de un tensor de segundo orden. Toda la terminología y operaciones del Álgebra matricial, tales como «traspuesta», «hermitica», «antisimétrica», etc., se pueden aplicar sin alteración a los tensores. La equivalencia entre el tensor y la matriz no se limita a los tensores de segundo orden. Por ejemplo, ya sabemos que las componentes de un vector, que es un tensor de primer orden, forman una matriz columna o fila y las transformaciones del vector se pueden tratar totalmente en función de estas matrices asociadas.

Otra útil representación del operador I es mediante un afinor. Llamamos *diada*, simplemente, a una pareja de vectores escritos en un orden definido AB , llamados *antecedente* el A y *consecuente* el B . El producto interior de una diada por un vector C se puede efectuar de dos maneras, o bien en la forma

$$AB \cdot C = A(B \cdot C)$$

o así

$$\mathbf{C} \cdot \mathbf{AB} = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}).$$

En el primer caso, a \mathbf{C} se le llama *postfactor* y en el segundo *prefactor*. Los dos productos no son, en general, iguales. El producto interior por la diada no es conmutativo. Hagamos notar que en ambos casos el resultado del producto interior es un vector que tiene una dirección y un módulo que, en general, son diferentes de los de \mathbf{C} . También podemos definir el doble producto interior de dos diadas diciendo que es el escalar dado por

$$\mathbf{AB:CD} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D})$$

notación más conveniente es escribir el doble producto interior en la forma

$$\mathbf{AB:CD} \equiv \mathbf{C} \cdot \mathbf{AB} \cdot \mathbf{D}.$$

El *afinor* es, por definición, un polinomio lineal de diadas:

$$\mathbf{AB} + \mathbf{CD} + \dots$$

En realidad, toda diada \mathbf{AB} puede expresarse en forma de afinor escribiendo los vectores \mathbf{A} y \mathbf{B} en función de sus componentes y los vectores unitarios \mathbf{i} , \mathbf{j} y \mathbf{k} . Desarrollada de esta manera, la diada toma la forma

$$\begin{aligned} \mathbf{AB} = & A_x B_x \mathbf{ii} + A_x B_y \mathbf{ij} + A_x B_z \mathbf{ik} \\ & + A_y B_x \mathbf{ji} + A_y B_y \mathbf{jj} + A_y B_z \mathbf{jk} \\ & + A_z B_x \mathbf{ki} + A_z B_y \mathbf{kj} + A_z B_z \mathbf{kk}. \end{aligned} \quad (5-14)$$

La ecuación (5-14) es la forma *nonion* de la diada, llamada así porque intervienen nueve coeficientes. Evidentemente, los afinores podrán siempre reducirse a una forma nonion. Es fácil demostrar que los coeficientes de la representación nonion de un afinor se transforman ante una transformación ortogonal de la misma manera que lo hacen las componentes de un tensor de segundo orden (v. Ejercicio 1 de este capítulo). Existen también una equivalencia en su efecto como operadores que actúan sobre vectores ya que

hemos visto que el producto interior de una diada o de un afinor por un vector da lugar a un nuevo vector, de igual manera que el producto de \mathbf{l} por ω da \mathbf{L} . Por tanto, el afinor es, en todos los aspectos, equivalente a un tensor de segundo orden.

Un afinor útil es el afinor $\mathbf{1}$, definido por la representación nonion

$$\mathbf{1} = \mathbf{ii} + \mathbf{jj} + \mathbf{kk}. \quad (5-15)$$

La designación es verdaderamente acertada, ya que la matriz de $\mathbf{1}$ es exactamente la matriz unidad y la multiplicación directa muestra que

$$\mathbf{1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{1} = \mathbf{A}.$$

5-3 TENSOR DE INERCIA Y MOMENTO DE INERCIA

Considerada como operador lineal que transforma ω en \mathbf{L} , la matriz \mathbf{l} tiene elementos que se comportan de igual manera que los elementos de un tensor de segundo orden. Podemos, pues, identificar la cantidad \mathbf{l} con un tensor de segundo orden que suele llamarse *tensor momento de inercia* o más brevemente *tensor de inercia*. Puede escribirse simplemente en forma del afinor

$$\mathbf{l} = m_i(r_i^2 \mathbf{1} - \mathbf{r}_i \mathbf{r}_i), \quad (5-16)$$

ya que entonces

$$\mathbf{l} \cdot \omega = m_i(r_i^2 \omega - \mathbf{r}_i(\mathbf{r}_i \cdot \omega)) = \mathbf{L},$$

en concordancia con la ecuación (5-3). La ventaja de utilizar para \mathbf{l} la forma de afinor es que siguen pudiéndose emplear los métodos conocidos de manipulación de los vectores. De esta manera llegamos, de manera natural, a expresar la energía cinética de rotación en función del afinor \mathbf{l} . La energía cinética del movimiento alrededor de un punto es

$$T = \frac{1}{2} m_i v_i^2,$$

donde \mathbf{v}_i es la velocidad de la partícula i -ésima relativa al punto fijo medida en los ejes del

espacio. Según la ecuación (5-2), podemos escribir también T en la forma

$$T = \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i),$$

que, permutando los vectores del producto mixto, queda en la forma

$$T = \frac{\boldsymbol{\omega}}{2} \cdot m_i (\mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i).$$

La cantidad que resulta al sumar para todos los valores de i podemos ver que es el momento cinético del cuerpo respecto al origen y la energía cinética podrá escribirse, en consecuencia, de la manera siguiente:

$$T = \frac{\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L}}{2} = \frac{\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega}}{2}. \quad (5-17)$$

Sea \mathbf{n} un vector unitario de la dirección y sentido de $\boldsymbol{\omega}$ con lo que $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{n}$. Entonces, otra forma de expresar la energía cinética podría ser

$$T = \frac{\omega^2}{2} \mathbf{n} \cdot \mathbf{I} \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{2} I \omega^2, \quad (5-18)$$

donde I es un escalar, definido por

$$I = \mathbf{n} \cdot \mathbf{I} \cdot \mathbf{n} = m_i (r_i^2 - (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{n})^2), \quad (5-19)$$

al que se da el nombre de *momento de inercia respecto al eje de rotación*.

En los tratamientos elementales corrientes, el momento de inercia respecto a un eje se define diciendo que es la suma, extendida a todas las partículas del cuerpo, del producto de la masa de cada partícula por el cuadrado de su distancia al eje. Vamos a demostrar que esta definición está de acuerdo con la expresión dada en la ecuación (5-19). La distancia al eje es igual al módulo del vector $\mathbf{r}_i \times \mathbf{n}$ (cfr. fig. 5-2). Por tanto, la definición ordinaria de I puede escribirse en la forma

$$I = m_i (\mathbf{r}_i \times \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{r}_i \times \mathbf{n}).$$

Multiplicando y dividiendo por ω^2 , esta definición de I puede también escribirse

$$I = \frac{m_i}{\omega^2} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i).$$

Pero cada uno de los vectores del producto escalar es exactamente la velocidad relativa \mathbf{v}_i medida en el sistema de ejes del espacio. Por tanto, la I así definida está relacionada con la energía cinética mediante la expresión

$$I = \frac{2T}{\omega^2},$$

que es lo mismo que la ecuación (5-18) y por tanto I debe coincidir con el escalar definido por la ecuación (5-19).

El valor del momento de inercia depende de la dirección del eje de rotación. Como, en el transcurso del tiempo, $\boldsymbol{\omega}$ suele variar su dirección respecto al cuerpo, deberemos considerar que el momento de inercia es también función del tiempo. Cuando el cuerpo esté obligado a girar en torno a un eje fijo, el momento de inercia será constante. En tal caso, la energía cinética expresada en (5-17) tiene casi la forma requerida por la lagrangiana y las ecuaciones de movimiento. El único paso que aún tenemos que dar es expresar ω en forma de derivada de un cierto ángulo respecto al tiempo, cosa que suele poderse hacer sin dificultad.

Al igual que el tensor de inercia, el momento de inercia también depende de la elección del origen del sistema de ejes del cuerpo. Sin embargo, el momento de inercia respecto a un

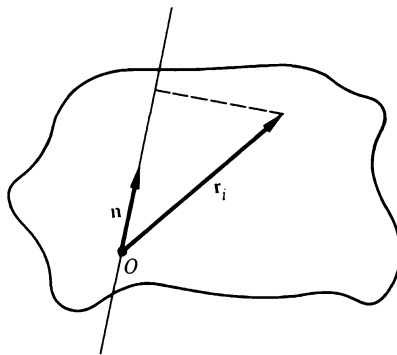


FIGURA 5-2
Definición del momento de inercia.

eje dado está relacionado de manera muy sencilla con el momento de inercia respecto a un eje paralelo al anterior y que pase por el centro de masa. Llamemos \mathbf{R} al vector que va del origen dado O al centro de masa y sean \mathbf{r}_i y \mathbf{r}'_i , respectivamente, los vectores de posición de la partícula i -ésima respecto a O y al centro de masa. Los tres vectores así definidos están relacionados (cfr. fig. 5-3) en la forma

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{R} + \mathbf{r}'_i. \quad (5-20)$$

El momento de inercia respecto al eje a será, pues,

$$I_a = m_i(\mathbf{r}_i \times \mathbf{n})^2 = m_i[(\mathbf{r}'_i + \mathbf{R}) \times \mathbf{n}]^2$$

o sea

$$I_a = M(\mathbf{R} \times \mathbf{n})^2 + m_i(\mathbf{r}'_i \times \mathbf{n})^2 + 2m_i(\mathbf{R} \times \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{r}'_i \times \mathbf{n}),$$

donde M es la masa total del cuerpo. El último término de esta expresión se puede poner en la forma

$$-2(\mathbf{R} \times \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{n} \times m_i \mathbf{r}'_i).$$

Por la propia definición de centro de masa, la suma $m_i \mathbf{r}'_i$ es nula. Por tanto, I_a se puede expresar en función del momento de inercia respecto al eje paralelo b escribiendo

$$I_a = I_b + M(\mathbf{R} \times \mathbf{n})^2. \quad (5-21)$$

El módulo de $\mathbf{R} \times \mathbf{n}$ es la distancia del centro de masa al eje que pasa por O . En consecuencia, el momento de inercia respecto a un eje dado es igual al momento de inercia respecto a un eje paralelo que pase por el centro de masa más el momento de inercia del cuerpo, supuesto éste concentrado en su centro de masa, respecto al eje original.

Para el tensor de inercia podemos obtener una descomposición análoga. De la ecuación (5-20) se deduce que

$$r_i^2 = R^2 + r_i'^2 + 2\mathbf{R} \cdot \mathbf{r}'_i.$$

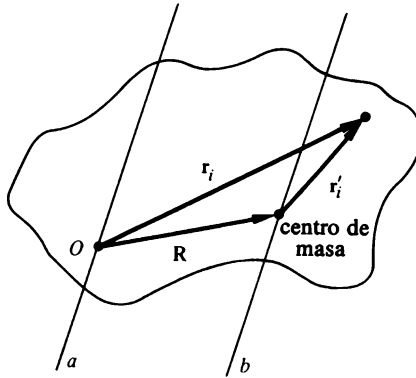


FIGURA 5-3

Vectores que intervienen en la relación entre momentos de inercia respecto a ejes paralelos.

El tensor de inercia para el origen O , expresado en la forma de afinor indicada en la ecuación (5-14), puede escribirse

$$I = MR^2\mathbf{1} + m_i[(r_i'^2 + 2\mathbf{R} \cdot \mathbf{r}'_i)\mathbf{1} - (\mathbf{r}'_i\mathbf{r}'_i + \mathbf{R}\mathbf{r}'_i + \mathbf{r}'_i\mathbf{R})] - M\mathbf{R}\mathbf{R}.$$

Todas las sumas de la forma $m_i r'_i$ son nulas y la expresión se reduce a

$$I = m_i(r_i'^2\mathbf{1} - \mathbf{r}'_i\mathbf{r}'_i) + M(R^2\mathbf{1} - \mathbf{R}\mathbf{R}). \quad (5-22)$$

El primer término es el tensor de inercia I' relativo al centro de masa y el segundo es el tensor de inercia, relativo a O , de una partícula única de masa M situada en el centro de masa. Así pues, tanto el momento de inercia como el tensor de inercia poseen un tipo de descomposición, relativa al centro de masa, muy parecida a la que se encontró en § (1-2) para la cantidad de movimiento, el momento cinético y la energía cinética.

5-4 VALORES PROPIOS DEL TENSOR DE INERCIA Y TRANSFORMACIÓN A LOS EJES PRINCIPALES

Lo que acabamos de ver ha servido para poner de relieve el importante papel que desempeña el tensor de inercia en el estudio del movimiento de cuerpos rígidos. Será, pues, de

considerable interés, examinar en este momento las propiedades de este tensor y de su matriz asociada. En la ecuación de definición (5-7) vemos que las componentes del tensor son simétricas, es decir,

$$I_{xy} = I_{yx}.$$

Como las componentes son reales, el tensor resulta ser igual a su adjunto (cfr. ec. 4-38), o sea que diremos que I es *autoadjunto* o *hermítico*. Así pues, aun cuando el tensor de inercia tendrá nueve componentes, sólo seis de ellas serán independientes —las tres de la diagonal principal más tres elementos de fuera de la diagonal.

Los coeficientes de inercia dependen de la posición del origen del sistema de ejes y de la orientación de éstos respecto al cuerpo. Sería, desde luego, muy conveniente que pudiéramos encontrar, para un origen dado, una orientación particular de los ejes del cuerpo para la cual el tensor de inercia sea diagonal, es decir, que el afinor pudiera escribirse en la forma

$$I' = I_1 \mathbf{ii} + I_2 \mathbf{jj} + I_3 \mathbf{kk}.$$

Respecto a un tal sistema de ejes, cada una de las componentes de \mathbf{L} sólo contendría la componente correspondiente de $\boldsymbol{\omega}$, así*

$$L_1 = I_1 \omega_1, \quad L_2 = I_2 \omega_2, \quad L_3 = I_3 \omega_3. \quad (5-23)$$

También tendría lugar una simplificación análoga en la forma de la energía cinética:

$$T = \frac{\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega}}{2} = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2 + \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2. \quad (5-24)$$

Se puede demostrar que siempre es posible encontrar tales ejes y la demostración se basa esencialmente en la naturaleza hermítica del tensor de inercia.

En § 4-6 señalábamos que se puede resolver la ecuación de valores propios de una matriz dando a ésta forma diagonal, cuyos elementos serán los valores propios buscados. Por tanto, el problema de encontrar un sistema de ejes en el cual sea diagonal I es

* Con vistas a aplicaciones futuras, las componentes relativas a estos ejes se denotarán con los subíndices 1, 2, 3.

equivalente al problema de los valores propios de la matriz de \mathbf{I} , I_1 , I_2 , e I_3 . También resulta que para el sistema de coordenadas en el cual es diagonal \mathbf{I} la dirección de los ejes coincide con la dirección de los vectores propios. Por ejemplo, supongamos que ω está dirigido según uno de los ejes, p. ej., el eje x . Entonces, según (5-23) el momento cinético $\mathbf{L} = \mathbf{I} \cdot \omega$ también estará dirigido según el eje x . El efecto de \mathbf{I} sobre un vector cualquiera paralelo a uno de los ejes de coordenadas será, pues, dar otro vector de igual dirección. Por definición, dicho vector deberá ser uno de los vectores propios de \mathbf{I} .

En § 4-6 esbozábamos el esquema para diagonalizar una matriz cualquiera y encontrar sus valores propios. Sin embargo, este procedimiento no constituye en sí mismo una prueba de la existencia de un sistema de coordenadas *cartesianas real* en el cual \mathbf{I} sea diagonal. Así pues, recordaremos que una matriz ortogonal, salvo en casos triviales, tiene un solo valor propio real y por tanto una sola dirección real correspondiente a un vector propio (a saber: el eje de rotación). En contraste, lo que queremos demostrar es que *todos* los valores propios de \mathbf{I} son reales y que las tres direcciones reales de los vectores propios son mutuamente ortogonales.*

Sea \mathbf{R}_j el vector propio j -ésimo de \mathbf{I} , con valor propio I_j . La ecuación de valores propios correspondiente será†

$$\mathbf{I} \cdot \mathbf{R}_j = I_j \mathbf{R}_j. \quad (5-25)$$

Si \mathbf{R}_l representa análogamente el vector propio l -ésimo, el producto a la izquierda de \mathbf{R}_l^* por la ecuación (5-25) es

$$\mathbf{R}_l^* \cdot \mathbf{I} \cdot \mathbf{R}_j = I_j \mathbf{R}_l^* \cdot \mathbf{R}_j. \quad (5.26)$$

El complejo conjugado de la ecuación de valores propios para \mathbf{R}_l , siguiendo el esquema de la ecuación (5-25) es

$$\mathbf{I}^* \cdot \mathbf{R}_l^* = I_l^* \mathbf{R}_l^*. \quad (5-27)$$

Ahora bien, el orden del producto interior de una diada por un vector se puede invertir tomando la traspuesta, de igual manera que el producto de una matriz cuadrada por una matriz columna. Formalmente, si \mathbf{A} es una diada cualquiera y \mathbf{P} un vector cualquiera, la

* En función de la matriz \mathbf{X} que diagonaliza a \mathbf{I} por medio de una transformación de semejanza, estas condiciones dicen que \mathbf{X} debe ser una matriz *ortogonal real*, es decir, que \mathbf{X} transforma un sistema de coordenadas cartesianas real en otro.

† En las ecuaciones de (5-25) a (5-29) no hay suma para los índices j o l , según se desprende del razonamiento.

componente i -ésima del producto interior es

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{P})_i = A_{ik} P_k = P_k (\tilde{\mathbf{A}})_{ki} = (\mathbf{P} \cdot \tilde{\mathbf{A}})_i.$$

Se deduce que la ecuación (5-27) puede escribirse en la forma

$$\mathbf{R}_i^* \cdot \mathbf{I}^\dagger = I_i^* \mathbf{R}_i^*. \quad (5-27')$$

Tomando el producto interior a la derecha de este resultado por \mathbf{R}_j , tenemos

$$\mathbf{R}_i^* \cdot \mathbf{I}^\dagger \cdot \mathbf{R}_j = I_i^* \mathbf{R}_i^* \cdot \mathbf{R}_j. \quad (5-28)$$

Como \mathbf{I} es hermítica, los primeros miembros de las ecuaciones (5-26) y (5-28) son iguales, por lo que la diferencia entre las dos ecuaciones se reduce a

$$(I_j - I_i^*) \mathbf{R}_i^* \cdot \mathbf{R}_j = 0 \quad (5-29)$$

Si l es igual a j , será $\mathbf{R}_i^* \cdot \mathbf{R}_j = |\mathbf{R}_j|^2$ que debe ser definida positiva. Luego, en tal caso, la ecuación (5-29) sólo podrá anularse si $I_j = I_j^*$, lo cual prueba uno de los resultados buscados. Notemos que la demostración sólo ha utilizado la propiedad de hermiticidad de \mathbf{I} —los valores propios de toda matriz hermítica son reales. Como \mathbf{I} también es real, los cosenos directores de los vectores propios \mathbf{R}_j deberán ser también reales, según podemos ver en la ecuación (5-25).

Si tomamos l diferente de j y los valores propios son distintos, la ecuación (5-29) sólo se satisfará si $\mathbf{R}_i \cdot \mathbf{R}_j$ es nulo, lo cual verifica el segundo requisito de que los vectores propios sean ortogonales.*

* La demostración que hemos dado presenta una estrecha analogía en la teoría del problema de Sturm-Liouville en ecuaciones diferenciales ordinarias. En él se demuestra que los valores propios de un operador diferencial hermítico son reales y las correspondientes soluciones en funciones propias de la ecuación diferencial son ortogonales. La semejanza no es accidental; podemos siempre construir cantidades matriciales que correspondan a un problema dado cualquiera que entrañe una ecuación diferencial de Sturm-Liouville y esto es, exactamente, lo que sucede en la correspondencia entre las formulaciones de la Mecánica matricial y la Mecánica ondulatoria de la teoría cuántica. Véase, p. ej., G. F. Arfken, *Mathematical Methods for Physicists*, § 9-2.

Si los valores propios no son todos distintos, esta demostración de ortogonalidad falla pero se puede reparar sin gran dificultad. Por ejemplo, supongamos que sean iguales dos valores propios, $I_2 = I_3$. Siempre será posible hallar al menos un vector propio que satisfaga la ecuación (5-25) para este valor propio doble. Según la ecuación (5-29), este vector propio es ortogonal al vector propio correspondiente al valor propio distinto I_1 . Así podremos hallar un sistema de coordenadas cartesianas dextrogiro para el cual los vectores unitarios \mathbf{i} y \mathbf{j} tienen la dirección de los dos vectores propios hallados hasta ahora. De las ecuaciones de los vectores propios se deduce

$$\mathbf{l} \cdot \mathbf{i} = I_1 \mathbf{i}, \quad \mathbf{l} \cdot \mathbf{j} = I_2 \mathbf{j}$$

que en este sistema de coordenadas $I_{12} = I_{13} = I_{23} = 0$. Pero la simetría de \mathbf{l} implica también $I_{31} = I_{32} = 0$, es decir, el tensor de inercia es diagonal en este sistema y \mathbf{k} es también un vector propio de \mathbf{l} con valor propio I_2 . Se desprende inmediatamente que *todo* vector en el plano definido por \mathbf{j} y \mathbf{k} es vector propio cuyo valor propio es I_2 . † Análogamente, si todos los valores propios son iguales, todas las direcciones del espacio serán vectores propios. Pero entonces \mathbf{l} será diagonal desde un principio y no será necesaria su diagonalización.

Los métodos del Álgebra matricial nos permiten, pues, demostrar que en todo punto de un cuerpo rígido se puede hallar un sistema de ejes cartesianos para los cuales es diagonal el tensor de inercia. Estos ejes se denominan *ejes principales* y los elementos diagonales correspondientes I_1, I_2, I_3 se denominan *momentos principales de inercia*. Dado un cierto sistema inicial de coordenadas en el cuerpo, podemos pasar de él a los ejes principales mediante una transformación ortogonal particular que, en consecuencia, se llama *transformación a los ejes principales*. En la práctica, los momentos principales de inercia, por ser los valores propios de \mathbf{l} , se hallan buscando las raíces de la ecuación secular. Para recordar los pasos que conducen a la ecuación secular, debemos notar que la ecuación de valores propios (cfr. ec. 5-25) en la forma

$$(\mathbf{l} - I\mathbf{1}) \cdot \mathbf{R} = 0, \quad (5-30)$$

corresponde a un sistema de tres ecuaciones lineales homogéneas en las componentes del vector propio. Dicho sistema de ecuaciones sólo será compatible si se anula el

† Un procedimiento equivalente y más general para construir un sistema ortogonal de vectores propios a partir de un sistema no ortogonal posible es el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt de Álgebra lineal. Véase, p. ej., J. A. Eisele y R. M. Mason, *Applied Matrix and Tensor Analysis*, Wiley-Interscience, N. Y. 1970, pp. 16-21, o M. C. Pease, *Methods of Matrix Algebra*, Academic, N. Y. 1965, pp. 59-61. Véase también el estudio análogo de la construcción de modos normales, pp. 253.

determinante de los coeficientes:

$$\begin{vmatrix} I_{xx} - I & I_{xy} & I_{zx} \\ I_{xy} & I_{yy} - I & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{yz} & I_{zz} - I \end{vmatrix} = 0, \quad (5-31)$$

donde se ha expuesto explícitamente la simetría de I . La ecuación (5-31) es la ecuación secular, en forma de cúbica en I , cuyas tres raíces son los momentos principales buscados. Para cada una de estas raíces se pueden resolver las ecuaciones (5-25) para obtener la dirección del eje principal correspondiente. En la mayoría de los problemas fácilmente resolubles de la Dinámica del cuerpo rígido, los ejes principales se pueden obtener por simple inspección. Por ejemplo, casi siempre tendremos que tratar cuerpos rígidos que son sólidos con simetría de revolución en torno a un eje, con el origen del sistema del cuerpo situado en el eje de simetría. Todas las direcciones perpendiculares al eje de simetría serán entonces análogas, lo que constituye la marca de una raíz doble de la ecuación secular. Los ejes principales serán entonces el eje de simetría y dos ejes perpendiculares cualesquiera en el plano normal al eje de simetría.

Los momentos principales de inercia no pueden ser negativos porque los elementos diagonales en el sistema de ejes principales tienen la forma de sumas de cuadrados. Así pues, I viene dado por (cfr. ec. 5-6)

$$I_{xx} = m_i(y_i^2 + z_i^2).$$

Para que se anule uno de los momentos principales, todos los puntos del cuerpo deberán ser tales que se anulen dos coordenadas de cada partícula. Evidentemente, esto sólo puede suceder si todos los puntos del cuerpo están alineados en el eje principal correspondiente al momento principal nulo. Dos ejes cualesquiera perpendiculares a la línea del cuerpo serán los otros ejes principales. En verdad, este es un caso límite de un cuerpo que tiene un eje de simetría que pasa por el origen.

También podemos llegar al concepto de ejes principales a través de ciertas consideraciones geométricas que constituyeron el método con que se abordó primeramente el tema. El momento de inercia respecto a un eje dado se ha definido en la forma $I = \mathbf{n} \cdot \mathbf{I} \cdot \mathbf{n}$. Sean α , β y γ los cosenos directores del eje, con lo cual

$$\mathbf{n} = \alpha \mathbf{i} + \beta \mathbf{j} + \gamma \mathbf{k};$$

I podrá entonces escribirse en la forma

$$I = I_{xx}\alpha^2 + I_{yy}\beta^2 + I_{zz}\gamma^2 + 2I_{xy}\alpha\beta + 2I_{yz}\beta\gamma + 2I_{zx}\gamma\alpha, \quad (5-32)$$

utilizando explícitamente la simetría de I . Conviene definir un vector ρ mediante la ecuación

$$\vec{\rho} = \frac{\alpha}{\sqrt{I}} \hat{i} + \frac{\beta}{\sqrt{I}} \hat{j} + \frac{\gamma}{\sqrt{I}} \hat{k} \quad \rho = \frac{n}{\sqrt{I}} \quad (5-33)$$

El módulo de ρ está así relacionado con el momento de inercia respecto al eje cuya dirección está definida por n . En función de las componentes de este nuevo vector, la ecuación (5-32) toma la forma

$$1 = I_{xx}\rho_1^2 + I_{yy}\rho_2^2 + I_{zz}\rho_3^2 + 2I_{xy}\rho_1\rho_2 + 2I_{yz}\rho_2\rho_3 + 2I_{zx}\rho_3\rho_1 \quad (5-34)$$

Si la consideramos como función de las tres variables ρ_1, ρ_2, ρ_3 , la ecuación (5-34) es la ecuación de una superficie en el espacio ρ . En particular, la ecuación (5-34) es la ecuación de un elipsoide llamado *elipsoide de inercia*. Sabemos que siempre es posible pasar a un sistema de coordenadas en el cual la ecuación del elipsoide tome su forma normal:

$$1 = I_1\rho_1'^2 + I_2\rho_2'^2 + I_3\rho_3'^2 \quad (5-35)$$

estando los ejes principales del elipsoide dirigidos según los nuevos ejes de coordenadas. Pero la ecuación (5-35) es, precisamente, la forma que tiene la ecuación (5-34) en un sistema de coordenadas en el cual el tensor de inercia I es diagonal. Luego la transformación de coordenadas que pone la ecuación del elipsoide en su forma normal es exactamente la transformación a los ejes principales antes tratada. Los momentos principales de inercia determinan las longitudes de los ejes del elipsoide de inercia. Si dos de las raíces de la ecuación secular son iguales, el elipsoide de inercia tendrá dos ejes iguales y será un elipsoide de revolución. Si los tres momentos principales son iguales, el elipsoide de inercia será una esfera.

Una cantidad estrechamente vinculada al momento de inercia es el *radio de giro*, R_0 , definido por la ecuación

$$I = MR_0^2 \quad (5-36)$$

En función del radio de giro, el vector ρ puede expresarse en la forma

$$\rho = \frac{n}{R_0\sqrt{M}}$$

El radio vector a un punto sobre el elipsoide de inercia será, pues, inversamente proporcional al radio de giro respecto a la dirección del vector.

Vale la pena insistir en que el tensor de inercia I y todas las cantidades a él asociadas — ejes principales, momentos principales, elipsoide de inercia, etc. — sólo lo son relativas a un cierto punto particular fijo en el cuerpo. Si cambiamos de punto en el cuerpo, cambiarán, en general, todas esas cantidades. La ecuación (5-22) nos da el efecto de mover el punto de referencia del centro de masa a otro punto. La transformación a ejes principales que diagonaliza a I' en el centro de masa no tiene por qué diagonalizar al término diferencia $M(R^2\mathbf{1} - \mathbf{R}\mathbf{R})$ y por tanto no será en general, la transformación a ejes principales para el tensor I en el nuevo punto. Tan sólo si el vector \mathbf{R} está dirigido según uno de los ejes principales relativos al centro de masa será diagonal el tensor diferencia en ese sistema. En este caso particular, el nuevo tensor de inercia I tendrá los mismos ejes principales que en el centro de masa. Sin embargo los momentos principales de inercia cambian, excepto en lo que corresponde al desplazamiento de ejes, donde el elemento diagonal del tensor diferencia es claramente nulo. El teorema de los «ejes paralelos» para la forma diagonalizada del tensor de inercia tiene así una forma un tanto especial y restringida.

5-5 MÉTODOS DE SOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE CUERPOS RÍGIDOS Y ECUACIONES DE EULER DEL MOVIMIENTO

Se han reunido prácticamente todas las herramientas necesarias para plantear y resolver problemas de Dinámica del cuerpo rígido. Si hay ligaduras no holonomas, deberán utilizarse medios especiales para incluir los efectos de dichas ligaduras en las ecuaciones de movimiento. Por ejemplo, si hay «ligaduras de rodadura» deberán introducirse en las ecuaciones de movimiento por el método de los multiplicadores indeterminados de Lagrange, como en § 2-4. Según hemos visto en § 5-1, suele buscarse un punto de referencia particular en el cuerpo, tal que podamos desdoblarse el problema en dos partes separadas, una puramente traslatoria y la otra puramente rotatoria en torno al punto de referencia. Desde luego, si un punto del cuerpo rígido está fijo en un sistema inercial ese será el punto de referencia. Todo lo que habrá que considerar entonces es el problema de la rotación en torno al punto fijo. En el caso de cuerpos sin punto fijo, el punto de referencia más útil es casi siempre el centro de masa. Ya hemos visto que la energía cinética y el momento cinético totales se desdoblan entonces en un término relativo al movimiento de traslación del centro de masa y otro para la rotación *en torno* al centro de masa. Así, la ecuación (1-31) podrá escribirse en la forma

$$T = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2.$$

En muchos problemas (todos los que vamos a considerar aquí) podrá hacerse un tipo análogo de división para la energía potencial. Podemos entonces resolver por separado el movimiento de traslación del centro de masa y el movimiento de rotación en torno al centro de masa. Por ejemplo, se pueden utilizar directamente las ecuaciones de movimiento de Newton; la ecuación (1-22) para el movimiento del centro de masa y la

ecuación (1-26) para el movimiento en torno a dicho punto. En el caso de sistemas conservativos holonomos disponemos de la formulación de Lagrange, en donde la lagrangiana toma la forma

$$L(q, \dot{q}) = L_c(q_c, \dot{q}_c) + L_b(q_b, \dot{q}_b).$$

Aquí, L_c es la parte de la lagrangiana que contiene las coordenadas generalizadas q_c (y las velocidades \dot{q}_c) del centro de masa y L_b es la parte relativa a la orientación del cuerpo en torno a su centro de masa, descrita por q_b, \dot{q}_b . Entonces hay de hecho dos problemas distintos, uno con lagrangiana L_c y el otro con lagrangiana L_b . Tanto en la formulación de Newton como en la formulación de Lagrange, conviene trabajar en el sistema de ejes principales del punto de referencia, con lo que la energía cinética de rotación adopta la forma sencilla dada en la ecuación (5-24). Hasta ahora, las únicas coordenadas generalizadas adecuadas que tenemos para el movimiento de rotación del cuerpo rígido son los ángulos de Euler. Desde luego, a menudo el movimiento está confinado a dos dimensiones, como es el caso del movimiento de una lámina rígida en un plano. El eje de rotación está entonces fijo en la dirección perpendicular al plano; sólo se necesita un ángulo de rotación y podemos hacer caso omiso del engorroso mecanismo de los ángulos de Euler.

En el caso del movimiento de rotación en torno a un punto fijo o al centro de masa, el método directo de Newton nos lleva a un sistema de ecuaciones conocidas por el nombre de ecuaciones de Euler del movimiento. Consideramos o un sistema inercial cuyo origen esté en el punto fijo del cuerpo rígido, o un sistema de ejes en el espacio con origen en el centro de masa. En estos dos casos serán válidas la ecuación (1-26) o la (1-26'), las cuales aparecen aquí simplemente en la forma

$$\left(\frac{d\mathbf{L}}{dt} \right)_e = \mathbf{N}.$$

El subíndice e se debe a que la derivada es respecto a ejes que no comparten la rotación del cuerpo. En cambio, la ecuación (4-124) puede utilizarse para obtener las derivadas respecto a ejes fijos en el cuerpo

$$\left(\frac{d\mathbf{L}}{dt} \right)_e = \left(\frac{d\mathbf{L}}{dt} \right)_c + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L},$$

o, suprimiendo el subíndice «cuerpo»:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L} = \mathbf{N}. \quad (5-37)$$

La ecuación (5-37) es, pues, la forma apropiada de la ecuación de Newton del movimiento relativo a los ejes del cuerpo. La componente i -ésima de la ecuación (5-37) se puede escribir

$$\frac{dL_i}{dt} + \epsilon_{ijk}\omega_j L_k = N_i. \quad (5-38)$$

Si ahora se toman por ejes del cuerpo los ejes principales relativos al punto de referencia, las componentes del momento cinético serán $L_i = I_i\omega_i$. La ecuación (5-38) toma entonces la forma

$$I_i \frac{d\omega_i}{dt} + \epsilon_{ijk}\omega_j\omega_k I_k = N_i, \quad (5-39)$$

ya que los momentos principales de inercia son independientes del tiempo.* En forma desarrollada, las tres ecuaciones representadas por la ecuación (5-39) presentan el aspecto siguiente:

$$\begin{aligned} I_1\dot{\omega}_1 - \omega_2\omega_3(I_2 - I_3) &= N_1, \\ I_2\dot{\omega}_2 - \omega_3\omega_1(I_3 - I_1) &= N_2, \\ I_3\dot{\omega}_3 - \omega_1\omega_2(I_1 - I_2) &= N_3. \end{aligned} \quad (5-39')$$

Las ecuaciones (5-39) o (5-39') son las llamadas ecuaciones de Euler de movimiento para un cuerpo rígido con un punto fijo. También se pueden deducir de las ecuaciones de Lagrange en la forma dada por la ecuación (1-53) en donde las fuerzas generalizadas Q_j son los momentos correspondientes a los ángulos de rotación de Euler. No obstante, sólo uno de los ángulos de Euler tiene su momento asociado dirigido según uno de los ejes del cuerpo y las otras dos ecuaciones de Euler deberán obtenerse por permutación cíclica (cfr. Ejercicio 8).

5-6 MOVIMIENTO DE UN CUERPO RÍGIDO EXENTO DE MOMENTOS

Un problema de la Dinámica del cuerpo rígido en el cual son aplicables las ecuaciones de Euler es el del movimiento de un cuerpo rígido sometido a un sistema de fuerzas cuya resultante general y cuyo momento resultante sean nulos. En tal caso, el centro de masa

* Es evidente que la ecuación (5-39), por ser la componente i -ésima de una ecuación vectorial, no implica una suma para los valores de i , si bien la suma está implícita para los índices repetidos j y k .

estará en reposo o en movimiento rectilíneo uniforme y no reduciremos la generalidad de la solución si estudiamos el movimiento de rotación en un sistema de referencia en el cual el centro de masa esté en reposo. En tal caso, el momento cinético sólo se debe a la rotación en torno al centro de masa y las ecuaciones de Euler son las ecuaciones de movimiento para el sistema total. En ausencia de momento resultante, se reducen a

$$\begin{aligned} I_1 \dot{\omega}_1 &= \omega_2 \omega_3 (I_2 - I_3), \\ I_2 \dot{\omega}_2 &= \omega_3 \omega_1 (I_3 - I_1), \\ I_3 \dot{\omega}_3 &= \omega_1 \omega_2 (I_1 - I_2). \end{aligned} \quad (5-40)$$

Las mismas ecuaciones describen, desde luego, el movimiento de un cuerpo rígido que tenga fijo un punto y al cual no haya aplicado momento resultante. Conocemos dos integrales primeras del movimiento, ya que la energía cinética y el vector momento cinético resultante deben ser constantes en el tiempo. Con estas dos integrales se puede integrar (5-40) expresando el resultado mediante funciones elípticas, pero tal tratamiento no resulta demasiado clarificador. En cambio, también es posible deducir una elegante descripción geométrica del movimiento, llamada construcción de Poincaré, sin necesidad de obtener una solución completa del problema.

Consideremos un sistema de coordenadas orientado según los ejes principales del cuerpo pero cuyos ejes midan las componentes de un vector ρ dirigido según el eje de rotación y definido por la ecuación (5-33). Para nuestros fines conviene utilizar la ecuación (5-18) para la energía cinética (en este caso constante) y escribir la definición de ρ en la forma

$$\rho = \frac{\omega}{\omega \sqrt{I}} = \frac{\omega}{\sqrt{2T}}. \quad (5-41)$$

En este espacio ρ , definamos una función

$$F(\rho) = \rho \cdot I \cdot \rho = \frac{1}{2} \rho_i^2 I_i, \quad (5-42)$$

donde las superficies de F constante son elipsoides, siendo la superficie $F = 1$ el elipsoide de inercia. Como la dirección del eje de rotación varía en el transcurso del tiempo, también variará el vector ρ que tiene igual dirección, definiendo siempre su extremo un punto del elipsoide de inercia. El gradiente de F , calculado en este punto, nos da la dirección de la correspondiente normal al elipsoide de inercia. Según la ecuación (5-42), el gradiente de F respecto a ρ tiene la forma

$$\nabla_{\rho} F = 2I \cdot \rho = \frac{2I \cdot \omega}{\sqrt{2T}},$$

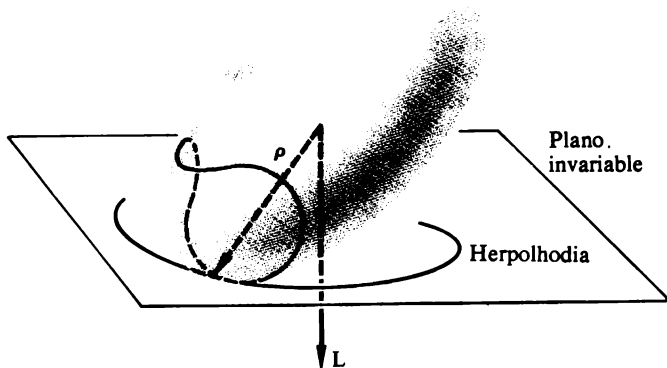


FIGURA 5-4
Movimiento del elipsoide de inercia relativo al plano invariable.

o sea

$$\nabla_{\rho} F = \sqrt{\frac{2}{T}} \mathbf{L}. \quad (5-43)$$

Así pues, el vector ω se moverá siempre de manera que la correspondiente normal al elipsoide de inercia tenga la dirección del momento cinético. En el caso particular que estamos tratando, la dirección de \mathbf{L} está fija en el espacio y será el elipsoide de inercia (fijo respecto al cuerpo) el que debe moverse en el espacio para conservar esta relación entre ω y \mathbf{L} (cfr. fig. 5-4).

También podemos demostrar que la distancia entre el origen del elipsoide y el plano tangente a él en el punto ρ debe ser análogamente constante en el tiempo. Dicha distancia es igual a la proyección de ρ sobre \mathbf{L} y viene dada por

$$\frac{\rho \cdot \mathbf{L}}{L} = \frac{\omega \cdot \mathbf{L}}{L\sqrt{2T}}$$

o sea

$$\frac{\rho \cdot \mathbf{L}}{L} = \sqrt{2T}, \quad (5-44)$$

donde hemos utilizado la ecuación (5-17). Tanto la energía cinética T como el momento cinético \mathbf{L} son constantes del movimiento y por tanto el plano tangente se hallará siempre a una distancia fija del origen del elipsoide. Como la normal al plano, que tiene la dirección de \mathbf{L} , también tiene dirección fija, al plano tangente se le da el nombre de *plano invariable*. Podemos representar el movimiento del cuerpo rígido exento de fuerzas considerando que es el del elipsoide de inercia que rueda, sin deslizar, sobre el plano invariable, estando el centro del elipsoide a una altura constante sobre el plano. La rodadura tiene lugar sin deslizamiento porque el punto de contacto está definido por la posición de ρ el cual, por estar dirigido según el eje instantáneo de rotación, es la dirección del cuerpo que está momentáneamente en reposo. La curva que describe el punto de contacto sobre el elipsoide de inercia se denomina *polhodia*, mientras que la curva análoga descrita sobre el plano invariable se denomina *herpolhodia*.*

El tratamiento geométrico de Poincot resulta muy adecuado para describir por completo el movimiento del cuerpo exento de fuerzas. La dirección del plano invariable y la altura sobre él del elipsoide de inercia están determinadas por los valores T y \mathbf{L} , que se cuentan entre las condiciones iniciales del problema. Será, pues, una cuestión geométrica trazar la polhodia y la herpolhodia. La dirección de la velocidad angular en el espacio está dada por la dirección de ρ , mientras que la orientación del elipsoide de inercia, que está fijo en el cuerpo, da la orientación instantánea de éste. En la literatura se encuentran frecuentemente descripciones elaboradas del movimiento exento de fuerzas obtenidas de esta manera. † En el caso particular de ser simétrico el cuerpo, el elipsoide de inercia es un elipsoide de revolución, por lo que la polhodia que está sobre el elipsoide será una circunferencia alrededor del eje de simetría. La herpolhodia que está en el plano invariable será, análogamente, otra circunferencia. Un observador fijo en el cuerpo ve al vector velocidad angular ω moverse sobre la superficie de un cono —llamado *cono del cuerpo*— cuya intersección con el elipsoide de inercia es la polhodia. Correspondientemente, un observador fijo en el sistema de ejes del espacio ve que ω se mueve sobre la superficie de un *cono del espacio* cuya intersección con el plano invariable es la herpolhodia. Por eso, el movimiento libre del cuerpo rígido simétrico se describe a veces por la rodadura del cono del cuerpo sobre el cono del espacio. Cuando el momento de inercia respecto al eje de simetría sea menor que el correspondiente a los otros dos ejes principales, la ecuación (5-35) nos indica que el elipsoide de energía es alargado, es decir, como un balón de rugby —tal como se ha representado en la figura (5-4). En tal caso, el cono del cuerpo es exterior al cono del espacio. Cuando el momento de inercia respecto al eje de simetría sea el mayor, el elipsoide es achatado y el cono del cuerpo rueda sobre el interior del cono del espacio. En uno y otro caso, la descripción física del movimiento es que la dirección de ω tiene un movimiento de *precesión* en el tiempo respecto al eje de simetría del cuerpo.

* De aquí el enunciado que parece un trabalenguas: La polhodia rueda sin deslizar sobre la herpolhodia que está en el plano invariable.

† Véase en particular, Webster, *Dynamics of Particles and Rigid Bodies*, Macmillan, *Theoretical Mechanics-Dynamics of a Rigid Body*, Routh, *Advanced Rigid Dynamics* y Gray, *Treatise on Gyrostatics and Rotational Motion*. Entre las múltiples propiedades de la construcción de Poincot que se dan en estas referencias se cuenta el hecho curioso de que la herpolhodia tiene siempre su concavidad hacia el origen. De aquí su nombre, que significa «en forma de serpiente».

La construcción de Poinsot indica cómo se mueve ω , pero no da información alguna acerca de cómo se ve moverse el vector \mathbf{L} en el sistema de ejes del cuerpo. Sin embargo, disponemos de otra descripción geométrica para describir el camino del vector \mathbf{L} visto por un observador situado en el sistema de ejes principales. Las ecuaciones (5-23) y (5-24) implican que en este sistema la energía cinética está relacionada con las componentes del momento cinético a través de la ecuación

$$T = \frac{L_1^2}{2I_1} + \frac{L_2^2}{2I_2} + \frac{L_3^2}{2I_3}. \quad (5-45)$$

Como T es constante, esta relación define un elipsoide* también fijo en el sistema de ejes del cuerpo pero que *no* es el elipsoide de inercia. Al mismo tiempo, la conservación del módulo del momento cinético significa que \mathbf{L} debe moverse en una esfera definida por

$$L^2 = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2. \quad (5-46)$$

Para condiciones iniciales —energía cinética y momento cinético— dadas, el camino de \mathbf{L} en el sistema del cuerpo viene dado por la intersección del elipsoide (5-45) con la esfera (5-46). Podemos ver que dicha intersección existe siempre, escribiendo la ecuación (5-45) en una forma que utiliza el convenio de suma:

$$1 = \frac{L_i^2}{a_i^2},$$

donde

$$a_i = \sqrt{2TI_i}$$

son los semiejes principales del elipsoide. Se deduce que para todo valor de j

$$a_j^2 = L_i^2 \frac{a_j^2}{a_i^2}.$$

Comparando con la ecuación (5-46) vemos que $a_j^2 > L^2$ si a_j es el menor de los semiejes principales y que $a_j^2 < L^2$ si a_j es el mayor de ellos. Podemos denotar los ejes de manera que

$$I_3 > I_2 > I_1,$$

* A este elipsoide se le da a veces el nombre de elipsoide de *Binet*.

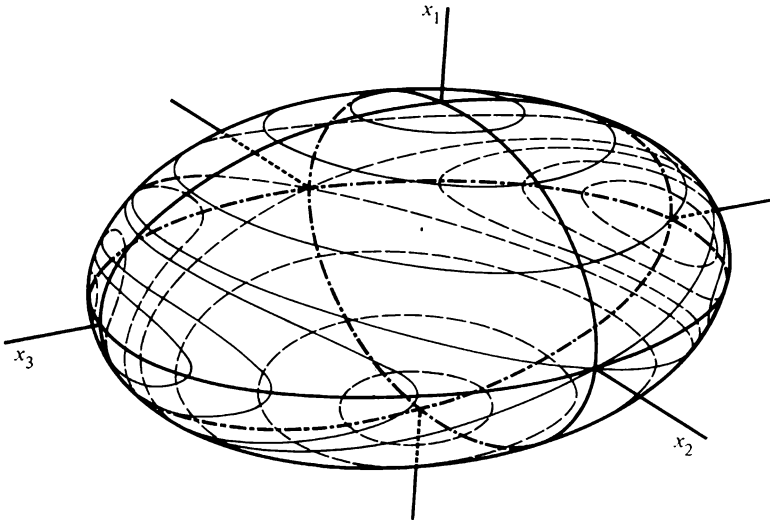


FIGURA 5-5

Elipsoide de la energía cinética, o de Binet, fijo en el sistema de ejes del cuerpo y algunos caminos posibles del vector \mathbf{L} en su superficie.

con lo que las desigualdades podrán resumirse mediante las relaciones

$$\sqrt{2TI_1} < L < \sqrt{2TI_3}.$$

Por tanto, la esfera del momento cinético, cuyo radio es L , cortará siempre al elipsoide de la energía cinética. En la figura 5-5 se ilustra el aspecto del elipsoide de la energía cinética y algunos caminos posibles de \mathbf{L} por su superficie.

Con ayuda de esta construcción geométrica podemos decir algo acerca de los movimientos posibles de un cuerpo asimétrico libre. Es fácil ver que la rotación estacionaria sólo es posible en torno a uno de los ejes principales. Según las ecuaciones de Euler (5-40), las componentes de ω sólo podrán ser constantes si

$$\omega_1\omega_2(I_1 - I_2) = \omega_2\omega_3(I_2 - I_3) = \omega_3\omega_1(I_3 - I_1) = 0,$$

lo cual requiere que sean nulas al menos dos de las componentes ω_i , es decir, que ω esté dirigido según uno de los ejes principales. Sin embargo, no todos esos movimientos posibles son estables —es decir, que no se alejen mucho del eje principal ante una perturbación pequeña. Por ejemplo, el movimiento estacionario alrededor del eje x_3 tendrá

lugar cuando $L^2 = 2TI_3$. Cuando se produzcan ligeras desviaciones respecto a esta condición, el radio de la esfera del momento cinético sólo será ligeramente inferior a este valor y la intersección con el elipsoide de la energía cinética será una pequeña circunferencia alrededor del eje x_3 . El movimiento será, pues, estable; el vector \mathbf{L} no se apartará mucho del eje. Análogamente, cuando se perturbe el movimiento alrededor del eje menor I_1 , el radio de la esfera del momento cinético será ligeramente mayor que el semieje más corto. La intersección será también una figura cerrada alrededor del eje principal y el movimiento será estable. En cambio, el movimiento alrededor del eje intermedio es *inestable* ya que, para pequeñas desviaciones, las intersecciones con la esfera no son pequeñas curvas cerradas, sino que se extienden sobre el elipsoide. Este comportamiento puede comprenderse bien si nos damos cuenta de que en el eje intermedio el radio de curvatura del elipsoide en una dirección es mayor que el de la esfera de contacto y menor en la dirección perpendicular a aquélla. En los otros dos ejes, los radios de curvatura son ambos mayores o ambos menores que el radio de la esfera, en todas direcciones. Estas conclusiones acerca de la estabilidad del movimiento del cuerpo libre se conocen desde hace mucho tiempo, pero recientes aplicaciones, p. ej., a la estabilidad de las naves espaciales giratorias, las han sacado de la oscuridad de las viejas monografías de Dinámica del cuerpo rígido.*

En el caso de un cuerpo rígido simétrico, no es difícil obtener la solución analítica para el movimiento libre de fuerzas y se puede confirmar directamente el movimiento de precesión que predice la construcción de Poincaré. Tomemos el eje de simetría como eje principal z , con lo que $I_1 = I_2$. Las ecuaciones de Euler (5-40) se reducen entonces a

$$\begin{aligned} I_1 \dot{\omega}_1 &= (I_1 - I_3) \omega_3 \omega_2, \\ I_1 \dot{\omega}_2 &= -(I_1 - I_3) \omega_3 \omega_1, \\ I_3 \dot{\omega}_3 &= 0. \end{aligned} \quad (5-47)$$

La última de estas ecuaciones nos dice que ω_3 es constante y por tanto la podremos considerar como una de las condiciones iniciales conocidas del problema. Las otras dos ecuaciones las podremos escribir

$$\dot{\omega}_1 = -\Omega \omega_2, \quad \dot{\omega}_2 = \Omega \omega_1, \quad (5-48)$$

* Cuando haya mecanismos disipativos, habrá que modificar estos razonamientos acerca de la estabilidad. Es fácil ver que un cuerpo que tenga L constante pero T lentamente decreciente sólo tiene rotación estable alrededor del eje principal correspondiente al mayor momento de inercia. La energía cinética de rotación en torno al eje principal i -ésimo para un L dado es $T = L^2/2I_i$, la cual es mínima para el eje de I_i máximo. Si se pone un cuerpo en rotación alrededor de cualquier otro eje principal, el efecto de una energía cinética lentamente decreciente será hacer que el vector velocidad varíe hasta que la rotación tenga lugar alrededor del eje que requiera el menor valor de T para el L dado. Dichos efectos disipativos están presentes en las naves espaciales a causa de la flexión de diversos miembros en el curso del movimiento, especialmente de las largas astas que llevan muchas de ellas. Estos hechos los aprendieron por experiencia los primeros diseñadores de naves espaciales.

donde Ω es una frecuencia angular

$$\Omega = \frac{I_3 - I_1}{I_1} \omega_3. \quad (5-49)$$

La eliminación de ω_2 entre las dos ecuaciones (5-48) conduce a la ecuación diferencial característica del movimiento armónico simple

$$\ddot{\omega}_1 = -\Omega^2 \omega_1,$$

cuya solución es

$$\omega_1 = A \cos \Omega t.$$

La solución correspondiente de ω_2 se puede hallar sustituyendo esta expresión de ω_1 en la primera de las ecuaciones (5-48):

$$\omega_2 = A \operatorname{sen} \Omega t.$$

Las soluciones de ω_1 y ω_2 muestran que el vector $\omega_1 \mathbf{i} + \omega_2 \mathbf{j}$ tiene módulo constante y gira uniformemente en torno al eje z del cuerpo con la frecuencia angular Ω (cfr. fig. 5-6). Por tanto, la velocidad angular ω también tendrá módulo constante y efectúa una *precesión* en torno al eje z con la misma frecuencia, exactamente tal como precedía la construcción de Poinsoot.* Debemos recordar que la precesión que hemos descrito ahora es relativa a los ejes del cuerpo los cuales, a su vez, están girando en el espacio con la frecuencia ω que es mayor. En la figura 5-49 vemos que cuanto más próximo sea I_1 a I_3 , menor será la frecuencia de precesión Ω comparada con la frecuencia de rotación ω . Las constantes A (amplitud de la precesión) y ω_3 se pueden evaluar en función de las constantes de movimiento más usuales, cuales son la energía cinética y el módulo del momento cinético. Estas magnitudes pueden escribirse en función de A y ω_3 de la manera siguiente:

$$T = \frac{1}{2} I_1 A^2 + \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2,$$

$$L^2 = I_1^2 A^2 + I_3^2 \omega_3^2,$$

* La precesión puede ponerse de manifiesto de otra manera, definiendo un vector Ω soportado por el eje z y cuyo módulo sea el dado por (5-49). Las ecuaciones (5-47) equivalen entonces en esencia a la ecuación vectorial

$$\dot{\omega} = \omega \times \Omega,$$

que revela de manera inmediata la precesión de ω con la frecuencia Ω .

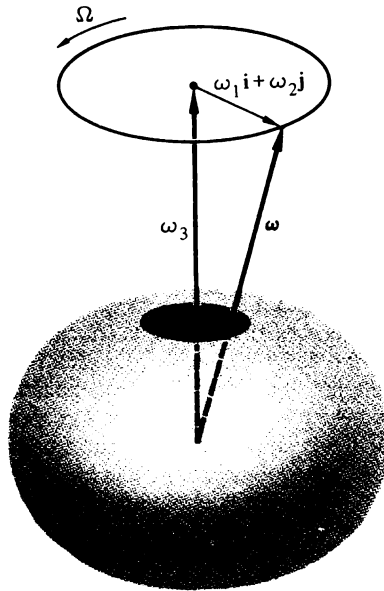


FIGURA 5-6

Precesión de la velocidad angular alrededor del eje de simetría en el movimiento exento de fuerzas de un cuerpo rígido simétrico.

y de estas relaciones podemos despejar A y ω_3 en función de T y L .

Podríamos esperar que el eje de rotación de la Tierra presente esta precesión, ya que los momentos exteriores que se ejercen sobre la Tierra son tan débiles que podemos considerar el movimiento de *rotación* como el de un cuerpo libre. La Tierra es simétrica respecto al eje polar y ligeramente achatada por los polos, por lo que I_1 es menos que I_3 . Numéricamente, el cociente de los momentos es tal que

$$\frac{I_3 - I_1}{I_1} = 0,00327$$

y la magnitud de la frecuencia angular de precesión debería ser

$$\Omega = \frac{\omega_3}{306}$$

Como ω_3 es prácticamente igual al módulo de ω , este resultado predice un periodo de precesión de 306 días, o sea unos 10 meses. Si alguna circunstancia perturbara el eje de rota-

ción respecto al eje de figura de la Tierra, podríamos esperar que el eje de rotación efectuara una precesión alrededor del eje de figura (es decir, alrededor del Polo Norte) una vez cada diez meses. Prácticamente, dicho movimiento presentaría una variación periódica de la latitud aparente de puntos de la superficie terrestre. Medidas de precisión de la latitud de una red de localidades en todo el Mundo, realizadas desde hace un siglo, han demostrado que el eje de rotación se mueve, efectivamente, en torno al Polo con una amplitud del orden de pocas décimas de segundo de latitud (unos 10 m). Pero la situación es mucho más complicada (e interesante) que lo que nos puede sugerir el sencillo análisis antes hecho. Las desviaciones entre los ejes de figura y de rotación son muy irregulares, por lo que es más un «bamboleo» que una precesión. Un análisis detenido de la frecuencia ha demostrado la existencia de un período anual en el movimiento, que se cree se debe al ciclo anual de estaciones y al correspondiente desplazamiento medio de las masas atmosféricas en torno al Globo. Pero además hay una fuerte componente de frecuencia centrada en un período de unos 420 días, llamada *bamboleo de Chandler*. La idea actual es que este movimiento representa la precesión del cuerpo libre antes deducida. Se cree que la diferencia del período se debe a que la Tierra no es un cuerpo rígido sino que es un tanto elástico. De hecho, una parte de la Tierra sigue junto con la variación del eje de rotación, lo cual tiene por efecto reducir la diferencia entre los momentos de inercia principales y con ello aumenta el período. (Por ejemplo, si la Tierra fuese totalmente fluida el eje de figura se ajustaría instantáneamente al eje de rotación y no podría haber precesión.)

Aún hay otras características poco claras del bamboleo observado. El análisis de la frecuencia indica que hay presentes fuertes efectos amortiguadores, que se cree se deben al rozamiento en las mareas o a efectos disipativos en el acoplamiento entre la corteza y el cuerpo. El período de amortiguamiento debería ser del orden de 10-20 años. Ahora bien, no se ha observado dicha disminución de la amplitud del bamboleo de Chandler; debe haber algún tipo de excitación aleatoria que mantenga el bamboleo. Se han sugerido diversas fuentes de excitación. La especulación actual apunta hacia terremotos profundos, o a los fenómenos en la corteza que subyacen en ellos, que darían lugar a cambios discontinuos del tensor de inercia suficientemente grandes para mantener excitada la precesión de cuerpo libre.*

5-7 PEONZA SIMÉTRICA PESADA CON UN PUNTO FIJO

Como ejemplo más complicado de la aplicación de los métodos de la Dinámica del cuerpo rígido, vamos a considerar el movimiento de un cuerpo simétrico en un campo gravitatorio uniforme cuando un punto del eje de simetría esté fijo en el espacio. Una amplia variedad de sistemas físicos, desde el trompo con que juega un niño hasta los complicados instrumentos giroscópicos de navegación, vienen aproximados por el sistema mencionado

* La precesión libre del eje de la Tierra no debe confundirse con su precesión lenta alrededor de la normal a la eclíptica. La precesión *astronómica* de los equinoccios se debe a los momentos de las fuerzas gravitatorias que ejercen el Sol y la Luna, los cuales se han considerado despreciables en el estudio anterior. Que la hipótesis está justificada lo demuestra el largo período de la precesión de los equinoccios (26 000 años) comparado con un período de aproximadamente un año en el caso de la precesión exenta de fuerzas. Más adelante estudiaremos la precesión astronómica.

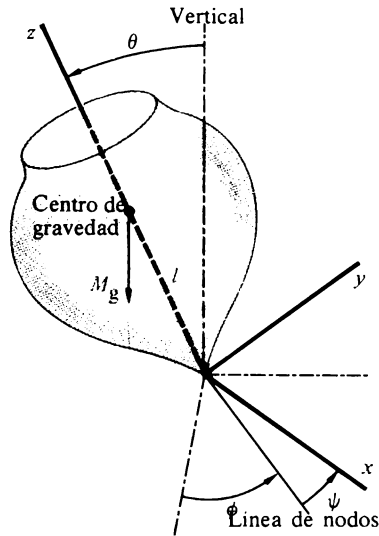


FIGURA 5-7

Ángulos de Euler que especifican la orientación de una peonza simétrica.

y al que daremos el nombre de *peonza simétrica pesada*. Tanto por sus aplicaciones prácticas cuanto como ilustración de muchas de las técnicas desarrolladas anteriormente, el movimiento de la peonza simétrica pesada merece lo exponamos detalladamente.

El eje de simetría es, desde luego, uno de los ejes principales y lo tomaremos como eje z del sistema de coordenadas solidario al cuerpo.* Como hay un punto fijo, la configuración de la peonza quedará determinada por los tres ángulos de Euler: θ da la inclinación del eje z respecto a la vertical, ϕ mide el acimut de la peonza respecto a la vertical, mientras que ψ es el ángulo de rotación de la peonza respecto a su propio eje z (cfr. fig. 5-7). La distancia del centro de gravedad (que está situado sobre el eje de simetría) al punto fijo la representaremos por l .

Para obtener una solución del movimiento de la peonza vamos a utilizar el método de Lagrange en vez de las ecuaciones de Euler. Como el cuerpo es simétrico, podemos expresar la energía cinética en la forma

$$T = \frac{1}{2} I_1 (\omega_1^2 + \omega_2^2) + \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2,$$

* En este caso sólo hay que identificar los ejes del cuerpo; será, pues, conveniente llamarles ejes xyz , sin peligro de confundirlos con los ejes del espacio.

o bien, en función de los ángulos de Euler y utilizando la ecuación (4-125)

$$T = \frac{I_1}{2}(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \text{sen}^2 \theta) + \frac{I_3}{2}(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2, \quad (5-50)$$

donde han desaparecido los términos en los que figuran ω_1^2 y ω_2^2 . Conocemos un teorema elemental según el cual en un campo gravitatorio constante la energía potencial es la misma que se tendría si el cuerpo estuviera concentrado en su centro de masa, pero vamos a dar aquí una demostración formal del mismo. La energía potencial del cuerpo es la suma extendida a todas las partículas:

$$V = -m_i \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{g}$$

donde \mathbf{g} es el vector constante que representa la aceleración de la gravedad. Según la ecuación (1-21) que define al centro de masa, esto es equivalente a

$$V = -MR \cdot \mathbf{g}, \quad (5-51)$$

lo que demuestra el teorema. En función de los ángulos de Euler,

$$V = Mgl \cos \theta, \quad (5-51')$$

con lo que la lagrangiana será

$$L = \frac{I_1}{2}(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \text{sen}^2 \theta) + \frac{I_3}{2}(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 - Mgl \cos \theta. \quad (5-52)$$

Notemos que ϕ y ψ no figuran explícitamente en la lagrangiana; serán, pues, coordenadas cíclicas, lo que indica que las cantidades de movimiento generalizadas correspondientes se mantienen constantes en el tiempo. Ahora bien, hemos visto que la cantidad de movimiento conjugada a un ángulo de rotación es la componente del momento cinético resultante correspondiente al eje de rotación, que para ϕ es el eje vertical y para ψ es el eje z del cuerpo. Partiendo de principios elementales, podemos demostrar que dichas componentes del momento cinético son constantes en el tiempo. Como el momento de la fuerza de gravedad está dirigido según la línea de nodos, no habrá componentes del momento según los ejes vertical y z , ya que por definición estos ejes son perpendiculares a la línea de nodos. Por tanto, las componentes del momento cinético según estos dos ejes deben mantenerse constantes en el tiempo.

Tenemos, pues, dos integrales primeras inmediatas del movimiento:

$$p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = I_3(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) = I_3 \omega_3 = I_1 a \quad (5-53)$$

y

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = (I_1 \operatorname{sen}^2 \theta + I_3 \cos^2 \theta) \dot{\phi} + I_3 \dot{\psi} \cos \theta = I_1 b. \quad (5-54)$$

Aquí, las dos constantes del movimiento se expresan en función de dos nuevas constantes a y b . Aún tenemos otra integral primera; como el sistema es conservativo, la energía total E se mantiene constante en el tiempo:

$$E = T + V = \frac{I_1}{2} (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \operatorname{sen}^2 \theta) + \frac{I_3}{2} \omega_3^2 + Mgl \cos \theta. \quad (5-55)$$

Para resolver el problema sólo necesitamos tres cuadraturas más, las cuales se pueden obtener fácilmente de estas tres integrales primeras sin utilizar directamente las ecuaciones de Lagrange. Según la ecuación (5-53), ψ viene dado en función de ϕ por

$$I_3 \dot{\psi} = I_1 a - I_3 \dot{\phi} \cos \theta, \quad (5-56)$$

y podemos sustituir este resultado en (5-54) para eliminar ψ :

$$I_1 \dot{\phi} \operatorname{sen}^2 \theta + I_1 a \cos \theta = I_1 b,$$

o sea

$$\dot{\phi} = \frac{b - a \cos \theta}{\operatorname{sen}^2 \theta}. \quad (5-57)$$

Así pues, si se conociera θ en función del tiempo, podríamos integrar la ecuación (5-57) para que nos diera la dependencia temporal de ϕ . Sustituyendo la ecuación (5-57) en la (5-56) obtenemos una expresión para $\dot{\psi}$:

$$\dot{\psi} = \frac{I_1 a}{I_3} - \cos \theta \frac{b - a \cos \theta}{\operatorname{sen}^2 \theta}. \quad (5-58)$$

que nos da ψ si conocemos θ . Por último, podemos utilizar las ecuaciones (5-57) y (5-58) para eliminar $\dot{\phi}$ y $\dot{\psi}$ en la ecuación de la energía, resultando una ecuación diferencial en la que sólo interviene θ . Notemos ante todo que la ecuación (5-53) nos dice que ω_3 es constante en el tiempo e igual a $(I_1/I_3)a$. Por tanto, $E - I_3 \omega_3^2/2$ será una constante del movimiento que designaremos por E' . Echando mano de la ecuación (5-57) podremos, pues, escribir la ecuación de la energía en la forma

$$E' = \frac{I_1 \dot{\theta}^2}{2} + \frac{I_1}{2} \frac{(b - a \cos \theta)^2}{\operatorname{sen}^2 \theta} + Mgl \cos \theta. \quad (5-59)$$

La ecuación (5-59) tiene la forma de un problema unidimensional equivalente de variable θ , estando dado el potencial efectivo $V'(\theta)$ por

$$V'(\theta) = Mgl \cos \theta + \frac{I_1}{2} \left(\frac{b - a \cos \theta}{\sin \theta} \right)^2. \quad (5-60)$$

Este problema unidimensional lo vamos a utilizar para estudiar el movimiento en θ de manera muy parecida a lo que hicimos en § 3-3 al describir el movimiento radial en el problema de la fuerza central. Sin embargo, es más conveniente efectuar el cambio de variable $u = \cos \theta$ y escribir la ecuación (5-59) en la forma

$$E'(1 - u^2) = \frac{I_1}{2} \dot{u}^2 + \frac{I_1}{2} (b - au)^2 + Mgl u(1 - u^2).$$

Introduciendo dos nuevas constantes

$$\alpha = \frac{2E'}{I_1}, \quad \beta = \frac{2Mgl}{I_1} \quad (5-61)$$

y reagrupando términos, queda

$$\dot{u}^2 = (1 - u^2)(\alpha - \beta u) - (b - au)^2. \quad (5-62)$$

que puede reducirse, de manera inmediata, a una cuadratura:

$$t = \int_{u(0)}^{u(t)} \frac{du}{\sqrt{(1 - u^2)(\alpha - \beta u) - (b - au)^2}}. \quad (5-63)$$

Con este resultado y las ecuaciones (5-57) y (5-58), ϕ y ψ se pueden también reducir a cuadraturas. Ahora bien, el polinomio del radical es una cúbica y tendremos que habérnoslas con integrales elípticas. En la literatura se encuentran amplios estudios de estas soluciones en los que intervienen funciones elípticas,* pero, al igual que en el caso del movimiento libre de fuerzas, la Física tiende a quedar enmascarada por la profusión de Matemáticas. Afortunadamente, la naturaleza general del movimiento puede descubrirse sin necesidad de efectuar realmente las integraciones.

Llamemos $f(u)$ al segundo miembro de la ecuación (5-62). Las raíces de este polinomio de tercer grado dan los ángulos a los cuales θ cambia de signo, es decir, los «ángulos

* Véase, p. ej., el tratado de F. Klein y A. Sommerfeld; Whittaker, *Analytical Dynamics*; o el tratamiento detallado que hay en Macmillan, *Dynamics of Rigid Bodies*.

de inversión» en θ . Para valores grandes de u , el término predominante de $f(u)$ es βu^3 . Como β (cfr. ec. 5-61) es siempre mayor que cero, $f(u)$ será positiva para valores positivos de u grandes y negativa para valores negativos de u de gran valor absoluto. En los puntos $u = \pm 1$, $f(u)$ se hace igual a $-(b \mp a)^2$ y será por tanto siempre negativa, salvo en el caso infrecuente en que $u = \pm 1$ sea una raíz (correspondiente a una peonza vertical). Por tanto, al menos una de las raíces debe hallarse en la región $u > 1$, región que no corresponde a ángulos reales. El movimiento físico de la peonza sólo puede tener lugar cuando u^2 sea positiva en algún lugar del intervalo comprendido entre $u = -1$ y $u = +1$, es decir, θ comprendido entre 0 y $+\pi$. Luego, sacamos la conclusión de que, en el caso de una peonza, real, $f(u)$ tendrá dos raíces, u_1 y u_2 , entre -1 y $+1$ (cfr. fig. 5-8); y que la peonza se mueve de manera que $\cos \theta$ se mantenga siempre entre estas dos raíces. La situación de estas raíces y el comportamiento de ϕ y ψ para valores de θ entre ellas, proporcionan una gran información cualitativa acerca del movimiento de la peonza.

Es corriente representar el movimiento de la peonza trazando la curva que sigue la intersección del eje de figura con una superficie esférica de radio unidad centrada en el punto fijo. A esta curva la llamaremos *lugar geométrico* del eje de figura. Las coordenadas polares en el lugar geométrico coinciden con los ángulos de Euler θ , ϕ del sistema del cuerpo. De lo tratado en el párrafo anterior vemos que el lugar geométrico está comprendido entre los dos círculos límite de colatitudes $\theta_1 = \arccos u_1$ y $\theta_2 = \arccos u_2$, anulándose θ en ambos círculos. La forma de la curva lugar geométrico está determinada en gran manera por el valor de la raíz de $b - au$, la cual representaremos por u' :

$$u' = \frac{b}{a}. \quad (5-64)$$

Supongamos, por ejemplo, que las condiciones iniciales sean tales que u' sea mayor que u_2 . Entonces, según la ecuación (5-57), $\dot{\phi}$ tendrá siempre el mismo signo para los ángulos de inclinación permitidos entre θ_1 y θ_2 . Luego el lugar geométrico del eje de figura debe ser tangente a los círculos límite de tal manera que $\dot{\phi}$ tenga el mismo sentido en θ_1 y en θ_2 , según se indica en la figura 5-9(a). Como, en consecuencia, ϕ crece secularmente en uno u otro sentido, podemos decir que el eje de la peonza efectúa una *precesión* alrededor del eje vertical. Pero no se trata de la precesión regular que encontrábamos en el movimiento libre de fuerzas ya que, a medida que el eje de figura gira, cabecea arriba y abajo entre los án-

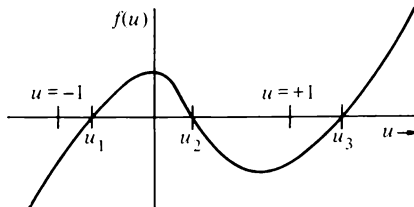


FIGURA 5-8

Situación de los ángulos de inversión de θ en el movimiento de una peonza simétrica pesada.

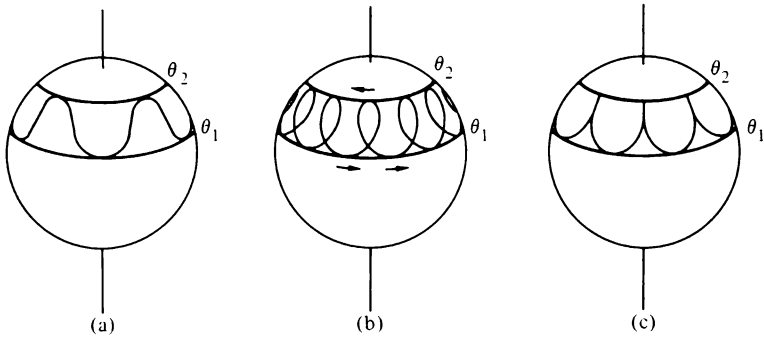


FIGURA 5-9

Formas posibles del lugar geométrico del eje de figura sobre la esfera unidad.

gulos límite θ_1 y θ_2 —durante la precesión, la peonza efectúa una *nutación*.

Si b/a fuese tal que u' se hallara comprendida entre u_1 y u_2 , el sentido de la precesión sería diferente en los dos círculos límite y el lugar geométrico del eje de figura presenta rizos, según puede verse en la figura 5-9(b). Sin embargo, el valor medio de $\dot{\phi}$ no se anula, por lo que siempre habrá una precesión neta en uno u otro sentido. También puede suceder que u' coincida con una de las raíces de $f(u)$. En los círculos límites correspondientes deberán, entonces, anularse $\dot{\theta}$ y $\dot{\phi}$, lo cual exige que el lugar geométrico tenga cúspides en el círculo, según se indica en la figura 5-9(c).

Este último caso no es tan excepcional como pueda parecer; corresponde a las condiciones iniciales que suelen estipularse en los tratamientos elementales de peonzas: se supone que inicialmente la peonza simétrica gira en torno a su eje de figura, el cual está fijo en una cierta dirección θ_0 . En el instante $t = 0$ se suelta el eje de figura y el problema consiste en describir el movimiento subsiguiente. Dichas condiciones iniciales son, explícitamente, que en $t = 0$, $\theta = \theta_0$ y $\dot{\theta} = \dot{\phi} = 0$. El ángulo θ_0 debe por tanto ser una de las raíces de $f(u)$, de hecho corresponde al círculo superior:

$$u_0 = u_2 = u' = \frac{b}{a}. \quad (5.65)$$

Para la demostración notemos que, con estas condiciones iniciales, E' es igual a $Mgl \cos \theta_0$ y que los términos de E' derivados de la energía cinética de la peonza no pueden ser nunca negativos. Luego cuando θ y $\dot{\phi}$ comiencen a apartarse de sus valores iniciales nulos, la energía sólo podrá conservarse a expensas de una disminución de $Mgl \cos \theta$, es decir, mediante un aumento de θ . El θ_0 inicial será, pues, igual θ_2 que es el valor mínimo que puede tener θ . Cuando soltemos la peonza de esta manera, *siempre empezará cayendo* y seguirá así hasta alcanzar el otro ángulo límite θ_1 , realizando entre tanto una precesión. Después, el eje de figura subirá de nuevo hasta θ_2 , siendo el movimiento completo el representado en la figura 5-9(c).

Podemos dar algunas predicciones referentes al movimiento de la peonza sometida a estas condiciones iniciales de θ y $\dot{\phi}$ nulas, con tal que supongamos que la energía cinética inicial de rotación sea grande frente a la variación máxima de energía potencial:

$$\frac{1}{2}I_3\omega_3^2 \gg 2Mgl. \quad (5-66)$$

Los efectos de los momentos de las fuerzas gravitatorias, cuales son la precesión y la nutación que la acompaña, sólo serán entonces perturbaciones pequeñas de la rotación predominante de la peonza en torno a su eje de figura. En esta situación, diremos que se trata de una «peonza rápida». Con esta hipótesis, podemos obtener expresiones para la extensión de la nutación, la frecuencia de nutación y la frecuencia media de precesión.

La extensión de la nutación para estas condiciones iniciales viene dada por $u_1 - u_0$, donde u_1 es la otra raíz física de $f(u)$. La condición inicial $E' = Mgl \cos \theta_0$ es equivalente a la igualdad

$$\alpha = \beta u_0.$$

Con esta relación y las condiciones de las ecuaciones (5-65), podemos escribir $f(u)$ de manera más sencilla en la forma

$$f(u) = (u_0 - u)\{\beta(1 - u^2) - a^2(u_0 - u)\}. \quad (5-67)$$

Las raíces de $f(u)$ distintas de la u_0 vienen dadas por las raíces de la expresión cuadrática entre llaves y por tanto, la raíz buscada u_1 satisface a la ecuación

$$(1 - u_1^2) - \frac{a^2}{\beta}(u_0 - u_1) = 0. \quad (5-68)$$

Representando $u_0 - u$ por x y $u_0 - u_1$ por x_1 , podremos poner la ecuación (5-68) en la forma

$$x_1^2 + px_1 - q = 0,$$

donde

$$p = \frac{a^2}{\beta} - 2 \cos \theta_0, \quad q = \text{sen}^2 \theta_0. \quad (5-69)$$

La condición de peonza «rápida» (ec. 5-66) implica que p sea mucho mayor que q . Podemos ver esto escribiendo el cociente a^2/β en la forma

$$\frac{a^2}{\beta} = \left(\frac{I_3}{I_1}\right) \frac{I_3\omega_3^2}{2Mgl}.$$

Salvo en el caso en que $I_3 \ll I_1$ (que correspondería a una peonza en forma de puro), el cociente es mucho mayor que la unidad y $p \gg q$. Hasta el primer orden de la pequeña cantidad q/p , la única raíz físicamente realizable de la ecuación (5-68) será, pues,

$$x_1 = \frac{q}{p}.$$

Despreciando $2 \cos \theta_0$ frente a a^2/β podemos escribir este resultado en la forma

$$x_1 = \frac{\beta \operatorname{sen}^2 \theta_0}{a^2} = \frac{I_1}{I_3} \frac{2Mgl}{I_3 \omega_3^2} \operatorname{sen}^2 \theta_0. \quad (5-70)$$

Así pues, la extensión de la nutación, medida por $x_1 = u_0 - u_1$, disminuye de igual manera que $1/\omega_3^2$; cuanto más rápidamente gire la peonza menor será la nutación.

Análogamente, es fácil hallar la *frecuencia* de nutación de una peonza «rápida». Como la nutación es pequeña, podremos sustituir el término $(1 - u^2)$ de la ecuación (5-67) por su valor inicial $\operatorname{sen}^2 \theta_0$. Entonces, con ayuda de la ecuación (5-70) podremos escribir la ecuación (5-67) en la forma

$$f(u) = \dot{x}^2 = a^2 x(x_1 - x).$$

Si desplazamos el origen de x al punto medio de su intervalo mediante el cambio de variable

$$y = x - \frac{x_1}{2},$$

la ecuación diferencial queda en la forma

$$\dot{y}^2 = a^2 \left(\frac{x_1^2}{4} - y^2 \right),$$

que, al volverla a derivar, se reduce a la conocida ecuación del movimiento armónico simple

$$\ddot{y} = -a^2 y.$$

En vista de la condición inicial $x = 0$ en $t = 0$, la solución completa es

$$x = \frac{x_1}{2} (1 - \cos at), \quad (5-71)$$

donde x_1 viene dada por (5-70). La frecuencia angular de nutación del eje de figura entre θ_0 y θ_1 es, pues,

$$a = \frac{I_3}{I_1} \omega_3, \quad (5-72)$$

que es tanto *mayor* cuanto más rápido sea el giro inicial de la peonza.

Por último, la velocidad angular de precesión viene dada, según (5-57), por

$$\dot{\phi} = \frac{a(u_0 - u)}{\text{sen}^2 \theta} \approx \frac{ax}{\text{sen}^2 \theta_0},$$

o bien, sustituyendo las ecuaciones (5-72) y (5-70),

$$\dot{\phi} = \frac{\beta}{2a} (1 - \cos at). \quad (5-73)$$

Por tanto, la velocidad de precesión no es uniforme sino que varía armónicamente con el tiempo, con igual frecuencia que la nutación. En cambio, la frecuencia de precesión *media* es

$$\bar{\phi} = \frac{\beta}{2a} = \frac{Mgl}{I_3 \omega_3}, \quad (5-74)$$

que nos indica que la velocidad de precesión es tanto menor cuanto mayor sea la velocidad de rotación inicial de la peonza.

Estamos ya en condiciones de presentar una imagen completa del movimiento de la peonza rápida para el caso en que el eje de figura tenga inicialmente velocidad nula. Inmediatamente después de soltar el eje de figura, el movimiento inicial de la peonza es siempre caer bajo la acción de la gravedad. Pero, al caer, la peonza adquiere una velocidad de precesión directamente proporcional a la extensión de su caída, lo cual hace que el eje de figura comience a moverse lateralmente en torno a la vertical. La caída inicial da lugar a una nutación periódica del eje de figura que se añade a la precesión. Al girar la peonza más deprisa cada vez inicialmente, la extensión de la nutación disminuye rápidamente, aun cuando aumenta la frecuencia de nutación, mientras que al mismo tiempo se ralentiza la precesión en torno a la vertical. En la práctica, la nutación de una peonza suficientemente rápida se amortigua a causa del rozamiento en el pivote y llega a ser inobservable. Entonces, la peonza *parece* tener una precesión uniforme en torno al eje vertical. Como esta precesión sólo es regular en apariencia, Klein y Sommerfeld le han dado el nombre de precesión *pseudorregular*. En la mayoría de tratamientos elementales de la precesión se desprecia el fenómeno de nutación. En consecuencia, las deducciones parecen conducir a la conclusión paradójica de que al soltar la peonza, ésta inicia *inmediatamente* una precesión uniforme; movimiento que es *normal* a las fuerzas de gravedad las cuales son la últi-

ma causa de la precesión. Nuestro tratamiento de la precesión pseudorregular sirve para resolver la paradoja; la precesión crece continuamente a partir del reposo sin ninguna aceleración infinita y la tendencia inicial de la peonza es moverse en la dirección de las fuerzas de gravedad.

Interesa determinar exactamente qué condiciones iniciales darán lugar a una verdadera precesión regular. En tal caso, el ángulo θ permanece constantemente igual a su valor inicial θ_0 , lo cual significa que $\theta_1 = \theta_2 = \theta_0$ o, dicho de otro modo, que $f(u)$ debe tener una raíz doble en u_0 (cfr. fig. 5-10), o sea

$$f(u) = 0, \quad \frac{df}{du} = 0; \quad u = u_0.$$

Según la ecuación (5-62), la primera de estas condiciones implica

$$(\alpha - \beta u_0) = \frac{(b - a u_0)^2}{1 - u_0^2}; \quad (5-75)$$

la segunda corresponde a

$$\frac{\beta}{2} = \frac{a(b - a u_0)}{1 - u_0^2} - u_0 \frac{(\alpha - \beta u_0)}{1 - u_0^2}. \quad (5-76)$$

La sustitución de la ecuación (5-75) en la (5-76) nos lleva, en vista de la ecuación (5-57), a una ecuación cuadrática en ϕ :

$$\frac{\beta}{2} = a\dot{\phi} - \dot{\phi}^2 \cos \theta_0. \quad (5-76')$$

Con las definiciones de β (ec. 5-61) y de a (ec. 5-53), podemos escribir esto de otras dos maneras, según que expresemos a en función de ω_3 o de las ψ y ϕ (constantes):

$$Mgl = \dot{\phi}(I_3 \omega_3 - I_1 \dot{\phi} \cos \theta_0), \quad (5-77a)$$

o bien

$$Mgl = \dot{\phi}(I_3 \dot{\psi} - (I_1 - I_3) \dot{\phi} \cos \theta_0). \quad (5-77b)$$

Las condiciones iniciales del problema de la peonza pesada exigen especificar θ , ϕ , ψ , $\dot{\theta}$, $\dot{\phi}$ y además ψ o ω_3 en el instante $t = 0$. Como son cíclicas, los valores iniciales de θ y ψ tienen muy poca importancia y podremos, en general, elegir valores cualesquiera para cada una de las otras cuatro. Pero si, además, exigimos que el movimiento del eje de figura

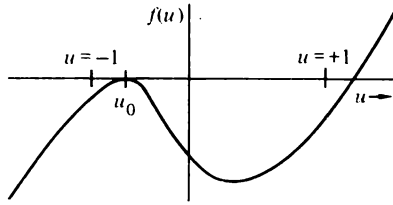


FIGURA 5-10
Aspecto de $f(u)$ en el caso de precesión regular.

sea una precesión uniforme sin nutación, nuestra elección de estos cuatro valores iniciales ya no está totalmente exento de restricciones, sino que deberán satisfacer una u otra de las ecuaciones (5-77). Para $\theta = 0$, podremos seguir eligiendo los valores iniciales de θ y ψ_3 en forma casi arbitraria, pero entonces estará determinado el valor de ϕ . Utilizamos la expresión «casi arbitraria» porque las ecuaciones (5-77) son cuadráticas y para que $\dot{\phi}$ sea real, debe ser positivo el discriminante de la ecuación (5-77a):

$$I_3^2 \omega_3^2 > 4Mgl \cos \theta_0. \tag{5-78}$$

Para el caso $\theta_0 > \pi/2$ (peonza montada de manera que su centro de masa esté por debajo del punto fijo) cualquier valor de ω_3 puede conducir a precesión uniforme. Pero si $\theta_0 < \pi/2$, deberemos tomar ω_3 superior a un valor mínimo:

$$\omega_3 > \omega'_3 = \frac{2}{I_3} \sqrt{Mgl \cos \theta_0}, \tag{5-79}$$

para lograr la misma situación de la ecuación (5-77b) podemos obtener condiciones análogas para los valores permisibles de ψ . A consecuencia de la naturaleza cuadrática de la ecuación (5-77), ϕ tendrá, en general, dos soluciones llamadas de precesión «rápida» y «lenta». También observaremos que para valores finitos de ψ u ω_3 , la ecuación (5-77) no puede admitir la solución $\dot{\phi} = 0$; para obtener precesión uniforme habrá que dar un impulso a la peonza que la ponga en tal situación. Sin esta velocidad de precesión inicial correcta sólo podríamos lograr, como máximo, una precesión pseudorregular.

Si la precesión es lenta, de manera que $\dot{\phi} \cos \theta_0$ pueda despreciarse frente a a , una solución aproximada sería

$$\dot{\phi} \approx \frac{\beta}{2a} = \frac{Mgl}{I_3 \omega_3} \quad (\text{lenta}),$$

que concuerda con la velocidad media de precesión pseudorregular de una peonza rápida. Desde luego, este resultado era de esperar; si la velocidad de precesión es pequeña habrá

poca diferencia entre poner en marcha el giroscopio con un pequeño impulso o sin él. Notemos que con este valor de $\dot{\phi}$, desprejciar $\dot{\phi} \cos \theta_0$ ante a equivale a exigir que ω_3 sea mucho mayor que el valor mínimo permisible. Para tales valores elevados de ω_3 se obtiene la precesión «rápida» cuando $\dot{\phi}$ sea tan grande que Mgl sea pequeño frente a los otros términos de la ecuación (5-77a):

$$\dot{\phi} = \frac{I_3 \omega_3}{I_1 \cos \theta_0} \quad (\text{rápida}).$$

La precesión rápida es independiente de los momentos de las fuerzas gravitatorias y se puede relacionar, de hecho, con la precesión de un cuerpo libre (v. Ej. 19a).

Otro caso que merece nuestra atención es aquel en el cual $u = 1$ corresponde a una de las raíces de $f(u)$.* Por ejemplo, supongamos que hacemos girar una peonza con su eje de figura inicialmente vertical. Evidentemente, será $b = a$, ya que $I_1 b$ e $I_1 a$ son las componentes constantes del momento cinético respecto al eje vertical y al eje de figura, respectivamente, ejes que coinciden inicialmente. Como la velocidad angular inicial sólo tiene lugar respecto al eje de figura, la ecuación (5-59) para la energía evaluada en el instante $t = 0$ nos dice que

$$E' = E - \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2 = Mgl.$$

Según las definiciones de α y β (ec. 5-61), se deduce que $\alpha = \beta$.

La ecuación de la energía correspondiente a un ángulo cualquiera podrá, pues, escribirse en la forma

$$\dot{u}^2 = (1 - u^2)\beta(1 - u) - a^2(1 - u)^2$$

o sea

$$\dot{u}^2 = (1 - u)^2 \{ \beta(1 + u) - a^2 \}.$$

La forma de la ecuación indica que $u = 1$ es siempre raíz doble, estando dada la tercera raíz por

$$u_3 = \frac{a^2}{\beta} - 1.$$

Si $a^2/\beta > 2$ (lo que corresponde a la condición de peonza «rápida»), u_3 es mayor que 1 y el único movimiento posible corresponde a $u = 1$; la peonza no hace más que seguir girando en torno a la vertical. En este estado de cosas, la gráfica de $f(u)$ tendrá la forma

* Notemos que este caso debe tratarse como caso particular, ya que en los tratamientos anteriores los factores $\sin^2 \theta$ se eliminaban por división en las expresiones.

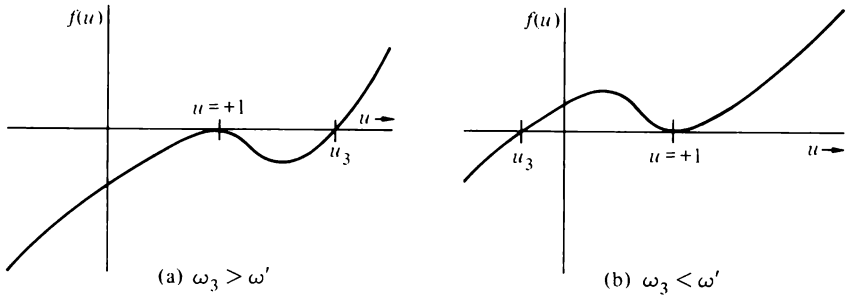


FIGURA 5-11

Gráfica de $f(u)$ cuando el eje de figura está vertical inicialmente.

representada en la figura 5-11(a). En cambio, si $a^2/\beta < 2$, u_3 sería menor que 1, $f(u)$ adoptaría la forma representada en la figura 5-11(b) y la peonza estaría animada de una nutación entre $\theta = 0$ y $\theta = \theta_3$. Existe, pues, una velocidad angular crítica, ω' , por encima de la cual sólo es posible el movimiento vertical, cuyo valor cumple con

$$\frac{a^2}{\beta} = \left(\frac{I_3}{I_1} \right) \frac{I_3 \omega'^2}{2Mgl} = 2$$

o sea

$$\omega'^2 = 4 \frac{MglI_1}{I_3^2}, \tag{5 80}$$

que concuerda con la ecuación (5-79) de la frecuencia mínima para precesión uniforme con $\theta_0 = 0$. En la práctica, si ponemos en rotación una peonza con su eje vertical y con ω_3 mayor que la velocidad angular crítica, seguirá girando mansamente por algún tiempo en torno a la vertical (se dice que el trompo se ha «dormido»). Sin embargo, el rozamiento reduce gradualmente la frecuencia de rotación hasta caer por debajo del valor crítico y la peonza empieza entonces a bambolearse cada vez más a medida que se va ralentizando. Los efectos del rozamiento (el cual no puede incluirse directamente en el esquema de Lagrange) pueden dar lugar a fenómenos inesperados del comportamiento de las peonzas. Un ejemplo notable lo tenemos en un conocido juguete que consiste básicamente en algo más de media esfera con una varilla que sale de la superficie plana. Al ponerlo en rotación con la superficie esférica hacia abajo apoyándose en una superficie dura, empieza a patinar y entrar en nutación hasta que llega a invertir su posición y gira apoyado sobre la varilla, comportándose entonces como un trompo «dormido». La inversión total del vector momento cinético se debe al momento de las fuerzas de rozamiento que aparecen

cuando el trompo patina sobre su superficie esférica.*

Una amplia e influyente tecnología se basa en las aplicaciones de cuerpos rígidos que giren rápidamente, particularmente a través del uso de los llamados «giroscopios». Fundamentalmente, un giroscopio es una peonza simétrica que hacemos girar rápidamente por medios exteriores en torno al eje de figura y que está montada sobre una suspensión Cardan de manera que el movimiento del eje de figura no quede restringido respecto a uno o más ejes espaciales, mientras su centro de gravedad permanece en reposo. Si sobre el giroscopio ejercemos adecuadamente momentos exteriores, efectuará los movimientos de precesión y nutación que antes hemos descrito para el caso de la peonza pesada. No obstante, la condición de peonza «rápida» se cumple sobradamente, por lo que la extensión de la nutación siempre será muy pequeña y además queda deliberadamente amortiguada por el método de suspensión. El único fenómeno giroscópico que se observa entonces es la precesión y se puede simplificar mucho el tratamiento matemático necesario para describirla. Podemos ver cómo se hace esto por generalización a partir del caso de la peonza simétrica pesada. Si es \mathbf{R} el radio vector según el eje de figura que va del punto fijo al centro de gravedad, el momento resultante de las fuerzas gravitatorias que se ejercen sobre la peonza es

$$\mathbf{N} = \mathbf{R} \times M\mathbf{g}, \quad (5-81)$$

donde \mathbf{g} es el vector aceleración de la gravedad, dirigido hacia *abajo*. Si es \mathbf{L}_3 un vector dirigido según el eje de figura, que describe el momento cinético de la rotación en torno al eje de figura y el llamado vector precesión, ω_p , tiene la dirección vertical y un módulo igual a la velocidad angular media de precesión $\dot{\phi}$ (ec. 5-74), el sentido y el módulo de la precesión (pseudorregular) vendrán dados por

$$\omega_p \times \mathbf{L}_3 = \mathbf{N}. \quad (5-82)$$

Como todo momento respecto al punto fijo o al centro de masa se puede poner en la forma $\mathbf{R} \times \mathbf{F}$, análoga a la ecuación (5-81), la velocidad media de precesión que resulta para una peonza «rápida» se podrá siempre derivar de la ecuación (5-82), quedando definido el eje de precesión por la dirección de la fuerza \mathbf{F} . En casi todas las aplicaciones técnicas de los giroscopios, el comportamiento de equilibrio (es decir, despreciando los transitorios), se puede deducir de la ecuación (5-82).

Al estar exento de momentos exteriores, el eje de rotación de un giroscopio conservará siempre su dirección inicial relativa a un sistema inercial. Por tanto, los giroscopios se pueden utilizar para indicar o mantener direcciones específicas, por ejemplo, para lograr plataformas estabilizadas. Según indica la ecuación (5-82), a través de los fenómenos de precesión pueden percibir y medir velocidades angulares de rotación y momentos aplicados. Podemos notar en dicha ecuación que la velocidad de precesión es proporcional al momento, mientras que en un cuerpo que no gire permanentemente es la

* En la década de los 1950, este juguete dio lugar a muchísimas publicaciones. Véase, p. ej., A. R. Del Campo, *American Journal of Physics* ²³, 544 (1955) y también Barger y Olsson, *Classical Mechanics*, pp. 254-257.

aceleración angular la que viene dada por el momento. Una vez suprimido el momento, este cuerpo continuaría en movimiento; en condiciones análogas, un giroscopio sólo dejaría de tener precesión.

La brújula giroscópica comporta consideraciones más complicadas porque en este caso tratamos el comportamiento de un giroscopio fijo en el sistema no inercial, mientras la Tierra gira debajo de él. En la brújula giroscópica, un momento exterior aplica automáticamente una precesión adicional de velocidad exactamente igual a la necesaria para compensar la velocidad de rotación de la Tierra. Una vez puesta en la dirección de la rotación terrestre, es decir, en la dirección Norte, la brújula la mantendrá, al menos en los vehículos que se muevan lentamente. Admitimos que lo que hemos presentado constituye una visión muy simplificada y comprimida de los fascinantes usos tecnológicos de los cuerpos rápidamente giratorios. Proseguir por este camino nos llevaría demasiado lejos.

Sin embargo, en la Naturaleza se presentan dos ejemplos de fenómenos de precesión para los cuales convendría realizar un estudio más completo. Ambos tienen gran interés, por los propios fenómenos y como ejemplos de las técnicas deducidas en este capítulo. El primero se refiere a los tipos de precesión debidos a momentos inducidos por el «pandeo» ecuatorial terrestre y el segundo es la precesión de cargas móviles en un campo magnético. Los dos próximos apartados se dedican a dichos ejemplos.

5-8 PRECESIÓN DE LOS EQUINOCCIOS Y DE LAS ÓRBITAS DE SATÉLITES

Ya hemos mencionado que la Tierra es una peonza cuyo eje de figura está en precesión respecto a la normal a la eclíptica, movimiento que en Astronomía recibe el nombre de precesión de los equinoccios. Si la Tierra fuese totalmente esférica, ninguno de los demás miembros del sistema solar podría ejercer sobre ella un momento gravitatorio. Pero, según hemos dicho, la Tierra tiene una forma que se aparta ligeramente de la esférica y que podemos aproximar a un esferoide de revolución achatado. Lo que da una precesión en el espacio al eje de la Tierra es, precisamente, el momento resultante que se ejerce sobre el «pandeo» ecuatorial debido a la atracción gravitatoria, principalmente por parte de Sol y la Luna.

Para calcular la velocidad de esta precesión debemos realizar una pequeña incursión en la teoría del potencial a fin de hallar el potencial gravitatorio mutuo de una masa puntual (representativa del Sol o la Luna) y una distribución no esférica de materia. Para la deducción de este potencial resultarán muy útiles las propiedades del tensor de inercia antes obtenidas.

Consideremos una distribución de puntos materiales que forme un cuerpo y un punto material único de masa M , que representa al otro cuerpo (cfr. fig. 5-12). Si es r_i la distancia entre el punto i -ésimo de la distribución y el punto material de masa M , el potencial gravitatorio mutuo entre ambos cuerpos será*

$$V = -\frac{GMm_i}{r_i}, \quad V = -\frac{GMm_i}{r \sqrt{1 + \left(\frac{r'_i}{r}\right)^2 - 2\frac{r'_i}{r} \cos \psi_i}} \quad (5.83)$$

* Vale la pena recordar que está implícita la suma para los subíndices repetidos.

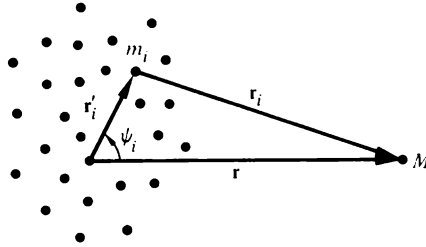


FIGURA 5-12

Geometría que interviene en el potencial gravitatorio entre un cuerpo extenso y un punto material.

En esta expresión utilizamos la terminología de la figura 5-12: r_i es el vector de posición de la partícula i -ésima respecto a un punto particular, que posteriormente tomaremos en el centro de masa del primer cuerpo, r es el vector de posición correspondiente al punto M y ψ_i es el ángulo que forman dichos vectores. Ya sabemos que la ecuación (5-83) admite un desarrollo sencillo en polinomios de Legendre; al recíproco de la raíz cuadrada de la ecuación (5-83) se le da el nombre de *función generatriz* de los polinomios de Legendre,* con lo cual

$$V = -\frac{GM}{r} \sum_{n=0}^{\infty} m_i \left(\frac{r'_i}{r}\right)^n P_n(\cos \psi_i), \quad (5-84)$$

con tal que la distancia r del origen a M sea mayor que toda r'_i . Solamente vamos a utilizar los tres primeros polinomios de Legendre que, recordemos, son

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1). \quad (5-85)$$

En el caso de un cuerpo esférico continuo cuya densidad sólo dependa de la distancia al centro, podemos demostrar fácilmente que todos los términos de la ecuación (5-84), menos el primero, se anulan. Así, el término n -ésimo del sumatorio, en el caso de un cuerpo con simetría esférica y densidad $\rho(r')$, podrá escribirse en la forma

$$\iiint dV' \rho(r') \left(\frac{r'}{r}\right)^n P_n(\cos \psi).$$

* Véase, p. ej., J. Mathews y R. L. Walker, *Mathematical Methods of Physics*, primera edición, p. 164; y G. Arfken, *Mathematical Methods for Physicists*, p. 418.

Utilizando coordenadas polares esféricas, tomando el eje polar a lo largo de \mathbf{r} , esto queda en la forma

$$\int r'^2 dr' \rho(r') \left(\frac{r'}{r} \right)^n \int_{-1}^{+1} d(\cos \psi) P_n(\cos \psi).$$

En virtud de las propiedades de ortogonalidad de P_n respecto a P_0 , la integral de $\cos \psi$ se anulará excepto para $n = 0$, lo que demuestra lo afirmado.

Si el cuerpo se aparta muy poco de tener simetría esférica, como en el caso de la Tierra, podríamos esperar que los términos de la ecuación (5-84) posteriores al correspondiente a $n = 0$ disminuyeran muy rápidamente al aumentar n . Será, pues, suficiente conservar solamente el primer término de corrección no nulo de la ecuación (5-84). Ahora bien, al tomar por origen el centro de masa, el término correspondiente a $n = 1$ se anula idénticamente, ya que podemos escribir

$$-\frac{GM}{r^2} m_i r'_i \cos \psi_i = -\frac{GM}{r^3} \mathbf{r} \cdot m_i \mathbf{r}'_i,$$

que es cero, por definición de centro de masa. El término siguiente, correspondiente a $n = 2$, se puede escribir

$$\frac{GM}{2r^3} m_i r_i'^2 (1 - 3 \cos^2 \psi_i).$$

Es útil escribir la expresión $r_i'^2 \cos^2 \psi_i$ en forma diádica:

$$r_i'^2 \cos^2 \psi_i = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'_i \mathbf{r}'_i \cdot \mathbf{r}}{r^2}$$

con lo que, sumando y restando adecuadamente una misma cantidad, el término correspondiente a $n = 2$ del potencial toma la forma

$$\frac{3}{2} \frac{GM}{r^5} m_i \mathbf{r} \cdot [r_i'^2 \mathbf{1} - \mathbf{r}'_i \mathbf{r}'_i] \cdot \mathbf{r} - \frac{GM}{r^3} m_i r_i'^2.$$

En la primera parte de esta expresión podemos reconocer la forma diádica del tensor de inercia (ec. 5-15), mientras que en virtud de la ecuación (5-6) vemos que la segunda parte contiene la traza del tensor de inercia. Por tanto, el término correspondiente a $n = 2$ lo podremos escribir en la forma

$$\frac{3}{2} \frac{GM}{r^5} \mathbf{r} \cdot \mathbf{I} \cdot \mathbf{r} - \frac{GM}{2r^3} \text{Tr } \mathbf{I},$$

y la expresión total de la aproximación al potencial no esférico será

$$V = -\frac{GMm}{r} + \frac{GM}{2r^3}[3I_r - \text{Tr } \mathbf{I}], \quad (5-86)$$

donde m es la masa del primer cuerpo (la Tierra) e I_r es el momento de inercia respecto a la dirección de \mathbf{r} . Según la representación diagonal del tensor de inercia en el sistema de ejes principales, su traza no es sino la suma de los momentos principales de inercia, por lo que podremos escribir V en la forma

$$V = -\frac{GMm}{r} + \frac{GM}{2r^3}[3I_r - (I_1 + I_2 + I_3)]. \quad (5-87)$$

A la ecuación (5-87) se le da a veces el nombre de *fórmula de MacCullagh*. Hasta ahora no hemos hecho hipótesis alguna de cómo es la simetría de revolución. Tomemos ahora el eje de simetría según el tercer eje principal, con lo que $I_1 = I_2$. Si α, β, γ son los cosenos directores de \mathbf{r} respecto a los ejes principales, podremos escribir el momento de inercia I_r en la forma

$$I_r = I_1(x^2 + \beta^2) + I_3\gamma^2 = I_1 + (I_3 - I_1)\gamma^2.$$

Con esta forma de I_r , la ecuación (5-87) da para el potencial

$$V = -\frac{GMm}{r} + \frac{GM(I_3 - I_1)}{2r^3}[3\gamma^2 - 1],$$

o sea

$$V = -\frac{GMm}{r} + \frac{GM(I_3 - I_1)}{2r^3}P_2(\gamma). \quad (5-88)$$

La forma general dada por la ecuación (5-88) se podía haber pronosticado desde un principio, ya que el potencial debido a una distribución de masa cumple la ecuación de Poisson. Según sabemos, la solución apropiada para la simetría del cuerpo es un desarrollo de términos cuya forma es $P_n(\gamma)/r^{n+1}$, del cual la ecuación (5-88) presenta los dos primeros términos no nulos. Sin embargo, este procedimiento no da los coeficientes de los términos de manera más sencilla que la deducción que hemos utilizado. Debe hacerse también notar que el desarrollo de V es el análogo gravitatorio del desarrollo multipolar de, p. ej., el potencial electrostático de un cuerpo cargado cualquiera.* En nuestro caso no figura el término correspondiente a $n = 1$ porque sólo hay un signo para la «carga» gravitatoria y no puede haber momento dipolar gravitatorio. Además, el tensor de inercia se define en forma análoga al tensor momento cuadrupolar. Por tanto, puede

* Véase. p. ej., J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, § 4.1.

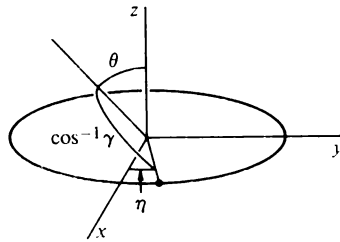


FIGURA 5-13

Esquema del eje de figura de la Tierra en relación con la órbita de un punto material.

decirse que los efectos mecánicos que buscamos se deben al momento cuadrupolar gravitatorio de la Tierra achatada.*

De los términos de la ecuación (5-88) para el potencial, el único que depende de la orientación del cuerpo y por tanto puede originar momentos, es

$$V_2 = \frac{GM(I_3 - I_1)}{2r^3} P_2(\gamma). \tag{5 89}$$

Recordemos, en el ejemplo de la precesión terrestre, que γ es el coseno director o coseno del ángulo que forma el eje de figura de la Tierra con el radio vector que va del centro de la Tierra al centro del Sol o de la Luna. Al ir recorriendo estos cuerpos sus órbitas aparentes, γ variará. En la figura 5-13 podemos ver la relación que hay entre γ y los ángulos astronómicos acostumbrados. En ella se toma en el plano xy la órbita del Sol o de la Luna y el eje de figura del cuerpo se toma en el plano xz . El ángulo θ que forma el eje de figura con la dirección z es la oblicuidad del eje de figura. El producto escalar de un vector unitario dirigido según el eje de figura por el radio vector al cuerpo celeste sólo contendrá el producto de sus componentes x , luego

$$\gamma = \text{sen } \theta \cos \eta.$$

Por tanto, V_2 podrá escribirse

$$V_2 = \frac{GM(I_3 - I_1)}{2r^3} [3 \text{sen}^2 \theta \cos^2 \eta - 1].$$

Según veremos, el movimiento orbital se compara rápidamente con el movimiento de precesión y a los efectos de obtener la velocidad media de precesión será adecuado

* Notemos que hasta ahora no hay nada que restrinja el potencial de la ecuación (5-88) a cuerpos rígidos. La ligadura de rigidez sólo entra cuando exijamos de ahora en adelante que los ejes principales estén fijos en el cuerpo y los momentos de inercia correspondientes sean constantes en el tiempo.

promediar V_2 a lo largo de un periodo orbital completo del cuerpo celeste que se considere. Como las órbitas aparentes del Sol y la Luna tienen excentricidades pequeñas, podemos suponer r constante y la única variación será la de $\cos \eta$. El valor medio de $\cos^2 \eta$ para un periodo completo es $1/2$ y el potencial promediado será

$$\bar{V}_2 = \frac{GM(I_3 - I_1)}{2r^3} \left[\frac{3}{2} \text{sen}^2 \theta - 1 \right] = \frac{GM(I_3 - I_1)}{2r^3} \left[\frac{1}{2} - \frac{3}{2} \cos^2 \theta \right],$$

o, finalmente,

$$\bar{V}_2 = - \frac{GM(I_3 - I_1)}{2r^3} P_2(\cos \theta). \quad (5-90)$$

El momento que se deduce de la ecuación (5-90) es perpendicular al eje de figura y a la normal a la órbita (la cual desempeña el mismo papel que el eje vertical de la peonza pesada). Luego, la precesión tendrá lugar en torno a la dirección del vector normal a la órbita. La magnitud de la velocidad de precesión se puede obtener de la ecuación (5-82), pero como el potencial tiene forma diferente del de la peonza pesada, será más satisfactorio obtener una deducción más formal. Para todo cuerpo simétrico en el cual el potencial sea función sólo de $\cos \theta$, la lagrangiana podrá escribirse, según la ecuación (5-52), en la forma

$$L = \frac{I_1}{2} (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \text{sen}^2 \theta) + \frac{I_3}{2} (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 - V(\cos \theta). \quad (5-91)$$

Si suponemos solamente precesión uniforme y no nos preocupan las necesarias condiciones iniciales, bastará tomar nulas $\dot{\theta}$ y $\dot{\psi}$ en las ecuaciones de movimiento. La ecuación de Lagrange correspondiente a θ será entonces

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = I_1 \dot{\phi}^2 \text{sen} \theta \cos \theta - I_3 \dot{\phi} \text{sen} \theta (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) - \frac{\partial V}{\partial \theta} = 0$$

o sea

$$I_3 \omega_3 \dot{\phi} - I_1 \dot{\phi}^2 \cos \theta = - \frac{\partial V}{\partial (\cos \theta)}, \quad (5-92)$$

que es análoga de la ecuación (5-76') para un potencial más general. En el caso de precesión lenta, lo cual significa en esencia que $\dot{\phi} \ll \omega_3$, los términos en $\dot{\phi}^2$ de la ecuación (5-92) se pueden despreciar y la velocidad de precesión uniforme vendrá dada por

$$\dot{\phi} = \frac{1}{I_3 \omega_3} \frac{\partial V}{\partial (\cos \theta)}. \quad (5-93)$$

Podemos comprobar fácilmente que en el caso de la peonza pesada la ecuación (5-93) concuerda con el resultado de la ecuación (5-74). Con el potencial dado por la ecuación (5-90), la velocidad de precesión es

$$\dot{\phi} = -\frac{3GM}{2\omega_3 r^3} \frac{I_3 - I_1}{I_3} \cos \theta. \quad (5-94)$$

En el caso de la precesión debida al Sol, esta fórmula se puede poner de manera más sencilla, considerando que r es el semieje mayor de la órbita terrestre y utilizando la ley de Kepler (3-71), en la forma

$$\omega_0^2 = \left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^2 = \frac{GM}{r^3}.$$

La velocidad de precesión, relativa a la velocidad angular orbital ω_0 será, pues,

$$\frac{\dot{\phi}}{\omega_0} = -\frac{3}{2} \frac{\omega_0}{\omega_3} \frac{I_3 - I_1}{I_3} \cos \theta. \quad (5-95)$$

Con el valor de $(I_3 - I_1)/I_3$ dado en § 5-6 y $\theta = 23^\circ 27'$, la ecuación (5-95) nos dice que la precesión inducida por el Sol sería tal que originase una rotación completa del eje de figura en torno a la normal a la eclíptica cada 81 000 años, aproximadamente. La Luna tiene una masa muy inferior a la del Sol, pero está mucho más cerca; el resultado neto es que la velocidad de precesión inducida por la Luna es más del doble de la causada por el Sol. Como la órbita lunar está próxima a la eclíptica y tiene igual sentido que la órbita solar aparente, ambas precesiones casi se suman aritméticamente y la precesión lunisolar combinada es de 50,25'' año, o sea una rotación completa al cabo de unos 26 000 años. Notemos que esta velocidad de precesión es tan pequeña que justifica sobradamente el haber depreciado $\dot{\phi}$ frente a ω_3 . Como el Sol, la Luna y la Tierra están en movimiento relativo constante y la órbita lunar está inclinada unos 5° respecto a la eclíptica, la precesión presenta irregularidades a las que se da el nombre de *nutación astronómica*. La extensión de estas irregularidades periódicas no es grande —unos $9''$ de arco en θ y unos $18''$ en ϕ . Así y todo, son mucho mayores que la nutación verdadera la cual, según han demostrado Klein y Sommerfeld, se manifiesta por el bamboleo de Chandler cuya amplitud nunca supera a unas décimas de segundo de arco.

La ecuación (5-88) para el potencial y la (5-93) para la velocidad de precesión uniforme asociada nos permiten ver otra aplicación. Hemos insistido en que el potencial representa una interacción gravitatoria *mutua*; si da lugar a momentos que se ejerzan sobre la Tierra en rotación, también da lugar a fuerzas (no centrales) que se ejercen sobre el punto material M . El efecto de estas pequeñas fuerzas se manifiesta en forma de precesión del plano de la órbita del punto material, relativa a un espacio inercial. Podemos obtener una fórmula aproximada para esta precesión mediante un razonamiento basado, nuevamente, en el comportamiento de los cuerpos rígidos en rotación. Como las

velocidades de precesión son pequeñas frente a la velocidad angular orbital, podemos promediar de nuevo sobre la órbita. Este promediado sustituye de hecho la partícula por un aro rígido de masa M de igual radio que la órbita (supuesta circular), que gire en torno al eje de figura del aro con la frecuencia orbital. La ecuación (5-90) da el campo de potencial en el cual se encuentra este aro, siendo θ el ángulo que forman los ejes de figura del aro y la Tierra. La velocidad media de precesión sigue estando dada por la ecuación (5-93), pero ahora I_3 y ω_3 se refieren al aro en rotación y no a la Tierra. Sería, pues, mejor escribir la ecuación (5-93) para esta aplicación en la forma

$$\dot{\phi} = \frac{\tau}{2\pi M r^2} \frac{\partial V}{\partial (\cos \theta)}, \quad (5-93')$$

y la ecuación (5-94) quedará así:

$$\dot{\phi} = -\frac{\tau}{2\pi} \frac{3}{2} \frac{G(I_3 - I_1)}{r^5} \cos \theta. \quad (5-94')$$

Por ejemplo, la ecuación (5-94) la podríamos utilizar para hallar la precesión de la órbita de la Luna debida al achatamiento de la Tierra. Más corriente sería su aplicación a la precesión de satélites artificiales que giren alrededor de la Tierra siguiendo órbitas casi circulares. La fracción de una rotación de precesión en un periodo de satélite es

$$\frac{\dot{\phi}\tau}{2\pi} = -\left(\frac{\tau}{2\pi}\right)^2 \frac{3}{2} \frac{G(I_3 - I_1)}{r^5} \cos \theta.$$

La aplicación de la ley de Kepler, esta vez para el periodo del satélite, reduce este resultado a

$$\frac{\dot{\phi}\tau}{2\pi} = -\frac{3}{2} \frac{I_3 - I_1}{m r^2} \cos \theta, \quad (5-96)$$

donde m es la masa de la Tierra. Si la Tierra fuese una esfera uniforme, los momentos principales de inercia serían

$$I_3 \sim I_1 = \frac{2}{5} m R^2,$$

siendo R el radio de la Tierra. Como la región central es mucho más densa que las capas

exteriores, el momento de inercia será menor, de tal manera que*

$$I_3 = 0,331mR^2 \approx \frac{1}{3}mR^2.$$

La precesión aproximada vendrá, pues, dada por

$$\frac{\dot{\phi}\tau}{2\pi} = -\frac{1}{2} \frac{I_3 - I_1}{I_3} \left(\frac{R}{r}\right)^2 \cos \theta. \quad (5-97)$$

En el caso de un satélite «próximo» para el cual r es muy próximo a R y la inclinación de la órbita del satélite respecto al ecuador es, por ejemplo, de 30° , la ecuación (5-97) nos dice que el plano de la órbita efectúa una precesión 2π al cabo de unas 700 órbitas del satélite. Como el periodo de un satélite próximo es aproximadamente igual a una hora y media, la rotación completa del plano orbital emplea un poco más de seis semanas. Evidentemente, el efecto es muy apreciable. Volveremos a deducir la precesión de la órbita del satélite cuando estudiemos la teoría de las perturbaciones.

5-9 PRECESIÓN DE SISTEMAS DE CARGAS EN UN CAMPO MAGNÉTICO

El movimiento de sistemas de partículas cargadas en campos magnéticos no comporta normalmente movimiento de cuerpo rígido. Sin embargo, en algunos ejemplos particulares, el estudio del movimiento resulta muy elegante al utilizar las técnicas que hemos desarrollado para el movimiento de cuerpos rígidos. Por esta razón y dada su importancia en Física atómica y nuclear, vamos a considerar brevemente algunos ejemplos.

El *momento magnético* de un sistema de cargas en movimiento (respecto a un origen particular) será, por definición,†

$$\mathbf{M} = \frac{1}{2c} q_i (\mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i) \rightarrow \frac{1}{2c} \int dV \rho_e(\mathbf{r}) (\mathbf{r} \times \mathbf{v}). \quad (5-98)$$

La primera de estas expresiones es una suma extendida a partículas discretas de carga q_i , mientras la segunda es la generalización correspondiente a una distribución continua de

* En la actualidad, los mejores valores de I_3 se obtienen a partir de la observación de dichos efectos sobre las órbitas de los satélites. Véase F. D. Stacey, *Physics of the Earth*, p. 26.

† Véase, p. ej., J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 2.^a ed., pp. 180-184. o W. K. H. Panofsky y M. Phillips, *Classical Electricity and Magnetism*, 2.^a ed., pp. 130-133.

densidad de carga $\rho_e(\mathbf{r})$. Con los convenios habituales, el momento cinético del sistema es

$$\mathbf{L} = m_i(\mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i) \rightarrow \int dV \rho_m(\mathbf{r})(\mathbf{r} \times \mathbf{v}).$$

Los momentos magnético y cinético tienen, pues, igual forma y estarán relacionados mediante un afinor. Sin embargo, limitaremos nuestro estudio a casos en los cuales \mathbf{M} sea directamente proporcional a \mathbf{L} :

$$\mathbf{M} = \Gamma \mathbf{L}, \quad (5-99)$$

considerando que todas las partículas o todos los puntos del sistema continuo tienen una carga específica q/m uniforme. En tales casos, la razón giromagnética Γ viene dada por

$$\Gamma = \frac{q}{2mc}, \quad (5-100)$$

si bien, pensando en los modelos de la partícula y del spin atómico, a menudo dejaremos Γ sin especificar. Podemos considerar que las fuerzas y momentos que se ejercen sobre un dipolo magnético derivan de un potencial*

$$V = -(\mathbf{M} \cdot \mathbf{B}). \quad (5-101)$$

Está implícito junto con la ecuación (5-101) que el campo magnético es sustancialmente constante en el sistema. La imagen es bien aplicable a un momento magnético puntiforme cuya magnitud no se vea afectada por el movimiento que experimenta —imagen apropiada para imanes permanentes o sistemas a escala atómica o menor. Con \mathbf{B} uniforme, el potencial sólo dependerá de la orientación de \mathbf{M} respecto a \mathbf{B} ; sobre el momento magnético no se ejercerán fuerzas, pero existe un momento

$$\mathbf{N} = \mathbf{M} \times \mathbf{B}, \quad (5-102)$$

(Comparar con las ecuaciones (5-51) y (5-81).) La variación del momento cinético total por unidad de tiempo es igual a este momento, por lo que en vista de la ecuación (5-99) podremos escribir

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{L} \times \Gamma \mathbf{B}. \quad (5-103)$$

* Jackson, op. cit., pp. 185-187.

Pero esta es exactamente la ecuación de movimiento para un vector de módulo constante que gire en el espacio alrededor de la dirección de \mathbf{B} con una velocidad angular $\boldsymbol{\omega} = -\Gamma\mathbf{B}$. El efecto de un campo magnético uniforme sobre un dipolo magnético permanente es comunicar una *precesión* uniforme al vector momento cinético (y al momento magnético). Para la razón giromagnética clásica (ec. 5-100), la velocidad angular de precesión es

$$\boldsymbol{\omega}_l = -\frac{q\mathbf{B}}{2mc}, \quad (5\ 104)$$

y recibe el nombre de *frecuencia de Larmor*. En el caso de electrones, q es negativa y la precesión de Larmor tendrá sentido antihorario alrededor de la dirección de \mathbf{B} .

Como segundo ejemplo, consideremos una colección de partículas cargadas en movimiento, sin que impongamos restricción alguna a la naturaleza de sus movimientos, todas ellas de igual carga específica q/m y que estén en una región de campo magnético constante uniforme. También supondremos que todo potencial de interacción entre partículas sólo depende de la separación escalar entre ellas. La lagrangiana del sistema podrá escribirse (cfr. ec. 1-66) en la forma

$$L = \frac{1}{2}m_i v_i^2 + \frac{q}{mc} m_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{A}_i(\mathbf{r}_i) + V(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|), \quad (5\ 105)$$

donde el campo magnético constante \mathbf{B} deriva de un potencial vector \mathbf{A}

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} \mathbf{B} \times \mathbf{r}. \quad (5\ 106)$$

En función de \mathbf{B} , la lagrangiana tiene la forma (permutando los productos escalar y vectorial)

$$L = \frac{1}{2}m_i v_i^2 + \frac{q\mathbf{B}}{2mc} \cdot \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i + V(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|). \quad (5\ 107)$$

El término de interacción con el campo magnético se puede escribir de diversas maneras (cfr. ec. 5-101 y 5-104)

$$\frac{q\mathbf{B} \cdot \mathbf{L}}{2mc} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{B} = -\boldsymbol{\omega}_l \cdot \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i. \quad (5\ 108)$$

Supongamos que ahora expresamos la lagrangiana en función de coordenadas relativas a ejes «con acento» que tengan el origen coincidente con el del sistema original,

pero que giren uniformemente en torno a la dirección de \mathbf{B} con velocidad angular ω_i . Los vectores distancia al origen no cambiarán ni tampoco lo harán, desde luego, distancias escalares tales como $|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$. En cambio, las velocidades relativas a los nuevos ejes serán diferentes de las velocidades originales y estarán relacionadas con ellas en la forma siguiente:

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}'_i + \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{r}_i.$$

Los dos términos de la lagrangiana afectados por la transformación son

$$\begin{aligned} \frac{m_i v_i^2}{2} &= \frac{m_i v_i'^2}{2} + m_i \mathbf{v}'_i \cdot (\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{r}_i) + \frac{m_i}{2} (\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{r}_i) \cdot (\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{r}_i), \\ -\boldsymbol{\omega}_i \cdot \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i &= -\boldsymbol{\omega}_i \cdot (\mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}'_i) - \boldsymbol{\omega}_i \cdot (\mathbf{r}_i \times m_i (\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{r}_i)). \end{aligned}$$

Permutando los productos escalares y vectoriales se ve que los términos lineales en $\boldsymbol{\omega}_i$ y \mathbf{v}' son iguales y opuestos y por tanto se destruyen en la lagrangiana. Una permutación similar en los términos cuadráticos en $\boldsymbol{\omega}_i$ demuestra que son de igual forma y están relacionados con el momento de inercia del sistema respecto al eje definido por $\boldsymbol{\omega}_i$ (v. p. 248). El término cuadrático de la lagrangiana puede, en efecto, escribirse en la forma

$$-\frac{m_i}{2} (\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{r}_i) \cdot (\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{r}_i) = -\frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_i \cdot \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega}_i = -\frac{1}{2} I_i \omega_i^2, \quad (5-109)$$

donde I_i representa el momento de inercia respecto al eje $\boldsymbol{\omega}_i$. En función de las coordenadas del sistema giratorio, la lagrangiana presenta, pues, la sencilla forma

$$L = \frac{1}{2} m_i v_i'^2 + V(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|) - \frac{1}{2} I_i \omega_i^2, \quad (5-110)$$

en la cual han desaparecido todos los términos lineales en el campo magnético. Podemos tener una idea de la magnitud relativa del término cuadrático considerando un caso en el cual el movimiento del sistema consiste en una rotación de una cierta frecuencia ω , p. ej., un electrón que gire alrededor del núcleo atómico. Entonces, para sistemas que no se aparten mucho de la simetría esférica, la energía cinética es aproximadamente igual a $\frac{1}{2} I \omega^2$ (sin subíndice el momento de inercia) y el término lineal en $\boldsymbol{\omega}_i$ es del orden de $\boldsymbol{\omega}_i \cdot \mathbf{L} \approx I \boldsymbol{\omega}_i \cdot \boldsymbol{\omega}$. Por tanto, el término cuadrático de la ecuación (5-110) será del orden de $(\omega_i/\omega)^2$ comparado con la energía cinética y del orden de (ω_i/ω) relativo al término lineal. En la mayoría de sistemas en escala atómica o inferior, las frecuencias propias son mucho mayores que la frecuencia de Larmor. Comparemos, por ejemplo, la frecuencia de una raya espectral (que es una diferencia de frecuencias propias) con el desplazamiento de frecuencia en el efecto Zeeman simple, que es proporcional a la frecuencia de Larmor. Así

pues, en dichos sistemas el movimiento en el sistema en rotación es igual que en el sistema del laboratorio cuando no haya campo magnético. Tenemos el *teorema de Larmor* que dice que hasta un primer orden de \mathbf{B} , el efecto de un campo magnético constante sobre un sistema clásico consiste en superponer a su movimiento normal una precesión uniforme de pulsación ω_l .

REFERENCIAS SUGERIDAS

L. BRAND, *Vector and Tensor Analysis*. J. W. Gibbs introdujo diadas y afinores y la exposición completa de este tema se encuentra en la obra clásica *Vector Analysis* de Gibbs y Wilson (1901). Un amplio tratamiento de los afinores lo encontramos en un tratado algo posterior de Wills, *Vector and Tensor Analysis*. Los textos de análisis tensorial y matricial citados en el Capítulo 4 pueden utilizarse para la mayor parte de la materia correspondiente a este capítulo. El libro de Brand lo añadimos ahora porque, además de la materia típica referente a tensores tiene mucho acerca de afinores en su Capítulo 4 que trata de funciones vectoriales lineales. En el último capítulo proporciona una breve introducción, fácilmente accesible, a los cuaternios.

K. SYMON, *Mechanics*. La utilidad pragmática de los afinores se ejemplifica en el tratamiento que Symon da en el capítulo 10 a las propiedades del tensor de inercia, en donde se dan algunos ejemplos interesantes. Se desarrolla explícitamente el Álgebra de afinores y tensores.

E. J. ROUTH, *Dynamics of Rigid Bodies, Elementary and Advanced*. En el siglo XIX, la Dinámica de los cuerpos rígidos constituía uno de los principales temas en la frontera de la investigación en Mecánica. El tratado en dos volúmenes de Routh, cuya última edición apareció en la década de 1890, presenta de manera conveniente y elaborada los logros realizados hasta aquel momento en el tema. Para muchos temas sigue siendo casi la única fuente en lengua inglesa. Routh, colega de Maxwell, fue pionero del estudio de la estabilidad de las oscilaciones pequeñas y su obra sigue siendo sobresaliente en nuestros días.

W. D. MACMILLAN, *Dynamics of Rigid Bodies*. Aún no siendo recomendable para un estudio sistemático de la Dinámica del cuerpo rígido, esta obra contiene mucha materia que no se encuentra fácilmente en las demás. En particular, en el Capítulo VII hay estudios largos y elaborados del movimiento de Poincot y del movimiento de la peonza simétrica, incluyendo soluciones explícitas expresadas mediante funciones elípticas. También merece atención especial el capítulo referente a problemas complejos de cuerpos rígidos en rodadura.

A. GRAY. *A Treatise on Gyrostatics and Rotational Motion*. Producto del interés que los dispositivos giroscópicos despertaron en la Primera Guerra Mundial, el tratado de Gray representa la culminación de la tradición británica en el campo de la Dinámica del cuerpo rígido. Con un tratamiento un tanto denso y principalmente no vectorial, cubre una amplia gama de temas, desde la excursión de los polos de la rotación terrestre hasta la teoría del boomerang y el funcionamiento del diablo. En las obras de Klein y Sommerfeld pueden hallarse estudios más sistemáticos de muchas cuestiones tratadas en este libro.

F. KLEIN y A. SOMMERFELD, *Theorie des Kreisels*. Esta monumental obra acerca de la teoría de la peonza, en cuatro tomos, tiene todo el aspecto externo del típico «Handbuch» alemán, estólido y pomposo. Sin embargo, las apariencias engañan ya que es notablemente legible a pesar del inconveniente de estar escrita en alemán. El estilo gracioso e informal tiene la fluencia y atención a detalles pedagógicos característicos de todas las publicaciones posteriores de Sommerfeld. Aun cuando el tratamiento resulta, en ocasiones, demasiado matemático, nunca se pierde de vista el

Mundo físico y no se pierde uno en una maraña de fórmulas. Aun cuando está limitado por su título a peonzas y giroscopios, el tratado proporciona una educación liberal en toda la Mecánica del cuerpo rígido, con incursiones en otras ramas de la Física y de la Matemática. Así, el Capítulo I estudia, entre otras cosas, los ángulos de Euler, las rotaciones infinitesimales y los parámetros de Cayley-Klein y sus relaciones con la transformación homográfica y con la teoría de cuaternios. Las últimas notas a este capítulo (en Vol. IV) estudian también las relaciones con la Electrodinámica y la Relatividad restringida (la Mecánica cuántica aún no se avistaba en lontananza). En el Vol. I se asientan los fundamentos necesarios de la Dinámica del cuerpo rígido y se da una descripción física del movimiento de la peonza sin utilizar demasiada matemática.

El Vol. II se dedica a la exposición detallada de la peonza simétrica pesada, aun cuando también se trata mucho el movimiento de Poinsot y contiene un resumen de lo que entonces se llamaba peonza asimétrica. Fue aquí donde se introdujo por vez primera la distinción entre precesión regular y pseudorregular y los autores emplearon mucho tiempo en examinar ambos movimientos y el método de estudio de la precesión regular. Se dedican muchas páginas a una demolición total de las «deducciones» populares o elementales de la precesión giroscópica. (Los autores señalan que fue la naturaleza insatisfactoria de dichas deducciones lo que les llevó a escribir el tratado.) Hay un largo estudio acerca de cuestiones de estabilidad del movimiento. La mayor parte del tratado se basa en la solución en función de integrales elípticas y no simplemente en la pequeña nutación aproximada, como hemos hecho nosotros.

El Vol. III trata principalmente de fuerzas perturbadoras (sobre todo el rozamiento) y aplicaciones astronómicas (nutación de la Tierra, precesión de los equinoccios, etc.). El estudio de la excursión de los polos de la Tierra resulta particularmente completo para la época en que se escribió e incluye una estimación de los efectos de la elasticidad de la Tierra y del transporte de masas atmosféricas por la circulación del viento. El Vol. IV se dedica a aplicaciones técnicas y queda un tanto desfasado en la actualidad.

F. KLEIN, *The Mathematical Theory of the Top*. En 1896, Felix Klein dio en Princeton una serie de conferencias y las notas de las mismas constituyen este delgado libro reimpresso recientemente junto con algunos artículos matemáticos inconexos. La mayor parte del libro se ocupa de detalles matemáticos muy abstractos de la teoría, si bien la primera conferencia proporciona una exposición muy legible de los parámetros de Cayley-Klein. Es interesante observar que tanto en esta obra como en el gran tratado escrito con Sommerfeld se ha utilizado un espacio no euclídeo de cuatro dimensiones en el cual el tiempo constituye la cuarta dimensión —anticipándose muchos años al uso que hizo en Relatividad restringida (v. capítulo próximo). No obstante, dicho espacio sólo se tomaba por conveniencia matemática y no pretendía tener significado físico alguno.

A. SOMMERFELD, *Mechanics*. La obra de Sommerfeld en colaboración con Klein fue una de sus primeras publicaciones, mientras que este texto, parte de una serie titulada *Curso de Física Teórica*, se publicó cuarenta años más tarde como uno de sus últimos trabajos. Su interés acerca de la peonza parecía no haber disminuido en ese tiempo y dedicó mucho espacio a estudios cualitativos de una amplia gama de fenómenos giroscópicos y de la peonza —incluso una o dos páginas a la peonza asimétrica. Las teinta y tantas páginas dedicadas al tema completo ocupan casi todo el capítulo referente a cuerpos rígidos y constituye, en la práctica, un resumen del trabajo principal. El tratamiento es más extenso que intenso y hay poca discusión detallada.

V. D. BARGF y M. G. OLSSON, *Classical Mechanics, A Modern Perspective*. Texto de nivel intermedio que citamos porque es casi el único libro que contiene incluso una descripción breve del juguete «tippie-top» (p. 254) y de cómo funciona. Para tener una idea del éxito de este juguete, véanse las fotografías frente a la p. 208 de *Niels Bohr*, editado por S. Rozental. A las referencias dadas en p. 224 podemos agregar un trabajo de T. R. Kane y D. A. Levinson, *Journ. Applied Mech.* **45**, 903 (Dic. 1978) en el que se presenta una solución moderada por ordenador del tippie-top acompañada de una extensa bibliografía.

J. AHARONI, *Lecturas on Mechanics*. Conjunto discursivo de ensayos acerca de temas de Mecánica relativamente aislados. Esta referencia es interesante por su extensa colección de diagramas. Las bien mediatadas figuras de los capítulos 15-17 pueden servir para iluminar algunos aspectos importantes del tensor de inercia, del movimiento de Poinsoy y de las brújulas giroscópicas, entre otras cuestiones.

L. MEIROVITCH, *Methods of Analytical Dynamics*; y S. W. GROESBERG, *Advanced Mechanics*. En las modernas aplicaciones tecnológicas de la Mecánica, la Dinámica del cuerpo rígido desempeña un papel fundamental, no sólo en dispositivos tales como los giroscopios, sino también como primera aproximación a sistemas que no son totalmente rígidos —tales como las naves espaciales. La necesidad de resolver problemas reales —y no simplemente deducir formulaciones— impone una perspectiva de los métodos de la Mecánica que contrasta a menudo con el punto de vista del físico. Estos dos textos proporcionan una introducción a los métodos modernos que se necesitan para abordar problemas técnicos.

E. LEIMANIS, *Motion of Coupled Rigid-Bodies*. Los matemáticos aplicados rusos han prestado mucha atención al problema general del movimiento de uno o más cuerpos rígidos en torno a un punto fijo. Sus esfuerzos se han intensificado desde los días de Sonya Kovalevskaya, hacia 1880, hasta nuestros días. Gran parte de su trabajo no está disponible en inglés. La referencia de Leimanis es un tratado moderno del movimiento de cuerpos rígidos, desde el punto de vista de un matemático aplicado, con una comprensión completa de la literatura rusa. Se incorporan técnicas matemáticas actuales, tal como el empleo de series de Lie.

W. H. MUNK y G. J. F. MACDONALD, *The Rotation of the Earth*. La Dinámica del cuerpo rígido tiene una de sus más atractivas aplicaciones en los fenómenos de la Tierra en rotación —si bien el primer paso es tener presente hasta qué punto la Tierra y sus pertenencias se apartan de ser cuerpos rígidos. El tratado de Munk y Macdonald proporciona una introducción lúcida y bien escrita a dichas aplicaciones geofísicas, las cuales van de las derivas de los continentes, pasando por antiguos registros históricos de eclipses, a cuestiones referentes a excitación por terremotos del bamboleo de Chandler. Lamentablemente —¿o, afortunadamente?— el tratamiento no se puede considerar definitivo porque el tema está sufriendo un intenso desarrollo y desde la fecha de publicación (1960) se han realizado avances importantes. Ahora bien, todo estudio de las características de la rotación terrestre convendría que partiera de Munk y Macdonald.

F. D. STACEY, *Physics of the Earth*. En el Capítulo 2 se estudian en forma compacta temas tales como la precesión de los equinoccios y el bamboleo de Chandler, habiendo referencias a la literatura moderna.

W. WRIGLEY, W. M. HOLLISTER y W. G. DENHARD, *Gyroscopic Theory, Design and Instrumentation*. Los dispositivos giroscópicos están en el corazón de los adelantos modernos en navegación inercial. La literatura publicada es considerable y los informes no publicados darían una literatura aún más voluminosa (sin mencionar la sustancial tradición verbal entre los que se dedican a dicha cuestión). Este tratado, producto del Graper Instrumentation Laboratory del M.I.T., proporciona una ojeada bastante moderna del tema partiendo de un estudio de las matrices de rotación y alcanzando proyectos de dispositivos reales. Puede resultar clarificadora una breve puesta a punto de Wrigley y Hollister, «The Gyroscope: Theory and Application», *Science* **149**, 713 (Agosto 13, 1965).

EJERCICIOS

1. Si es \mathbf{R}_i una matriz antisimétrica asociada a las coordenadas del punto material i -ésimo de un sistema, con elementos $R_{mn} = \epsilon_{mnp}x_i$, demostrar que la matriz del tensor de inercia se puede escribir en la forma

$$\mathbf{I} = -m_i(\mathbf{R}_i)^2.$$

2. Mediante transformaciones vectoriales, demostrar directamente que la definición de momento de inercia

$$I = m_i(\mathbf{r}_i \times \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{r}_i \times \mathbf{n})$$

se reduce a la ecuación (5-19).

3. ¿Cuál es la razón de la altura al diámetro de un cilindro de revolución tal que el elipsoide de inercia en el centro del cilindro sea una esfera?

4. Hallar los momentos principales de inercia respecto al centro de masa de un cuerpo rígido plano cuya forma sea triangular isósceles y su densidad uniforme. ¿Cuáles son los ejes principales?

5. Tres puntos materiales iguales están situados en $(a,0,0)$, $(0,a,2a)$ y $(0,2a,a)$. Hallar los momentos principales de inercia correspondientes al origen y un sistema de ejes principales.

6. Un cono recto de revolución uniforme de altura h , semiángulo α y densidad ρ rueda sin deslizamiento sobre su superficie lateral sobre un plano horizontal de tal manera que vuelve a su posición inicial al cabo de un tiempo τ . Hallar expresiones para la energía cinética y las componentes del momento cinético del cono.

7. Demostrar que en el caso del movimiento general de un cuerpo rígido en torno a un punto fijo, la variación con el tiempo de la energía cinética T viene dada por

$$\frac{dT}{dt} = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{N}.$$

8. Deducir las ecuaciones de Euler del movimiento (ec. 5-39') a partir de la ecuación de Lagrange del movimiento, en la forma de la ecuación (1-53), para la coordenada generalizada ψ .

9. a) Una barra de peso despreciable y longitud l tiene en sus extremos dos puntos de igual masa m . Se hace girar uniformemente la barra alrededor de un eje que pase por su centro y forme con ella un ángulo θ . A partir de las ecuaciones de Euler, hallar las componentes del momento que acciona la barra según sus ejes principales.

b) A partir de la ecuación fundamental de momentos (1-26), hallar las componentes del momento según ejes fijos en el espacio. Demostrar que estas componentes son compatibles con las halladas en el apartado (a).

10. La ecuación (5-38) es válida para movimientos de sistemas no rígidos, relativa a un sistema de ejes de coordenadas giratorio elegido. En el caso de movimiento no rígido general, si los ejes giratorios se eligen de manera que coincidan con los ejes principales (instantáneos) del sistema

continuo, demostrar que las ecuaciones (5-39) deben substituirse por

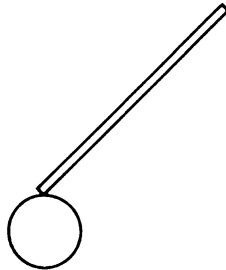
$$\frac{d(I_i \omega_i)}{dt} + \epsilon_{ijk} \omega_j \omega_k I_k + \frac{dl_i}{dt} + \epsilon_{ijk} l_j \omega_k = N_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

donde

$$l_i = \int dV \rho(\mathbf{r}) \epsilon_{ijk} x_j v'_k$$

siendo $\rho(\mathbf{r})$ la densidad en el punto \mathbf{r} y \mathbf{v}' la velocidad del punto del sistema en \mathbf{r} relativa a los ejes giratorios. A estas ecuaciones se les da a veces el nombre de *ecuaciones de Liouville* y son aplicables al estudio de movimientos casi-rígidos, como el de la Tierra incluyendo la atmósfera y los océanos.

11. Un péndulo plano consiste en una varilla uniforme de longitud l y grosor despreciable con masa m , suspendida en un plano vertical por un extremo. Al otro extremo se une un disco uniforme de radio a y masa M de manera que pueda girar libremente en su propio plano, que es el plano vertical. Plantear las ecuaciones de movimiento en la formulación lagrangiana.



12. Un péndulo compuesto consiste en un cuerpo rígido de forma laminar suspendido en el plano vertical por un punto que no sea el centro de gravedad. Calcular el periodo de sus pequeñas oscilaciones en función del radio de giro respecto al centro de gravedad y de la separación entre éste y el punto de suspensión. Demostrar que si el péndulo tiene igual periodo para dos puntos de suspensión situados a distancias del centro de gravedad diferentes, la suma de dichas distancias es igual a la longitud del péndulo simple equivalente.

13. Una barra uniforme de masa M y longitud $2l$ está suspendida por un extremo mediante un resorte de constante de rigidez k . La barra sólo puede oscilar libremente en un plano vertical y el resorte sólo puede moverse en dirección vertical. Plantear las ecuaciones de movimiento en la formulación lagrangiana.

14. Una varilla uniforme desliza con sus extremos apoyados en una circunferencia vertical lisa. Si la varilla subtende un ángulo de 120° en el centro de la circunferencia, demostrar que el péndulo simple equivalente tiene una longitud igual al radio del círculo.

15. Un automóvil parte del reposo con una de sus puertas perpendicular inicialmente a él. Si los goznes de la puerta se hallan hacia la parte delantera del coche, la puerta se cerrará de golpe cuando el

automóvil adquiera velocidad. Obtener una fórmula para el tiempo que necesita la puerta para cerrarse si es constante la aceleración f , es r_0 el radio de giro de la puerta respecto al eje de rotación y su centro de masa se halla a una distancia a de los goznes. Demostrar que si $f = 30,5 \text{ cm/s}^2$ y la puerta es un rectángulo uniforme de 122 cm de anchura, el tiempo pedido será aproximadamente igual a 3,04 s.

16. Por una superficie plana inclinada que forma un ángulo α con la horizontal baja rodando una rueda, la cual está vinculada de manera que su plano sea siempre perpendicular al plano inclinado pero puede girar alrededor del eje normal a la superficie. Obtener la solución para el movimiento bidimensional de la rueda, utilizando las ecuaciones de Lagrange y el método de los multiplicadores indeterminados.

17. a) Expresar en función de los ángulos de Euler las condiciones de ligadura para una esfera uniforme que rueda sin deslizar sobre una superficie horizontal plana. Demostrar que son no holonomas.

b) Plantear las ecuaciones de Lagrange para este problema por el método de los multiplicadores de Lagrange. Demostrar que las partes traslatoria y rotatoria de la energía cinética se conservan por separado. ¿Existen otras constantes del movimiento?

18. Para el cuerpo simétrico en precesión uniforme cuando no hay momentos, hallar soluciones analíticas de los ángulos de Euler en función del tiempo.

19. a) Demostrar que el momento cinético de la peonza simétrica exenta de momentos gira, en el sistema de coordenadas del cuerpo, alrededor del eje de simetría con frecuencia angular Ω . Demostrar también que el eje de simetría gira en el espacio alrededor de la dirección fija del momento cinético, con la frecuencia angular

$$\dot{\phi} = \frac{I_{3^{(e)3}}}{I_1 \cos \theta'}$$

donde ϕ es el ángulo de Euler de la línea de nodos respecto al momento cinético tomado como eje z del espacio.

b) Utilizando los resultados del Ejercicio 19 del Capítulo 4, demostrar que ω gira en el espacio alrededor del momento cinético con la misma frecuencia $\dot{\phi}$, pero que el ángulo θ' que forman ω y L viene dado por

$$\text{sen } \theta' = \frac{\Omega}{\dot{\phi}} \text{sen } \theta''$$

donde θ'' es la inclinación de ω respecto al eje de simetría. Utilizando las cifras dadas en § 5-6, demostrar luego que el eje de rotación de la Tierra y el eje del momento cinético nunca están separados más de 1,5 cm en la superficie terrestre.

c) A partir de los apartados (a) y (b), demostrar que el movimiento de la peonza simétrica no sujeta a fuerzas se puede describir mediante la rotación de un cono fijo en el cuerpo, cuyo eje sea el de simetría, que rueda sobre un cono fijo en el espacio cuyo eje tenga la dirección del momento cinético. El vector velocidad angular está dirigido según la recta de contacto de ambos conos. Demostrar que la misma descripción se deduce de la construcción de Poincot en función del elipsoide de inercia.

20. En el caso de un cuerpo rígido asimétrico en general, comprobar analíticamente el teorema de estabilidad demostrado geoméricamente en la p. 266 examinando las ecuaciones de Euler para

desviaciones pequeñas respecto a la rotación en torno a cada uno de los ejes principales. Se supone que la dirección de ω difiere tan poco de un eje principal que puede tomarse constante la componente de ω según dicho eje, pudiéndose despreciar el producto de componentes perpendiculares a él. Estudiar lo ligado que está el movimiento resultante a cada uno de los tres ejes principales.

21. Cuando el cuerpo rígido no es simétrico, no puede darse una solución analítica de las ecuaciones de Euler para el movimiento libre de momentos mediante funciones elementales. No obstante, demostrar que la conservación de la energía y del momento cinético se puede utilizar para obtener expresiones de las componentes de ω en el cuerpo en función de integrales elípticas.

22. Aplicar las ecuaciones de Euler al problema de la peonza simétrica pesada, expresando ω_i en función de los ángulos de Euler. Demostrar que las dos integrales del movimiento, ecuaciones (5-53) y (5-54), pueden obtenerse directamente de las ecuaciones de Euler en esta forma.

23. De las ecuaciones de movimiento de Euler obtener la condición (5-77) para la precesión uniforme de una peonza simétrica en un campo gravitatorio, imponiendo el requisito de que el movimiento sea una precesión uniforme sin nutación.

24. Demostrar que el módulo cinético de una peonza simétrica pesada puede expresarse en función de θ y las constantes del movimiento únicamente. Probar que, a consecuencia de ello, el vector momento cinético tiene precesión uniforme solamente cuando tenga precesión uniforme el eje de simetría.

25. En § 5-6 se calculó la precesión del eje de rotación de la Tierra alrededor del polo basándose en que no se ejercían momentos sobre la Tierra. En cambio, en § 5-8 se demostraba que la Tierra experimenta una precesión forzada a causa de los momentos que le ejercen el Sol y la Luna. En realidad, los dos resultados son válidos: el movimiento del eje de rotación alrededor del eje de simetría aparece como nutación de la Tierra en el curso de su precesión forzada. Para demostrar esto, calcular θ y ϕ en función del tiempo para el caso de una peonza simétrica pesada a la que se da una velocidad inicial $\dot{\phi}_0$ grande frente a la precesión neta $\beta/2a$ pero pequeña frente a ω_3 . En estas condiciones, los círculos límite del eje de figura están aún más próximos entre sí, pero la órbita del eje de figura presenta el aspecto indicado en la figura 5-9(b), es decir, tiene grandes rizos que sólo se mueven lentamente alrededor de la vertical. Demostrar que para este caso sigue siendo válida (5-71) pero ahora

$$x_1 = \left(\frac{\beta}{a^2} - \frac{2\dot{\phi}_0}{a} \right) \text{sen}^2 \theta_0.$$

A partir de estos valores de θ y $\dot{\phi}$ obtener ω_1 y ω_2 y demostrar que si $\beta/2a$ es pequeño frente a $\dot{\phi}_0$, el vector ω experimenta una precesión alrededor del eje de figura con velocidad angular

$$\Omega = \frac{I_1 - I_3}{I_1} \omega_3$$

de acuerdo con la ecuación (5-49). A partir de los números que se dan en § 5-6, comprobar que $\dot{\phi}_0$ corresponde a un periodo de unos 1600 años, por lo que $\dot{\phi}_0$ es ciertamente pequeña frente a la rotación diaria y suficientemente grande frente a $\beta/2a$ que corresponde al periodo de precesión de 26000 años.

26. a) Consideremos un sistema de ejes con acento de origen coincidente con el de un sistema inercial de ejes pero que gire respecto a éste con velocidad angular fija ω_0 . Si un sistema de puntos materiales está sometido a fuerzas que derivan de un potencial conservativo V que sólo dependa de la distancia al origen, demostrar que la lagrangiana del sistema en función de coordenadas relativas al sistema con acento puede escribirse en la forma

$$L = T' + \omega_0 \cdot \mathbf{L}' + \frac{1}{2} \omega_0 \cdot \mathbf{I}' \cdot \omega_0 - V,$$

donde los acentos indican que las cantidades se evalúan respecto al sistema de ejes con acento. ¿Cuál es el significado físico de cada uno de los dos términos adicionales?

b) Supongamos que ω_0 está en el plano $x'_2 x'_3$ y que una peonza simétrica está obligada a moverse con su eje de figura en el plano $x'_1 x'_3$, con lo que sólo necesitaremos dos ángulos de Euler para describir su orientación. Si montamos el cuerpo de manera que su centro de masa esté fijo en el origen y $V = 0$, demostrar que el eje de figura del cuerpo oscila en torno al eje x'_3 de acuerdo con la ecuación de movimiento del péndulo plano y hallar la frecuencia de las oscilaciones de pequeña amplitud. Esto ilustra el principio de la brújula giroscópica.

27. Supongamos que en una peonza simétrica cada elemento de masa tiene una carga proporcionada asociada a él, de manera que sea constante e/m —la llamada peonza simétrica cargada. Si dicho cuerpo gira en un campo magnético uniforme, la lagrangiana, según (5-108), es

$$L = T - \omega_l \cdot \mathbf{L}.$$

Demostrar que T es constante (lo cual es una manifestación de la propiedad de la fuerza de Lorentz que un campo magnético no efectúa trabajo sobre una carga en movimiento) y hallar las otras constantes del movimiento. En la hipótesis de que ω_l es mucho menor que la velocidad inicial de rotación alrededor del eje de figura, obtener expresiones de las frecuencias y amplitudes de nutación y precesión. ¿De dónde vienen las energías cinéticas de nutación y precesión?

Capítulo 6

Oscilaciones pequeñas

Una clase de movimientos mecánicos que puede tratarse muy satisfactoriamente con la formulación de Lagrange es la de las oscilaciones de pequeña amplitud de un sistema en torno a posiciones de equilibrio. La teoría de dichas oscilaciones pequeñas halla amplia aplicación física en Acústica, espectros moleculares, vibraciones de mecanismos y circuitos eléctricos acoplados. Cuando las desviaciones del sistema respecto a las condiciones de equilibrio estable sean suficientemente pequeñas, el movimiento podrá describirse, en general, como si fuese el de un sistema de osciladores armónicos acoplados. Se supone que el lector conoce las propiedades del oscilador armónico simple de un grado de libertad, tanto en oscilación libre como forzada, con amortiguamiento y sin él. Vamos a insistir en los métodos apropiados para sistemas discretos con más de un grado de libertad. Según veremos, las técnicas matemáticas que hay que emplear resultan ser muy parecidas a las utilizadas en el estudio del movimiento del cuerpo rígido, si bien los sistemas mecánicos considerados no necesitan contener cuerpos rígidos. También se pueden desarrollar tratamientos análogos de oscilaciones en torno a movimientos estables, pero esto lo trataremos mejor con la formulación de Hamilton que se presenta en el Capítulo 8.

6-1 FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

Consideremos sistemas conservativos en los cuales la energía potencial es función de la posición solamente. Vamos a suponer que las ecuaciones de transformación que definen las coordenadas generalizadas del sistema q_1, \dots, q_n , no contienen explícitamente el tiempo. Así pues, se excluirán las limitaciones dependientes del tiempo. Se dice que el sis-

tema ésta en *equilibrio* cuando se anulan las fuerzas generalizadas que actúan en él:

$$Q_i = \left(\frac{\partial V}{\partial q_i} \right)_0 = 0. \quad (6.1)$$

La energía potencial tiene por lo tanto un valor extremo en la configuración de equilibrio del sistema, $q_{01}, q_{02}, \dots, q_{0n}$. Si la configuración se halla inicialmente en la posición de equilibrio con velocidades iniciales \dot{q}_i nulas, el sistema seguirá en equilibrio indefinidamente. Hay multitud de ejemplos del equilibrio de sistemas mecánicos —un péndulo en reposo, un galvanómetro de suspensión en su posición cero, un huevo de pie sobre un extremo.

Una posición de equilibrio diremos que es *estable* cuando una pequeña perturbación del sistema respecto al equilibrio sólo dé lugar a un pequeño movimiento limitado en torno a la posición de reposo. El equilibrio será *inestable* cuando una perturbación infinitesimal dé lugar a un movimiento ilimitado. Un péndulo en reposo está en equilibrio estable, mientras que el huevo de pie sobre su extremo constituye un ejemplo evidente de equilibrio inestable. Puede verse fácilmente que cuando el extremo de V sea un mínimo, el equilibrio debe ser estable. Supongamos que se perturba el sistema respecto al equilibrio por medio de un aumento dE de energía por encima de la energía de equilibrio. Si V es mínimo en el equilibrio, cualquier desviación respecto a esta posición dará lugar a un aumento de V . En virtud de la conservación de la energía, las velocidades deberán entonces disminuir y llegarán a anularse, lo que indica un movimiento limitado. En cambio, si V disminuyera a consecuencia de cierta desviación respecto al equilibrio, la energía cinética y las velocidades aumentarían indefinidamente, lo que corresponde a un movimiento inestable. A la misma conclusión podemos llegar gráficamente examinando la forma de la curva de energía potencial indicada simbólicamente en la figura 6-1. En el transcurso de nuestro

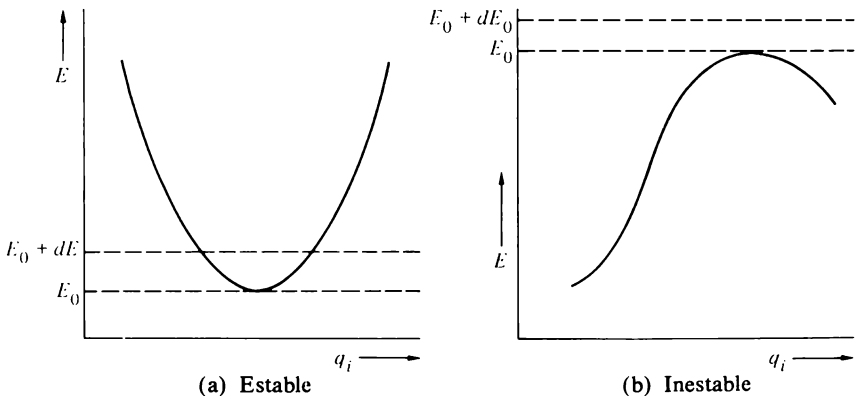


FIGURA 6-1

Forma de la curva de energía potencial en el equilibrio.

estudio daremos una demostración matemática más rigurosa de que el equilibrio estable exige un mínimo de V .

Nos va a interesar el movimiento del sistema en la inmediata proximidad de una configuración de equilibrio estable. Como las desviaciones respecto al equilibrio han de ser pequeñas, todas las funciones se podrán desarrollar en serie de Taylor entorno al equilibrio, conservándose solamente los términos de orden inferior. Representaremos por η_i las desviaciones de las coordenadas generalizadas respecto al equilibrio:

$$q_i = q_{0i} + \eta_i, \quad (6.2)$$

y podremos tomarlas como nuevas coordenadas generalizadas del movimiento. Desarrollando la energía potencial en torno a q_{0i} , obtenemos

$$V(q_1, \dots, q_n) = V(q_{01}, \dots, q_{0n}) + \left(\frac{\partial V}{\partial q_i} \right)_0 \eta_i + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \right)_0 \eta_i \eta_j + \dots, \quad (6.3)$$

donde se ha utilizado, como de costumbre, el convenio de sumación. Los términos lineales en η_i se anulan automáticamente a consecuencia de las condiciones de equilibrio (6-1). El primer término de la serie es la energía potencial de la posición de equilibrio y si desplazamos el cero arbitrario de potencial para que coincida con el potencial de equilibrio, también podremos anular este término. Como primera aproximación de V nos quedan, pues, los términos cuadráticos:

$$V = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \right)_0 \eta_i \eta_j = \frac{1}{2} V_{ij} \eta_i \eta_j, \quad (6.4)$$

en donde las segundas derivadas de V se han designado por las constantes V_{ij} que sólo dependen de los valores de equilibrio de las q_i . De su definición, resulta evidente que las V_{ij} son simétricas, es decir, que $V_{ij} = V_{ji}$. Los coeficientes V_{ij} pueden anularse en diversas circunstancias. Así, el potencial puede simplemente ser independiente de una coordenada particular, con lo que el equilibrio tendrá lugar para todo valor arbitrario de dicha coordenada. En tales casos decimos que se trata de un equilibrio *lâbil, neutro o indiferente*. También puede suceder, p. ej., que el potencial se comporte como cuártica en dicho punto, haciendo así de nuevo que se anulen una o varias de las V_{ij} . Uno y otro caso requieren tratamiento especial en el estudio matemático que sigue.

Para la energía cinética podemos obtener un desarrollo en serie análogo. Como las coordenadas generalizadas no contienen explícitamente el tiempo, la energía cinética será función cuadrática homogénea de las velocidades (cfr. ec. 1-71):

$$T = \frac{1}{2} m_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j = \frac{1}{2} m_{ij} \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j, \quad (6.5)$$

Los coeficientes m_{ij} son, en general, funciones de las coordenadas q_k , pero pueden desarrollarse en serie de Taylor en torno a la configuración de equilibrio:

$$m_{ij}(q_1, \dots, q_n) = m_{ij}(q_{01}, \dots, q_{0n}) + \left(\frac{\partial m_{ij}}{\partial q_k} \right)_0 \eta_k + \dots,$$

Como la ecuación (6-5) ya es cuadrática en las $\dot{\eta}_i$, la aproximación más baja a T se obtiene suprimiendo los términos de los desarrollos de m_{ii} menos el primero. Representando por T_{ij} los valores constantes de las funciones m_{ij} en el equilibrio podremos, pues, escribir la energía cinética en la forma

$$T = \frac{1}{2} T_{ij} \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j. \quad (6-6)$$

También ahora resulta evidente que las constantes T_{ij} deben ser simétricas, ya que cada uno de los términos de la ecuación (6-6) no se ve afectado al permutar los índices. Según las ecuaciones (6-4) y (6-6), la lagrangiana viene dada por

$$L = \frac{1}{2} (T_{ij} \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j - V_{ij} \eta_i \eta_j). \quad (6-7)$$

Tomando por coordenadas generalizadas las η , la lagrangiana de la ecuación (6-7) conduce a las siguientes n ecuaciones de movimiento:

$$T_{ij} \ddot{\eta}_j + V_{ij} \eta_j = 0, \quad (6-8)$$

donde se ha hecho uso explícito de la propiedad de simetría de los coeficientes V_{ij} y T_{ij} . Cada una de las ecuaciones (6-8) contendrá, en general, todas las coordenadas η_i y para obtener el movimiento cerca del equilibrio deberemos integrar este sistema de ecuaciones diferenciales.

6-2 ECUACIÓN DE VALORES PROPIOS Y TRANSFORMACIÓN A LOS EJES PRINCIPALES

Las ecuaciones de movimiento (6-8) son ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes, cuya forma es muy conocida en la teoría de circuitos eléctricos. Ello nos lleva a ensayar una solución oscilatoria de la forma

$$\eta_i = C a_i e^{-i\omega t}. \quad (6-9)$$

Aquí, Ca_i da la amplitud compleja de la oscilación para cada coordenada η_i , introduciéndose el factor C por conveniencia a título de factor de escala, el mismo para todas las coordenadas. Desde luego, se sobreentiende que al movimiento real corresponde la parte real de la ecuación (6-9). La sustitución de la solución ensayada (6-9) en las ecuaciones de movimiento conduce a las siguientes ecuaciones para los factores de amplitud:

$$(V_{ij}a_j - \omega^2 T_{ij}a_j) = 0. \quad (6-10)$$

Las ecuaciones (6-10) constituyen n ecuaciones lineales homogéneas en las a_i y por tanto sólo habrá solución si es nulo el determinante de los coeficientes:

$$\begin{vmatrix} V_{11} - \omega^2 T_{11} & V_{12} - \omega^2 T_{12} \\ V_{21} - \omega^2 T_{21} & V_{22} - \omega^2 T_{22} \\ V_{31} - \omega^2 T_{31} \\ \vdots \end{vmatrix} = 0. \quad (6-11)$$

Esta condición es, de hecho, una ecuación algebraica de grado n en ω^2 y las raíces del determinante nos dan las frecuencias para las cuales la ecuación (6-9) representa una solución correcta a las ecuaciones de movimiento. Para cada uno de estos valores de ω^2 se pueden despejar las amplitudes a_i de las ecuaciones (6-10) o, más exactamente, se pueden despejar $n - 1$ de las amplitudes en función de las a_i restantes.

Podemos obtener la perspectiva matemática adecuada considerando brevemente una variante sencilla del problema general. Supongamos que las coordenadas generalizadas apropiadas fuesen las coordenadas cartesianas del sistema de partículas. Entonces, la energía cinética sólo contendrá los cuadrados de las componentes de velocidad. Introduciendo coordenadas generalizadas que sean las componentes cartesianas multiplicadas por la raíz cuadrada de la masa de la partícula,* podremos poner la energía cinética en la forma

$$T = \frac{\dot{\eta}_i \dot{\eta}_i}{2}, \quad (6-12)$$

con lo que en este caso $T_{ij} = \delta_{ij}$. Si representamos ω^2 por λ , las ecuaciones homogéneas (6-10) se simplifican y quedan en la forma

$$V_{ij}a_j = \lambda a_i. \quad (6-13)$$

* A veces llamadas *coordenadas ponderadas en masa*.

Pero esta es, precisamente, la formulación del problema de valores propios que hemos visto en los capítulos 4 y 5; la única diferencia es que el espacio vectorial tiene n dimensiones en vez de tres. Considerando V_{ij} como elemento de una matriz $Vn \times n$ y a_i como componente de un vector n -dimensional \mathbf{a} , la ecuación (6-13) podrá ponerse en la forma

$$V\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a}, \quad (6-14)$$

que tiene el mismo aspecto que la ecuación de valores propios (4-79). En estas condiciones, la ecuación (6-11) se reduce a la ecuación secular para los valores propios λ .

Como V es simétrica y real, los valores propios correspondientes son reales (cfr. § 5-4). Si los n conjuntos de las a_i correspondientes a los n valores propios se colocan formando una matriz \mathbf{A} , entonces, al igual que en § 4-6, \mathbf{A} deberá diagonalizar a V mediante una transformación de semejanza. Es más, los n vectores propios \mathbf{a} son ortogonales entre sí (§ 5-4) y por tanto, la matriz diagonalizadora \mathbf{A} deberá ser ortogonal.

Estas conclusiones son válidas aparte del caso particular en que T_{ij} sea diagonal; podemos demostrar resultados análogos para el problema general. Las ecuaciones (6-10) representan un tipo de ecuación de valores propios, ya que al escribir T_{ij} en forma de elemento de una matriz T , las ecuaciones pueden escribirse así:

$$V\mathbf{a} = \lambda T\mathbf{a}. \quad (6-15)$$

Aquí, el efecto de V sobre el vector propio \mathbf{a} no es simplemente reproducir el vector multiplicado por un factor λ , como en el problema de valores propios ordinario. Ahora, el vector propio es tal que cuando V actúa sobre \mathbf{a} produce un múltiplo del resultado de la acción de T sobre \mathbf{a} . Vamos a demostrar que los valores propios de λ para los cuales puede satisfacerse la ecuación (6-15) son todos reales a consecuencia de la hermiticidad de T y V y además positivos. También demostraremos que los vectores propios \mathbf{a} son ortogonales —en cierto sentido. Además, la matriz \mathbf{A} de los vectores propios diagonaliza tanto a T como a V , la primera a la matriz unidad $\mathbf{1}$ y la segunda a una matriz cuya diagonal son los valores propios λ .

Procediendo como en § (5-4), sea \mathbf{a}_k una matriz columna representativa del vector propio k -ésimo, que satisface la ecuación de valores propios*

$$V\mathbf{a}_k = \lambda_k T\mathbf{a}_k. \quad (6-16)$$

La ecuación adjunta, es decir, la ecuación compleja conjugada traspuesta, para λ , tiene la forma

$$\mathbf{a}_l^\dagger V = \lambda_l^* \mathbf{a}_l^\dagger T. \quad (6-17)$$

* No es necesario añadir que *no* hay suma extendida a k en la ecuación (6-16). En este capítulo, el convenio de suma sólo se aplicará a las componentes de matrices o tensores (de cualquier orden) y *no* a las propias matrices y tensores.

Aquí, \mathbf{a}_l^\dagger representa el vector adjunto —la matriz fila completa conjugada— y se ha hecho uso explícito del hecho de que las matrices \mathbf{V} y \mathbf{T} son reales y simétricas o, dicho de otro modo, hermiticas. Multipliquemos la ecuación (6-17) por la derecha por \mathbf{a}_k y restemos el resultado del producto similar de la ecuación (6-16) por la izquierda por \mathbf{a}_l . El primer miembro de la ecuación diferencia será nulo y sólo queda

$$0 = (\lambda_k - \lambda_l^*) \mathbf{a}_l^\dagger \mathbf{T} \mathbf{a}_k. \quad (6-18)$$

Cuando sea $l = k$, la ecuación (6-18) adopta la forma especial

$$(\lambda_k - \lambda_k^*) \mathbf{a}_k^\dagger \mathbf{T} \mathbf{a}_k = 0. \quad (6-19)$$

Que el producto de matrices de la ecuación (6-19) es real se puede demostrar de manera inmediata tomando su complejo conjugado y utilizando la propiedad de hermiticidad de \mathbf{T} . Sin embargo, queremos demostrar que el producto de matrices no sólo es real sino también definido positivo. Para tal fin, separamos \mathbf{a}_k en sus componentes real e imaginaria:

$$\mathbf{a}_k = \boldsymbol{\alpha}_k + i\boldsymbol{\beta}_k.$$

El producto de matrices podrá entonces escribirse en la forma

$$\mathbf{a}_k^\dagger \mathbf{T} \mathbf{a}_k = \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_k \mathbf{T} \boldsymbol{\alpha}_k + \tilde{\boldsymbol{\beta}}_k \mathbf{T} \boldsymbol{\beta}_k + i(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_k \mathbf{T} \boldsymbol{\beta}_k - \tilde{\boldsymbol{\beta}}_k \mathbf{T} \boldsymbol{\alpha}_k). \quad (6-20)$$

El término imaginario se anula en virtud de la simetría de \mathbf{T} y por tanto, tal como hemos dicho, el producto de matrices es real. Además, podemos observar que la energía cinética de la ecuación (6-6) se puede escribir en función de una matriz columna $\hat{\eta}$ de la manera siguiente:

$$T = \frac{1}{2} \hat{\eta} \mathbf{T} \hat{\eta}. \quad (6-6')$$

Por tanto, los dos primeros términos de la ecuación (6-20) son iguales al doble de las energías cinéticas cuando la matriz velocidad $\hat{\eta}_k$ tenga, respectivamente, los valores $\boldsymbol{\alpha}_k$ y $\boldsymbol{\beta}_k$. Ahora bien, una energía cinética debe ser, por su propia naturaleza, definida positiva para velocidades reales y por tanto el producto de matrices de la ecuación (6-19) no puede ser nulo. De aquí se deduce que los valores propios λ_k deben ser reales.

Como los valores propios son reales, los cocientes entre componentes a_{jk} de los vectores propios, definidos por las ecuaciones (6-16) deberán ser todos reales. Desde luego, aún queda una cierta indeterminación, ya que podemos tomar a voluntad el valor de una de las a_{jk} sin vulnerar las ecuaciones (6-16). Sin embargo, podemos exigir que dicha componente sea real y por serlo λ_k queda asegurado que las demás componentes sean

reales. (Todo factor de fase complejo de la amplitud de oscilación se introducirá en el factor C de la ecuación 6-9.) Multipliquemos ahora la ecuación (6-16) por la izquierda por $\tilde{\mathbf{a}}_k$ y despejemos λ_k :

$$\dot{\lambda}_k = \frac{\tilde{\mathbf{a}}_k \mathbf{V} \mathbf{a}_k}{\tilde{\mathbf{a}}_k \mathbf{T} \mathbf{a}_k}. \quad (6-21)$$

El denominador de esta expresión es igual al doble de la energía cinética para velocidades a_{ik} y como los vectores propios son reales, la suma deberá ser definida positiva. Análogamente, el numerador es la energía potencial para coordenadas a_{ik} y la condición de que \mathbf{V} sea mínimo en el equilibrio exige que la suma sea positiva o nula. Ni el numerador ni el denominador pueden ser negativos y el denominador no puede ser nulo, luego λ será siempre finito y positivo. (No obstante, puede ser nulo.) Recordemos que λ es ω^2 , por lo que un λ positivo corresponde a frecuencias de oscilación reales. Si el potencial no fuese un mínimo local, el numerador de la ecuación (6-21) podría ser negativo, dando lugar a frecuencias imaginarias que darían lugar a un crecimiento exponencial de las η_i ilimitado en el tiempo. Dicho movimiento sería, evidentemente, inestable y tenemos en este hecho la prometida demostración matemática de que para que el movimiento sea estable es necesario un mínimo del potencial.

Volvamos, de momento, a la ecuación (6-18) la cual, por ser reales los valores y vectores propios, puede escribirse

$$(\dot{\lambda}_k - \dot{\lambda}_l) \tilde{\mathbf{a}}_l \mathbf{T} \mathbf{a}_k = 0. \quad (6-18')$$

Si son distintas todas las raíces de la ecuación secular, la ecuación (6-18) sólo podrá ser válida si el producto de matrices es nulo para l diferente de k :

$$\tilde{\mathbf{a}}_l \mathbf{T} \mathbf{a}_k = 0, \quad l \neq k. \quad (6-22a)$$

En varias ocasiones hemos señalado que los valores de las a_{jk} no están fijados totalmente por las ecuaciones (6-10) de valores propios. Podemos eliminar esta indeterminación exigiendo que, además,

$$\tilde{\mathbf{a}}_k \mathbf{T} \mathbf{a}_k = 1. \quad (6-22b)$$

Hay n ecuaciones (6-22) y fijan unívocamente la componente arbitraria de cada uno de los n vectores propios \mathbf{a}_k . * Si con todos los vectores propios \mathbf{a}_k formamos una matriz cuadrada

* La ecuación (6-22b) puede ponerse en una forma que muestre explícitamente que es suficiente para eliminar la indeterminación de las a_{jk} . Supongamos que queremos evaluar la magnitud de a_{1k} ; el cociente entre cualquier otra a_{jk} y a_{1k} se obtiene de las ecuaciones (6-10). Entonces, la ecuación (6-22 b) puede escribirse en la forma

$$\sum_{i,j} T_{ij} \frac{a_{ik}}{a_{1k}} \frac{a_{jk}}{a_{1k}} = -\frac{1}{a_{1k}^2}.$$

El primer miembro está determinado por las ecuaciones de valores propios y puede evaluarse directamente para dar a_{1k} .

A de componentes a_{jk} (cfr. § 4-6), las dos ecuaciones (6-22 a y b) podrán combinarse en una ecuación matricial:

$$\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{T}\mathbf{A} = \mathbf{1}. \quad (6-23)$$

Cuando se repitan dos o más raíces, el razonamiento que lleva a la ecuación (6-22 a) falla para $\lambda_l = \lambda_k$. Vamos a posponer el estudio de este caso excepcional de *degeneración*.^{*} Baste, por ahora, decir que siempre puede hallarse un conjunto de coeficientes a_{jk} que satisfaga las condiciones de valores propios dadas por las ecuaciones (6-10) y la ecuación (6-22a), con lo cual siempre será válida la ecuación (6-23).

La ecuación (6-23) es una reminiscencia de la condición de que sea ortogonal una matriz \mathbf{B} (cfr. ec. 4-36):

$$\tilde{\mathbf{B}}\mathbf{B} = \mathbf{1}.$$

Para ver la relación existente entre la condición de \mathbf{A} y la condición de ortogonalidad, observemos que la ecuación (6-19) es análoga a la ecuación correspondiente para los vectores propios del tensor de inercia (cfr. ec. 5-29):

$$(I_j - I_l)\mathbf{R}_l \cdot \mathbf{R}_j = 0.$$

De esta relación deducimos que los vectores propios distintos eran ortogonales:

$$\mathbf{R}_l \cdot \mathbf{R}_j = 0.$$

Si decidiéramos normalizar la longitud de los vectores propios:

$$\mathbf{R}_j \cdot \mathbf{R}_j = 1$$

(análoga a la ecuación 6-22 b). Las condiciones de ortogonalidad y normalización pueden resumirse diciendo que la matriz \mathbf{X} que contiene todos los vectores propios (cfr. nota pie p. 254) ha de ser ortogonal:

$$\tilde{\mathbf{X}}\mathbf{X} = \mathbf{1}.$$

De igual manera, la ecuación (6-23) es equivalente a la condición de que los vectores propios \mathbf{a}_j sean ortogonales y de módulo unidad —pero en un espacio de Riemann particular que no es, necesariamente, cartesiano.

* El empleo actual de la palabra «degeneración» (para indicar raíces múltiples de la ecuación secular) tiene significado diferente del que se le dará en capítulos posteriores, particularmente en el Capítulo 10.

Se define un *espacio de Riemann* tal que el elemento ds de longitud de camino venga dado por

$$ds^2 = g_{ik} dx_i dx_k, \quad (6\ 24)$$

donde g_{ik} es el elemento del *tensor métrico* \mathbf{G} del espacio. Correspondientemente, el producto escalar de dos vectores \mathbf{x} , \mathbf{y} es, en dicho espacio,

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_i g_{ik} y_k = \tilde{\mathbf{x}} \mathbf{G} \mathbf{y}, \quad (6\ 25)$$

con lo que el cuadrado del módulo de un vector \mathbf{x} es

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = \tilde{\mathbf{x}} \mathbf{G} \mathbf{x}. \quad (6\ 26)$$

Está claro que para coordenadas cartesianas el tensor métrico es la matriz unidad $\mathbf{1}$. En general, \mathbf{G} será diagonal en el caso de coordenadas ortogonales curvilíneas (cfr. el ejemplo de las coordenadas esféricas tridimensionales).

Podremos describir ahora la energía cinética (ec. 6-6') de tal manera que $2T$ sea el cuadrado del módulo del vector velocidad en un *espacio de configuración para el cual \mathbf{T} sea el tensor métrico*. Análogamente, la ecuación (6-23), o sus partes componentes (ecs. 6-22 a, b), dice que los vectores propios \mathbf{a}_k son ortogonales en dicho espacio y que se han normalizado para tener módulo unidad en él.

En el capítulo 4, la transformación de *semejanza* de una matriz \mathbf{C} por una matriz \mathbf{B} se definía mediante la ecuación (cfr. ec. 4-41):

$$\mathbf{C}' = \mathbf{B} \mathbf{C} \mathbf{B}^{-1}.$$

Introducimos ahora el concepto relacionado de transformación de *congruencia* de \mathbf{C} por \mathbf{A} mediante la relación

$$\mathbf{C}' = \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{C} \mathbf{A}. \quad (6\ 27)$$

Si \mathbf{A} es ortogonal, con lo que $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A}^{-1}$, no habrá ninguna diferencia esencial entre los dos tipos de transformación (según puede verse denotando \mathbf{A}^{-1} por la matriz \mathbf{E}). Por tanto, podemos leer la ecuación (6-23) diciendo que \mathbf{A} transforma \mathbf{T} mediante una transformación de congruencia en una matriz diagonal, en particular en la matriz unidad.

Si se introdujera una matriz diagonal λ con elementos $\lambda_k = \lambda_k \delta_k$, las ecuaciones (6-16) de valores propios podrían escribirse

$$V_{ij} a_{jk} = T_{ij} a_{jl} \lambda_{lk},$$

que, con notación matricial, sería

$$\mathbf{V} \mathbf{A} = \mathbf{T} \mathbf{A} \lambda. \quad (6\ 28)$$

Multiplicando por la izquierda por $\tilde{\mathbf{A}}$, la ecuación (6-28) toma la forma

$$\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{V}\mathbf{A} = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{T}\mathbf{A}\lambda,$$

la cual, en virtud de la ecuación (6-23) se reduce a

$$\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{V}\mathbf{A} = \lambda. \quad (6-29)$$

Nuestra ecuación final (6-29) dice que una transformación de congruencia de \mathbf{V} por \mathbf{A} la cambia en una matriz diagonal cuyos elementos sean los valores propios λ_k .

La matriz \mathbf{A} , pues, diagonaliza simultáneamente a \mathbf{T} y a \mathbf{V} . Recordando la interpretación de \mathbf{T} como tensor métrico en el espacio de configuración, podemos dar al proceso de diagonalización el significado siguiente. \mathbf{A} es la matriz de una transformación lineal de un sistema de ejes *inclinados* a un sistema de ejes *cartesianos rectangulares*, tal como evidencia el hecho de que el tensor métrico transformado es 1. Al mismo tiempo, los nuevos ejes son los *ejes principales* ortogonales de \mathbf{V} , por lo que la matriz \mathbf{V} será diagonal en el sistema de coordenadas transformado. El proceso total de obtención de las frecuencias fundamentales de pequeña oscilación es, un tipo particular de *transformación a ejes principales*, tal como se vio en el capítulo 5.*

Sólo queda por considerar el caso de raíces múltiples de la ecuación secular, situación más molesta en la teoría matemática que en la práctica. Si se repite una o más raíces, el número de ecuaciones independientes entre los valores propios resulta insuficiente para determinar incluso el cociente entre componentes de un vector propio. Así, si el valor propio λ es una raíz doble, se podrán elegir arbitrariamente dos cualesquiera de las componentes a_j , quedando fijadas el resto por las ecuaciones de valores propios. Como ejemplo, consideremos un sistema bidimensional en el cual la ecuación secular presenta el aspecto

$$\begin{vmatrix} V_{11} - \lambda T_{11} & V_{12} - \lambda T_{12} \\ V_{12} - \lambda T_{12} & V_{22} - \lambda T_{22} \end{vmatrix} = 0,$$

o sea

$$(V_{12} - \lambda T_{12})^2 - (V_{11} - \lambda T_{11})(V_{22} - \lambda T_{22}) = 0.$$

Supongamos ahora que los elementos de la matriz sean tales que

$$\frac{V_{12}}{T_{12}} = \frac{V_{11}}{T_{11}} = \frac{V_{22}}{T_{22}} = \lambda_0. \quad (6-30)$$

* En § 6-3 daremos otra interpretación geométrica de la transformación a ejes principales, en relación con coordenadas normales.

Entonces, la ecuación secular podrá escribirse

$$(T_{12}^2 - T_{11}T_{22})(\lambda_0 - \lambda)^2 = 0,$$

indicando que λ_0 es una raíz doble de la ecuación secular. Ahora bien, las ecuaciones (6-10) de valores propios son, para esta raíz,

$$(V_{11} - \lambda_0 T_{11})a_1 + (V_{12} - \lambda_0 T_{12})a_2 = 0,$$

$$(V_{12} - \lambda_0 T_{12})a_1 + (V_{22} - \lambda_0 T_{22})a_2 = 0,$$

y en virtud de las condiciones (6-30) todos los coeficientes de las a se anularán idénticamente. Entonces, todo sistema de valores de las dos a satisfarán las ecuaciones de valores propios. Incluso con el requisito de normalización (6-22 b) habrá así una simple infinitud de vectores propios correspondientes a una raíz doble de la ecuación secular, una doble infinitud para una raíz triple, etc.

En general, un par cualquiera de vectores propios elegidos al azar entre el conjunto infinito de vectores permitidos no serán ortogonales. A pesar de todo, siempre será posible construir un par de vectores permitidos que sean ortogonales y podrán utilizarse para formar la matriz ortogonal \mathbf{A} . Por razón de sencillez, consideremos el procedimiento que hay que seguir en el caso de una raíz doble. Sean \mathbf{a}'_k y \mathbf{a}'_l dos vectores propios permisibles cualesquiera para una raíz doble dada λ , que se hayan normalizado de manera que satisfagan la ecuación (6-22b). Toda combinación lineal de \mathbf{a}'_k y \mathbf{a}'_l será también un vector propio para la raíz λ . Queremos, pues, construir un vector \mathbf{a}_l ,

$$\mathbf{a}_l = c_1 \mathbf{a}'_k + c_2 \mathbf{a}'_l, \quad (6 \ 31)$$

en donde c_1 y c_2 son constantes tales que \mathbf{a}_l sea ortogonal a \mathbf{a}'_k . La condición de ortogonalidad (ec. 6-22a) exige entonces que

$$\bar{\mathbf{a}}_l \mathbf{T} \mathbf{a}'_k = c_1 + c_2 \bar{\mathbf{a}}'_l \mathbf{T} \mathbf{a}'_k = 0,$$

donde se ha hecho uso de la normalización \mathbf{a}'_k . Se deduce, pues, que el cociente entre c_1 y c_2 debe venir dado por

$$\frac{c_1}{c_2} = -\bar{\mathbf{a}}'_l \mathbf{T} \mathbf{a}'_k \equiv -\tau_l. \quad (6-32)$$

Además, el requisito de que \mathbf{a}_l esté normalizado proporciona otra condición impuesta a los dos coeficientes la cual, en función del τ_l definido por la ecuación (6-32), toma la forma

$$\bar{\mathbf{a}}_l \mathbf{T} \mathbf{a}_l = 1 = c_1^2 + c_2^2 + 2c_1 c_2 \tau_l. \quad (6 \ 33)$$

Juntas, las dos ecuaciones fijan los cocientes c_1 y c_2 y por tanto el vector \mathbf{a}_i . Los vectores \mathbf{a}_i y $\mathbf{a}_k \equiv \mathbf{a}'_k$ son automáticamente ortogonales a los vectores propios de los otros valores propios distintos, ya que entonces el razonamiento basado en la ecuación (6-18') permanece válido. Luego tenemos un conjunto de n vectores propios \mathbf{a}_j , cuyas componentes forman la matriz \mathbf{A} que satisface la ecuación (6-23).

En el caso de una raíz de orden de multiplicidad mayor se sigue un método análogo. Si es λ una raíz m -ple, los vectores propios normalizados ortogonales se forman con combinaciones lineales de cualesquiera de los m vectores propios correspondientes $\mathbf{a}'_1, \dots, \mathbf{a}'_m$.

Se toma entonces el primero de los vectores propios «ortonormales» \mathbf{a}_1 , múltiplo de \mathbf{a}'_1 ; para \mathbf{a}_2 se toma una combinación lineal de \mathbf{a}'_1 y \mathbf{a}'_2 ; etc. De esta manera, el número de constantes a determinar será igual a la suma de los m primeros números enteros, es decir, igual a $\frac{1}{2}m(m+1)$. Los requisitos de normalización proporcionan m condiciones, mientras que hay $\frac{1}{2}m(m-1)$ condiciones de ortogonalidad y juntas son exactamente suficientes para fijar unívocamente las constantes.

Este proceso de construcción de vectores propios ortogonalizados en el caso de raíces múltiples es totalmente análogo al método Gram-Schmidt de construcción de una secuencia de funciones ortogonales a partir de un conjunto arbitrario de funciones. Expresado en lenguaje geométrico, también se ve que es idéntico al procedimiento seguido en el capítulo 5 para los valores propios múltiples del tensor de inercia. Por ejemplo, la indeterminación añadida de las componentes de los vectores propios en el caso de una raíz doble significa que todos los vectores de un plano son vectores propios. Sólo tomamos dos direcciones perpendiculares cualesquiera del plano como nuevos ejes principales, con los vectores propios de \mathbf{A} como vectores unitarios según estos ejes.*

6-3 FRECUENCIAS DE VIBRACIÓN LIBRE Y COORDENADAS NORMALES

Los razonamientos un tanto farragosos del apartado anterior ponen de manifiesto que las ecuaciones de movimiento se satisfacen mediante una solución oscilatoria de la forma (6-9) no tan sólo para una frecuencia sino, en general, para un conjunto de n frecuencias ω_k . La solución completa de las ecuaciones de movimiento, pues, comporta una superposición de oscilaciones de todas las frecuencias permisibles. Por tanto, si separamos ligeramente del equilibrio el sistema y luego lo soltamos, efectuará pequeñas oscilaciones en torno al equilibrio con las frecuencias $\omega_1, \dots, \omega_n$. Así pues, a las soluciones de la ecuación secular se les da a menudo el nombre de frecuencias de *vibración libre* o también *frecuencias de resonancia* del sistema.

La solución general de las ecuaciones de movimiento podemos escribirla ahora en forma de suma para un índice k :

$$\eta_i = C_k a_{ik} e^{-i\omega_k t}, \quad (6-34)$$

habiendo un factor de escala complejo C_k para cada frecuencia de resonancia. Podríamos objetar que para cada solución λ_k de la ecuación secular hay dos frecuencias de resonancia

* Véase también nota pie p. 255.

$+\omega_k$ y $-\omega_k$. El vector propio \mathbf{a}_k sería el mismo para ambas frecuencias, pero los factores de escala C_k^+ y C_k^- podrían ser diferentes. En estas condiciones, la solución general tendría el aspecto siguiente:

$$\eta_i = a_{ik}(C_k^+ e^{+i\omega_k t} + C_k^- e^{-i\omega_k t}). \quad (6-35)$$

Sin embargo, debemos recordar que el movimiento real es la parte real de la solución compleja y la parte real de la ecuación (6-34) o (6-35) se puede escribir en la forma

$$\eta_i = f_k a_{ik} \cos(\omega_k t + \delta_k), \quad (6-36)$$

donde la amplitud f_k y la fase δ_k se determinan a partir de las condiciones iniciales. Cualquiera de las soluciones (6-34 y 6-35) representará, pues, el movimiento real y la primera, desde luego, es la más conveniente.

Las propiedades de ortogonalidad de \mathbf{A} facilitan en gran manera la determinación de los factores de escala C_k en función de las condiciones iniciales. En $t = 0$, la parte real de la ecuación (6-34) se reduce a

$$\eta_i(0) = \text{Re } C_k a_{ik}, \quad (6-37)$$

donde Re significa «parte real de». Análogamente, el valor inicial de las velocidades que se obtiene es

$$\dot{\eta}_i(0) = \text{Im } C_k a_{ik} \omega_k. \quad (6-38)$$

donde $\text{Im } C_k$ representa la parte imaginaria de C_k . A partir de estas $2n$ ecuaciones se pueden evaluar las partes real e imaginaria de las n constantes C_k . Por ejemplo, para resolver la ecuación (6-37) escribámosla en función de las matrices columna $\boldsymbol{\eta}(0)$ y \mathbf{C} :

$$\boldsymbol{\eta}(0) = \mathbf{A} \text{Re } \mathbf{C}. \quad (6-37')$$

Si multiplicamos por la izquierda por $\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{T}$ y utilizamos la ecuación (6-23) obtenemos inmediatamente una solución para $\text{Re } \mathbf{C}$:

$$\text{Re } \mathbf{C} = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{T}\boldsymbol{\eta}(0),$$

o bien, tomando la componente l -ésima,

$$\text{Re } C_l = a_{jl} T_{jk} \eta_k(0), \quad (6-39)$$

Mediante un procedimiento análogo obtendríamos la parte imaginaria del factor de escala*

$$\text{Im } C_l = \frac{1}{\omega_l} \sum_{j,k} a_{jl} T_{jk} \dot{\eta}_k(0). \quad (6-40)$$

Las ecuaciones (6-39) y (6-40) permiten, pues, el cálculo directo de los factores complejos C_l (y por tanto las amplitudes y fases) en función de las condiciones iniciales y las matrices T y A .

La solución para cada coordenada (ec. 6-34) es, en general, una suma de oscilaciones armónicas simples de todas las frecuencias ω_k que satisfacen la ecuación secular. A menos que suceda que todas las frecuencias sean conmensurables, es decir, fracciones racionales unas de otras, η_i no repetirá nunca su valor inicial y por tanto no será función periódica del tiempo. No obstante, podemos pasar mediante una transformación de las η_i a un nuevo sistema de coordenadas generalizadas que sean todas funciones periódicas sencillas del tiempo —sistema de variables conocidas por el nombre de *coordenadas normales*.

Definamos un nuevo sistema de coordenadas ζ_j relacionadas con las η_i originales mediante las ecuaciones

$$\eta_i = a_{ij} \zeta_j, \quad (6-41)$$

o sea, en función de las matrices columna η y ζ ,

$$\eta = A\zeta. \quad (6-41')$$

La energía potencial (ec. 6-4) se escribe con notación matricial en la forma

$$V = \frac{1}{2} \tilde{\eta} V \eta. \quad (6-42)$$

Ahora bien, la matriz fila traspuesta $\tilde{\eta}$ está relacionada con ζ mediante la ecuación

$$\tilde{\eta} = \tilde{A}\zeta = \zeta \tilde{A},$$

por lo que la energía potencial también podrá escribirse en la forma

$$V = \frac{1}{2} \zeta \tilde{A} V A \zeta.$$

* Se indica explícitamente la suma para j y k porque no hay suma para el subíndice repetido l .

Pero \mathbf{A} diagonaliza a \mathbf{V} mediante una transformación de congruencia (cfr. ec. 6-29) y por tanto, el potencial se reducirá simplemente a

$$V = \frac{1}{2} \tilde{\zeta} \lambda \zeta = \frac{1}{2} \omega_k^2 \zeta_k^2. \quad (6-43)$$

En las nuevas coordenadas, la energía cinética presenta una forma aún más simple. Como las velocidades se transforman de igual manera que las coordenadas, la T dada por la ecuación (6-6) se transformará en

$$T = \frac{1}{2} \tilde{\zeta} \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{T} \mathbf{A} \zeta,$$

la cual, en virtud de la ecuación (6-23), se reduce a

$$T = \frac{1}{2} \tilde{\zeta} \zeta \dot{\zeta} = \frac{1}{2} \zeta_i \dot{\zeta}_i. \quad (6-44)$$

Las ecuaciones (6-43) y (6-44) dicen que, en las nuevas coordenadas, las energías potencial y cinética son sumas de cuadrados solamente, sin que haya términos cruzados. Desde luego, este resultado sólo es otra manera de decir que \mathbf{A} produce una transformación a ejes principales. Recordemos que la transformación a ejes principales del tensor de inercia estaba destinada concretamente a reducir el momento de inercia a una suma de cuadrados, siendo los nuevos ejes los ejes principales del elipsoide de inercia. Ahora, las energías cinética y potencial son también formas cuadráticas (como lo era el momento de inercia) y ambas están diagonalizadas por \mathbf{A} . Por esta razón, la transformación a ejes principales que hemos utilizado aquí constituye un ejemplo particular del conocido proceso algebraico de *diagonalización simultánea de dos formas cuadráticas*.

Hay otra manera de contemplar la transformación a ejes principales de T y V , cuyo lenguaje es más próximo al proceso de diagonalización del tensor de inercia descrito en el capítulo 5. No proporciona ninguna simplificación del proceso de cálculo pero ayuda a explicar por qué es posible diagonalizar simultáneamente dos formas cuadráticas —y por qué no se puede hacerlo, en general, con tres. La matriz \mathbf{T} es real y simétrica, al igual que el tensor de inercia \mathbf{I} . Si consideramos que el espacio η sea un espacio cartesiano de n dimensiones, será posible hallar una transformación ortogonal real \mathbf{B} que lleve a un nuevo sistema de coordenadas cartesianas,

$$\mathbf{y} = \mathbf{B} \boldsymbol{\eta},$$

en el cual \mathbf{T} sea diagonal. La matriz \mathbf{B} deberá transformar a \mathbf{T} mediante una transformación de semejanza en una matriz diagonal \mathbf{C} :

$$\mathbf{B} \mathbf{T} \mathbf{B}^{-1} = \mathbf{B} \tilde{\mathbf{T}} \mathbf{B} = \mathbf{C}.$$

Como la transformación inversa es

$$\eta = \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{y}, \quad \tilde{\eta} = \tilde{\mathbf{y}}\mathbf{B},$$

la energía cinética se transformará de la manera siguiente:

$$2T = \tilde{\eta}\mathbf{T}\eta = \tilde{\mathbf{y}}\mathbf{B}\mathbf{T}\tilde{\mathbf{B}}\dot{\mathbf{y}} = \tilde{\mathbf{y}}\mathbf{C}\dot{\mathbf{y}} = C_i \dot{y}_i^2.$$

Como era de esperar, los nuevos ejes son los ejes principales del elipsoide de energía cinética. Como la energía cinética no puede ser nunca nula para velocidades finitas, es decir, es definida positiva, los valores principales C_i son siempre mayores que cero. Por tanto, será siempre posible introducir nuevas coordenadas z_i definidas por las relaciones

$$z_i = y_i \sqrt{C_i}, \quad (\text{no hay suma}) \quad (6-45)$$

En función de estas nuevas coordenadas, la energía cinética quedará definida por

$$2T = \dot{z}_i \dot{z}_i = \tilde{\mathbf{z}}\mathbf{1}\dot{\mathbf{z}}.$$

La transformación de coordenadas dada por la ecuación (6-45) no comporta ninguna rotación de los ejes; no es más que un cambio de escala según cada uno de los ejes y_i . Lo que se ha hecho en realidad es estirar o comprimir cada uno de los ejes principales hasta que el elipsoide de energía cinética se haya convertido en una esfera.

Las dos transformaciones sucesivas de coordenadas no diagonalizan, en general, a \mathbf{V} pero la energía potencial tendrá la forma

$$2V = \tilde{\mathbf{z}}\mathbf{D}\mathbf{z},$$

donde \mathbf{D} es una matriz real simétrica. Es pues posible hallar una tercera y última transformación de coordenadas mediante una matriz ortogonal real \mathbf{F} :

$$\zeta = \mathbf{F}\mathbf{z},$$

que diagonaliza a \mathbf{D} mediante una transformación de semejanza dando una matriz diagonal λ tal que

$$2V = \tilde{\zeta}\lambda\zeta = \lambda_i \zeta_i^2.$$

Esta rotación final de coordenadas no afecta a la forma de la energía cinética, porque una esfera siempre está diagonalizada en un sistema girado. Así pues, el truco para lograr la

diagonalización simultánea de dos formas cuadráticas, una definición positiva, consiste en hallar un sistema de coordenadas en el cual la forma definida positiva define una esfera, con lo que todas las direcciones serán ejes principales para ella. Queda ahora claro por qué no se puede, en general, diagonalizar simultáneamente tres formas cuadráticas. La rotación final se puede utilizar para diagonalizar una de ellas pero, normalmente, deja la forma cuadrática restante no diagonalizada. Esta lamentable circunstancia será importante cuando consideremos los efectos de disipación.

Para volver a las propiedades del sistema de coordenadas ζ_i , notaremos que las ecuaciones de movimiento comparten la simplificación dimanante de su empleo. La nueva lagrangiana es

$$L = \frac{1}{2} (\dot{\zeta}_k \dot{\zeta}_k - \omega_k^2 \zeta_k^2) \quad (6-46)$$

con lo que las ecuaciones de Lagrange para ζ_k son

$$\ddot{\zeta}_k + \omega_k^2 \zeta_k = 0. \quad (6-47)$$

Las ecuaciones (6-47) tienen las soluciones inmediatas

$$\zeta_k = C_k e^{-i\omega_k t}, \quad (6-48)$$

que se podrían haber visto directamente a partir de las ecuaciones (6-34) y (6-41). Cada una de las nuevas coordenadas es, pues, una función simplemente periódica que sólo contiene una de las frecuencias de resonancia. Ya hemos mencionado que a las ζ se acostumbra a llamarlas *coordenadas normales* del sistema.

Cada coordenada normal corresponde a una vibración del sistema con una sola frecuencia y a tales oscilaciones componentes se les llama *modos normales de vibración*. En cada modo, todas las partículas vibran con la misma frecuencia y con la misma fase,* estando determinadas las amplitudes relativas por los elementos matriciales a_{ik} . El movimiento total estará, pues, compuesto por la suma de los modos normales ponderados con los factores de amplitud y fase apropiados contenidos en las C_k .

Los armónicos de las frecuencias fundamentales están ausentes del movimiento total, esencialmente a causa de haber estipulado que sea pequeña la amplitud de la oscilación. Podemos, pues, representar el potencial por una forma cuadrática, la cual es característica del movimiento armónico simple. La transformación a coordenadas normales hace resaltar esto, ya que vemos que la lagrangiana en coordenadas normales (6-46) es la suma de lagrangianas de osciladores armónicos de frecuencias ω_k . Podemos así considerar que el movimiento total de oscilaciones pequeñas se obtiene excitando los distintos osciladores armónicos con diferentes intensidades y fases.†

* Las partículas pueden estar en oposición de fase si las a tienen signos opuestos.

† A fines de referencias futuras, podríamos mencionar que el mismo tipo de situación aparece en la cuantización del campo electromagnético. Las frecuencias de los fotones y las amplitudes de excitación se convierten en los «números de ocupación» cuantizados discretos (números de fotones de cada frecuencia).

6-4 VIBRACIONES LIBRES DE UNA MOLÉCULA TRIATÓMICA LINEAL

Para ilustrar la técnica de obtención de las frecuencias de resonancia y de los modos normales, vamos a considerar detalladamente un modelo basado en la molécula triatómica simétrica lineal. En la configuración de equilibrio de la molécula hay dos átomos de masa m situados simétricamente a uno y otro lado de un átomo de masa M (cfr. fig. 6-2). Los tres átomos están en línea recta y representamos por b las separaciones de equilibrio. Por razón de sencillez, primeramente sólo vamos a considerar vibraciones según la recta de la molécula y el complicado potencial interatómico real lo aproximaremos mediante dos resortes de constante de rigidez k que unan los tres átomos. Hay tres coordenadas evidentes que marcan la posición de los tres átomos en la recta citada. En estas coordenadas, la energía potencial es

$$V = \frac{k}{2}(x_2 - x_1 - b)^2 + \frac{k}{2}(x_3 - x_2 - b)^2.$$

Introduzcamos coordenadas relativas a las posiciones de equilibrio:

$$\eta_i = x_i - x_{0i},$$

donde

$$x_{02} - x_{01} = b = x_{03} - x_{02}.$$

La energía potencial se reduce entonces a

$$V = \frac{k}{2}(\eta_2 - \eta_1)^2 + \frac{k}{2}(\eta_3 - \eta_2)^2,$$

o sea

$$V = \frac{k}{2}(\eta_1^2 + 2\eta_2^2 + \eta_3^2 - 2\eta_1\eta_2 - 2\eta_2\eta_3). \tag{6-49}$$

Luego, la matriz \mathbf{V} tiene la forma

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{pmatrix}. \tag{6-50}$$

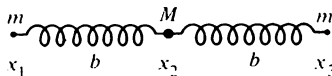


FIGURA 6-2
Modelo de molécula triatómica simétrica lineal.

La energía cinética tiene la forma aún más simple:

$$T = \frac{m}{2}(\dot{\eta}_1^2 + \dot{\eta}_3^2) + \frac{M}{2}\dot{\eta}_2^2, \quad (6-51)$$

por lo que la matriz \mathbf{T} es diagonal:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}. \quad (6-52)$$

Combinando estas dos matrices, la ecuación secular queda en la forma

$$|\mathbf{V} - \omega^2 \mathbf{T}| = \begin{vmatrix} k - \omega^2 m & -k & 0 \\ -k & 2k - \omega^2 M & -k \\ 0 & -k & k - \omega^2 m \end{vmatrix} = 0. \quad (6-53)$$

El cálculo directo del determinante lleva a la ecuación cúbica en ω^2 :

$$\omega^2(k - \omega^2 m)(k(M + 2m) - \omega^2 Mm) = 0, \quad (6-54)$$

con las soluciones evidentes

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_3 = \sqrt{\frac{k}{m} \left(1 + \frac{2m}{M}\right)}. \quad (6-55)$$

El primer valor propio, $\omega_1 = 0$, puede parecer un tanto sorprendente e incluso alarmante, a primera vista. Esta solución no corresponde a ningún movimiento oscilatorio en absoluto, ya que la ecuación de movimiento para la coordenada normal correspondiente es

$$\ddot{\zeta}_1 = 0,$$

que da lugar a un movimiento de traslación uniforme. Pero esta es, precisamente, la clave de la dificultad. La frecuencia nula se debe al hecho de que la molécula puede trasladarse rigidamente a lo largo de su eje sin que varíe su energía potencial, ejemplo de equilibrio indiferente que ya habíamos mencionado. Como es nula la fuerza recuperadora contra dicho movimiento, la «frecuencia» efectiva debe anularse también. Hemos hecho la hipótesis de que la molécula tiene tres grados de libertad para el movimiento de vibración mientras que, en realidad, uno de ellos es un grado de libertad de cuerpo rígido.

En relación con una frecuencia de resonancia nula podemos tratar algunos puntos

interesantes. En la ecuación (6-21) vemos que un valor cero de ω sólo puede tener lugar cuando la energía potencial sea positiva pero no definida positiva, es decir, puede anularse aun cuando no sean nulas todas las η_i . El examen de V (ec. 6-49) muestra que no es definida positiva y que, de hecho, V no se anula cuando todas las η sean iguales (traslación uniforme).

Como la frecuencia nula encontrada no tiene consecuencias para las frecuencias de vibración de interés, convendrá a menudo plantear el problema de manera que se elimine de dicha raíz desde el principio. Podemos lograrlo fácilmente imponiendo la condición o ligadura de que el centro de masa permanezca en reposo en el origen:

$$m(x_1 + x_3) + Mx_2 = 0. \quad (6-56)$$

Entonces podremos utilizar la ecuación (6-56) para eliminar una de las coordenadas entre V y T , reduciendo el problema a otro de dos grados de libertad (cfr. Ejercicio 3 de este capítulo).

La restricción de que el movimiento tenga lugar a lo largo del eje de la molécula permite un solo tipo de movimiento uniforme de cuerpo rígido. En cambio, si se considera el problema más general de vibraciones en las tres direcciones, el número de grados de libertad del cuerpo rígido será mayor e igual, en general, a seis. Entonces la molécula se puede trasladar uniformemente según los tres ejes o efectuar rotaciones uniformes alrededor de los tres ejes. Luego en todo sistema general de n grados de libertad habrá seis frecuencias nulas y solamente $n-6$ frecuencias de vibración verdaderas. También ahora podemos realizar de antemano la reducción del número de grados de libertad imponiendo a las coordenadas la conservación de la cantidad de movimiento y del momento cinético.

Hemos señalado que, además del caso del movimiento de cuerpo rígido, pueden surgir frecuencias de resonancias nulas cuando el potencial sea tal que las derivadas primera y segunda de V se anulen en el equilibrio. Todavía serán posibles en este caso oscilaciones pequeñas si no se anulan también las cuartas derivadas (las terceras derivadas deberán anularse en el caso de equilibrio estable), pero las vibraciones no serán armónicas simples. Este caso, pues, se sale del método acostumbrado de las oscilaciones pequeñas pero, afortunadamente, no se presenta con frecuencia.

Volviendo al examen de las frecuencias de resonancia, vemos que ω_2 es la conocida frecuencia de oscilación de una masa m suspendida de un resorte de constante de rigidez k . Por tanto, podemos esperar que en esta vibración sólo tomen parte los átomos terminales; la molécula central permanece en reposo. Tan sólo en el tercer modo de vibración, ω_3 , podrá participar la masa M en el movimiento oscilatorio. Estas predicciones se comprueban examinando los vectores propios de los tres modos normales.

Las componentes a_{ij} se determinan para cada frecuencia mediante las ecuaciones

$$\begin{aligned} (k - \omega_j^2 m)a_{1j} - ka_{2j} &= 0, \\ -ka_{1j} + (2k - \omega_j^2 M)a_{2j} - ka_{3j} &= 0, \\ -ka_{2j} + (k - \omega_j^2 m)a_{3j} &= 0. \end{aligned} \quad (6-57)$$

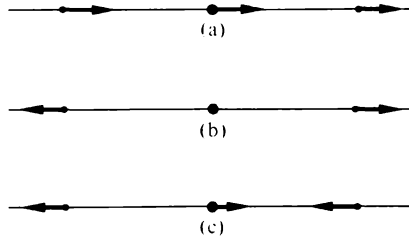


FIGURA 6-3

Modos normales longitudinales de la molécula triatómica lineal.

junto con la condición de normalización:

$$m(a_{1j}^2 + a_{3j}^2) + Ma_{2j}^2 = 1. \quad (6-58)$$

Para $\omega_1 = 0$, se deduce inmediatamente de la primera y la tercera de las ecuaciones (6-57) que los tres coeficientes son iguales: $a_{11} = a_{21} = a_{31}$. Desde luego, esto era de esperar de la naturaleza traslatoria del movimiento (cfr. fig. 6-3 a). La condición de normalización fija entonces el valor de a_{1j} de manera que

$$a_{11} = \frac{1}{\sqrt{2m + M}}, \quad a_{12} = \frac{1}{\sqrt{2m + M}}, \quad a_{13} = \frac{1}{\sqrt{2m + M}}. \quad (6-59a)$$

Para el segundo modo se anulan los factores $(k - \omega_2^2 m)$ y las ecuaciones (6-57) muestran de manera inmediata que $a_{22} = 0$ (tal como se predijo) y $a_{12} = -a_{32}$. El valor numérico de estas cantidades se determina entonces mediante la ecuación (6-58):

$$a_{12} = \frac{1}{\sqrt{2m}}, \quad a_{22} = 0, \quad a_{32} = -\frac{1}{\sqrt{2m}}. \quad (6-59b)$$

En este modo el átomo central está en reposo, mientras que los otros dos vibran en oposición de fase (como debe ser para que se conserve la cantidad de movimiento), según se indica en la figura 6-3 b. Por último, cuando $\omega = \omega_3$ podemos ver a partir de la primera y tercera de las ecuaciones (6-57) que a_{13} y a_{33} deben ser iguales. El resto del cálculo para este modo no es tan fácil como para los otros y nos conformaremos con dar el resultado final:

$$a_{13} = \frac{1}{\sqrt{2m\left(1 + \frac{2m}{M}\right)}}, \quad a_{23} = \frac{-2}{\sqrt{2M\left(2 + \frac{M}{m}\right)}}, \quad a_{33} = \frac{1}{\sqrt{2m\left(1 + \frac{2m}{M}\right)}}. \quad (6-59c)$$

Luego los dos átomos externos vibran con igual amplitud, mientras que el interno oscila en oposición de fase con ellos y tiene una amplitud diferente (cfr. fig. 6-3 c). Toda vibración longitudinal general de la molécula que no contenga una traslación rígida será una cierta combinación lineal de los modos normales ω_2 y ω_3 . Las amplitudes de los modos normales y las fases relativas de uno respecto a otro vendrán determinadas, desde luego, por las condiciones iniciales (cfr. Ejercicio 5).

Hasta ahora sólo hemos hablado de vibraciones a lo largo del eje; en la molécula real también habrá modos normales de vibración perpendiculares al eje. El sistema completo de modos normales es naturalmente más difícil de determinar que solamente los longitudinales, ya que el movimiento general en todas direcciones corresponde a nueve grados de libertad. Aun cuando el procedimiento es inmediato, los cálculos se complican rápidamente y no podemos presentar aquí un cálculo detallado. No obstante, es posible realizar un estudio cualitativo basado en los principios generales y podrán predecirse de antemano la mayoría de las conclusiones de la solución completa.

El problema general tendrá un cierto número de frecuencias de resonancia nulas correspondientes a la posibilidad de movimiento de cuerpo rígido. En el caso de la molécula lineal habrá tres grados de libertad para la traslación rígida, pero la rotación rígida sólo puede dar cuenta de *dos* grados de libertad. La rotación en torno al eje de la molécula carece evidentemente de significado y no aparecerá como modo de movimiento de cuerpo rígido. Por tanto, nos quedan cuatro modos de vibración verdadera. Dos de ellos son los modos longitudinales, que ya hemos examinado, por lo que sólo podrá haber dos modos de vibración perpendicular al eje. Sin embargo, la simetría de la molécula respecto a su eje indica que estos dos modos de vibración perpendicular deben ser degenerados. Nada distingue una vibración en la dirección y de una vibración en la dirección z y ambas frecuencias deben ser iguales. La indeterminación adicional de los vectores propios de un modo degenerado aparece aquí en la forma de que todas las direcciones perpendiculares al eje molecular son análogas. Como direcciones de los modos degenerados de vibración podemos tomar dos ejes ortogonales cualesquiera del plano normal a la molécula. El movimiento total de los átomos normal al eje molecular dependerá de las amplitudes y de las fases relativas de los dos modos degenerados. Si se excitan ambos y están exactamente en fase, los átomos se moverán siguiendo una recta que pase por la configuración de equilibrio. Pero si están desfasados, el movimiento compuesto será una figura de Lissajous elíptica, exactamente como en el caso de un oscilador isótropo bidimensional. Los dos modos representan entonces una rotación, en vez de una vibración.

De la simetría de las moléculas resulta evidente que las amplitudes de los átomos de los extremos deben ser iguales. El cálculo completo demuestra que estos átomos se mueven también en el mismo sentido a lo largo de la figura de Lissajous. Por tanto, el átomo central deberá girar en sentido contrario para que se conserve el momento cinético. En la figura 6-4 se ilustra el movimiento cuando los modos degenerados están desfasados

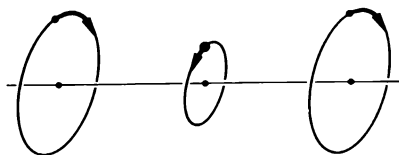


FIGURA 6-4
Modos degenerados de la molécula triatómica simétrica.

noventa grados.

Al aumentar la complejidad de la molécula, el tamaño del determinante secular se hace muy grande y el cálculo de las frecuencias normales y de las amplitudes resulta ser un problema de considerable magnitud. Sin embargo, hemos visto que incluso en una situación tan simple como la de la molécula triatómica lineal, el estudio de las simetrías que puede esperarse tengan las vibraciones simplifica en gran manera los cálculos. Se ha dedicado mucho ingenio matemático a la descripción de las simetrías inherentes a las moléculas complejas para reducir la labor que implica la búsqueda de sus frecuencias de vibración. La teoría de los grupos de simetría se ha aplicado con gran éxito en la factorización del gran determinante secular en bloques menores que se puedan diagonalizar por separado. No obstante, se ha señalado que una manipulación matemática tan elaborada era más apropiada en los tiempos en los cuales los cálculos numéricos eran difíciles y engorrosos. Teniendo en cuenta la velocidad y la capacidad de memoria de los ordenadores actuales, puede ser más fácil y preciso, al fin y al cabo, un método directo. Incluso para ordenadores científicos de tamaño moderado, existen en la actualidad rutinas rápidas y exactas destinadas a la resolución de problemas de valores propios de matrices grandes. Existe, pues, una tendencia hacia el método «a lo bestia» en el cual se utilizan coordenadas cartesianas ponderadas en masa (ver p. 309) para formular el problema. El elipsoide de energía cinética para las vibraciones moleculares es entonces ya una esfera y la búsqueda de los modos normales se reduce a diagonalizar la energía potencial. Parece probable que sea esta la dirección que en el futuro tomen los cálculos de las frecuencias de vibración en los problemas de Físicoquímica.

6-5 VIBRACIONES FORZADAS Y EFECTO DE LAS FUERZAS DISIPATIVAS

Cuando el sistema se desplaza inicialmente respecto a su configuración de equilibrio y se suelta dejándolo que oscile por sí solo, se producen vibraciones libres. Sin embargo, muy a menudo se pone el sistema en oscilación mediante una fuerza excitadora exterior que sigue actuando sobre el sistema después de $t = 0$. La frecuencia de esta *oscilación forzada* está entonces determinada por la frecuencia de la fuerza excitadora y no por las frecuencias de resonancia. A pesar de todo, los modos normales resultan muy importantes en la obtención de las *amplitudes* de las vibraciones forzadas y el problema se simplifica mucho utilizando coordenadas normales obtenidas de los modos libres.

Si es F_j la fuerza generalizada correspondiente a la coordenada η_j , según la ecuación (1-49), la fuerza generalizada Q_i correspondiente a la coordenada ζ_i será

$$Q_i = a_{ji}F_j. \quad (6-60)$$

Las ecuaciones de movimiento expresadas en coordenadas normales serán ahora

$$\ddot{\zeta}_i + \omega_i^2 \zeta_i = Q_i. \quad (6-61)$$

Las ecuaciones (6-61) constituyen un sistema de n ecuaciones diferenciales con segundo miembro que sólo podremos resolver si sabemos cómo depende Q_i del tiempo. Aun

cuando la solución no sea tan sencilla como en el caso de oscilaciones libres, observemos que las coordenadas normales conservan su ventaja de separar las variables y cada ecuación sólo contiene una coordenada.

Frecuentemente, la fuerza excitadora varía sinusoidalmente con el tiempo. Por ejemplo, en un problema de Acústica la fuerza excitadora puede deberse a la presión de una onda sonora que incida sobre el sistema y entonces Q_i tendrá igual frecuencia que la onda sonora. O bien, si el sistema es una molécula poliatómica, al iluminarla con un haz de luz monocromática se tendrá una fuerza excitadora sinusoidal. Cada átomo de la molécula estará sometido a una fuerza electromagnética cuya frecuencia es la luz incidente. Incluso en el caso en que la fuerza excitadora no sea sinusoidal y de una sola frecuencia, puede a menudo considerarse constituida por una superposición de términos sinusoidales. Así, si la fuerza excitadora es periódica, podrá representarse mediante una serie de Fourier; otras veces será adecuada una representación por integral de Fourier. Como las ecuaciones (6-61) son lineales, se podrán superponer sus soluciones para frecuencias particulares a fin de hallar la solución completa para Q_i dadas. Será, pues, de importancia general estudiar la naturaleza de las oscilaciones cuando pueda escribirse la fuerza Q_i en la forma

$$Q_i = Q_{0i} \cos(\omega t + \delta_i), \quad (6\ 62)$$

donde ω es la pulsación de una fuerza exterior. Las ecuaciones de movimiento aparecen ahora en la forma

$$\ddot{\zeta}_i + \omega_i^2 \zeta_i = Q_{0i} \cos(\omega t + \delta_i). \quad (6\ 63)$$

La solución completa de la ecuación (6-63) consiste en la integral general de la ecuación homogénea (es decir, los modos libres de vibración) más una integral particular de la ecuación con segundo miembro. Mediante una elección adecuada de las condiciones iniciales podemos anular las vibraciones libres superpuestas* y centraremos nuestro interés en la integral particular de las ecuaciones (6-63), la cual tendrá la forma

$$\zeta_i = B_i \cos(\omega t + \delta_i). \quad (6\ 64)$$

Las amplitudes B_i se determinan sustituyendo esta integral particular en las ecuaciones (6-63):

$$B_i = \frac{Q_{0i}}{\omega_i^2 - \omega^2} \quad (6\ 65)$$

* Las vibraciones libres son, en esencia, los transitorios generados por la aplicación de las fuerzas excitadoras. Si consideramos que el sistema esté inicialmente en una configuración de equilibrio y entonces vamos estableciendo lentamente las fuerzas excitadoras a partir de cero, dichos transitorios no aparecerán. Alternativamente, podemos suponer que existan fuerzas disipativas (v. páginas siguientes) que amortiguarían las vibraciones libres hasta anularlas.

El movimiento total será, pues,

$$\eta_j = a_{ji} \zeta_i = \frac{a_{ji} Q_{0i} \cos(\omega t + \delta_i)}{\omega_i^2 - \omega^2}. \quad (6-66)$$

Así pues, la vibración de cada partícula vuelve a estar compuesta por combinaciones lineales de los modos normales, pero ahora cada oscilación normal tiene lugar con la frecuencia de la fuerza excitadora.

Dos factores determinan la cuantía en que se excita cada modo normal. Uno es la amplitud Q_{0i} de la fuerza excitadora generalizada. Si la fuerza que se ejerce sobre cada partícula no tiene componente alguna en la dirección de vibración de algún modo normal particular, evidentemente la fuerza generalizada correspondiente al modo será nula y Q_{0i} será igual a cero. *Una fuerza exterior sólo puede excitar un modo normal si tiende a mover las partículas en la misma dirección que en el modo dado.* El segundo factor es la proximidad de la frecuencia de excitación a la frecuencia libre del modo. A consecuencia de los denominadores de la ecuación (6-66), cuanto más se acerque ω a cualquier ω_i , más se excitará dicho modo frente a los demás. La ecuación (6-66) predice aparentemente una amplitud infinita cuando la frecuencia de excitación concuerde exactamente con una de las ω_i —el conocido fenómeno de la resonancia. Desde luego, la teoría que sustenta la ecuación (6-66) presume, en realidad, solamente oscilaciones pequeñas en torno a posiciones de equilibrio; cuando la amplitud predicha por la fórmula se haga grande, la hipótesis falla y ya no será válida la ecuación (6-66). Observemos que las oscilaciones están en fase con la fuerza excitadora cuando la frecuencia es inferior a la de resonancia, pero que se produce un cambio de fase igual a π al atravesar la resonancia.

Nuestro estudio no ha sido real a causa de no haber supuesto la existencia de fuerzas disipativas o de rozamiento. Dichas fuerzas, cuando existen, en muchos sistemas son proporcionales a las velocidades de las partículas y pueden, en consecuencia, derivar de una función de disipación \mathcal{F} (cfr. § 1-5). Consideremos ante todo los efectos de las fuerzas de rozamiento sobre los modos de vibración libres.

Por su definición, \mathcal{F} debe ser una función cuadrática homogénea de las velocidades:

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \mathcal{F}_{ij} \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j. \quad (6-67)$$

Los coeficientes \mathcal{F}_{ij} son claramente simétricos $\mathcal{F}_{ij} = \mathcal{F}_{ji}$, y serán, en general, funciones de las coordenadas. Como sólo nos ocupamos de vibraciones pequeñas en torno al equilibrio, bastará desarrollar los coeficientes en torno al equilibrio y conservar solamente el primer término, constante, igual que hicimos en el caso de la energía cinética. En aplicaciones futuras de la ecuación (6-67) representaremos por \mathcal{F}_{ij} estos factores constantes. Recordemos que $2 \mathcal{F}$ es la energía disipada por unidad de tiempo a causa de las fuerzas de rozamiento (cfr. ec. 2-60). Por tanto, la función de disipación \mathcal{F} no podrá nunca ser negativa. El sistema completo de ecuaciones de movimiento de Lagrange se convierte ahora (cfr. § 1-5) en

$$T_{ij} \ddot{\eta}_j + \mathcal{F}_{ij} \dot{\eta}_j + V_{ij} \eta_j = 0. \quad (6-68)$$

Para encontrar coordenadas normales que permitan hacer independientes las ecuaciones de movimiento será necesario, claro está, hallar una transformación a ejes principales que diagonalice simultáneamente las tres formas cuadráticas T , V y \mathcal{F} . Según ya vimos, esto no es posible en general; usualmente no se pueden encontrar modos normales para una función de disipación arbitraria cualquiera. Sin embargo, existen algunos casos excepcionales en los que es posible la diagonalización simultánea. Por ejemplo, si la fuerza de rozamiento es proporcional a la velocidad de la partícula y a su masa, \mathcal{F} será diagonal siempre que lo sea T . Cuando sea factible dicha diagonalización simultánea, las ecuaciones de movimiento serán independientes en las coordenadas normales y tendrán la forma

$$\ddot{\zeta}_i + \overline{\mathcal{F}}_{i\zeta_i} \dot{\zeta}_i + \omega_i^2 \zeta_i = 0 \quad (\text{sin suma}) \quad (6 \ 69)$$

Aquí las $\overline{\mathcal{F}}_i$ son los coeficientes no negativos de la forma diagonalizada de \mathcal{F} cuando se expresa en función de ζ_i . Por constituir un sistema de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes, las ecuaciones (6-69) pueden resolverse mediante funciones de la forma

$$\zeta_i = C_i e^{-i\omega'_i t},$$

donde las ω'_i satisfacen la ecuación cuadrática

$$\omega_i'^2 + i\omega_i' \overline{\mathcal{F}}_i - \omega_i^2 = 0 \quad (\text{sin suma}) \quad (6 \ 70)$$

La ecuación (6-70) tiene las dos soluciones

$$\omega_i' = \pm \sqrt{\omega_i^2 - \frac{\overline{\mathcal{F}}_i^2}{4}} - i \frac{\overline{\mathcal{F}}_i}{2}. \quad (6 \ 71)$$

El movimiento no será, pues, una oscilación pura ya que ω' es compleja. En la ecuación (6-71) vemos que la parte imaginaria de ω'_i da lugar a un factor $\exp[-\overline{\mathcal{F}}_i t/2]$ y a causa de la naturaleza no negativa de las $\overline{\mathcal{F}}_i$ será siempre una función del tiempo, exponencial y decreciente.* La presencia de un factor de amortiguamiento debido al rozamiento difícilmente puede sorprendernos. Al vibrar las partículas, efectúan un trabajo contra las fuerzas de rozamiento por lo que la energía del sistema (y por tanto las amplitudes de vibración) deberá disminuir en el transcurso del tiempo. La parte real de la ecuación (6-71) corresponde al factor oscilatorio del movimiento y observaremos que la presencia de rozamiento también afecta a la frecuencia de la vibración. No obstante, si la disipación es pequeña, podremos despreocuparnos del término del cuadrado de $\overline{\mathcal{F}}_i$ y la frecuencia de oscilación se reduce al valor correspondiente al caso de ausencia de rozamiento. El

* Algunos (no todos) $\overline{\mathcal{F}}_i$ pueden ser nulos, lo cual sólo significa que no hay efectos de rozamiento en los modos normales correspondientes. Lo importante es que los $\overline{\mathcal{F}}_i$ no pueden ser negativos.

movimiento total será entonces, simplemente, un amortiguamiento exponencial de los modos de vibración libres:

$$\zeta_i = C_i e^{-\mathcal{F}_i t} e^{-i\omega_i t}. \quad (6-72)$$

Si la función de disipación no se puede diagonalizar junto con T y V , será mucho más difícil obtener la solución. La naturaleza general de la solución es, sin embargo, muy parecida: un factor de amortiguamiento exponencial que multiplica a una función exponencial oscilatoria. Supongamos que buscamos una solución de las ecuaciones (6-68) de la forma

$$\eta_j = C a_j e^{-i\omega t} = C a_j e^{-\kappa t} e^{-2\pi i \nu t}. \quad (6-73)$$

Con esta solución, las ecuaciones (6-68) se convierten en un sistema de ecuaciones lineales

$$V_{ij} a_j - i\omega \mathcal{F}_{ij} a_j - \omega^2 T_{ij} a_j = 0. \quad (6-74)$$

Conviene escribir ω en la forma $i\gamma$, de manera que

$$\gamma = -i\omega = -\kappa - 2\pi i\nu, \quad (6-75)$$

y así $-\kappa$ será la parte real de γ . En función de matrices cuadradas de V , T , y \mathcal{F} , el sistema de ecuaciones (6-74) se convierte en una ecuación de matrices columna en la cual interviene γ :

$$\mathbf{V}\mathbf{a} + \gamma\mathbf{F}\mathbf{a} + \gamma^2\mathbf{T}\mathbf{a} = 0. \quad (6-76)$$

El sistema de ecuaciones homogéneas (6-74) o (6-76) sólo tiene solución para las a_j cuando ω o γ tomen ciertos valores. Sin evaluar realmente la ecuación secular correspondiente, podemos demostrar que κ debe siempre ser no negativa. Multiplicando a la izquierda por \mathbf{a}^\dagger la ecuación matricial (6-76) la convertimos en ecuación escalar en γ :

$$\mathbf{a}^\dagger\mathbf{V}\mathbf{a} + \gamma\mathbf{a}^\dagger\mathbf{F}\mathbf{a} + \gamma^2\mathbf{a}^\dagger\mathbf{T}\mathbf{a} = 0. \quad (6-77)$$

La ecuación (6-77) es cuadrática en γ con coeficientes que son productos de matrices del mismo tipo general encontrado en la ecuación (6-19). En virtud de la simetría de \mathbf{V} , \mathbf{F} y \mathbf{T} los productos de matrices son todos reales, según podemos ver desarrollando \mathbf{a} en la forma $\alpha + i\beta$ (cfr. ec. 6-20). Luego si γ es solución de la ecuación cuadrática también lo deberá ser su complejo conjugado γ^* . Ahora bien, la suma de las dos raíces de una ecuación cuadrática es igual al cociente entre el coeficiente del término de primer grado y el del

término cuadrático cambiado de signo

$$\gamma + \gamma^* = -2\kappa = -\frac{\mathbf{a}^\dagger \mathbf{F} \mathbf{a}}{\mathbf{a}^\dagger \mathbf{T} \mathbf{a}}. \quad (6-78)$$

Luego podremos expresar κ en función de las partes real e imaginaria de a_j en la forma

$$\kappa = \frac{1}{2} \frac{\mathcal{F}_{ij}(\alpha_i \alpha_j + \beta_i \beta_j)}{T_{ij}(\alpha_i \alpha_j + \beta_i \beta_j)}. \quad (6-79)$$

La función de disipación \mathcal{F} debe ser siempre positiva y T es definida positiva; por tanto, κ no puede ser negativa. Las oscilaciones del sistema pueden disminuir exponencialmente pero nunca podrán crecer, en el transcurso del tiempo. Notemos que si \mathcal{F} fuese definida positiva, κ debería ser distinta de cero (y positiva) y todos los modos tendrían un factor de amortiguamiento exponencial. Las frecuencias de oscilación, dadas por la parte real de ω , se verán afectadas por las fuerzas disipativas, pero la variación será pequeña si el amortiguamiento durante un periodo de oscilación no es muy grande.

Por último, podemos considerar oscilaciones sinusoidales forzadas en presencia de fuerzas disipativas. Si representamos que la fuerza excitadora varía con el tiempo en la forma

$$F_j = F_{0j} e^{-i\omega t},$$

donde F_{0j} puede ser complejo, las ecuaciones de movimiento serán

$$V_{ij} \eta_j + \mathcal{F}_{ij} \dot{\eta}_j + T_{ij} \ddot{\eta}_j = F_{0i} e^{-i\omega t}. \quad (6-80)$$

Si de estas ecuaciones buscamos una solución particular de la forma

$$\eta_j = A_j e^{-i\omega t},$$

obtenemos para las amplitudes A_j el siguiente sistema de ecuaciones lineales no homogéneas:

$$(V_{ij} - i\omega \mathcal{F}_{ij} - \omega^2 T_{ij}) A_j - F_{0i} = 0. \quad (6-81)$$

La solución de estas ecuaciones* la podemos obtener fácilmente mediante la regla de Cramer:

$$A_j = \frac{D_j(\omega)}{D(\omega)}, \quad (6-82)$$

* Desde luego, no son mas que la versión no homogénea de las ecuaciones (6-74).

donde $D(\omega)$ es el determinante de los coeficientes de las A_j de las ecuaciones (6-81) y $D_j(\omega)$ es la modificación que resulta en $D(\omega)$ cuando se sustituye la columna j -ésima por F_{01}, \dots, F_{0n} . Lo que más nos interesa a nosotros es el denominador $D(\omega)$, ya que las resonancias se deben esencialmente a la forma algebraica del denominador. Ahora bien, D es el determinante que aparece en la ecuación secular correspondiente a las ecuaciones homogéneas (6-74); sus raíces son las frecuencias complejas de los modos de vibración libres. El requisito de que tanto γ como γ^* sean raíces de la ecuación (6-77) significa, teniendo en cuenta la ecuación (6-75), que si ω_i es raíz de $D(\omega)$, también lo será $-\omega_i^*$. En el caso de un sistema de n grados de libertad será, pues, posible representar $D(\omega)$ en la forma

$$D(\omega) = G(\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2) \dots (\omega - \omega_n)(\omega + \omega_1^*)(\omega + \omega_2^*) \dots (\omega + \omega_n^*),$$

donde G es una constante. Utilizando la notación de producto y escribiendo ω en la forma $2\pi\nu$, podremos escribir la representación anterior así:

$$D(\omega) = G \prod_{i=1}^n (2\pi(\nu - \nu_i) + i\kappa_i)(2\pi(\nu + \nu_i) + i\kappa_i). \quad (6-83)$$

Cuando racionalicemos la ecuación (6-83) para separar A_i en sus partes real e imaginaria, el denominador será

$$D^*(\omega)D(\omega) = GG^* \prod_{i=1}^n (4\pi^2(\nu - \nu_i)^2 + \kappa_i^2)(4\pi^2(\nu + \nu_i)^2 + \kappa_i^2). \quad (6-84)$$

Así pues, las amplitudes de la oscilación forzada presentan el típico comportamiento de la resonancia en las proximidades de las frecuencias de las oscilaciones libres $\pm\nu_i$. A causa de la existencia de las constantes de amortiguamiento κ_i , los denominadores de resonancia ya no se anulan a las frecuencias de los modos libres y las amplitudes se mantienen finitas; la frecuencia de excitación a la cual la amplitud presenta un máximo ya no coincide exactamente con las frecuencias libres por depender de la frecuencia términos de A_j distintos del denominador de resonancia particular. No obstante, mientras el amortiguamiento sea suficientemente pequeño para que exista un pico reconocible de resonancia, la desviación de las frecuencias de resonancia suele ser pequeña.

Hemos estudiado las propiedades de las oscilaciones pequeñas atendiendo solamente a sistemas mecánicos. Sin embargo, el lector se habrá dado cuenta, sin duda, de la semejanza con la teoría de las oscilaciones de redes eléctricas. Las ecuaciones de movimiento (6-68) serían las ecuaciones de circuito en el caso de n circuitos acoplados si consideramos que las V_{ij} son recíprocos de capacidades, las \mathcal{F}_{ij} son resistencias y las T_{ij} inductancias. Las fuerzas excitadoras las sustituimos por generadores de frecuencia ω aplicados a uno o más circuitos y las ecuaciones de vibración forzada (6-80) se reducen a las ecuaciones (2-39) de circuitos eléctricos mencionadas en el capítulo 2. Sólo hemos presentado una pequeña parte de las técnicas ideadas para tratar oscilaciones pequeñas y de los teoremas generales referentes al movimiento. Por ejemplo, el espacio de que

disponemos no nos permite estudiar las potentes técnicas de la transformada de Laplace para el estudio de la respuesta de un sistema linealmente oscilante a fuerzas excitadoras con dependencias respecto al tiempo arbitrarias. Ni tampoco es apropiado que consideremos el tema aún en expansión de las oscilaciones alineales, donde la energía potencial contiene términos de grado superior al segundo y el movimiento ya no es armónico simple. (Algunas partes importantes de este tema las introduciremos más adelante cuando tratemos la teoría de las perturbaciones.) Ya hemos mencionado que veremos un desarrollo formal de la teoría de las oscilaciones pequeñas cuando estudiemos la versión de Hamilton de la Mecánica. Otra generalización que merece nuestra atención se refiere a la oscilación de sistemas con números de grados de libertad continuamente infinitos. La cuestión es cómo construir una manera de tratar sistemas continuos que sea análoga a la Mecánica clásica de sistemas discretos. Pospondremos dichas consideraciones de los sistemas continuos al capítulo 12 —después de que hayamos desarrollado la formulación canónica de la Mecánica de sistemas discretos y de que hayamos visto cómo debe modificarse la estructura de la Mecánica newtoniana en la teoría de la Relatividad restringida.

REFERENCIAS SUGERIDAS

H. JEFFREYS y B. S. JEFFREYS, *Methods of Mathematical Physics*. La diagonalización de una matriz o de un par de formas cuadráticas definidas positivas constituyen tema común en los textos de métodos matemáticos para físicos. Esta referencia particular la hemos elegido porque el estudio pertinente de su capítulo 4 se ha escrito, evidentemente, teniendo en mente el problema de las oscilaciones pequeñas. Se dan algunos teoremas relativos a las propiedades de las raíces del determinante secular que resultan útiles para hallar las frecuencias propias.

E. T. WHITTAKER, *Analytical Dynamics*. El capítulo VII trata la teoría de vibraciones y da la demostración explícita de que T y V se pueden diagonalizar juntas, pero el tratamiento de esta cuestión no queda muy claro. Son más valiosos los apartados del capítulo referentes a los efectos de las ligaduras y a vibraciones en torno a un movimiento estacionario, cosa que se trata con un detalle considerable. El apartado 94 del capítulo VIII referente a vibraciones en presencia de fuerzas disipativas es fragmentario y se limita a sólo dos grados de libertad.

D. TER HAAR, *Elements of Hamiltonian Mechanics*. A pesar del título, este libro no se limita en absoluto a Mecánica de Hamilton y el capítulo 3 relativo a vibraciones pequeñas sólo supone Mecánica de Lagrange. El tratamiento se distingue por un método matricial —escribiendo detalladamente los elementos de las matrices. Hay abundancia de ejemplos, con diagramas útiles de los modos normales de vibración. Algunas conclusiones acerca de las propiedades de simetría de las vibraciones de la molécula triatómica lineal son discutibles.

J. L. SYNGE y A. SCHILD, *Tensor Calculus*. El capítulo 2 de este tratado proporciona una introducción a los espacios de Riemann y a los tensores métricos asociados, más que adecuada para nuestros fines. En particular, introducen de manera inmediata la diferenciación en cantidades covariantes y contravariantes, distinción que nosotros no necesitamos si bien se presentará en el capítulo 7.

L. D. LANDAU y E. M. LIFSHITZ, *Mecánica*. Como era de esperar, el tema de las vibraciones pequeñas se presenta de manera compacta pero cubre gran cantidad de cuestiones fundamentales. Se

consideran con cierto detalle las oscilaciones de la molécula triatómica, tanto lineal como «curva». En el presente capítulo sólo se consideran oscilaciones lineales y se supone que los elementos paramétricos de las energías potenciales y cinética son constantes en el tiempo. El estudio de la excitación paramétrica de osciladores, en los cuales dichos elementos varían con el tiempo y de las oscilaciones alineales, ha crecido rápidamente en las últimas décadas y se ha convertido en un área que exige un tratamiento aparte y masivo. En los § § 27-30, Landau y Lifshitz dan una introducción concisa al tema en el que los rusos han contribuido de manera notable. Sin embargo, en el tratamiento sólo apunta la cumbre del iceberg.

L. MEIROVITCH, *Methods of Analytical Dynamics*. Se presentan aquí tratamientos modernos para el estudio de sistemas oscilatorios en una forma que no pierde contacto con la realidad práctica. El tema de este capítulo aparece bajo el aspecto de sistemas autónomos lineales, pero se hace hincapie en si el movimiento es estable, cosa que hemos presupuesto desde el principio. Se estudian los criterios clásico y moderno (p. ej., el método de Liapunov). Las oscilaciones paramétricas (sistemas no autónomos) ocupan un capítulo aparte.

Y. CHEN, *Vibrations: Theoretical Methods*. Gran parte de este texto orientado técnicamente se dedica a introducir las ideas fundamentales de Mecánica por una parte y tratar vibraciones de continuos por otra. El resto cubre la materia del presente capítulo con muchos ejemplos elaborados y los elementos de las matrices pertinentes presentados de manera explícita (y a veces un tanto pesada). Particular interés presenta la aplicación de los métodos de las transformaciones de Laplace y de Fourier para el tratamiento de problemas de oscilaciones forzadas o excitadas.

H. C. CORBEN y P. STEHLE, *Classical Mechanics*. El corto capítulo relativo a oscilaciones pequeñas de este conocido texto concentra algunos ejemplos más que dar teoría general. Merece mención especial en apéndice 3 en el que se da una breve introducción al empleo de métodos de la teoría de grupos para reducir la complejidad del problema de las frecuencias propias de las moléculas, basados en las simetrías intrínsecas que presentan los sistemas. En la época preinformática, cuando había que resolver a mano los problemas, todo método que redujera el volumen de cálculos era naturalmente objeto de interés y estudios intensos. El advenimiento del rápido ordenador ha disminuido la importancia de estos métodos, si bien el empleo de las propiedades de simetría para identificar las frecuencias cero o degeneradas reviste un interés evidente. En relación con esto, v. W. D. Gwinn: «Normal Coordinates: General Theory, Redundant Coordinates, and General Analysis Using Electronic Computers», *Jour. Chem. Phys.* **55**, 477 (Julio 15, 1971).

G. HERZBERG, *Infrared and Raman Spectra of Polyatomic Molecules*. En este tratado se dan muchos ejemplos de la aplicación de la teoría clásica de las vibraciones pequeñas a la estructura molecular. Se aplican las técnicas de utilización de constantes del movimiento y propiedades de simetría para reducir la complejidad del cálculo a fin de hallar soluciones explícitas para muchos modelos moleculares. Se muestran esquemáticamente los distintos modos normales correspondientes a muchas de las moléculas.

E. B. WILSON, JR.; J. C. DECIUS y P. C. CROSS, *Molecular Vibrations*. Este tratado de 1955 parece seguir siendo para los químicos el tratado típico de los problemas de vibraciones moleculares. En espíritu, es totalmente preinformático —el largo capítulo referente a la molécula de benceno termina impetrandos al lector a que se familiarice en la manipulación de matrices comprobando los cálculos del capítulo con una «calculadora mecánica de pupitre». Se penetra en la utilización de los grupos de simetría con considerable detalle. Se requiere algún conocimiento de la Mecánica cuántica.

LORD RAYLEIGH, *Theory of Sound*. Es uno de los clásicos de la literatura física, que contiene multitud de teoremas y ejemplos físicos de todos los aspectos de la teoría de la vibración. El propio

Rayleigh fue quien desarrolló gran parte de la teoría, especialmente la introducción de la función de disipación. Su tratamiento es fluido y claro, conteniendo cuestiones rara vez tratadas, tales como los efectos de las ligaduras y las propiedades estacionarias de las frecuencias propias. Rayleigh se apoya mucho en la obra de Routh, quien a su Adams Prize Essay de 1877 y en su texto *Rigid Dynamics* fue uno de los primeros en dar un estudio sistemático de las vibraciones pequeñas.

E. A. GUILLEMIN, *The Mathematics of Circuit Analysis*. Se incluye esta referencia para indicar la importancia de la teoría de las vibraciones pequeñas en la Electrotecnia moderna. Se presta mucha atención a las formas cuadráticas y a sus transformaciones a ejes principales. El tratamiento, en el cual se hace un abundante uso del Álgebra matricial, es elevado y elegante.

EJERCICIOS

1. Un material se mueve en un campo gravitatorio vertical constante a lo largo de la curva definida por $y = ax^4$, siendo y la dirección vertical. Hallar la ecuación de movimiento para oscilaciones pequeñas en torno a la posición de equilibrio.

2. Obtener los modos normales de vibración del péndulo doble representado en la figura 1-4, suponiendo iguales las longitudes, pero no las masas. Demostrar que cuando la masa de más abajo sea pequeña frente a la otra, las dos frecuencias de resonancia son casi iguales. Si se ponen en movimiento los péndulos separando ligeramente respecto a la vertical la masa superior y soltándola, demostrar que el movimiento subsiguiente es de tal manera que, a intervalos regulares, un péndulo está en reposo mientras el otro tiene la amplitud máxima. Este es el conocido fenómeno de las «pulsaciones».

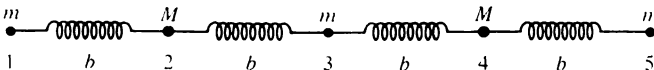
3. El problema de la molécula triatómica lineal puede reducirse a uno de dos grados de libertad introduciendo las coordenadas $y_1 = x_2 - x_1, y_2 = x_3 - x_2$ y eliminando x_2 imponiendo que el centro de masa se mantenga en reposo. Obtener las frecuencias de los modos normales en estas coordenadas y demostrar que concuerdan con los resultados de § 6-4. Las distancias y_1 e y_2 entre los átomos son las llamadas *coordenadas internas* de la molécula.

4. Obtener las frecuencias de vibración longitudinal de la molécula estudiada en § 6-4, con la diferencia de que ahora hemos de considerar que el átomo central está unido al origen mediante un resorte de constante de rigidez k . Demostrar que en estas condiciones desaparece el modo traslatorio.

5. a) Supongamos que en la molécula triatómica lineal la condición inicial sea que el átomo central esté en reposo pero separado una distancia a_0 respecto a la posición de equilibrio, estando los otros dos en sus posiciones de equilibrio respectivas. Hallar las amplitudes de las oscilaciones longitudinales pequeñas en torno al centro de masa. Dar las amplitudes de los modos normales.

b) Repetir el apartado (a) para el caso en que el átomo central esté inicialmente en su posición de equilibrio pero animado de una velocidad inicial v_0 .

6. Simulamos una molécula lineal de cinco átomos mediante una configuración de masas y resortes ideales del tipo representado en el esquema siguiente:



Las constantes de rigidez son todas iguales. Hallar las frecuencias propias y los modos normales para vibración longitudinal. [*Sugerencia*: pasar de las coordenadas η_i a las ζ_i definidas por

$$\eta_3 = \zeta_3, \quad \eta_1 = \frac{\zeta_1 + \zeta_5}{\sqrt{2}}, \quad \eta_5 = \frac{\zeta_1 - \zeta_5}{\sqrt{2}}$$

con expresiones simétricas para η_2 y η_4 . El determinante secular se factoriza entonces en determinantes de menor orden.]

7. Supongamos que en la molécula triatómica lineal, el movimiento en las direcciones y y z está regido por los potenciales

$$V_y = \frac{k}{2}(y_2 - y_1)^2 + \frac{k}{2}(y_3 - y_2)^2,$$

$$V_z = \frac{k}{2}(z_2 - z_1)^2 + \frac{k}{2}(z_3 - z_2)^2.$$

Hallar las frecuencias propias para vibraciones pequeñas en tres dimensiones y describir los modos normales. ¿Qué simetrías representan las frecuencias nulas? Puede ser útil emplear el tipo de coordenadas intermedias que se sugiere en el ejercicio 6.

8. La configuración de equilibrio de una molécula está representada por tres átomos de igual masa situados en los vértices de un triángulo rectángulo isósceles y unidos por resortes de constantes de rigidez iguales. Obtener el determinante secular para los modos de vibración en el plano y demostrar reordenando las columnas que la ecuación secular tiene la raíz triple $\omega = 0$. Reducir el determinante a uno de tercer orden y obtener las frecuencias no nulas de vibración libre.

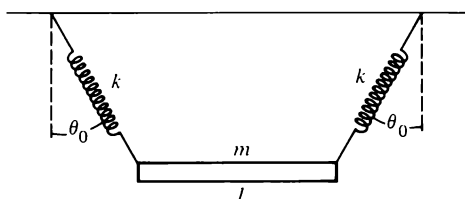
9. Demostrar directamente que las ecuaciones de movimiento del problema anterior se satisfacen mediante (a) una traslación uniforme de todos los átomos a lo largo del eje x , (b) una traslación uniforme a lo largo del eje y , (c) una rotación uniforme alrededor del eje z .

10. a) Tres puntos materiales iguales tienen sus posiciones de equilibrio en los vértices de un triángulo equilátero. Están unidos mediante resortes iguales dirigidos a lo largo de los arcos que constituyen la circunferencia circunscrita al triángulo. Los puntos materiales y los resortes están obligados a moverse solamente sobre dicha circunferencia, de manera que, p. ej., la energía potencial de un resorte está determinada por la longitud del arco que cubre. Determinar las frecuencias propias y los modos normales de oscilaciones pequeñas en el plano. Identificar físicamente toda frecuencia nula.

b) Suponer que uno de los resortes cambia en δk su constante de rigidez, mientras que los otros la conservan invariable. Con una aproximación de primer orden de δk , ¿cuáles son las variaciones que experimentan las frecuencias propias y los modos normales?

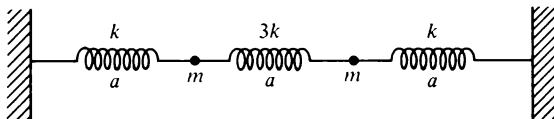
c) Supongamos que lo que cambia es la masa de una de las partículas en una cuantía δm . ¿Cómo variarían ahora las frecuencias propias normales y los modos normales?

11. Una barra uniforme de longitud l y masa m está suspendida por dos resortes iguales de longitud natural b y constante de rigidez k , según se indica en el esquema.



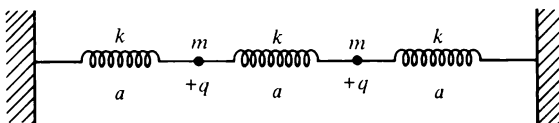
Hallar los modos normales de oscilaciones pequeñas en el plano.

12. Dos partículas se mueven en una dimensión en la unión de tres resortes, tal como se indica en la figura. Los resortes tienen todos la misma longitud natural a y las constantes de rigidez y las masas son las que se indican.



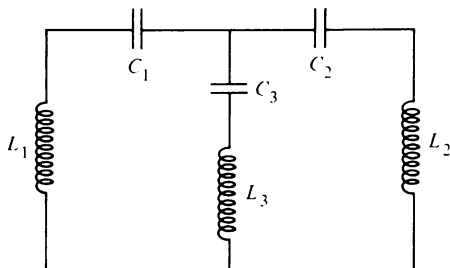
Hallar las frecuencias propias y los modos normales del sistema.

13. Dos puntos materiales de igual masa m están unidos entre sí y a puntos fijos mediante tres resortes iguales de constante de rigidez k , tal como se indica en el esquema:



La longitud natural de cada resorte es a . Cada punto material tiene una carga positiva $+q$ y se repelen de acuerdo con la ley de Coulomb. Escribir la ecuación secular para las frecuencias propias.

14. Hallar expresiones de las frecuencias propias del siguiente circuito acoplado:



15. Si no son sinusoidales las fuerzas excitadoras generalizadas Q_i , demostrar que las vibraciones forzadas de las coordenadas normales en ausencia de amortiguamiento vienen dadas por

$$\zeta_i = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G_i(\omega)}{\omega_i^2 - \omega^2} e^{-i\omega t} d\omega,$$

donde $G_i(\omega)$ es la transformada de Fourier de Q_i definida por

$$Q_i(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} G_i(\omega) e^{-i\omega t} d\omega.$$

Si la función de disipación se diagonaliza simultáneamente con T y V , demostrar que las vibraciones forzadas vienen dadas por

$$\zeta_i = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G_i(\omega)(\omega_i^2 - \omega^2 + i\omega\mathcal{F}_i)}{(\omega_i^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\mathcal{F}_i^2} e^{-i\omega t} dt,$$

que tiene la forma típica de denominador de resonancia. Estos resultados son simples ejemplos de la potencia técnica del *cálculo operacional* para el tratamiento de vibraciones transitorias.

Capítulo 7

La teoría restringida de la Relatividad en Mecánica clásica

Nuestro desarrollo de la Mecánica clásica se ha basado en definiciones y postulados que hemos presentado en el capítulo 1. No obstante, cuando las velocidades que intervienen son próximas a la de la luz en el vacío, dichos postulados ya no representan a los hechos experimentales y deben ser modificados para conformar la llamada *teoría restringida de la Relatividad*. Constituye ésta una modificación de la estructura de la Mecánica que no debe confundirse con la mucho más violenta refundición que exige la teoría cuántica. Existen muchos ejemplos físicos en los cuales los efectos cuánticos son importantes mientras que las correcciones relativistas son despreciables. E inversamente, frecuentemente se producen fenómenos que comportan velocidades relativistas en los cuales los perfeccionamientos de la Mecánica cuántica no afectan a su tratamiento. No existe ninguna relación inherente entre la Relatividad restringida y la Mecánica cuántica y se pueden estudiar los efectos de una sin hacer referencia a la otra. Será pues de gran importancia práctica examinar los cambios que la Relatividad restringida introduce en la formulación de la Mecánica clásica.

No pretendemos, empero, presentar un amplio estudio de la teoría de la Relatividad restringida y sus consecuencias. No nos vamos a ocupar demasiado de los sucesos y experimentos que llevaron a la construcción de la teoría, mucho menos de sus implicaciones filosóficas ni de sus aparentes paradojas «que escarnecen alegremente al sentido común». Se supondrá al lector en posesión de, al menos, una introducción elemental a las transformaciones relativistas entre sistemas que se muevan con movimiento relativo uniforme y a los fenómenos físicos más sobresalientes que de ellas se deducen. Nuestro propósito es recalcar cómo puede ajustarse la Relatividad restringida en el marco de la Mecánica clásica y sólo presentaremos la parte de la teoría que sea necesaria a tal efecto.

7-1 PROGRAMA BÁSICO DE LA RELATIVIDAD RESTRINGIDA

En los capítulos anteriores hemos utilizado frecuentemente expresiones tales como «sistema del espacio» o «sistema fijo en el espacio». Con ello sólo queríamos significar un sistema inercial, es decir, un sistema en el cual sea válida la ley del movimiento de Newton,

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}, \quad (7-1)$$

Un sistema fijo en un cuerpo que gire respecto a un sistema inercial no cumple esta calificación; a (7-1) habrá que añadir términos que describan el efecto de la rotación. En cambio, parecería que un sistema que se mueva uniformemente respecto a un «sistema del espacio» debería ser un sistema inercial. Si \mathbf{r}' representa un vector de posición trazado a partir del origen del segundo sistema hasta un punto dado y es \mathbf{r} el vector correspondiente en el primer sistema (cfr. fig. 7-1), si ambos sistemas coinciden en el instante $t = 0$, parece evidente que dichos vectores están relacionados en la forma:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{v}t. \quad (7-2)$$

Como la velocidad relativa es constante, la primera derivada respecto al tiempo de la ecuación (7-2) será

$$\dot{\mathbf{r}}' = \dot{\mathbf{r}} - \mathbf{v}, \quad (7-3)$$

y una nueva derivación daría

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a} \quad (7-4)$$

con lo que la aceleración es la misma en ambos sistemas. Si se cumple la ley de Newton (ec. 7-1) en un sistema, deberá cumplirse en el otro si la fuerza tiene igual forma en ambos. En muchos problemas corrientes de Mecánica la fuerza no varía, evidentemente, al pasar de un sistema al otro como sucede, por ejemplo, en el caso de un campo de fuerzas constante tal como $\mathbf{F} = m\mathbf{g}$. Siempre que en un sistema las fuerzas deriven de un potencial que sólo dependa de las distancias escalares entre partículas del sistema, las fuerzas tendrán la misma forma al expresarlas en el sistema con acento que al expresarlas en el sistema sin él y las ecuaciones de movimiento correspondientes quedarán inalteradas.*

Por otra parte, la transformación representada por las ecuaciones (6-2) y (6-4), llamada *transformación de Galileo*, predice que la velocidad de la luz debe ser distinta en un sistema que en otro. Así, supongamos que hay un foco luminoso en el origen del sistema

* Interesa hacer notar que con tal potencia la lagrangiana *no* tendrá igual forma en ambos sistemas. Pero puede demostrarse que la diferencia es una derivada total de una función de la posición solamente (cfr. Ejercicio 1) y las ecuaciones de movimiento serán iguales en uno y otro sistema.

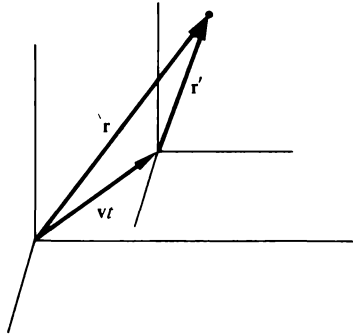


FIGURA 7-1

Esquema para ilustrar la transformación de Galileo.

sin acento que emita ondas esféricas que se propaguen con la celeridad c . Sea r el vector de posición de un punto de una superficie de onda dada. En el sistema sin acento, la velocidad de este punto será $\dot{r} = cn$, donde n es un vector unitario dirigido según r . Sin embargo, según (7-2) la velocidad de la onda en el sistema con acento es $\dot{r}' = cn - v$. En el sistema en movimiento respecto al foco luminoso la magnitud de la velocidad de la onda ya no será, en general, c ; y como depende de la dirección, las ondas ya no serán esféricas.

Una extensa serie de investigaciones, particularmente los famosos experimentos de Michelson y Morley, han puesto de manifiesto que la velocidad de la luz en el vacío es siempre la misma en todas direcciones y es independiente de los movimientos relativos uniformes del observador, el medio transmisor y el foco luminoso.* Como la propagación de la luz en el vacío con la celeridad c es una consecuencia de las ecuaciones de Maxwell, sacamos la conclusión de que la transformación de Galileo no conserva la forma de las ecuaciones de Maxwell. Ahora bien, es un postulado de la Física, implícito desde los tiempos de Galileo y Newton, que *todos* los fenómenos físicos deben aparecer de igual manera en todos los sistemas que se muevan uniformemente unos respecto a otros. Las medidas efectuadas totalmente *dentro* de un sistema dado no deben permitir que distingamos dicho sistema de los demás que se muevan uniformemente respecto a él. Este *postulado de equivalencia* exige que las leyes físicas deben expresar de igual manera en todos los sistemas en movimiento uniforme, es decir, deben ser *covariantes* al someterlas a una transformación de Galileo. La paradoja con que se encontró la Física a principios del siglo XX era que, experimentalmente, las leyes de Newton y las ecuaciones de Maxwell parecían satisfacer al postulado de equivalencia pero que teóricamente, es decir, de acuerdo con la transformación de Galileo, las ecuaciones de Maxwell no lo satisfacían.

* Una de las más sorprendentes de estas demostraciones experimentales entraña medidas de la celeridad en fotones emitidos por mesones π^0 que se desintegran en vuelo. Aun cuando la fuente se movía a una velocidad casi tan grande como la de la luz, la velocidad de los fotones emitidos medida en el sistema del laboratorio concordaba con c dentro de la incertidumbre experimental, la cual es inferior a un 0,01%. Véase T. Alvåger *et al.*, *Physics Letters*, 12, 260 (Octubre 1, 1964).

Einstein, afirmando explícitamente el postulado de equivalencia, sacó la conclusión de que era la forma de las ecuaciones de Maxwell la que debía mantenerse invariante y que, por tanto, la transformación de Galileo no podía ser correcta. Hay que encontrar una nueva relación entre sistemas en movimiento relativo uniforme, la *transformación de Lorentz*, que dé la misma celeridad de la luz en todos los sistemas que se muevan uniformemente. Einstein demostró que dicha transformación exige una revisión de los conceptos usuales de tiempo y de simultaneidad.

Es muy probable, a priori, que las ecuaciones de movimiento de Newton necesiten también revisión, ya que satisfacen el principio de equivalencia solamente ante la transformación de Galileo, la cual vemos ahora que no es correcta. Es posible que otras leyes de la Física corrientemente aceptadas puedan no conservar su forma ante una transformación de Lorentz y deban, en consecuencia, generalizarse también para que tengan las propiedades de transformación adecuadas. Desde luego, las generalizaciones deben ser tales que reduzcan dichas leyes a las formas acostumbradas en el caso de velocidades muy inferiores a la de la luz, que es cuando la transformación de Galileo resulta aproximadamente correcta.

El programa de la teoría de la Relatividad restringida es, pues, doble. Primero, hay que obtener una transformación entre dos sistemas que se muevan uniformemente que conserve invariable la velocidad de la luz. Segundo, deben examinarse las leyes de la Física atendiendo a sus propiedades de transformación ante esta transformación de Lorentz. Las leyes que no mantengan invariante su forma deben generalizarse de manera que obedezcan el postulado de equivalencia. De la imagen física resultante de este programa se ha obtenido abundante verificación experimental y en el último análisis es ésta la única justificación que necesitan las hipótesis fundamentales de Einstein.

7-2 TRANSFORMACIÓN DE LORENTZ

Se supone que el lector se ha encontrado anteriormente con las ecuaciones de la transformación de Lorentz.* Consideremos dos sistemas de coordenadas cuyos orígenes coincidan en el instante $t = 0$, vistos por observadores en ambos sistemas. Un sistema, al que llamaremos sistema con acento, se mueve uniformemente con velocidad v relativa al otro sistema, sistema sin acento, en una dirección paralela al eje z . En tal caso, la transformación de Lorentz entre las coordenadas y tiempos, medidos en los dos sistemas, viene dada por las ecuaciones

$$\begin{aligned} x' &= x, \\ y' &= y, \\ z' &= \frac{z - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \\ t' &= \frac{t - \frac{vz}{c^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{aligned} \quad (7.5)$$

* Deducciones de la transformación de Lorentz abundan en todos los niveles de sofisticación y grados de rigor. Véase la lista de referencias al final del capítulo.

Aquí, β es el cociente v/c entre v y la celeridad de la luz en el vacío. Fácil es ver que estas ecuaciones de transformación cumplen todas las propiedades que se les podían haber exigido a priori. Sobre todo, mantienen la misma celeridad de la luz en ambos sistemas. Supongamos que un foco puntual situado en el origen del sistema sin acento emita una onda luminosa en el instante $t = 0$. La ecuación del frente de onda vista en el sistema sin acento es la de una esfera:

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2. \tag{7-6}$$

Las ecuaciones de transformación (7-5) demuestran entonces, después de algunas transformaciones algebraicas, que el frente de onda transformado que se observa en el sistema con acento es también esférico y se propaga con la celeridad c :

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2. \tag{7-7}$$

Además, conservando solamente los términos de primer grado en v/c , las ecuaciones (7-5) se reducen a

$$\begin{aligned} x' &= x, \\ y' &= y, \\ z' &= z - vt, \\ t' &= t. \end{aligned} \tag{7-8}$$

En el límite de una celeridad relativa pequeña, pues, la transformación de Lorentz se reduce a la transformación de Galileo (ec. 7-2) con la afirmación explícita de que los tiempos son los mismos en ambos sistemas.

Las ecuaciones (7-5) dicen que la transformación no altera las coordenadas x e y , cosa que era de esperar. Las direcciones perpendiculares a la dirección del movimiento relativo no deben ser afectadas por el movimiento. Más formalmente, la isotropía del espacio presupone que un movimiento relativo en una dirección no va a inducir una torsión de las otras direcciones. Las ecuaciones de transformación son también lineales. Aun cuando podría no ser evidente que tuvieran que serlo, la propiedad sirve para asegurar que la transformación se reduce a la transformación lineal de Galileo en el límite de las velocidades pequeñas. De hecho, puede demostrarse* que la transformación *ha* de ser lineal para conservar la calidad de inercial de un sistema ante la transformación de Lorentz. Como la validez de las ecuaciones de Newton estaba en entredicho, Einstein dio una nueva definición de sistema inercial diciendo que era aquel en el cual una partícula aislada, libre de interacciones, o permanece en reposo o se mueve uniformemente. Si el movimiento uniforme en un sistema ha de transformarse en movimiento uniforme en el otro, las ecuaciones de transformación de Lorentz deben ser lineales.

* Véase, por ejemplo, R. D. Sard, *Relativistic Mechanics*, p. 596, o V. Fock, *The Theory of Space, Time and Gravitation*, 2.ª ed., pp. 20-24.

Finalmente, es de esperar que las ecuaciones de transformación de Lorentz sean verdaderamente relativas, es decir, que la transformación inversa tenga la misma forma con v cambiada de signo. Podemos comprobar que las ecuaciones (7-5) cumplen esta condición, despejando directamente x, y, z y t en función de x', y', z' y t' .

Las ecuaciones de la transformación de Lorentz se pueden poner fácilmente en una forma vectorial que no individualice para la velocidad relativa ninguna dirección particular. Con v dirigida según el eje z podemos formular la parte espacial de las ecuaciones de transformación (7-5) en la forma

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \left(\frac{z - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}} - z \right) \frac{\mathbf{v}}{v}.$$

La aparición explícita de z se puede eliminar utilizando la relación

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{r} = vz,$$

que conduce a

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}) \frac{\mathbf{v}}{v^2} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1 \right) - \frac{vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (7-9)$$

La ecuación (7-9) puede escribirse de manera más compacta utilizando el vector $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{v}/c$ y definiendo γ en la forma

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (7-10)$$

lo que da la ecuación

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \frac{(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{r})\boldsymbol{\beta}}{\beta^2} (\gamma - 1) - \boldsymbol{\beta} \gamma ct. \quad (7-11)$$

La forma correspondiente de la ecuación de transformación del tiempo es

$$t' = \gamma t - (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{r}) \frac{\gamma}{c}. \quad (7-12)$$

Las ecuaciones (7-11) y (7-12) constituyen las ecuaciones de transformación de Lorentz entre dos sistemas de coordenadas de ejes paralelos que se muevan uniformemente uno respecto a otro con velocidad v en una dirección cualquiera.

La transformación general de Lorentz, definida por las ecuaciones (7-11) y (7-12), tiene la forma de transformación lineal de un sistema de cuatro coordenadas a otro sistema de cuatro. Por tanto, toda la aparatada matemática desarrollada en los capítulos

anteriores para tratar las transformaciones lineales será aplicable a la transformación de Lorentz. Señaló Minkowski que si como cuarta coordenada de un espacio cartesiano de cuatro dimensiones se tomara *ict*, la transformación de Lorentz adoptaría una forma particularmente sencilla y conocida. El cuadrado del módulo del vector de posición en dicho cuadriespacio (llamado *espacio de Minkowski*) tiene la forma

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2. \quad (7-13)$$

Ahora bien, la transformación de Lorentz está hecha para que la celeridad de la luz sea la misma en ambos sistemas y en virtud de las ecuaciones (7-7) y (7-13) dicha condición equivale a exigir que el módulo del vector de posición en el cuadriespacio se mantenga invariante ante la citada transformación. En el capítulo 4 hemos visto que las transformaciones lineales que no afectan a los módulos de los vectores son transformaciones ortogonales. Así pues, la transformación de Lorentz es una transformación ortogonal en el espacio de Minkowski.

La transformación de Lorentz se puede describir para otros sistemas de coordenadas de cuatro dimensiones (cfr. § 7-3). Todo espacio de cuatro dimensiones que contenga el tiempo en uno de sus ejes se denomina *universo* o *espacio-tiempo*. En la mayor parte de nuestro estudio sólo nos referiremos al espacio de Minkowski.

Como su cuarta coordenada es imaginaria, el espacio de Minkowski es complejo y los elementos de la matriz de transformación de Lorentz en este espacio pueden ser imaginarios. De las formas vectoriales de la transformación (ec. 7-11 y /12) se pueden obtener directamente formas explícitas de los elementos matriciales. Representaremos por L la matriz de la transformación de Lorentz en el espacio de Minkowski:

$$x' = Lx, \quad (7-14)$$

siendo $L_{\mu\nu}$ el elemento genérico.* Se conviene en usar letras griegas para los subíndices que puedan representar a las cuatro coordenadas y letras latinas para los subíndices correspondientes a las componentes espaciales solamente. Como antes, utilizaremos el convenio de suma a menos que se indique explícitamente lo contrario.

En el espacio de Minkowski, las ecuaciones (7-11) y (7-12) adoptan la forma

$$x'_j = x_j + \frac{\beta_j \beta_k x_k}{\beta^2} (\gamma - 1) + i \beta_j \gamma x_4, \quad (7-15)$$

$$x'_4 = -i \beta_k x_k \gamma + \gamma x_4. \quad (7-16)$$

* Es lamentable que ya hayamos utilizado L para designar la lagrangiana y el momento cinético, pero en la práctica el propio contexto elimina casi siempre la duda.

Por tanto, los elementos de \mathbf{L} para una dirección cualquiera de β son

$$\begin{aligned} L_{jk} &= \delta_{jk} + \frac{\beta_j \beta_k}{\beta^2} (\gamma - 1), \\ L_{j4} &= i\beta_j \gamma, \\ L_{4k} &= -i\beta_k \gamma, \\ L_{44} &= \gamma. \end{aligned} \tag{7-17}$$

Por ejemplo, la transformación de Lorentz particular con la cual hemos iniciado este apartado tiene la velocidad relativa dirigida según el eje z y la matriz \mathbf{L} adopta entonces la forma sencilla

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & i\beta\gamma \\ 0 & 0 & -i\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix}. \tag{7-18}$$

En el capítulo 4 vimos que la propiedad fundamental de una matriz ortogonal es que su traspuesta es igual a su inversa. En el caso de la transformación de Lorentz con vector velocidad relativa β , la inversa debe ser la misma matriz, pero para una velocidad $-\beta$. El examen de la ecuación (7-17) muestra de manera inmediata que los elementos cumplen esta condición; cambiar el signo de β_j equivale a traspasar los subíndices.

Aún podemos aprovechar más la analogía de \mathbf{L} con las transformaciones ortogonales tridimensionales. En la ecuación (7-18) vemos que la submatriz 2×2 de las coordenadas tercera y cuarta se asemeja a la submatriz correspondiente de la rotación de un sistema de coordenadas tridimensional alrededor de un eje:

$$\begin{pmatrix} \cos \phi & \text{sen } \phi \\ -\text{sen } \phi & \cos \phi \end{pmatrix}.$$

Correspondientemente, podemos decir que la ecuación (7-18) es una rotación en el plano x_3, x_4 del espacio de Minkowski pero de ángulo ϕ que es imaginario:

$$\cos \phi = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \text{sen } \phi = \frac{i\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \tag{7-19}$$

Si nos resulta incómodo utilizar un ángulo imaginario, podemos introducir un ángulo real

ψ definido por $\phi = i\psi$, para el cual

$$\cosh \psi = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \sinh \psi = \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (7\ 20)$$

con lo que la submatriz (x_3, x_4) de la ecuación (7-18) podrá escribirse en la forma

$$\begin{pmatrix} \cosh \psi & i \sinh \psi \\ -i \sinh \psi & \cosh \psi \end{pmatrix}.$$

Con ayuda del ángulo de rotación equivalente se pueden simplificar, a veces, la manipulación de las matrices de transformación de Lorentz. Por ejemplo, supongamos que tenemos una transformación de Lorentz L entre dos sistemas con velocidad relativa β según el eje x_3 y una segunda transformación L' con velocidad relativa β' también según el eje x_3 . ¿Cuál es la transformación de Lorentz equivalente a las aplicaciones sucesivas de L y L' , es decir, $L'' = L'L$? Como las dos transformaciones de Lorentz son rotaciones en un mismo plano, bastará sumar los ángulos de rotación (según puede comprobarse multiplicando las dos matrices) y el ángulo ϕ'' para L'' será $\phi + \phi'$. Según las ecuaciones (7-19)

$$\operatorname{tg} \phi = i\beta, \quad (7-21)$$

y como

$$\operatorname{tg} \phi'' = \operatorname{tg} (\phi + \phi') = \frac{\operatorname{tg} \phi + \operatorname{tg} \phi'}{1 - \operatorname{tg} \phi \operatorname{tg} \phi'},$$

resulta inmediatamente que las dos transformaciones de Lorentz sucesivas corresponden a una transformación de Lorentz única con celeridad relativa

$$\beta'' = \frac{\beta + \beta'}{1 + \beta\beta'}. \quad (7\ 22)$$

La ecuación (7-22) es la conocida ley de adición de Einstein para velocidades paralelas.* Con relación a este resultado podemos puntualizar dos cosas. (1) En el problema no relativista correspondiente, la velocidad equivalente sería simplemente la suma de las velocidades de las dos transformaciones; relativísticamente hay una corrección definida por el término que se suma a 1 en el denominador. (2) El efecto de la corrección es que aun

* La deducción se podría haber realizado mediante el ángulo real ψ y las fórmulas para funciones hiperbólicas de la suma de dos ángulos.

cuando tomemos β y β' tan próximas a la unidad como queramos (celeridades próximas a c), β'' no alcanza nunca, ni mucho menos supera, a la unidad. No se puede alcanzar una celeridad superior a la de la luz en el vacío por medio de transformaciones de Lorentz sucesivas. Equivalentemente, partiendo de un sistema en el cual el observador esté en reposo, no hay manera de pasar a un sistema que vaya más deprisa que la luz. En este sentido, la velocidad de la luz constituye una «cota superior» para las velocidades.

Es muy fácil ver que se pueden encontrar matrices ortogonales en el espacio de Minkowski cuya forma sea distinta de la que dan las ecuaciones (7-17). Por ejemplo, supongamos $L_{44} = 1$, $L_{4i} = L_{i4} = 0$ y que los nueve elementos restantes de L formen una matriz $R \ 3 \times 3$ que sea ortogonal en el espacio tridimensional ordinario. La matriz L así definida es claramente ortogonal en el espacio de Minkowski. Ahora bien, la transformación no entraña movimiento relativo de los dos sistemas; todo su efecto se reduce a una rotación de las coordenadas espaciales. *Todas las rotaciones espaciales, pues, pertenecen a una subclase de la transformación de Lorentz.* De igual manera, la ecuación (7-14) no define la transformación de coordenadas más general ante la cual las ecuaciones de la Física deban mantener invariante su forma. Un desplazamiento del origen de coordenadas en el espacio de Minkowski —traslación espacial más un cambio del cero de tiempos— no deberá tampoco afectar a la expresión de las leyes físicas. Ni tampoco se han agotado las posibilidades de generalización de la transformación de Lorentz más allá de las ecuaciones (7-17). Parece, pues, adecuado proceder ahora a una sistematización de dichas posibilidades.

Así pues, la transformación más general en el espacio de Minkowski que mantendría la velocidad de la luz tendrá la forma

$$\mathbf{x}' = \mathbf{L}\mathbf{x} + \mathbf{a}, \quad (7-23)$$

donde \mathbf{a} es un vector arbitrario de traslación del origen y L es una matriz ortogonal. A una transformación como la representada por la ecuación (7-23) se le da el nombre de *transformación de Poincaré* o también *transformación de Lorentz no homogénea*. La condición de ortogonalidad

$$\tilde{\mathbf{L}}\mathbf{L} = \mathbf{L}\tilde{\mathbf{L}} = \mathbf{1}, \quad (7-24)$$

corresponde en el cuadierspacio a diez ligaduras impuestas a los elementos de L (cuatro condiciones diagonales y seis no diagonales) que dejan en L sólo seis cantidades independientes. El vector \mathbf{a} requiere otros cuatro elementos independientes, por lo que la transformación de Poincaré requiere, en general, que se especifiquen diez cantidades independientes. Para nuestros fines, sólo necesitamos ocuparnos de la *transformación de Lorentz homogénea*, la cual es

$$\mathbf{x}' = \mathbf{L}\mathbf{x}, \quad (7-14)$$

que contiene seis elementos independientes. Al igual que la transformación ortogonal espacial ordinaria, la condición de ortogonalidad exige que el cuadrado del determinante de

L sea la unidad:

$$|\mathbf{L}|^2 = 1. \quad (7-25)$$

De entre los posibles determinantes que cumplen la ecuación (7-25) sólo pueden participar continuamente en la transformación identidad matrices para las cuales $|\mathbf{L}| = 1$. A tales formas de \mathbf{L} se les llama, como en el caso tridimensional, transformaciones de Lorentz *propias*. * No obstante, una transformación que comporte la inversión simultánea de todas las coordenadas espaciales *y también* de la coordenada tiempo, tendría un determinante $+1$. Mediante el razonamiento siguiente es fácil ver que, en general, L_{44}^2 debe ser mayor o igual que uno. El elemento 44 de las ecuaciones (7-24) puede escribirse

$$L_{44}^2 + L_{4j}L_{4j} = 1. \quad (7-26)$$

Ahora bien, los elementos L_{4j} conectan una cuarta coordenada imaginaria con coordenadas espaciales reales. Por tanto, L_{4j} (y análogamente L_{j4}) deben ser imaginarios puros, por lo que la suma $L_{4j}L_{4j}$ debe ser negativa. Luego

$$L_{44}^2 \geq 1. \quad (7-27)$$

Por igual tipo de razonamiento, L_{44} debe ser real. De las dos posibilidades que presenta la ecuación (7-27), $L_{44} \leq -1$ implica una inversión del tiempo y tan sólo la $L_{44} \geq +1$ permite continuidad con la transformación identidad. Las transformaciones de Lorentz para las cuales $L_{44} \geq +1$ se denominan *ortócronas* y cuando $L_{44} \leq -1$, *no ortócronas*. De las cuatro elecciones posibles de signo para $|\mathbf{L}|$ y L_{44} , solamente las transformaciones de Lorentz propias ortócronas pueden derivarse continuamente de la transformación identidad. Dichas transformaciones se denominan *transformaciones de Lorentz restringidas* † —sólo ellas pueden comportar rotaciones propias y reducirse a la transformación de Galileo en el límite de las velocidades relativas pequeñas. Es evidente que los signos de las raíces cuadradas de los elementos matriciales definidos en las ecuaciones (7-17) son los que hagan que éstos representen una transformación de Lorentz restringida. Al igual que el personaje de Molière que se recreaba en aprender había estado hablando en prosa toda su vida sin saberlo, nosotros hemos estado, en realidad, hablando desde un principio de la transformación de Lorentz restringida sin darnos cuenta de ello. Continuaremos limitando nuestros estudios a transformaciones de Lorentz restringidas y el adjetivo estará implícito a menos que digamos explícitamente lo contrario.

* El determinante $|\mathbf{L}|$ es real, según puede verse a partir de los elementos matriciales dados en las ecuaciones (7-17) —el desarrollo del determinante contiene, como máximo, productos de dos elementos matriciales imaginarios a un tiempo. Luego, la otra posibilidad es $|\mathbf{L}| = -1$, que corresponde a transformaciones *impropias* que comportan inversión de coordenadas.

† Puede demostrarse (cfr. Ejercicio 9) que los productos de transformaciones restringidas también lo son. Los productos de las otras tres clases no permanecen en su clase. Así pues, solamente las transformaciones de Lorentz restringidas pueden tener la propiedad de grupo.

Una transformación de Lorentz restringida que describa la relación entre dos sistemas de ejes paralelos que se muevan uniformemente uno respecto a otro, es decir, sin rotación espacial, recibe el nombre de transformación de Lorentz *pura*. Está claro que la matriz de transformación dada por las ecuaciones (7-17) es la de una transformación de Lorentz pura. Resulta intuitivamente evidente que toda transformación de Lorentz restringida se puede descomponer en una transformación de Lorentz pura y una rotación espacial sin movimiento relativo (en uno u otro orden). Podemos esbozar de manera sencilla el procedimiento para construir las transformaciones componentes. Supongamos que queremos representar una transformación de Lorentz por un producto de una transformación pura por una rotación espacial:

$$\mathbf{L} = \mathbf{R}\mathbf{P}. \quad (7-28)$$

Las coordenadas x'_ν de un punto en el sistema transformado están relacionadas con las coordenadas en el espacio original de la manera siguiente:

$$x'_\mu = L_{\nu\mu} x'_\nu.$$

¿Con qué rapidez ve un observador en el sistema sin acento moverse al origen del sistema con acento ($x'_j = 0$)? Las coordenadas sin acento de dicho origen son

$$x_j = L_{4j} x'_4, \quad x_4 = L_{44} x'_4.$$

El vector velocidad relativa del origen con acento tendrá, pues, las componentes

$$\beta_j = \frac{x_j}{ct} = \frac{ix_j}{x_4} = \frac{iL_{4j}}{L_{44}}. \quad (7-29)$$

De la ecuación (7-26) se deduce entonces que

$$L_{44}^2 (1 - \beta_j \beta_j) = 1.$$

El que L_{44} sea real implica de manera inmediata que la β definida por la ecuación (7-29) esté comprendida entre 0 y 1 y que en función de este valor de β , L_{44} debe tener el valor

$$L_{44} = (1 - \beta^2)^{1/2} \equiv \gamma. \quad (7-30)$$

Construyamos ahora una transformación de Lorentz pura $\mathbf{P}(\boldsymbol{\beta})$ correspondiente al vector velocidad relativa (ec. 7-29). La transformación inversa tiene la matriz $\mathbf{P}(-\boldsymbol{\beta})$. Se deduce, por tanto, que la matriz \mathbf{R} se puede construir en forma de producto de la manera siguiente.

$$\mathbf{R} = \mathbf{L}\mathbf{P}(-\boldsymbol{\beta}). \quad (7-31)$$

Se deja como ejercicio la demostración formal de que la matriz R cuadrada 4×4 tiene la forma de una rotación en el espacio, tal como se deduce de los elementos matriciales de $P(-\beta)$ y la ortogonalidad de L . Sin embargo, debe quedar claro que R sólo puede ser una rotación en el espacio. El sistema intermedio de coordenadas definido por $P(\beta)$ está en reposo respecto al sistema final de ejes y todo lo que puede hacer R es girar las coordenadas. Notemos que, por esta descomposición, tres de los seis elementos de L independientes vienen dados por las componentes del vector velocidad relativa β y los otros tres por los parámetros que definen la rotación espacial representada por R , p. ej., tres ángulos de Euler.

La aplicación sucesiva de dos transformaciones de Lorentz puras equivale, desde luego, a una sola transformación de Lorentz entre los sistemas de coordenadas inicial y final. Pero a menos que sean paralelas las velocidades relativas de las transformaciones sucesivas, la transformación equivalente final no será una transformación de Lorentz pura. El proceso de descomposición antes descrito se puede llevar a cabo mediante el producto de dos transformaciones de Lorentz puras para obtener explícitamente la rotación de los ejes de coordenadas resultante de ellas. En general, las manipulaciones algebraicas que intervienen suelen ser lo suficientemente aborrecibles para disuadirnos de poner de manifiesto la matriz de rotación. Sin embargo, existe una situación concreta en la cual aproximaciones permisibles reducen la complejidad de cálculo, teniendo el resultado obtenido importantes aplicaciones en muchos campos de la Física moderna. Lo que interviene es un fenómeno llamado *precesión de Thomas*.

Consideremos tres sistemas de coordenadas O_1 , sistema del laboratorio; O_2 , sistema que se mueve con velocidad β relativa a O_1 ; y O_3 , sistema que se mueve con velocidad $\Delta\beta \equiv \beta'$ relativa a O_2 . Sin pérdida de generalidad, podemos tomar β dirigido según el eje z de O_1 y β' en el plano $y-z$ de O_2 , es decir, β, β' definen el plano $y-z$ de O_2 . Supondremos infinitesimales las componentes de β' , las cuales sólo las hemos de conservar hasta el menor grado que no sea nulo. Así, γ para la transformación entre O_2 y O_3 se puede sustituir por la unidad. Basándonos en esto, la matriz L , transformación de Lorentz pura entre O_1 y O_2 , tiene la forma de la ecuación (7-18) mientras que la matriz correspondiente de la transformación de O_2 a O_3 es

$$L' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & i\beta'_2 \\ 0 & 0 & 1 & i\beta'_3 \\ 0 & -i\beta'_2 & -i\beta'_3 & 1 \end{pmatrix}, \tag{7-32}$$

donde β'_2 y β'_3 son las componentes de β' . La matriz producto, con la misma aproximación, es

$$L'' = L'L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \beta\beta'_2\gamma & i\beta'_2\gamma \\ 0 & 0 & \gamma & i\beta'_3\gamma \\ 0 & -i\beta'_2 & -i\beta'_3 & \gamma \end{pmatrix} \tag{7-33}$$

Está claro que L'' no puede representar una transformación de Lorentz pura para la cual, según indican las ecuaciones (7-17), los elementos L''_{jk} deben ser simétricos. Según la ecuación (7-29), las componentes no nulas de la velocidad relativa efectiva entre O_1 y O_3 son*

$$\beta_2'' = \frac{\beta_2'}{\gamma}, \quad \beta_3'' = \beta. \quad (7-34)$$

Como $(\beta'')^2 = (\beta_2'')^2 + (\beta_3'')^2 \approx \beta^2$ y por tanto $\gamma'' \approx \gamma$, la transformación de Lorentz pura para la velocidad relativa $-\beta''$ la aproximaremos así:

$$P(-\beta'') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{\beta_2'}{\beta\gamma}(\gamma-1) & -i\beta_2' \\ 0 & \frac{\beta_2'}{\beta\gamma}(\gamma-1) & \gamma & -i\beta\gamma \\ 0 & i\beta_2' & i\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix}. \quad (7-35)$$

Por último, la matriz de rotación que caracteriza a la rotación de los ejes O_3 vista desde O_1 resulta ser, tras algunas simplificaciones algebraicas y suprimiendo los términos de orden superior en β' ,

$$R = L''P(-\beta'') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{\beta_2'}{\beta\gamma}(\gamma-1) & 0 \\ 0 & -\frac{\beta_2'}{\beta\gamma}(\gamma-1) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (7-36)$$

Comparando con la ecuación (4-105) se ve que R implica que O_3 gire respecto a O_1 alrededor del eje \hat{x} un ángulo infinitesimal

$$\Delta\Omega_1 = \frac{\beta_2'}{\beta\gamma}(\gamma-1) = \beta_2''\beta\frac{(\gamma-1)}{\beta^2}. \quad (7-37)$$

La rotación espacial resultante de la aplicación sucesiva de dos transformaciones de Lorentz a ejes paralelos ha sido declarada tan paradójica como las más frecuentemente

* El efecto de tratar β' tan pequeña es que se ha despreciado β_3' frente a β .

tratadas violaciones aparentes del sentido común, tal como la «paradoja de los gemelos». Pero esta paradoja particular tiene aplicaciones importantes, especialmente en Física atómica y por ello se ha comprobado experimentalmente en muchas ocasiones. Consideremos una partícula que se mueva en el sistema del laboratorio con una velocidad v que no sea constante. Como el sistema en el cual dicha partícula está en reposo está acelerado respecto al del laboratorio, dichos sistemas no estarán relacionados por una transformación de Lorentz. Podemos obviar esta dificultad mediante una estrategia muy utilizada (que algunos han elevado a la categoría de postulado adicional de la Relatividad). Imaginemos una infinidad de sistemas inerciales que se muevan uniformemente respecto al sistema del laboratorio, uno de los cuales lleva en un instante la velocidad de la partícula. Ésta estará, pues, en reposo instantáneo en un sistema inercial que puede relacionarse con el del laboratorio mediante una transformación de Lorentz. Se supone que esta transformación de Lorentz describirá también las propiedades de la partícula y su sistema en reposo de verdad visto desde el sistema del laboratorio.

Supongamos ahora que O_1 sea el sistema del laboratorio, siendo O_2 y O_3 dos de los sistemas en reposo instantáneo en dos instantes del movimiento de la partícula separados un tiempo Δt . Según las ecuaciones (7-34), el observador en el laboratorio verá en este tiempo una variación Δv de la velocidad de la partícula que sólo tiene una componente y de valor $\beta_2' c$. Como el eje z inicial se ha tomado en la dirección de v , el vector de la rotación infinitesimal durante este tiempo podremos escribirlo en la forma

$$\Delta \Omega = -(\gamma - 1) \frac{\mathbf{v} \times \Delta \mathbf{v}}{v^2}. \tag{7-38}$$

Luego, si la partícula tiene alguna dirección concreta asociada a ella (tal como un vector spin), desde el sistema del laboratorio se observará que dicha dirección está animada de una *precesión* de velocidad angular

$$\omega = -(\gamma - 1) \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{a}}{v^2}, \tag{7-39}$$

donde \mathbf{a} es la aceleración de la partícula vista desde O_1 . La ecuación (7-39) se encuentra frecuentemente en la forma que adopta cuando v es suficientemente pequeña para poder realizar la aproximación de γ :

$$\omega = \frac{1}{2c^2} (\mathbf{a} \times \mathbf{v}). \tag{7-39'}$$

En una y otra forma, ω recibe el nombre de *frecuencia de precesión de Thomas*.

7-3 TRANSFORMACIONES DE LORENTZ EN ESPACIOS REALES DE CUATRO DIMENSIONES*

A la vez que conserva su propiedad de mantener la velocidad de la luz, la transformación de Lorentz se puede también considerar que es una transformación lineal en un espacio *real* de cuatro dimensiones. En dicho espacio, la cuarta coordenada suele representarse por $x_0 = ct$. Para que la luz se propague en todos los sistemas isotrópamente con celeridad c , el cuadrado del módulo de un vector debe seguir viniendo dado por la ecuación (7-13). Luego, el espacio real no puede ser euclídeo, sino de Riemann con un tensor métrico diagonal \mathbf{G} de la forma

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (7-40)$$

donde el índice de las coordenadas toma los valores 1230. De la ecuación (6-26) recordemos que el cuadrado del módulo de un vector en un tal espacio viene dado por

$$\tilde{\mathbf{x}}\mathbf{G}\mathbf{x} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_0^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2, \quad (7-41)$$

exactamente como en la ecuación (7-13). † Una transformación de Lorentz homogénea es una transformación lineal en este espacio real que mantiene el módulo de los vectores. Como los elementos de la transformación son reales y por tanto no son los mismos de \mathbf{L} , designaremos por Λ la transformación de Lorentz real. La condición de que los vectores tengan igual módulo antes y después de la transformación es

$$\tilde{\mathbf{x}}'\mathbf{G}\mathbf{x}' = \tilde{\mathbf{x}}\mathbf{G}\mathbf{x}. \quad (7-42)$$

Pero, tenemos

$$\tilde{\mathbf{x}}'\mathbf{G}\mathbf{x}' = \tilde{\Lambda}\tilde{\mathbf{x}}\mathbf{G}\Lambda\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{x}}\tilde{\Lambda}\mathbf{G}\Lambda\mathbf{x}.$$

Así pues, para que sea válida la ecuación (7-42), Λ debe ser tal que

$$\tilde{\Lambda}\mathbf{G}\Lambda = \mathbf{G}. \quad (7-43)$$

* En el apartado anterior hemos presentado casi todas las características cinemáticas de la transformación de Lorentz necesarias para el resto del libro. Si bien este apartado y el siguiente son importantes para el empleo de la transformación de Lorentz en diversas partes de la Física moderna, pueden suprimirse sin afectar ello al tratamiento de la Mecánica clásica de partículas relativistas.

† Como el cuadrado puede ser positivo o negativo, los tensores métricos como el de la ecuación (7-40) se dice que definen una métrica indefinida.

La ecuación (7-43) puede interpretarse diciendo que la transformación de congruencia Λ deja invariado al tensor métrico. Un aspecto más importante de la ecuación (7-43) lo encontramos en su analogía con la condición de matriz ortogonal (p. ej., ec. 7-24) en un espacio euclídeo (donde el tensor métrico es 1). La ecuación (7-43) podemos considerar que es la condición de ortogonalidad de Λ en el espacio real de Riemann cuyo tensor métrico es G .

El paso de fórmulas expresadas en el espacio de Minkowski a las expresadas en el cuadriespacio real y recíprocamente, es fácil de lograr puesto que

$$x_4 = ix_0. \tag{7-44}$$

Se deduce que

$$\Lambda_{j0} = iL_{j4}, \quad \Lambda_{0k} = -iL_{4k}, \tag{7-45}$$

mientras que los demás elementos no varían. Así, la transformación de Lorentz pura con velocidad relativa según el eje z , correspondiente a la ecuación (7-18), tiene la matriz real simétrica

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & -\beta\gamma \\ 0 & 0 & -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix}. \tag{7-46}$$

Todas las fórmulas cinemáticas del apartado anterior se pueden escribir análogamente sin dificultad. Debemos recordar que el producto escalar de dos vectores representados por x e y deberá escribirse ahora (cfr. ec. 6-25) en la forma

$$\tilde{x}Gy = \tilde{y}Gx = x_\mu g_{\mu\nu} y_\nu.$$

(La condición de ortogonalidad expresada por la ecuación 7-43 garantiza que dicho producto escalar sea invariante ante una transformación Λ .)

Podemos zafarnos del omnipresente tensor métrico y hacer que las fórmulas se parezcan más a las correspondientes a espacios cartesianos, mediante un cambio de notación que exige una breve incursión en la Geometría de Riemann. Supongamos que formamos un vector con los elementos de coordenadas dx_μ y consideremos su comportamiento ante una transformación general de coordenadas del tipo

$$y_\nu = f_\nu(x_1, x_2, \dots). \tag{7-47}$$

Entonces, las propiedades de transformación de dx_μ son

$$dy_\nu = \frac{\partial f_\nu}{\partial x_\mu} dx_\mu = \frac{\partial y_\nu}{\partial x_\mu} d\dot{x}_\mu. \tag{7-48}$$

Aquí, las derivadas son los elementos de la matriz jacobiana de la transformación entre (x) e (y) . En el caso de una transformación lineal \mathbf{A} , serían simplemente los elementos matriciales $A_{\nu\mu}$. Por otra parte, los elementos de un vector gradiente se transformarían de acuerdo con la ecuación

$$\frac{\partial}{\partial y_\nu} = \frac{\partial x_\mu}{\partial y_\nu} \frac{\partial}{\partial x_\mu}. \quad (7-49)$$

En la ecuación (7-49) los coeficientes son ahora los elementos de la matriz jacobiana de la transformación inversa de y a x . Los vectores que se transforman cumpliendo la regla formulada en la ecuación (7-48) se denominan vectores *contravariantes* y se conviene en asignarles supraíndices:

$$D'^\nu = \frac{\partial y_\nu}{\partial x_\mu} D^\mu, \quad (7-48')$$

mientras que los vectores *covariantes* se transforman de la manera indicada en la ecuación (7-49) y se les asignan subíndices:

$$F'_\nu = \frac{\partial x_\mu}{\partial y_\nu} F_\mu, \quad (7-49')$$

Si pasamos de (x) a (y) y luego volvemos a (x) , el resultado final será, evidentemente, una transformación identidad. Luego el producto de las matrices jacobianas correspondientes a una transformación y a su inversa debe ser la matriz unidad. Se deduce, por tanto, que el producto interior (o producto escalar) de un vector contravariante por uno covariante queda invariante en la transformación, ya que

$$D'^\nu F'_\nu = \frac{\partial y_\nu}{\partial x_\mu} \frac{\partial x_\rho}{\partial y_\nu} D^\mu F_\rho = \delta_{\mu\rho} D^\mu F_\rho = D^\mu F_\mu.$$

En el caso de espacios cartesianos, no hay diferencia entre vectores covariantes y contravariantes ante transformaciones lineales ortogonales. Así, si la matriz \mathbf{A} describe dicha transformación, un vector contravariante se transforma según la ley

$$D'^\nu = A_{\nu\mu} D^\mu,$$

y un vector covariante según la

$$F'_\nu = (\mathbf{A}^{-1})_{\mu\nu} F_\mu = (\tilde{\mathbf{A}})_{\mu\nu} F_\mu = A_{\nu\mu} F_\mu.$$

Por tanto, no tenemos necesidad de distinguir, hasta ahora, entre los dos tipos de comportamiento ante la transformación.

Las cualidades de covariancia y contravariancia se pueden generalizar fácilmente a tensores de orden superior. Así, un tensor covariante G de segundo orden se transforma cumpliendo

$$G'_{\mu\nu} = G_{\rho\lambda} \frac{\partial x_\rho}{\partial y_\mu} \frac{\partial x_\lambda}{\partial y_\nu}, \quad (7-50)$$

y la contracción de un tensor covariante de segundo orden con dos vectores contravariantes, p. ej., $G_{\mu\nu} D^\mu F^\nu$, puede demostrarse que se transforma invariante en forma. En un espacio de Riemann, en donde el elemento de longitud de camino (cfr. ec. 6-24)

$$(ds)^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (7-51)$$

es invariante ante las transformaciones de interés, deducimos que el tensor métrico es covariante.* Con un razonamiento similar, la contracción de un tensor covariante de segundo orden y un vector contravariante se transforma en un vector covariante:

$$\begin{aligned} F'_\mu &= G'_{\mu\nu} D'^\nu = G_{\rho\lambda} \frac{\partial x_\rho}{\partial y_\mu} \frac{\partial x_\lambda}{\partial y_\nu} \frac{\partial y_\nu}{\partial x_\tau} D^\tau \\ &= G_{\rho\lambda} \frac{\partial x_\rho}{\partial y_\mu} \delta_{\lambda\tau} D^\tau = G_{\rho\lambda} D^\lambda \frac{\partial x_\rho}{\partial y_\mu} \\ &= F_\rho \frac{\partial x_\rho}{\partial y_\mu}. \end{aligned}$$

Así pues (y finalmente), el producto escalar de dos vectores contravariantes A^μ , B^ν en nuestro cuadriespacio real,

$$g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu,$$

* Para la transformación de Lorentz puede esto verse directamente a partir de la condición de ortogonalidad (ec. 7-43) escrita en la forma

$$G = \tilde{\Lambda}^{-1} G \Lambda^{-1}$$

y considerada como transformación de congruencia de G .

podrá escribirse en la forma

$$A_\nu B^\nu$$

donde A_ν es el vector covariante:

$$A = g_{\mu\nu} A^\mu. \quad (7-52)$$

De esta manera, el cuadrado del módulo del vector de posición en el cuadriespacio real podrá escribirse en la forma

$${}_H x^\mu x_\mu$$

sin haber tenido que introducir específicamente el tensor métrico. Sólo hemos de recordar que un factor del producto escalar se sustituye por el vector covariante formado por contracción con el tensor métrico.*

Una variante del uso de un espacio real consiste en introducir un espacio con el tensor métrico.

$$\mathbf{G}' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{pmatrix}. \quad (7-53)$$

El cuadrado del módulo de un vector de posición será ahora

$$\mathbf{x} \mathbf{G}' \mathbf{x} \equiv x_\mu G'_{\mu\nu} x_\nu = -x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + c^2 t^2. \quad (7-41')$$

Está claro que una transformación que conserve este módulo también mantendrá invariante la celeridad de la luz y la transformación de Lorentz correspondiente debe coincidir con la Λ antes citada. Todo el formalismo anterior queda inalterado, solamente el valor del producto escalar cambia de signo. Los defensores del tensor métrico (7-53) aducen que eliminará algunos signos menos en fórmulas que sugieran posteriormente en la Dinámica de partículas. Por otra parte, esta métrica representa un cambio discontinuo

* Si tratamos del producto escalar de dos vectores covariantes, debemos «subir» el índice por contracción con el inverso del tensor métrico, el cual puede demostrarse que es contravariante. Los tensores métricos que estamos empleando, los cuales son diagonales con elementos ± 1 son sus propios inversos y no hay diferencia entre tensores métricos covariantes y contravariantes.

respecto a lo que se considera módulo de un vector en el espacio tridimensional ordinario. El tensor métrico G' tiene, según se dice a veces, la «signatura» $(- - - +)$ mientras que G (ec. 7-40) tiene la signatura $(+ + + -)$. Los tensores también pueden identificarse por sus trazas, $+2$ corresponde a G y -2 a G' .

En su voluminoso tratado de la gravedad,* Misner, Thorne y Wheeler abogan por el abandono del espacio complejo de Minkowski: «A quien en alguna ocasión participe en Relatividad restringida se le acuchilla $x^4 = ict$.» Pretenden que la utilización de un espacio cartesiano oculta la naturaleza indefinida básica de la métrica —que el cuadrado del módulo de los vectores puede ser positivo, nulo o negativo. Es más, el artificio de un espacio cartesiano complejo sólo es factible en Relatividad restringida; en la teoría de la Relatividad generalizada el espacio es curvo y no podemos evitar utilizar un tensor métrico no cartesiano. También señala que en Mecánica cuántica, en donde las funciones de onda o los vectores de estado son complejos, la utilización de una coordenada imaginaria complicaría la operación de la conjugación compleja. Tales argumentos parecen persuasivos; el espacio real de cuatro dimensiones con métrica indefinida (a menudo con traza -2) se utiliza ampliamente en Mecánica cuántica y en Física de partículas.

Es difícil oponerse a una autoridad tan distinguida. De todas maneras, vamos a detenernos y resistir contra la eutanasia del espacio de Minkowski. No vamos a tratar en este libro ni la Relatividad generalizada ni la Mecánica cuántica; no tenemos por qué inclinarnos ante sus requisitos particulares. El carácter indefinido del elemento de línea está tan manifiesto o tan oculto en el espacio complejo como en el real; vamos a tenerlo que aceptar demasiado a menudo. En cambio, las fórmulas en el espacio complejo de Minkowski suelen ser especialmente sencillas y claras, sin los estorbos de los tensores métricos ni la distinción artificial (aquí) entre cantidades covariantes y contravariantes. También permite generalizaciones naturales a partir de nuestra experiencia con el espacio tridimensional ordinario. Por estas razones vamos a utilizar de ahora en adelante el formalismo del espacio de Minkowski casi exclusivamente. La mayoría de ecuaciones presentan igual aspecto en uno y otro espacio; en todo caso, el paso de uno a otro es sencillo. Sólo haremos uso del espacio real en pocos casos, en los que sea particularmente conveniente (como en el próximo apartado) y entonces, casi siempre, con la métrica que tiene por traza $+2$.

7-4 OTRAS DESCRIPCIONES DE LA TRANSFORMACIÓN DE LORENTZ

Uno de los ejemplos en los que el empleo de una coordenada tiempo real lleva a deducciones más sencillas es en la demostración del homomorfismo entre la transformación de Lorentz y una clase de matrices complejas 2×2 . Recordemos de § 4-5 que existe homomorfismo entre las rotaciones espaciales propias y las matrices complejas unitarias con determinante $+1$ (unimodulares). En el caso de la transformación de Lorentz se puede poner de manifiesto un homomorfismo análogo, empleando los mismos métodos que se emplearon para las rotaciones espaciales.

* C. W. Misner, K. S. Thorne y J. A. Wheeler, «Gravitation», 1973, p. 51.

Consideremos una matriz 2×2 \mathbf{S} definida de la manera siguiente:

$$\mathbf{S} \equiv \begin{pmatrix} z + ct & x - iy \\ x + iy & -z + ct \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} x_0 + x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & x_0 - x_3 \end{pmatrix}. \quad (7-54)$$

En este caso \mathbf{S} , generalización de la matriz \mathbf{P} dada en la ecuación (4-59), es una matriz hermitica. Tiene la forma de la matriz hermitica 2×2 más general posible para x_μ real. En § 4-5 vimos que las matrices spin de Pauli (ec. 4-74) junto con la matriz unidad forman un conjunto base completo de matrices hermiticas 2×2 . Podemos expresar \mathbf{S} simplemente en función de este conjunto base expresando por σ_0 la matriz unidad; entonces, \mathbf{S} puede escribirse en la forma

$$\mathbf{S} = x_\mu \sigma_\mu, \quad (7-55)$$

donde la suma se extiende de 0 a 3. Es fácil encontrar que el determinante de \mathbf{S} es

$$|\mathbf{S}| = -x^2 - y^2 - z^2 + c^2 t^2, \quad (7-56)$$

y por tanto proporcional al cuadrado del vector de posición en el espacio de cuatro dimensiones. Sea \mathbf{Q} la misma matriz genérica compleja 2×2 que en § 4-5 (ec. 4-49) con la única restricción de que el determinante de \mathbf{Q} deba valer +1, es decir, \mathbf{Q} es unimodular. Como los elementos de \mathbf{Q} son complejos en general, la condición impuesta al determinante proporciona dos ecuaciones de ligadura, reduciendo a 6 el número de elementos independientes en \mathbf{Q} —tantos como se necesitan en la transformación de Lorentz homogénea. Con ayuda de \mathbf{Q} , transformemos \mathbf{S} de acuerdo con el esquema (cfr. ec. 4-60)

$$\mathbf{S}' = \mathbf{Q}\mathbf{S}\mathbf{Q}^\dagger. \quad (7-57)$$

Como \mathbf{Q} no es unitaria, esta transformación no es de semejanza pero resulta fácil demostrar que también conserva el carácter hermitico de \mathbf{S} . Por tanto, la matriz transformada \mathbf{S}' deberá tener una forma análoga a la de la ecuación (7-55),

$$\mathbf{S}' = x'_\nu \sigma_\nu,$$

donde las x'_ν deben ser reales. Además, como \mathbf{Q} es unimodular, el determinante de \mathbf{S}' debe ser igual al determinante de \mathbf{S} . Podemos, pues, decir que \mathbf{Q} genera una transformación de coordenadas x_μ a coordenadas x'_ν de tal manera que se conserve la velocidad de la luz — \mathbf{Q} es homomorfa hasta al menos cierta subclase de la transformación de Lorentz.

Se puede demostrar que la transformación de Lorentz equivalente a \mathbf{Q} debe ser propia y ortócrona, pero la demostración formal es complicada.* No obstante, podemos esbozar

* Véase, p. ej., A. O. Barut, *Electrodynamics and Classical Theory of Fields*, p. 23, o A. J. Macfarlane, *Jour. Math. Phys.* 3, 1116 (1962).

rápidamente un razonamiento plausible. Siguiendo el método utilizado en § 4-5 es fácil demostrar que si L_1 y L_2 son dos transformaciones de Lorentz correspondientes a Q_1 y Q_2 , $L_1 L_2$ corresponderá a $Q_3 = Q_1 Q_2$, que es también unimodular. Luego la subclase de la transformación de Lorentz homomórfica a las matrices Q es tal que el producto de dos transformaciones de Lorentz es también miembro de la misma subclase —una de las más importantes «propiedades de grupo». Ahora bien, hemos visto que sólo hay dos clases de transformaciones de Lorentz que tengan esta propiedad: la transformación de Lorentz homogénea generalizada y la transformación de Lorentz restringida. Para decidir entre estas dos posibilidades podemos hacer notar que la evaluación a lo bestia de los productos de matrices de la ecuación (7-57) demuestra que L_{44} viene dado en función de los elementos de Q (ec. 4-49) por la expresión

$$L_{44} = \Lambda_{44} = \frac{1}{2}(\alpha\alpha^* + \beta\beta^* + \gamma\gamma^* + \delta\delta^*),$$

que es definida positiva. En el caso de transformaciones no ortócronas, L_{44} es negativa y ≤ -1 . De las dos clases, pues, las matrices Q sólo podrán ser homomorfas para las transformaciones de Lorentz restringidas, al igual que las matrices unimodulares unitarias sólo son homomorfas para rotaciones espaciales propias.

De nuevo, al igual que en el caso tridimensional, entre L y Q existe una asociación bivalente, porque $+Q$ y $-Q$ llevan a la misma transformación de Lorentz. Luego diremos que la relación es un homomorfismo y no un isomorfismo. Las expresiones de los elementos de $L_{\mu\nu}$ en función de los elementos de Q se pueden obtener o bien por evaluación a lo bestia de la ecuación (7-57) o, de manera más elegante, por los métodos que se describen en las referencias de Barut y de MacFarlane antes citadas. Sin embargo, en el caso de transformaciones de Lorentz puras existe una descripción sencilla de las Q análoga a la ecuación (4-98) para rotaciones espaciales propias. La evaluación directa de la ecuación (7-57) demuestra que la matriz unimodular

$$Q = \begin{pmatrix} e^{\psi/2} & 0 \\ 0 & e^{-\psi/2} \end{pmatrix}, \tag{7 58}$$

donde ψ es real, corresponde a la transformación de Lorentz

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1 \\ x'_2 &= x_2 \\ x'_3 &= x_3 \cosh \psi - x_0 \operatorname{senh} \psi \\ x'_0 &= -x_3 \operatorname{senh} \psi + x_0 \cosh \psi. \end{aligned} \tag{7 59}$$

Démonos cuenta que las ecuaciones (7-59) constituyen la transformación de Lorentz pura (ec. 7-46) para el movimiento relativo según el eje x_3 , estando ψ definida por la ecuación

(7-20). La matriz de la ecuación (7-58) puede también escribirse en la forma

$$\mathbf{Q} = \mathbf{1} \cosh \frac{\psi}{2} - \sigma_3 \sinh \frac{\psi}{2}, \quad (7-60)$$

análoga a la ecuación (4-76) para la rotación espacial alrededor del eje z . Podemos fácilmente generalizar este resultado para una transformación de Lorentz pura arbitraria. Al igual que una rotación propia se podría parametrizar en función de una dirección del eje de rotación y una rotación de ángulo finito, también una rotación de Lorentz pura se puede describir en función de un vector unitario κ en la dirección del movimiento relativo y un «ángulo» ψ definido por la ecuación (7-20). La forma vectorial de la transformación de Lorentz (ec. 7-11 y 7-12) podrá escribirse con estos parámetros en la forma

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + (\kappa \cdot \mathbf{r})\kappa(\cosh \psi - 1) - \kappa x_0 \sinh \psi, \quad (7-61)$$

$$x'_0 = -(\kappa \cdot \mathbf{r}) \sinh \psi + x_0 \cosh \psi. \quad (7-62)$$

La ecuación (7-61) recuerda mucho la forma de la fórmula de la rotación finita (ec. 4-92). La extensión evidente de la ecuación (7-60) al movimiento relativo en una dirección dada κ es

$$\mathbf{Q}(\kappa, \psi) = \mathbf{1} \cosh \frac{\psi}{2} - \kappa \cdot \sigma \sinh \frac{\psi}{2}, \quad (7-63)$$

que podemos comparar con la ecuación (4-98) para rotaciones espaciales.* Observemos que la forma de la ecuación (7-63) demuestra que las matrices \mathbf{Q} para transformaciones de Lorentz puras son hermiticas, mientras que para rotaciones propias son unitarias. Al igual que sucede con las rotaciones puras, la ecuación (7-63) implica una representación exponencial de la matriz \mathbf{Q} de una transformación de Lorentz pura:

$$\mathbf{Q}(\kappa, \psi) = \exp [-\kappa \cdot \sigma (\psi/2)]. \quad (7-64)$$

Como una transformación de Lorentz restringida es el producto de una transformación de Lorentz pura por una rotación espacial, podemos combinar las ecuaciones (7-64) y (4-99) para obtener la forma correspondiente de la matriz \mathbf{Q} :

$$\mathbf{Q}(\mathbf{n}\Phi; \kappa, \psi) = \exp [i\mathbf{n} \cdot \sigma (\Phi/2)] \exp [-\kappa \cdot \sigma (\psi/2)]. \quad (7-65)$$

* No podemos introducir cantidades análogas a los «ángulos de Euler» porque a diferencia de las rotaciones propias, el producto de dos transformaciones de Lorentz puras no colineales no es una transformación de Lorentz pura.

Recordemos, desde luego, que las exponenciales sólo representan sus desarrollos en serie.

Las ventajas de las representaciones unimodulares de la transformación de Lorentz quedan bien de manifiesto cuando intentamos descomponer el producto de dos transformaciones de Lorentz puras en una rotación espacial y una transformación de Lorentz pura. Según hemos señalado, desenredar los vectores velocidad efectiva y rotación a partir de la multiplicación directa, constituye un penosísimo problema algebraico. Con la forma de la matriz Λ , resulta mucho más sencillo aun cuando todavía sea necesaria una manipulación considerable (v. Ejercicio 13).

Si las transformaciones infinitesimales desempeñan un papel tan importante en las rotaciones espaciales, es natural que busquemos sus contrapartidas para la transformación de Lorentz. Ya hemos utilizado una transformación de Lorentz infinitesimal al deducir la precesión de Thomas (cfr. ec. 7-32). Aún cuando no son útiles de manera tan inmediata como en las rotaciones espaciales, las transformaciones de Lorentz infinitesimales resultan valiosas en las aplicaciones en las que (según veremos en § 9-7) proporcionan la marca de identificación para la estructura de grupo matemática de la transformación de Lorentz. En función de κ y ψ , la transformación de Lorentz pura real adopta la forma (o directamente de las ecuaciones 7-61 y 7-62 o a partir de las ecuaciones 7-17)

$$\begin{aligned} \Lambda_{ij} &= \delta_{ij} + \kappa_i \kappa_j (\cosh \psi - 1), \\ \Lambda_{i0} &= \Lambda_{0i} = -\kappa_i \sinh \psi, \\ \Lambda_{00} &= \cosh \psi. \end{aligned} \tag{7-66}$$

Una transformación de Lorentz pura infinitesimal está caracterizada por una velocidad relativa infinitesimal entre los dos sistemas \mathcal{O} , lo que es equivalente, por un «ángulo» $\Delta\psi$ infinitesimal. Según las ecuaciones (7-66), una transformación de Lorentz pura infinitesimal se puede escribir en la forma

$$\Lambda = \mathbf{1} + \delta, \tag{7-67}$$

donde

$$\delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\kappa_1 \Delta\psi \\ 0 & 0 & 0 & -\kappa_2 \Delta\psi \\ 0 & 0 & 0 & -\kappa_3 \Delta\psi \\ -\kappa_1 \Delta\psi & -\kappa_2 \Delta\psi & -\kappa_3 \Delta\psi & 0 \end{pmatrix}.$$

En analogía con la ecuación (4-117) para rotaciones espaciales, podemos introducir la noción de matrices generatrices de transformaciones de Lorentz puras infinitesimales en

la forma

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

(7-68)

$$\mathbf{K}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

En función de \mathbf{K}_i , la matriz infinitesimal δ se puede escribir muy sencillamente en la forma

$$\delta = -\kappa_i \mathbf{K}_i \Delta\psi,$$

ya la variación de un vector de un cuadridespacio real, escrito en forma de matriz \mathbf{x} , ante una transformación de Lorentz infinitesimal pura viene dada en forma completa por

$$\Delta\mathbf{x} = -\kappa_i \mathbf{K}_i \mathbf{x} \Delta\psi. \quad (7-69)$$

La ecuación (7-69) constituye, en realidad, una ecuación diferencial para generar una transformación de Lorentz pura finita.

Como las rotaciones espaciales constituyen un subgrupo de la transformación de Lorentz, debemos añadir a éstas las generatrices de la rotación espacial infinitesimal en el formalismo Λ , que son iguales a las \mathbf{M}_i definidas en las ecuaciones (4-117) con la diferencia de que añadimos una cuarta fila y una cuarta columna de ceros. Los conmutadores o corchetes de Lie de \mathbf{M}_i quedan así invariables

$$[\mathbf{M}_i, \mathbf{M}_j] = \epsilon_{ijk} \mathbf{M}_k. \quad (4-118)$$

La multiplicación directa comprobaría que las \mathbf{K}_i cumplen las relaciones de conmutación

$$[\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_j] = -\epsilon_{ijk} \mathbf{M}_k,$$

y

(7-70)

$$[\mathbf{K}_i, \mathbf{M}_j] = \epsilon_{ijk} \mathbf{K}_k.$$

Las ecuaciones (4-118) y (7-70) juntas definen el Álgebra de Lie del grupo de Lorentz restringido y hacen las veces de contraste que identifica dicho grupo. Sorprendentemente, veremos que aparecen en relación con el movimiento ilimitado *no relativista* en el

problema de Kepler (v. § 9-7).

7-5 FORMULACIONES COVARIANTES EN CUATRO DIMENSIONES

Habiendo obtenido la transformación de Lorentz para sustituir a la incorrecta transformación de Galileo, pasemos a la segunda etapa y exijamos que todas las leyes de la Mecánica, junto con todas las de la Física, tengan la misma forma en todos los sistemas que se muevan uniformemente. La tarea de examinar las leyes de la Física en cuanto a la invariancia de su forma ante la transformación de Lorentz se facilita en gran manera escribiéndolas en el mundo de cuatro dimensiones que hemos introducido en los apartados anteriores. Demostraremos que, en tal caso, es posible verificar la invariancia de Lorentz de una ecuación dada, por simple inspección.

La invariancia de la forma ante la transformación de Lorentz no es la única propiedad invariante que se exige a las leyes físicas. Está claro que el contenido físico de una relación dada cualquiera no puede verse afectado por la orientación particular elegida para los ejes espaciales; las leyes de la Física deben también mantener invariante su forma ante rotaciones rígidas, es decir, transformaciones ortogonales espaciales propias. Este requisito de invariancia nos es más familiar y su examen aclarará el método a seguir al establecer la invariancia ante la transformación de Lorentz.

Normalmente, no nos preocupará la invariancia de nuestras teorías ante rotaciones espaciales. Al construir una ecuación cualquiera se exige siempre que sus términos sean *todos* escalares o *todos* vectoriales; en general, todos los términos deberán ser tensores del mismo orden y este requisito asegura automáticamente la deseada invariancia ante la rotación. Así pues, una relación escalar tendrá la forma general

$$a = b,$$

y como los dos miembros de la igualdad, por ser escalares, son invariantes ante las rotaciones espaciales, la relación será evidentemente válida en todos los sistemas de coordenadas. Una relación vectorial de la forma

$$\mathbf{F} = \mathbf{G},$$

significa en realidad tres relaciones separadas entre las componentes vectoriales:

$$F_i = G_i.$$

Los valores de estas componentes no son desde luego, invariantes ante la rotación espacial sino que se transforman a nuevos valores F'_i , G'_i que son las componentes de los vectores transformados, \mathbf{F}' , \mathbf{G}' . Pero como los dos miembros de las relaciones entre componentes se transforman de igual manera, entre las componentes transformadas deberá cumplirse la misma relación:

$$F'_i = G'_i.$$

Por tanto, la relación entre los dos vectores no se ve perturbada por la rotación espacial; en el nuevo sistema seguiremos teniendo

$$\mathbf{F}' = \mathbf{G}'.$$

Notemos que la invariancia de la forma de la relación es totalmente consecuencia del hecho de que los dos miembros se transforman como vectores. Decimos que los términos de la ecuación son *covariantes*.* Análogamente, una igualdad entre dos tensores de segundo orden

$$\mathbf{C} = \mathbf{D}$$

implica necesariamente la misma igualdad entre los dos tensores transformados

$$\mathbf{C}' = \mathbf{D}'$$

porque ambos tensores se transforman covariantemente ante una rotación espacial. En cambio, una ecuación que comporte por separado una componente de un vector y, por ejemplo, una componente de un tensor no podrá, evidentemente, mantener invariante su forma ante una transformación ortogonal tridimensional. *La invariancia de una ley física ante una rotación del sistema de coordenadas espaciales exige la covariancia de los términos de la ecuación ante las transformaciones ortogonales tridimensionales.*

Ahora bien, hemos identificado la transformación de Lorentz restringida como transformación ortogonal en el espacio de Minkowski o universo. Ya hemos manejado escalares y vectores en este espacio de cuatro dimensiones. Podemos establecer en este espacio análogamente, tensores de otros órdenes con propiedades de transformación que sean generalizaciones obvias de las transformaciones tridimensionales. Dichos tensores de diversos órdenes se denominarán *tensores de universo* y comenzarán en *escalares de universo, vectores de universo* (o *cuadrivectores*), etc. La invariancia de la forma de toda ley física ante la transformación de Lorentz quedará evidente de manera inmediata una vez se exprese en *forma cuatridimensional covariante*, siendo todos los términos tensores de universo del mismo orden. Una ley que no cumpla los requisitos del principio de equivalencia no se puede poner en forma covariante. Las propiedades de transformación en cuatro dimensiones de los términos de una ley física hacen, pues, las veces de piedra de toque para examinar su validez relativista.

El ejemplo más sencillo de cuadrivector es el vector de posición de un «punto» en el espacio de Minkowski, cuyas componentes son (x_1, x_2, x_3, x_4) . Como las cuatro coordenadas de un punto de universo nos dicen *dónde* ha sucedido algo en el espacio ordinario y *cuándo* ha sucedido, será tal vez más descriptivo llamar *suceso* a todo punto del espacio de cuatro dimensiones. Aun cuando al hablar del universo utilizaremos muchas veces la terminología tridimensional, conviene recordar las importantes

* En esta utilización que de él hacemos, el término «covariante» *no tiene nada que ver con «transformación covariante»* expresión utilizada en § 7-3. Lamentablemente, este es otro ejemplo en el cual matemáticos y físicos utilizan un mismo término para dos conceptos totalmente distintos. Los dos convenios están demasiado afincados para que los intentemos cambiar ahora.

diferencias físicas existentes entre los significados en uno y otro espacio.

Cuando, por el espacio ordinario, se mueva una partícula, su punto representativo en el espacio de cuatro dimensiones describe una trayectoria llamada *línea de universo*. El cuadvectores dx_μ representa la variación del cuadvectores de posición para un movimiento diferencial a lo largo de la línea de universo. Multiplicando escalarmente dx_μ por sí mismo podemos formar un escalar de universo (y por tanto un invariante de Lorentz) representado por $d\tau$ y definido por la ecuación

$$(d\tau)^2 = -\frac{1}{c^2} dx_\mu dx_\mu. \tag{7-71}$$

El significado de $d\tau$ puede quedar claro evaluando la ecuación (7-71) en el sistema de Lorentz en el cual la partícula esté momentáneamente en reposo. En dicho sistema, las componentes del vector transformado dx'_μ son $(0, 0, 0, icdt')$ y el invariante $d\tau$ viene dado por

$$(d\tau)^2 = -\frac{1}{c^2} dx'_\mu dx'_\mu = (dt')^2.$$

Así pues, $d\tau$ es el intervalo de tiempo medido por un reloj que se mueva con la partícula,* por lo que diremos que es un intervalo del *tiempo propio* o tiempo de universo.

La relación entre $d\tau$ y un intervalo de tiempo medido en un sistema de Lorentz dado se puede deducir directamente desarrollando la ecuación de definición (7-71):

$$(d\tau)^2 = -\frac{1}{c^2} ((dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 - c^2(dt)^2),$$

o sea

$$d\tau = dt \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right]},$$

que es equivalente a la relación

$$\frac{d\tau}{\sqrt{1 - \beta^2}} = dt. \tag{7-72}$$

Puede parecer que el empleo del símbolo β en la ecuación (7-72) pueda llevarnos a confusión. Hasta ahora, β representaba únicamente la velocidad relativa (en unidades de c) de dos sistemas inerciales relacionados mediante una transformación de Lorentz. Ahora se utiliza para representar la velocidad de una partícula observada en un sistema

* Por definición, $d\tau$ es la raíz cuadrada positiva de la expresión dada en la ecuación (7-71). El signo menos en la expresión subradical se eliminaría utilizando la métrica de traza -2 (ec. 7-53).

inercial (el sistema del laboratorio). En realidad, su utilización resulta coherente si pensamos en sistemas de Lorentz en reposo instantáneo respecto a la partícula, tal como hicimos en el caso de la precesión de Thomas. En tal caso, β es tanto la velocidad relativa entre el sistema del observador y el sistema en reposo instantáneo, como la velocidad observada de la partícula. La ecuación (7-72) nos dice que un intervalo de tiempo medido en el sistema en reposo es siempre más largo que el intervalo de tiempo correspondiente observado en un sistema en el cual la partícula no esté en reposo. Este es un ejemplo de la conocida «dilatación del tiempo» comprobada experimentalmente en multitud de situaciones, sobresalientes entre ellas las observaciones de las vidas medias de partículas inestables que se desintegran en vuelo.*

Ya hemos mencionado que el cuadrado del módulo de un cuadrivector no es necesariamente definido positivo. Los cuadrivectores cuyo cuadrado del módulo sea mayor o igual que cero se dice que son del *género espacial*; cuando los cuadrados de los módulos sean negativos se dice que son vectores del *género temporal*. Como estas características se deben a haber multiplicado escalarmente los vectores por sí mismos, lo que da escalares de universo, las designaciones serán evidentemente invariantes ante la transformación de Lorentz. Los nombres dados se deben al hecho de que el cuadrado de un vector espacial es siempre definido positivo y un cuadrivector del género espacial puede siempre transformarse de manera que se anule su cuarta componente, según veremos. En cambio, un cuadrivector del género temporal debe tener siempre cuarta componente, pero puede transformarse de manera que se anulen las tres primeras componentes. Como ejemplo de estos conceptos podemos hacer notar que el vector diferencia entre dos puntos de universo puede ser del género espacial o del temporal. Sea X_μ el vector diferencia, definido por

$$X_\mu = x_{1\mu} - x_{2\mu},$$

en donde los subíndices 1 y 2 denotan los dos sucesos. El módulo de X_μ viene dado por

$$X_\mu X_\mu = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^2 - c^2(t_1 - t_2)^2.$$

Así pues, X_μ será del género espacial si los dos puntos de universo están separados de tal manera que

$$|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^2 \geq c^2(t_1 - t_2)^2,$$

mientras que será del género temporal si

$$|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^2 < c^2(t_1 - t_2)^2.$$

* Cfr. el estudio de R. D. Sard, *Relativistic Mechanics*, 1970, pp. 96-100.

La condición para que el vector diferencia sea del género temporal equivale a decir que se puede cubrir la distancia entre los dos sucesos mediante una señal luminosa, mientras que si los puntos están separados por un vector diferencia del género espacial, no podrán conectarse mediante una onda que se propague con celeridad c .

Los ejes espaciales se pueden siempre orientar de manera que el vector diferencia espacial $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ esté dirigido según el eje z , de manera que $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| = z_1 - z_2$. Ante una transformación de Lorentz con velocidad v paralela al eje z , la cuarta componente de X_μ se transformará entonces de acuerdo con la ecuación (7-5):

$$c(t'_1 - t'_2) = \frac{c(t_1 - t_2) - \frac{v}{c}(z_1 - z_2)}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Si X_μ es del género espacial y los sucesos se designan de manera que $t_2 > t_1$, será

$$c(t_1 - t_2) < z_1 - z_2,$$

y será posible encontrar una velocidad $v < c$ tal que $ic(t'_1 - t'_2) \equiv X'_4$ se anule, tal como habíamos indicado. La anulación de X'_4 significa, físicamente, que si la distancia entre dos sucesos es del género espacial, siempre podremos encontrar un sistema de Lorentz en el cual los dos sucesos sean simultáneos. en cambio, para separaciones del género temporal entre sucesos no es posible encontrar una transformación de Lorentz que los haga simultáneos y mucho menos, que invierta el orden de la secuencia temporal de los dos sucesos. Por tanto, «antes» y «después» son conceptos invariantes ante una transformación de Lorentz y se conserva la causalidad. El que pueda invertirse la secuencia de sucesos con separaciones del género temporal no vulnera el principio de causalidad porque, por definición, no hay manera de que un suceso pueda influir sobre el otro. Por ejemplo, nada de lo que podamos hacer ahora en la Tierra puede afectar dentro de los próximos diez años a un planeta en órbita alrededor de una estrella alejada de nosotros diez años-luz.

Podemos dar muchos ejemplos de cuadvectores. Así, se define la cuadvelocidad u_v , diciendo que es la variación por unidad de tiempo del vector de posición de una partícula, respecto a su tiempo propio:

$$u_v = \frac{dx_v}{d\tau}, \tag{7 73}$$

cuyas componentes espaciales y temporal son

$$u_i = \frac{v_i}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad \text{y} \quad u_4 = \frac{ic}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \tag{7 74}$$

La velocidad de universo tiene módulo constante, ya que la suma $u_\nu u_\nu$ viene dada por

$$u_\nu u_\nu = \frac{v^2}{1 - \beta^2} - \frac{c^2}{1 - \beta^2} = -c^2, \quad (7-75)$$

y por tanto es también del género temporal.

Puede demostrarse que la densidad de corriente eléctrica \mathbf{j} y la cantidad $ic\rho$, donde ρ es la densidad de carga eléctrica, constituyen también un cuadrivector, j_μ .^{*} La ecuación de continuidad para carga y corriente

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t},$$

se podrá escribir en el lenguaje del espacio de Minkowski en la forma

$$\frac{\partial j_\mu}{\partial x_\mu} = 0. \quad (7-76)$$

Ya vimos (p. 358) que el operador cuadrigradiante se transforma en el espacio de Minkowski como un cuadrivector,[†] ya que

$$\frac{\partial}{\partial x'_\nu} = \frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\nu} \frac{\partial}{\partial x_\mu} = L'_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\mu} = L_{\nu\mu} \frac{\partial}{\partial x_\mu}, \quad (7-77)$$

en virtud de la condición de ortogonalidad de L . Luego el primer miembro de la ecuación (7-76) es la cuadrividivergencia de un cuadrivector, es decir, un escalar de universo y por tanto es invariante ante una transformación de Lorentz. Tenemos aquí un ejemplo de cómo al enunciar una ley de la Física en el lenguaje del espacio de Minkowski se puede poner bien de manifiesto su covarianza de Lorentz.

Otro ejemplo contiene el potencial vector y el potencial escalar del Electromagnetismo, los cuales forman juntos un cuadrivector $A_\mu \rightarrow (\mathbf{A}, i\phi)$. Si los potenciales cumplen la condición de Lorentz

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0, \quad (7-78)$$

^{*} j_μ es simplemente el cuadrivector $\rho_0 u_\mu$, donde ρ_0 es la densidad de carga en el sistema en el cual están en reposo las cargas, es decir, es la «densidad de carga propia». Véase Panofsky y Phillips, *Classical Electricity and Magnetism*, o Jackson, *Classical Electrodynamics*.

[†] En los espacios no cartesianos se transforma covariantemente (en el sentido de los matemáticos) y la ecuación (7-76) es, por tanto, el producto escalar de un vector covariante por un vector contravariante.

satisfarán por separado ecuaciones de onda de la forma

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} &= -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \\ \nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} &= -4\pi\rho. \end{aligned} \tag{7-79}$$

(Véanse las referencias antes citadas de Panofsky y Phillips o de Jackson.) En el lenguaje del espacio de Minkowski, la condición de Lorentz se puede escribir en la forma manifiestamente covariante.

$$\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu} = 0. \tag{7-80}$$

En generalización evidente del operador tridimensional ∇ , podemos simbolizar por \square el operador gradiente cuadrimensional. El producto escalar de \square por sí mismo, \square^2 (llamado *D'Alembertiano*) será, pues, un operador diferencial escalar de universo:

$$\square^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial x_\mu} = \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}.$$

Por tanto, el sistema de ecuaciones de onda, ecs. (7-78), se podrá escribir en forma de ecuación vectorial de universo claramente covariante:

$$\square^2 A_\mu = -\frac{4\pi j_\mu}{c}. \tag{7-81}$$

El poder escribir la condición de Lorentz y las ecuaciones de onda en la forma de las ecuaciones (7-80) y (7-81) es suficiente para demostrar que la teoría electromagnética de Maxwell está de acuerdo con la Relatividad restringida y no con la Relatividad de Galileo.

7-6 LAS ECUACIONES DE LA FUERZA Y LA ENERGÍA EN MECÁNICA RELATIVISTA

Hemos visto que las ecuaciones de movimiento de Newton, al ser invariantes ante una transformación de Galileo, no pueden ser invariantes ante una transformación de Lorentz; deberán generalizarse adecuadamente para que den una ley para la fuerza que satisfaga los requisitos de covarianza de la Relatividad restringida. Desde luego, las generalizaciones que buscamos deberán ser tales que para velocidades pequeñas frente a c las nuevas

ecuaciones para una partícula se reduzcan a la forma conocida

$$\frac{d}{dt}(mv_i) = F_i. \quad (7-82)$$

Ahora bien, las componentes espaciales de un cuadrivector constituyen por sí mismas un vector espacial, ya que una transformación de Lorentz para la cual $L_{4i} = L_{i4} = 0$, $L_{44} = 1$, no es más que una rotación espacial y sólo afecta a las componentes espaciales del cuadrivector. Sin embargo, el recíproco no es cierto; las componentes de un vector espacial no se transforman necesariamente como las componentes espaciales de un cuadrivector. Se pueden multiplicar las componentes de un vector ordinario por una función cualquiera de β sin que cambien sus propiedades de rotación espacial. Pero una tal multiplicación afecta de manera vital a cómo cambian ante una transformación de Lorentz.* Así, las componentes espaciales de la cuadrivelocidad u_ν forman un vector $\sqrt{1 - \beta^2}$; pero observemos que la v no es parte de un cuadrivector. Debe dividirse antes por $\sqrt{1 - \beta^2}$.

Por tanto, podemos esperar que aun cuando la ecuación (7-82) no sea invariante ante una transformación de Lorentz, su generalización relativista sea una ecuación cuadrivectorial cuyas componentes espaciales se reduzcan a (7-82) en el límite, cuando $\beta \rightarrow 0$. No es difícil encontrar una generalización cuadrivectorial del primer miembro de la ecuación. El único cuadrivector cuya parte espacial se reduzca a v en el caso de velocidades pequeñas es la cuadrivelocidad u_ν . Además, aun cuando podamos tomar m como propiedad invariante de la partícula, sabemos que el tiempo t no es invariante ante una transformación de Lorentz pero se puede sustituir evidentemente por el tiempo propio escalar τ , el cual tiende a t cuando $\beta \rightarrow 0$. La generalización que buscamos de las ecuaciones de movimiento de Newton para una partícula deberá, pues, tener la forma

$$\frac{d}{d\tau}(mu_\nu) = K_\nu, \quad (7-83)$$

donde K_ν es un cuadrivector llamado *fuerza de Minkowski*.

No debemos pensar que las componentes espaciales de K_ν se identifiquen con las componentes de la fuerza. Todo lo que exige la ecuación (7-82) es que K_i se reduzca a F_i en el límite de las velocidades pequeñas. Así pues, K_i puede ser igual al producto de F_i por una función cualquiera de β que se reduzca a la unidad cuando $\beta \rightarrow 0$; la relación exacta depende claramente de las propiedades ante una transformación de Lorentz de las componentes de la fuerza. Para determinar el comportamiento de F ante la transformación de Lorentz hemos utilizado dos procedimientos.

Uno de ellos comienza señalando que las fuerzas las crean, fundamentalmente, unos pocos generadores físicos —las fuerzas pueden ser gravitatorias, electromagnéticas o,

* Como antes, β (y v) se usa indistintamente como velocidad de una partícula vista en el sistema del laboratorio o como velocidad de un sistema de Lorentz en el cual se halle la partícula en reposo instantáneo.

posiblemente, nucleares. Una teoría correcta de estos fenómenos físicos tiene por misión dar expresiones para las fuerzas que intervienen y dichas expresiones, si se enuncian en forma covariante, nos dicen automáticamente cuáles son las propiedades de transformación de las componentes de las fuerzas. Lamentablemente, no tenemos teorías covariantes para todos los generadores posibles de fuerzas y en el caso de las fuerzas nucleares difícilmente tenemos alguna teoría de la cual valga la pena hablar. Tan sólo podemos esperar que la teoría electromagnética clásica proporcione una ecuación covariante para la fuerza, ya que la transformación de Lorentz se ha construido expresamente para mantener la invariancia de la teoría. Pero esto es suficiente para nuestros fines; las propiedades de transformación deben ser las mismas para todas las fuerzas independientemente de cuál sea su origen. La afirmación «una partícula está en equilibrio bajo la acción de dos fuerzas» debe ser válida en todos los sistemas de Lorentz, lo cual sólo puede suceder si todas las fuerzas se transforman de igual manera.

En § 1-5 señalábamos que la fuerza electromagnética que se ejerce sobre una partícula cargada viene dada por (cfr. ec. 1-64')

$$F_i = -q \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\phi - \frac{1}{c} \mathbf{v} \cdot \mathbf{A} \right) + \frac{1}{c} \frac{dA_i}{dt} \right). \tag{7-84}$$

En función del potencial cuadrivector A_μ , la expresión $\phi - \frac{1}{c} \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}$ se puede escribir en la forma covariante de la manera siguiente:

$$\phi - \frac{1}{c} \mathbf{v} \cdot \mathbf{A} = -\frac{1}{c} \sqrt{1 - \beta^2} u_\nu A_\nu, \tag{7-85}$$

y las componentes F_i de la fuerza serán

$$F_i = -\frac{q}{c} \sqrt{1 - \beta^2} \left(-\frac{\partial}{\partial x_i} (u_\nu A_\nu) + \frac{dA_i}{d\tau} \right). \tag{7-86}$$

La expresión entre paréntesis se transforma en la componente espacial de un cuadrivector, por lo que F_i es igual al producto de $\sqrt{1 - \beta^2}$ por la componente espacial de un cuadrivector, el cual identificamos con la fuerza de Minkowski K_μ . Luego, la relación entre las fuerzas ordinaria y de Minkowski debe ser

$$F_i = K_i \sqrt{1 - \beta^2}, \tag{7-87}$$

independientemente de cuál sea el origen de las fuerzas. Subproducto de esta deducción es la forma particular que adopta la fuerza de Minkowski sobre partículas cargadas:

$$K_\mu = \frac{q}{c} \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} (u_\nu A_\nu) - \frac{dA_\mu}{d\tau} \right). \tag{7-88}$$

El otro procedimiento intenta evitar la necesidad de utilizar una teoría física que se salga de la propia Mecánica; en él se *define* la fuerza diciendo que es la variación de cantidad de movimiento por unidad de tiempo, en todos los sistemas de Lorentz:

$$\frac{dp_i}{dt} = F_i. \quad (7-89)$$

Sin embargo, la cantidad de movimiento indicada en (7-89) no es mv_i sino una cierta generalización relativista que se reduce a dicha expresión en el límite de las velocidades pequeñas. Lewis y Tolman* han obtenido una expresión de la cantidad de movimiento relativista, independiente de la forma (7-83) de la ley de la fuerza, notando que una consecuencia invariante de Lorentz de la definición (7-89) es la conservación de la cantidad de movimiento en ausencia de fuerzas exteriores. Examinan el choque elástico de dos partículas y encuentran la forma de p_i tal que se conserve en la mencionada colisión para todos los sistemas de Lorentz. Pero habiendo aceptado (7-83) como forma de la ley de la fuerza, podemos hallar la cantidad de movimiento relativista y el significado de K_μ a un tiempo, escribiendo (7-83) en una forma que se parezca a (7-89) todo lo posible. De la relación entre τ y t , y de la definición de cuadrivelocidad, podemos escribir las componentes espaciales de la ecuación (7-83) en la forma

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{mv_i}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right) = K_i \sqrt{1 - \beta^2}.$$

Comparando esta expresión con (7-89) vemos que el teorema de conservación de la cantidad de movimiento será invariante si definimos la cantidad de movimiento mediante la expresión

$$p_i = \frac{mv_i}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (7-90)$$

y que F_i y K_i estén relacionadas tal como indica la ecuación (7-87). Se observará que la ecuación (7-90) se reduce a mv_i cuando $\beta \rightarrow 0$. Los dos procedimientos conducen, pues, a la misma conclusión. La comparación de la ecuación (7-90) con la ecuación (7-74) que define la cuadrivelocidad demuestra que p_i constituye la parte espacial del llamado cuadvectores cantidad de movimiento-energía:

$$p_v = mu_v. \quad (7-91)$$

* Véase R. D. Sard, *Relativistic Mechanics*, pp. 146-152.

La ecuación de movimiento generalizada de una partícula podrá, pues, escribirse también en la forma

$$\frac{dp_v}{d\tau} = K_v. \tag{7-83'}$$

Hasta ahora sólo hemos estudiado la parte espacial de la ecuación cuadrivectorial (7-83, 7-83'); no hemos dicho nada acerca del significado físico de la cuarta ecuación. La parte temporal del cuadrivector K_μ se puede obtener directamente del producto escalar de (7-83) por la cuadrivelocidad:

$$u_v \frac{d}{d\tau} (mu_v) = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{m}{2} u_v u_v \right) = K_v u_v. \tag{7-92}$$

Como el cuadrado del módulo de u_v es la constante $-c^2$ (cfr. ec. 7-75) y m es asimismo constante, el segundo miembro de (7-92) se anula y queda

$$K_v u_v \equiv \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}}{1 - \beta^2} + \frac{icK_4}{\sqrt{1 - \beta^2}} = 0. \tag{7-93}$$

La cuarta componente de la fuerza de Minkowski será, por tanto

$$K_4 = \frac{i}{c} \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \tag{7-94}$$

y la correspondiente cuarta componente de la ecuación (7-83) resulta ser

$$\frac{d}{dt} \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}. \tag{7-95}$$

Ahora bien, la energía cinética T se define en general diciendo que el trabajo que por unidad de tiempo efectúa la fuerza sobre la partícula, o sea $\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$, es el aumento de energía cinética por unidad de tiempo:

$$\frac{dT}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}. \tag{7-95'}$$

Esta definición de energía cinética concuerda con la conocida fórmula no relativista $\frac{1}{2}mv^2$; por comparación, la expresión relativista la da la ecuación (7-95) que será la ecuación de la energía si

$$T = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (7-96)$$

En el límite, cuando β^2 se hace mucho menor que 1, la ecuación (7-96) se puede desarrollar en la forma

$$T \rightarrow mc^2 \left(1 + \frac{\beta^2}{2} \right) = mc^2 + \frac{mv^2}{2}. \quad (7-97)$$

Este valor límite no concuerda con la forma no relativista que era de esperar; existe un término adicional mc^2 . Sin embargo, parecería a primera vista que dicho término carece de importancia ya que al segundo miembro de la ecuación (7-96) se le puede sumar una constante arbitraria de integración sin que ello afecte a la validez de la ecuación (7-95'). En particular, la constante podría ser $-mc^2$, lo que daría a T el valor no relativista.

Sin embargo, es preferible conservar la cantidad T dada por la ecuación (7-96), ya que comparando la ecuación (7-91) con la (7-96) vemos que iT/c es la cuarta componente del cuadrivector cantidad de movimiento-energía. Para mantener la transición correcta a valores no relativistas, es preferible dar el nombre «energía cinética» a otra cantidad K definida por

$$K = T - mc^2 = mc^2(\gamma - 1). \quad (7-96')$$

En la literatura no existe una única designación de T . A veces se le llama «energía total» si bien esto sólo es estrictamente apropiado en el caso de una partícula libre, sin interacciones. A menudo se le llama, simplemente, energía.

Cualquiera que sea el nombre que se le dé, T posee propiedades interesantes y útiles. Por ejemplo, podemos demostrar que la T dada por la ecuación (7-96) presenta la ventajosa propiedad de que toda situación en que se conserve la cantidad de movimiento espacial debe conservar también T . Para verificar este teorema, sólo tenemos que notar que el enunciado «se conserva la cantidad de movimiento espacial» debe ser invariante ante una transformación de Lorentz. (Realmente, la invarianza está implícita en la definición de sistema inercial dada por Einstein, cfr. p. 345.) Las componentes transformadas de la cantidad de movimiento p'_j se dan en forma de funciones lineales de p_j y T . Luego, la conservación de p'_j para todos los sistemas de Lorentz exige la conservación conjunta de todas las componentes de p_ν , que es la conclusión que buscábamos.

En Mecánica no relativista, la conservación de la cantidad de movimiento y la conservación de la energía cinética eran cuestiones distintas. Así, en el capítulo 3 vimos

que en el caso de choques inelásticos o reacciones se conservaba la cantidad de movimiento de los componentes que constituían el sistema, pero no su energía cinética. En cambio, la energía cinética relativista, dadas sus propiedades de transformación como cuarta componente de un cuadvectores, debe conservarse incluso en choques inelásticos, junto con la cantidad de movimiento espacial. El término mc^2 , llamado *energía en reposo*, posee, pues, un significado físico importante.

Con un ejemplo sencillo vamos a poner de manifiesto que la conservación de T implica un cambio de la masa en reposo del sistema a consecuencia de reacciones o colisiones que no son elásticas. Consideremos, por ejemplo, dos partículas o sistemas de igual masa que se muevan, en el sistema del laboratorio, uno contra otro con velocidades iguales y opuestas. La cantidad de movimiento espacial será, pues, nula en el sistema del laboratorio. Podemos formar para el sistema un cuadvectores cantidad de movimiento-energía

$$P_\mu = p_\mu(1) + p_\mu(2),$$

que tendrá, por tanto, una componente espacial nula pero tendrá una cuarta componente $2iT/c$, donde T es la energía de cada partícula definida por la ecuación (7-96). Supongamos que el choque es totalmente inelástico —después del choque las partículas quedan totalmente en reposo en el sistema del laboratorio, como dos bolas de masilla que choquen y queden pegadas. La energía total será entonces la energía en reposo del sistema compuesto final el cual tiene una masa

$$M = 2m + \Delta M.$$

La conservación de P_4 en el choque implica

$$2T = Mc^2. \tag{7-98}$$

Ahora bien, dar a las partículas sus velocidades iniciales a partir del reposo en el sistema del laboratorio exige una energía

$$\Delta E = 2(T - mc^2) = \Delta Mc^2. \tag{7-99}$$

Así pues, el choque inelástico ha convertido toda la energía del movimiento inicial en el sistema del laboratorio en un incremento de la masa en reposo del sistema, de acuerdo con la famosa relación de Einstein (7-99).

En el caso de dos bolas de masilla que choquen, solemos decir que la energía incidente del movimiento perdida en el choque se convierte en calor. Lo que nos dice la Relatividad restringida es que la masa en reposo, o inercia, del sistema aumenta en proporción al calor que se produce. En principio, se podría detectar el aumento de masa si se pusiera en

movimiento el sistema mediante una fuerza conocida.* A escala atómica o nuclear, la energía incidente del movimiento puede invertirse, por ejemplo, en la creación de una tercera partícula. En la Física moderna abundan ejemplos de este estilo; en el apartado siguiente encontraremos alguna de las cuestiones de Cinemática relativista referentes a tales choques. Desde luego, el proceso puede tener lugar en sentido opuesto — conversión de energía en reposo en energía de movimiento. El ejemplo más sorprendente a escala terrestre lo proporcionan probablemente las explosiones nucleares. De nuevo, la energía total T de un ingenio o arma nuclear se mantiene constante durante la explosión; se libera gran cantidad de energía cinética en virtud, solamente, de una disminución de la masa del contenido. A pesar de las espantosas energías que se producen, la pérdida de masa sólo es de alrededor del 0,1% de la masa original.

Formalmente, la relación entre la energía T y la cantidad de movimiento se expresa diciendo que el módulo del cuadrivector cantidad de movimiento-energía es constante:

$$p_\mu p_\mu = -m^2 c^2 = p^2 - \frac{T^2}{c^2}$$

de donde

$$T^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4. \quad (7-100)$$

La ecuación (7-100) es la análoga relativista de la relación $T = p^2/2m$ de la Mecánica no relativista, con la diferencia de que en aquella T incluye la energía en reposo. De la definición de T (ec. 7-96) resulta evidente que la energía de una partícula con masa en reposo finita tiende a infinito cuando su celeridad tiende a la de la luz. Dicho de otro modo, se necesita una cantidad infinita de energía para aumentar la celeridad de una partícula material (o de una nave espacial) desde el reposo hasta la celeridad c de la luz en el vacío. Es esta otra prueba de que es imposible alcanzar o superar la celeridad de la luz en el vacío partiendo de cualquier celeridad finita inferior a c . †

77 CINEMÁTICA RELATIVISTA DE LAS COLISIONES Y DE SISTEMAS DE MUCHAS PARTÍCULAS

Las formulaciones de los apartados anteriores nos permiten generalizar relativísticamente

* Los cambios de masa que intervienen en tales choques macroscópicos son, desde luego, muy pequeños porque un joule de energía corresponde a una masa de sólo $1,1 \times 10^{-14}$ g.

† Se ha señalado que no violaría este enunciado el tener partículas nacidas con celeridades mayores que la de la luz en el vacío. Para tales «taquiones» la energía, en virtud de la ecuación (7-96), sólo podría ser real si la «masa» asociada a la partícula fuese imaginaria. De hecho, esto significa que un taquión está descrito por un parámetro real m' tal que la energía total venga dada por $T = m'c^2/\sqrt{\beta^2 - 1}$. Las especulaciones acerca de la naturaleza de los taquiones y de sus interacciones han dado origen a un floreciente debate acerca de cómo podrían encajar en nuestros puntos de vista normales de la causalidad. Profundizar en este tema carecería de sentido por cuanto no hay absolutamente ninguna evidencia experimental, por el momento, de la existencia de dichas partículas.

lo tratado en § 3-11 acerca de la transformación de los fenómenos de colisión de unos sistemas a otros. El tema presenta un gran interés en Física experimental de altas energías. Aun cuando las fuerzas entre partículas elementales sólo se conocen de forma imperfecta y son muy distintas de las fuerzas clásicas, mientras las partículas que intervengan en una reacción se hallen fuera de la región de interacción mutua su movimiento medio se puede describir con la Mecánica clásica. Además, el principio fundamental que rige las transformaciones (conservación del cuadvivector cantidad de movimiento-energía) es válido tanto en Mecánica clásica como en Mecánica cuántica. La colisión o reacción real se considera que tiene lugar en un punto —o dentro de una caja negra muy pequeña— y sólo contemplamos el comportamiento de las partículas antes y después. Dada su importancia para la Física de las altas energías, este aspecto de la Cinemática relativista se ha convertido en un campo muy laboriosamente estudiado.* No podríamos dar un estudio extenso aquí. Todo lo que podemos hacer es dar algunas herramientas útiles y citar algunos ejemplos sencillos que puedan ilustrar el gusto de las técnicas que se utilizan.

El concepto de un punto centro de masa presenta dificultades evidentes en la teoría de la invarianza de Lorentz. Ahora bien, el sistema del centro de masa se puede generalizar adecuadamente diciendo que es el sistema de referencia de Lorentz en el cual es nula la cantidad de movimiento espacial total de todas las partículas. Que se pueda hallar siempre un tal sistema de referencia se deduce del teorema de que el cuadvivector cantidad de movimiento-energía es del género temporal para un sistema de puntos materiales. Para poner de manifiesto este resultado conviene introducir una notación en la cual las componentes del cuadvivector tengan dos índices: uno para designar la partícula (usualmente r, s, t , etc.) y el otro es la letra griega de costumbre que indica la componente. El cuadvivector cantidad de movimiento-energía total de un sistema se escribirá, pues, en la forma

$$P_\mu = \sum_r p_{r\mu}. \tag{7-101}$$

El cuadrado de su módulo, en vista de las ecuaciones (7-91), (7-74) y (7-75), viene dado por

$$\begin{aligned} P_\mu P_\mu &= \sum_{r,s} p_{r\mu} p_{s\mu} \\ &= - \sum_r m_r^2 c^2 + \sum_{r \neq s} p_{r\mu} p_{s\mu} \\ &= - \sum_r m_r^2 c^2 - \sum_{r \neq s} m_r m_s \gamma_r \gamma_s (c^2 - \mathbf{v}_r \cdot \mathbf{v}_s). \end{aligned}$$

Como las velocidades de las partículas materiales serán siempre inferiores a c , el cuadrado del módulo de P_μ será siempre negativo. Por tanto, existe un cierto sistema de coordenadas de Lorentz en el cual las componentes espaciales del vector P_μ transformado son todas

* Describir esto con el nombre de «Cinemática» es un tanto equivocado, puesto que en realidad trata con cantidades dinámicas tales como la cantidad de movimiento y la energía, pero el nombre está demasiado afincado para que lo intentemos cambiar ahora.

nulas. A este sistema de coordenadas le llamaremos *sistema del centro de masa* y los designaremos con la abreviatura «sistema C-D-M».

El principio dinámico más importante que podemos utilizar —casi toda la Física de la situación nos lo permite— es la conservación del cuadrivector cantidad de movimiento-energía antes y después del choque. Según hemos visto, esto implica automáticamente la conservación de la cantidad de movimiento espacial y la de la energía total (incluida la energía de la masa en reposo). Nuestras herramientas más importantes para utilizar el principio de conservación son las transformaciones de Lorentz al y del sistema C-D-M y la formación de invariantes de Lorentz (escalares de universo) que tienen igual valor en todos los sistemas de Lorentz. Muchos métodos son análogos a los utilizados en el caso de colisiones no relativistas pero, en cierto sentido, los resultados en Cinemática relativista son más fáciles de obtener. No hay que preocuparse de la conservación por separado de la cantidad de movimiento y de la energía. Y las transformaciones entre el sistema del laboratorio y el sistema C-D-M son, simplemente, casos particulares de la transformación de Lorentz.

Como ejemplo de la utilización de invariantes de Lorentz, consideremos una reacción iniciada por dos partículas que produzca otro sistema de partículas de masa m_r , $r = 3, 4, 5, \dots$. En el sistema C-D-M, la cantidad de movimiento total transformada P'_μ tiene nulas las componente espaciales y una cuarta componente igual a iT'/c . A menudo es conveniente considerar que el sistema C-D-M es el sistema propio o en reposo de una partícula material compuesta de masa $M = T'/c^2$.* El cuadrado del módulo de P_μ debe ser invariante en todos los sistemas de Lorentz (y conservarse en la reacción). Luego, tenemos

$$P_\mu P_\mu = P'_\mu P'_\mu = -\frac{T'^2}{c^2} = -M^2 c^2. \quad (7-102)$$

Pero, para las partículas iniciales, podemos evaluar $P_\mu P_\mu$ en la forma

$$P_\mu P_\mu = -(m_1^2 + m_2^2)c^2 + 2p_{1\mu}p_{2\mu}. \quad (7-103)$$

La energía en el sistema C-D-M, o la masa equivalente M , vendrá dada por tanto en función de las partículas incidentes en la forma

$$T'^2 \equiv M^2 c^4 = (m_1^2 + m_2^2)c^4 + 2(T_1 T_2 - c^2 \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2). \quad (7-104)$$

* Aun cuando en Física de altas energías es costumbre utilizar unidades en las cuales $c = 1$, en una exposición introductoria, como es esta, parece más útil conservar siempre las potencias de c .

Supongamos ahora que como es habitual, una partícula, por ejemplo la 2, estaba quieta en el sistema del laboratorio. Como, en tal caso, $\mathbf{p}_2 = 0$ y $T_2 = m_2 c^2$, la energía C-D-M resulta ser

$$T'^2 \equiv M^2 c^4 = (m_1^2 + m_2^2) c^4 + 2m_2 c^2 T_1. \quad (7-105)$$

Si el exceso de T_1 sobre la energía de la masa en reposo, es decir, la energía cinética, lo representamos por K_1 , podremos escribir la anterior expresión en la forma

$$T'^2 \equiv M^2 c^4 = (m_1 + m_2)^2 c^4 + 2m_2 c^2 K_1. \quad (7-105')$$

Queda claro que la energía disponible en el sistema C-D-M aumenta sólo lentamente con la energía cinética incidente. Incluso en la región «ultrarelativista» en la cual la energía cinética del movimiento es muy grande frente a la energía de la masa en reposo, T' sólo aumenta como la raíz cuadrada de K_1 .

El efecto de la proporcionalmente pequeña cantidad de energía incidente disponible en el sistema C-D-M se manifiesta dramáticamente mediante las energías umbral. Es evidente que la energía más baja a la cual es posible una reacción (que no sea una desviación elástica) la tenemos cuando los productos de la reacción están en reposo en el sistema C-D-M. Toda energía cinética finita exige una T' mayor o una energía incidente equivalente superior. El cuadrivector cantidad de movimiento-energía en el sistema C-D-M después de la reacción, simbolizado por P''_μ , tiene en el umbral el módulo dado por

$$P''_\mu P''^\mu = -c^2 \left(\sum_r m_r \right)^2, \quad (7-106)$$

el cual, en virtud de la conservación de la cantidad de movimiento, debe ser igual al de la ecuación (7-102). En el caso de un blanco estacionario, la energía de movimiento incidente en el umbral vendrá dada, a consecuencia de la ecuación (7-105'), por

$$\frac{K_1}{m_1 c^2} = \frac{\left(\sum_r m_r \right)^2 - (m_1 + m_2)^2}{2m_1 m_2}.$$

Si definimos la Q de la reacción de la manera siguiente:*

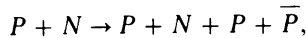
$$Q = \sum_r m_r - (m_1 + m_2), \quad (7-107)$$

* Q tiene aquí signo contrario al del convenio adoptado en la ecuación (3-112).

esta energía umbral resulta ser

$$\frac{K_1}{m_1 c^2} = \frac{Q^2 + 2Q(m_1 + m_2)}{2m_1 m_2}. \quad (7-108)$$

Un ejemplo común de la aplicación de la ecuación (7-108) lo encontramos en la histórica producción del antiprotón mediante la reacción



donde N es un nucleón, sea un neutrón o un protón. Las masas de todas las partículas que intervienen son casi iguales a 938 MeV de energía de la masa en reposo equivalente y $Q = 2m$. La ecuación (7-108) dice, pues, que la energía cinética en el umbral de la partícula incidente debe ser

$$K_1 = 6mc^2 = 5,7 \text{ GeV},$$

que es el triple de la energía representada por Q . En cambio, si la reacción la iniciaran dos nucleones incidentes uno contra otro con velocidades iguales y opuestas, el sistema del laboratorio sería el mismo que el sistema C-D-M. Toda la energía cinética está disponible en este caso para pasar a la producción del par protón-antiprotón y cada una de las partículas incidentes en el umbral necesitan tener una energía cinética de movimiento equivalente, tan sólo, a la masa de un protón, o sea 938 MeV. No nos extrañan los sacrificios que se hacen para construir máquinas que den haces para colisiones.

Otro ejemplo instructivo de cálculo de umbral lo tenemos en la producción de fotomesones, por ejemplo, mediante la reacción

$$\gamma + P = \Sigma^0 + K^+, \quad (7-109)$$

donde γ representa un fotón. Para los fines de la Mecánica clásica, un fotón es una partícula de masa nula que tiene una cantidad de movimiento espacial $^0\mathbf{p}$ y una energía 0pc .* Al calcular Q , la masa de m_1 es cero:

$$Q = (\Sigma^0 + K^+ - P) = 748 \text{ MeV}.$$

* El cuadrado del módulo del cuadrivector cantidad de movimiento energía del fotón es cero; se dice a veces que el vector es «del género luz». El teorema del centro de masa (p. 381) sólo puede fallar si todas las partículas son fotones e incluso en tal caso, si los fotones se mueven todos en la misma dirección y sentido.

Escribiremos la ecuación (7-108) para una reacción en la que intervenga un fotón, de la manera siguiente:

$$K_1 = {}_0pc = c^2 \frac{Q^2 + 2Qm_2}{2m_2}.$$

A partir del valor de Q y de la energía de la masa en reposo m_2 del protón, la energía umbral para la reacción de la ecuación (7-109) resulta ser

$$K_1 = 1,05 \text{ GeV},$$

que es muy poco superior a Q .

También podemos encontrar fácilmente la energía de los productos de reacción en el sistema del laboratorio en el umbral. El sistema C-D-M es el sistema en reposo para la masa M , siendo $P_4 = iMc$. En cualquier otro sistema, la componente cuarta del cuadvectores es $P_4 = iMc\gamma$. Pero en el sistema del laboratorio

$$P_4 = \frac{i}{c}(T_1 + T_2) = \frac{i}{c}(T_1 + m_2c^2),$$

donde la última expresión sólo es válida para una partícula blanco estacionaria. Luego el sistema C-D-M se mueve respecto al sistema del laboratorio de manera que sea

$$\gamma = \frac{T_1 + m_2c^2}{Mc^2}. \tag{7-110}$$

Pero en el umbral todos los productos de la reacción están en reposo en el sistema C-D-M con lo que $M = \sum_r m_r$, y por tanto

$$\gamma = \frac{K_1 + (m_1 + m_2)c^2}{\sum_r m_r c^2} \quad (\text{umbral}) \tag{7-111}$$

La energía cinética del s -ésimo producto de la reacción en el sistema del laboratorio es entonces

$$K_s = m_s c^2 (\gamma - 1). \tag{7-112}$$

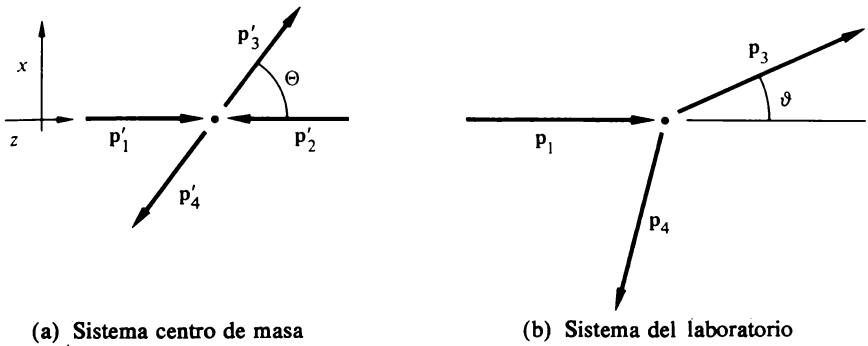


FIGURA 7-2

Diagrama de vectores cantidad de movimiento para la dispersión elástica relativista en los sistemas de Lorentz C-D-M y del laboratorio.

Así pues, en el umbral, el antiprotón tiene una energía cinética de movimiento $K_{\bar{p}} = mc^2 = 938 \text{ MeV}$. En contraste, el mesón K^+ emerge en el umbral con $88,4 \text{ MeV}$.

En § 3-11 se estudiaron las transformaciones cinemáticas de un choque no relativista de dos cuerpos. La ecuación (3-117') da la reducción de la energía de una partícula incidente después de chocar elásticamente con un blanco estacionario, en función del ángulo de dispersión en el sistema C-D-M. La deducción de la analogía relativista proporciona otro ejemplo interesante de los métodos de la Cinemática relativista. En este caso no es particularmente útil la utilización de invariantes de Lorentz; en vez de ello se efectúan transformaciones de Lorentz directas entre los sistemas del laboratorio y C-D-M. En la figura 7-2 se ilustran las relaciones de los vectores cantidad de movimiento *espaciales* incidente y dispersado en ambos sistemas. Los vectores cantidad de movimiento incidente y dispersado definen un plano, de orientación invariante ante una transformación de Lorentz, que tomaremos como plano xz estando dirigida según z la dirección de incidencia. Como el choque es elástico, las masas de la partícula incidente, m_1 , y del blanco estacionario, m_2 , permanecen invariadas, es decir, $m_3 = m_1$, $m_4 = m_2$. Los acentos en los vectores denotan valores C-D-M, los vectores sin acento están en el sistema del laboratorio. Para distinguir claramente entre antes y después de la dispersión, conservaremos los índices 3 y 4 para los vectores *después* de la dispersión. Sólo hemos de recordar que 3 corresponde a la partícula incidente y 4 a la partícula blanco en retroceso. Las componentes de los cuadrivectores de las partículas tendrán siempre dos índices: el primero correspondiente a la partícula y el segundo a la componente.

La transformación de Lorentz que hace pasar del sistema del laboratorio al C-D-M está definida por la γ de la ecuación (7-110) estando M dada por la ecuación (7-105):

$$\gamma = \frac{T_1 + m_2 c^2}{\sqrt{2m_2 c^2 T_1 + (m_1^2 + m_2^2) c^4}} = \frac{K_1 + (m_1 + m_2) c^2}{\sqrt{2m_2 c^2 K_1 + (m_1 + m_2)^2 c^4}}. \quad (7-113)$$

La cantidad β se puede encontrar a partir de γ ; o más directamente mediante razonamientos análogos a los utilizados para obtener γ . En el sistema C-D-M, la parte espacial del cuadvivector cantidad de movimiento-energía total es nula; en cualquier otro sistema, la parte espacial es $Mc\beta\gamma$. En cambio, en el sistema del laboratorio la parte espacial es p_1 . Luego, según la ecuación (7-110) β debe estar dada por

$$\beta = \frac{p_1 c}{T_1 + m_2 c^2} = \frac{p_1 c}{K_1 + (m_1 + m_2) c^2}. \quad (7-114)$$

Como β está dirigida según el eje z , la transformación de Lorentz adopta la forma de la ecuación (7-18) y las componentes de $p'_{i\mu}$ en el sistema C-D-M vienen dadas por

$$\begin{aligned} p'_1 &= p'_{13} = \gamma \left(p_1 - \frac{\beta T_1}{c} \right), \\ \frac{iT'_1}{c} &= p'_{14} = i\gamma \left(\frac{T_1}{c} - \beta p_1 \right). \end{aligned} \quad (7-115)$$

Después del choque, p'_3 ya no está dirigida según el eje z , pero como el choque es elástico, su módulo es el mismo que el de p'_1 . Si es Θ el ángulo que forma p'_3 con la dirección de incidencia, como en § 3-11, las componentes de $p'_{3\mu}$ en el sistema C-D-M serán

$$p'_{31} = p'_1 \text{sen } \Theta, \quad p'_{33} = p'_1 \text{cos } \Theta, \quad p'_{34} = p'_{14} = \frac{iT'_1}{c}. \quad (7-116)$$

La transformación que hace regresar al sistema del laboratorio es la misma transformación de Lorentz pero con velocidad relativa $-\beta$. Luego las componentes de p_3 serán

$$\begin{aligned} p_{31} &= p'_{31} = p'_1 \text{sen } \Theta, \\ p_{33} &= \gamma(p'_{33} - i\beta p'_{34}) = \gamma \left(p'_1 \text{cos } \Theta + \frac{\beta T'_1}{c} \right), \\ p_{34} &= \gamma(p'_{34} + i\beta p'_{33}) = i\gamma \left(\frac{T'_1}{c} + \beta p'_1 \text{cos } \Theta \right). \end{aligned} \quad (7-117)$$

Si se sustituyen las T'_1 y p'_1 dadas por las ecuaciones (7-115) en la última de las ecuaciones (7-117) y simplificamos, obtenemos una expresión de la energía de la partícula dispersada

en función de sus propiedades incidentes:

$$T_3 = T_1 - \gamma^2 \beta (1 - \cos \Theta) (p_1 c - \beta T_1). \quad (7-118)$$

En la ecuación (7-118), γ y β deben expresarse en función de las cantidades incidentes con ayuda de las ecuaciones (7-113) y (7-114), con lo que resulta la relación

$$\gamma^2 \beta (p_1 c - \beta T_1) = \frac{m_2 p_1^2 c^2}{2m_2 T_1 + (m_1^2 + m_2^2) c^2}.$$

Teniendo en cuenta la relación existente entre p_1 y T_1 (ec. 7-100), podemos escribir esta relación en la forma

$$\gamma^2 \beta (p_1 c - \beta T_1) = \frac{m_2 K_1 (K_1 + 2m_1 c^2)}{2m_2 K_1 + (m_1 + m_2)^2 c^2}. \quad (7-119)$$

Con algunas manipulaciones algebraicas, podremos escribir la ecuación (7-118) en la forma

$$\frac{K_3}{K_1} = 1 - \frac{2\rho(1 + \mathcal{E}_1/2)}{(1 + \rho)^2 + 2\rho\mathcal{E}_1} (1 - \cos \Theta), \quad (7-120)$$

donde $\rho = m_2/m_1$, como en § 3-11 para la dispersión elástica y \mathcal{E}_1 es la energía cinética de la partícula incidente expresada en unidades de la energía de la masa en reposo,

$$\mathcal{E}_1 = \frac{K_1}{m_1 c^2}. \quad (7-121)$$

La ecuación (7-120) es la contrapartida relativista de la ecuación (3-117'). Fácil es ver que la ecuación (7-120) se reduce al caso no relativista cuando $\mathcal{E}_1 \rightarrow 0$ y que si $\rho = 1$ (masas iguales), las correcciones relativistas se destruyen. La ecuación (7-120) implica que la mínima energía después de la dispersión, en unidades de $m_1 c^2$, venga dada por

$$(\mathcal{E}_3)_{\min} = \mathcal{E}_1 \frac{(1 - \rho)^2}{(1 + \rho)^2 + 2\rho\mathcal{E}_1}. \quad (7-122)$$

En el límite no relativista, la energía fraccionaria mínima después de la dispersión es

$$\frac{(\mathcal{E}_3)_{\min}}{\mathcal{E}_1} = \left(\frac{1 - \rho}{1 + \rho} \right)^2; \quad \mathcal{E}_1 \ll 1, \quad (7-123)$$

resultado conocido que se obtiene fácilmente de la ecuación (3-117'). La ecuación (7-123) dice que en la región no relativista una partícula de masa m_1 no puede perder mucha energía cinética al ser desviada por una partícula mucho más pesada, es decir, cuando $\rho \ll 1$, lo cual encaja claramente en el sentido común. En cambio, en la región ultrarrelativista, cuando $\rho \mathcal{E}_1 \gg 1$, la energía mínima después de la dispersión es independiente de \mathcal{E}_1 :

$$(K_3)_{\min} = \frac{(m_2 - m_1)^2 c^2}{2m_2}; \quad \rho \mathcal{E}_1 \gg 1 \quad (7-124)$$

Como la condición impuesta a \mathcal{E}_1 equivale a exigir que $K_1 \gg m_2 c^2$, de la ecuación (7-124) se deduce que dicha partícula puede perder gran parte de su energía aun cuando la desvíe una partícula mucho más pesada. Este comportamiento no era de esperar, pero debemos recordar que en el caso de partículas de estas energías, las cuales se mueven con celeridades muy próximas a la de la luz, una variación de velocidad, aunque sea pequeña, corresponde a una gran variación de la energía.

Por último, podemos obtener fácilmente la relación entre los ángulos de dispersión en los sistemas C-D-M y del laboratorio notando que

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{p_{31}}{p_{33}} = \frac{\operatorname{sen} \Theta}{\gamma \left(\cos \Theta + \frac{\beta T'_1}{p'_1 c} \right)}.$$

Por las ecuaciones (7-90) y (7-96),

$$\frac{p'_1 c}{T'_1} = \frac{v'_1}{c} \equiv \beta'_1,$$

con lo cual, $\operatorname{tg} \vartheta$ podrá también escribirse

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{\operatorname{sen} \Theta}{\gamma (\cos \Theta + \beta / \beta'_1)}.$$

En función de las cantidades iniciales, las ecuaciones (7-115) enseñan que

$$\frac{\beta T'_1}{p'_1 c} = \frac{\beta \left(\frac{T_1}{c} - \beta p_1 \right)}{p_1 - \frac{\beta T_1}{c}}.$$

Podemos reducir esto aún más empleando las relaciones (cfr. ec. 7-114)

$$\frac{\beta}{p_1 - \frac{\beta T_1}{c}} = \frac{1}{m_2 c},$$

$$T_1 - \beta p_1 = \frac{m_1(m_1 + m_2)c^4 + m_2 c^2 K_1}{(m_1 + m_2)c^2 + K_1}.$$

La expresión final de $\text{tg} \vartheta$ podrá entonces escribirse

$$\text{tg } \vartheta = \frac{\text{sen } \Theta}{\gamma(\cos \Theta + \rho g(\rho, \mathcal{E}_1))}, \quad (7-125)$$

donde $g(\rho, \mathcal{E}_1)$ es la función

$$g(\rho, \mathcal{E}_1) = \frac{1 + \rho(1 + \mathcal{E}_1)}{(1 + \mathcal{E}_1) + \rho}, \quad (7-126)$$

y γ , según la ecuación (7-113), adopta la forma

$$\gamma(\rho, \mathcal{E}_1) = \frac{1 + \mathcal{E}_1 + \rho}{\sqrt{(1 + \rho)^2 + 2\rho\mathcal{E}_1}}. \quad (7-127)$$

También ahora en la región no relativista γ y g tienden a la unidad y la ecuación (7-125) se reduce a la ecuación (3-107). La función de corrección $g(\rho, \mathcal{E}_1)$ nunca llega a valer mucho, tendiendo al límite constante ρ cuando se hace muy grande \mathcal{E}_1 . El factor importante que afecta al ángulo transformado es γ , el cual aumenta indefinidamente cuando aumenta \mathcal{E}_1 .

No afecta a los límites de la distribución angular, cuando $\Theta = 0$ o π , pero su presencia significa que para otros ángulos δ es siempre menor que lo sería no relativísticamente. La transformación de Lorentz que lleva del sistema C-D-M al sistema del laboratorio, la cual no afecta a la componente transversal de la cantidad de movimiento, tenderá siempre a deformar la distribución angular dispersa en la dirección hacia adelante.

Mencionaremos otro tema que sólo trata periféricamente de colisiones pero que está íntimamente relacionado con el concepto de sistema C-D-M —la generalización relativista del momento cinético. Demostrábamos en el capítulo 1 que el momento cinético no relativista obedece a una ecuación de movimiento, en la que las fuerzas quedan sustituidas por momentos. Se demostró que en el caso de un sistema aislado que cumpla la ley de la acción y la reacción se conserva el momento cinético total y que en el sistema del centro de masa es independiente del punto de referencia. Todas estas afirmaciones tienen su contrapartida relativista, que en ocasiones comportan ciertas restricciones adicionales.

En el caso de una partícula, definamos un tensor antisimétrico de segundo orden en el espacio de Minkowski, cuyos elementos $m_{\mu\nu}$ estén dados por*

$$m_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu. \tag{7-128}$$

El subtensor 3×3 m_{ij} corresponde claramente, según vimos en § 4-7, al momento cinético espacial de la partícula. Podemos hallar una ecuación de movimiento para $m_{\mu\nu}$ tomando su derivada respecto al tiempo propio de la partícula y utilizando la ecuación (7-83'):

$$\frac{dm_{\mu\nu}}{d\tau} = (u_\mu p_\nu - u_\nu p_\mu) + (x_\mu K_\nu - x_\nu K_\mu),$$

Donde K_ν es la componente de la fuerza de Minkowski. El primer término del segundo miembro se anula, evidentemente, por la definición del cuadvector cantidad de movimiento-energía $p_\lambda = mu_\lambda$, mientras que el resto de la expresión es también evidente que se erige en el mejor candidato a la generalización relativista del momento:

$$N_{\mu\nu} = x_\mu K_\nu - x_\nu K_\mu. \tag{7-129}$$

Así pues, $m_{\mu\nu}$ obedece a la ecuación de movimiento

$$\frac{dm_{\mu\nu}}{d\tau} = N_{\mu\nu}, \tag{7-130}$$

* El doble subíndice distingue claramente $m_{\mu\nu}$ de la masa de la partícula, que no tiene nada que ver.

que tiene a la ecuación (1-11) como forma límite no relativista.

En el caso de un sistema que contenga muchas partículas, podemos definir un caudritensor (análogamente a como se hizo con el cuadvivector cantidad de movimiento-energía total) en la forma

$$M_{\mu\nu} = \sum_s m_{s\mu\nu}, \quad (7-131)$$

donde el índice s denota la partícula s -ésima. Formar una ecuación de movimiento para $M_{\mu\nu}$ resulta más difícil porque cada partícula tiene su tiempo propio particular. (Por la misma razón, no lo vamos a intentar ni para P_μ .) Ahora bien, podremos dar razonamientos plausibles para la conservación de $M_{\mu\nu}$ en determinadas circunstancias. Si el sistema está totalmente aislado y las partículas no se ejercen interacciones entre sí ni con el mundo exterior (incluidos los campos), en virtud de la ecuación (7-130) se conservará $m_{\mu\nu}$ para cada partícula y en consecuencia, también se conservará $M_{\mu\nu}$. Incluso si las partículas se ejercen interacciones, pero éstas sólo tienen lugar mediante colisiones binarias en un punto, aun habría conservación según podemos ver a través del razonamiento siguiente. En el instante en que chocan las dos partículas, están moviéndose juntas y tienen el mismo tiempo propio. (Dicho de otro modo, se cortan sus líneas de universo y comparten el mismo *suceso*.) Podemos, pues, escribir una ecuación de movimiento de la forma de la (7-130) para la suma de sus momentos cinéticos. Si las fuerzas impulsivas de contacto son iguales y opuestas —como sería de esperar de la conservación de la cantidad de movimiento en el choque— la suma de los momentos impulsivos será nula. Por tanto, en tales choques se conservará también el momento cinético relativista. Notemos que, a diferencia de lo que sucede en el caso no relativista, las interacciones deben limitarse a choques puntuales instantáneos.

El momento cinético relativista obedece al mismo tipo de teorema referente a la traslación del punto de referencia que se cumple en su contrapartida no relativista. En la definición (ecs. 7-128 ó 7-131), el punto de referencia (en realidad el «suceso» de referencia) es el origen arbitrario del sistema de Lorentz. Respecto a otro suceso de referencia a_λ , el momento cinético total es

$$\begin{aligned} M_{\mu\nu}(a_\lambda) &= \sum_s [(x_{s\mu} - a_\mu)p_{s\nu} - (x_{s\nu} - a_\nu)p_{s\mu}], \\ &= M_{\mu\nu}(0) - (a_\mu P_\nu - a_\nu P_\mu). \end{aligned} \quad (7-132)$$

Al igual que en el caso no relativista, la variación de las componentes del momento cinético es igual al momento cinético, respecto al origen, que tendría todo el sistema si estuviera concentrado en a_λ .

En el capítulo 1 había un punto de referencia particular que desempeñaba un papel importante: el centro de masa. Podemos encontrar ahora algo parecido, al menos en un sistema de Lorentz, examinando la naturaleza de las tres componentes no espaciales de

$M_{\mu\nu}$, que simbolizamos en $M_{4j} = -M_{j4}$. Por definición, en un determinado sistema de Lorentz, dichas componenes vienen dadas por

$$M_{4j} = \sum_s (x_{s4}p_{sj} - x_{sj}p_{s4})$$

$$= ic \sum_s \left(tp_{sj} - \frac{x_{sj}T_s}{c^2} \right).$$

En el sistema del centro de masa es nula la cantidad de movimiento total P y en dicho sistema M_{4j} adopta la forma

$$M_{4j} = -ic \sum_s \frac{x_{sj}T_s}{c^2}. \tag{7-133}$$

Si el sistema es tal que se conserve el momento cinético total, como se ha descrito antes, junto con las demás componentes se conservará M_{4j} y por tanto

$$\sum_s x_{sj}T_s = \text{constante}$$

La conservación de la cantidad de movimiento total implica que también se conserve $T = \sum T_s$. Podremos, pues, definir un punto *espacial* R_j ,

$$R_j = \frac{\sum_s x_{sj}T_s}{\sum_s T_s}, \tag{7-134}$$

asociado al sistema, que esté en reposo en el sistema de coordenadas C-D-M. En el límite no relativista, donde en primera aproximación $T_s = m_s c^2$, la ecuación (7-134) se reduce a la definición usual, ecuación (1-21). Luego, podemos definir un centro de masa (a veces llamado *centro de energía*) con significado físico, en la Relatividad restringida, tan sólo en función del tensor momento cinético y solamente para un sistema de referencia particular. Por último, notemos que en virtud de la ecuación (7-132) la parte espacial del tensor momento cinético, M_{ij} , es independiente del punto de referencia, exactamente como en el caso no relativista.

Salvo en el caso particular de colisiones puntuales, hasta ahora hemos esquivado el

problema de hallar el movimiento de una partícula relativista dadas las fuerzas de Minkowski. Este problema más general lo abordaremos en el apartado siguiente, dentro del marco (nominal) de la formulación de Lagrange.

7-8 FORMULACIÓN LAGRANGIANA DE LA MECÁNICA RELATIVISTA

Habiendo establecido la generalización apropiada de la ecuación de movimiento de Newton para la Relatividad restringida, podemos ahora intentar establecer una formulación lagrangiana de la Mecánica relativista que resulta. Hablando en general, podemos intentarlo de dos maneras. Uno de los métodos no pretende una formulación manifiestamente covariante y en vez de ello se concentra en reproducir, para un cierto sistema de Lorentz particular, la parte espacial de la ecuación de movimiento (7-89). Las fuerzas F_i pueden o no estar adecuadamente relacionadas con una fuerza de Minkowski covariante. El otro método se pone en marcha para obtener un principio covariante de Hamilton y llegar a ecuaciones de Lagrange en las cuales el espacio y el tiempo se tratan de manera ordinaria como coordenadas de un espacio de configuración de cuatro dimensiones. La base del primer método es a veces poco firme, especialmente cuando las fuerzas no se formulan bien relativísticamente. Sin embargo, la mayor parte de las veces las ecuaciones de movimiento así obtenidas, aun no siendo manifiestamente covariantes, son correctas relativísticamente para un determinado sistema de Lorentz. En cambio, el segundo método parece ser claramente el adecuado pero encuentra rápidamente dificultades que exigen mucha habilidad para esquivarlas, incluso en el caso de una sola partícula. En el caso de sistemas de más de una partícula, falla casi desde el principio. Para los sistemas de muchas partículas en interacción no existe ninguna formulación satisfactoria en Mecánica relativista clásica, salvo en algunos casos particulares. El tema constituye aún un área activa de investigación.

En este apartado nos ocuparemos del primer método, mirando de encontrar una lagrangiana que lleve a ecuaciones de movimiento relativistas en función de las coordenadas de un determinado sistema inercial. Con estas limitaciones no hay mucha dificultad en la construcción de una lagrangiana adecuada. Bien es verdad que el método de § (1-4), deducción de la lagrangiana a partir del principio de D'Alembert, no va a servirnos ahora. Aun cuando dicho principio sigue siendo válido (en todo sistema de Lorentz), la deducción aquella se basaba en $p_i = m_i v_i$, cosa que no es válida desde el punto de vista relativista. Pero podemos abordar la formulación de Lagrange desde el camino del principio de Hamilton (§ 2-1) e intentar simplemente hallar una función L para la cual las ecuaciones de Euler-Lagrange, obtenidas a partir del principio variacional

$$\delta I = \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0, \quad (7-135)$$

concuenden con las ecuaciones de movimiento relativistas conocidas (ec. 7-89).

Una lagrangiana relativista adecuada para una partícula sometida a fuerzas conserva-

tivas independientes de la velocidad sería

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \beta^2} - V, \quad (7-136)$$

donde V es el potencial que depende sólo de la posición y $\beta^2 = v^2/c^2$, siendo v la celeridad de la partícula en el sistema de Lorentz que se considera. Podemos demostrar que se trata de la lagrangiana correcta poniendo de manifiesto que las ecuaciones de Lagrange que resultan,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0,$$

concuerdan con las ecuaciones (7-89). Como el potencial no depende de la velocidad, v_i sólo aparecerá en el primer término de (7-136) y por tanto

$$\frac{\partial L}{\partial v_i} = \frac{mv_i}{\sqrt{1 - \beta^2}} = p_i. \quad (7-137)$$

Las ecuaciones de movimiento deducidas de la lagrangiana (7-136) serán, pues,

$$\frac{d}{dt} \frac{mv_i}{\sqrt{1 - \beta^2}} = - \frac{\partial V}{\partial x_i} = F_i,$$

que concuerda con (7-84). Notemos que la lagrangiana ya no es $L = T - V$ pero que la derivada parcial de L respecto a la velocidad sigue siendo la cantidad de movimiento. Este hecho es, en verdad, el que asegura la corrección de las ecuaciones de Lagrange y habríamos podido proceder hacia atrás desde la ecuación (7-137) para dar al menos la dependencia de la velocidad de la lagrangiana.

Fácilmente podríamos extender la lagrangiana (7-136) a sistemas de muchas partículas y pasar de coordenadas cartesianas a cualquier sistema conveniente de coordenadas generalizadas q_j . Las cantidades de movimiento canónicas seguirán definidas por

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}, \quad (7-138)$$

con lo que la relación entre coordenadas cíclicas y conservación de las cantidades de

movimiento (o momentos cinéticos) correspondientes es la misma que en la teoría no relativista. Además, al igual que en § 2-6, si L no contiene explícitamente el tiempo existiría una constante del movimiento

$$h = \dot{q}_j p_j - L. \quad (7-139)$$

No obstante, la identificación de h con la energía de, por ejemplo, una lagrangiana de la forma de la ecuación (7-136) no puede seguir el mismo camino que se siguió en § 2-6. Notemos que en la ecuación (7-136) L no es, en absoluto, una función homogénea de las componentes de la velocidad. A pesar de todo, la evaluación directa de la ecuación (7-139) a partir de la ecuación (7-136) demuestra que, en ese caso, h es efectivamente la energía total:

$$h = \frac{mv_i v_i}{\sqrt{1 - \beta^2}} + mc^2 \sqrt{1 - \beta^2} + V,$$

la cual, reduciendo términos, queda

$$h = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} + V = T + V = E. \quad (7-140)$$

Vemos así que la cantidad h es de nuevo la energía total E , la cual es por tanto una constante del movimiento en estas condiciones.

La introducción de potenciales dependientes de la velocidad no produce aquí ninguna dificultad particular y se puede efectuar exactamente igual que se hizo en § 1-5 para el caso de la Mecánica no relativista. Así pues, la lagrangiana para una partícula en un campo electromagnético será

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \beta^2} - q\phi + \frac{q}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}. \quad (7-141)$$

Notemos que la cantidad de movimiento *canónica* ya no es mu_i ; ahora hay términos adicionales debidos a la parte del potencial dependiente de la velocidad:

$$p_i = mu_i + \frac{q}{c} A_i. \quad (7-142)$$

Desde luego, este fenómeno no es relativista; encontráramos exactamente el mismo término adicional en un tratamiento anterior (cfr. ec. 2-47). La formulación de la ecuación (7-141) no es manifiestamente covariante. Pero podemos esperar confiadamente que los

resultados sean válidos en todos los sistemas de Lorentz a consecuencia de la covarianza relativista de la fuerza de Lorentz que deriva del potencial dependiente de la velocidad, que figura en la ecuación (7-141).

Por tanto, podremos llevar a la Mecánica relativista casi todos los métodos ideados anteriormente para la solución de problemas mecánicos concretos. A título de ilustración, vamos a considerar algunos ejemplos sencillos.

1. *Movimiento bajo una fuerza constante; movimiento hiperbólico.* Sin pérdida de generalidad, podemos tomar el eje x en la dirección de la fuerza constante. La lagrangiana será, pues,

$$L = -mc^2\sqrt{1 - \beta^2} - max, \quad (7-143)$$

donde β es \dot{x}/c y a es el módulo constante de la fuerza por unidad de masa. O bien a partir de la ecuación (7-143) o directamente en base a la ecuación (7-89), la ecuación de movimiento resulta fácilmente ser

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right) = \frac{a}{c}.$$

La primera integración lleva a

$$\frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{at + \alpha}{c}$$

o sea

$$\beta = \frac{at + \alpha}{\sqrt{c^2 + (at + \alpha)^2}},$$

donde α es una constante de integración. Una segunda integración para t entre 0 y t y x entre x_0 y x ,

$$x - x_0 = c \int_0^t \frac{(at' + \alpha) dt'}{\sqrt{c^2 + (at' + \alpha)^2}},$$

lleva a la solución total

$$x - x_0 = \frac{c}{a} (\sqrt{c^2 + (at + \alpha)^2} - \sqrt{c^2 + \alpha^2}). \quad (7-144)$$

Si la partícula parte del reposo en el origen de manera que $x_0 = 0$ y $v_0 = 0 = \alpha$, la ecuación (7-144) podrá escribirse en la forma

$$\left(x + \frac{c^2}{a}\right)^2 - c^2 t^2 = \frac{c^4}{a^2},$$

que es la ecuación de una hipérbola en el plano x, t . (En iguales condiciones, el movimiento no relativista es, desde luego, una parábola en el plano x, t .) El límite no relativista se obtiene a partir de la ecuación (7-144) considerando $(at + \alpha)$ pequeño frente a c ; se obtiene fácilmente la fórmula para novato en Física de x en función de t , dándonos cuenta que en este límite $\alpha \rightarrow v_0$

El movimiento descrito en este ejemplo nos lo encontramos en situaciones más o menos reales. Por ejemplo, corresponde a la aceleración de electrones a celeridades relativistas en el sistema del laboratorio por medio de un campo eléctrico constante y uniforme. La ilustración que vamos a considerar a continuación es más académica pero tiene interés como ejemplo de las técnicas que se utilizan:

2. *Oscilador armónico unidimensional relativista*. En este caso, la lagrangiana es de la forma indicada en la ecuación (7-136) siendo

$$V(x) = \frac{1}{2} kx^2. \quad (7-145)$$

Como entonces L no es explícitamente función del tiempo y no depende de la velocidad, la energía total E es constante. De la ecuación (7-140) podemos despejar la velocidad y tenemos

$$\frac{1}{c^2} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 1 - \frac{m^2 c^4}{(E - V)^2}. \quad (7-146)$$

De momento no vamos a sustituir la forma particular de $V(x)$ y generalizaremos ligeramente el problema de manera que incluya un potencial cualquiera que comparta las características cualitativas de la ecuación (7-145). Así pues, supongamos que $V(x)$ es una función potencial cualquiera simétrica respecto al origen y que presente un mínimo en él. En tal caso, si E está comprendida entre $V(0)$ y el máximo de V , el movimiento será oscilatorio entre los límites $x = -b$ y $x = +b$, determinados por

$$V(\pm b) = E.$$

El periodo del movimiento oscilatorio, según la ecuación (7-146), se obtendrá de

$$\tau = \frac{4}{c} \int_0^b \frac{dx}{\sqrt{1 - \frac{m^2 c^4}{(E - V(x))^2}}} \quad (7-147)$$

La ecuación (7-147) cuando se especializa para la forma particular de la ley de Hooke para $V(x)$ se puede expresar en función de integrales elípticas.* En vez de ello, examinaremos las correcciones relativistas de primer orden cuando la energía potencial sea siempre pequeña frente a la energía de la masa en reposo mc^2 . Nos será útil un cambio de notación. La energía E podemos escribirla en la forma

$$E = mc^2(1 + \mathcal{E})$$

con lo que tendremos

$$\frac{E - V(x)}{mc^2} = 1 + \mathcal{E} - \kappa x^2 = 1 + \kappa(b^2 - x^2), \quad (7-148)$$

donde

$$\kappa = \frac{k}{2mc^2}. \quad (7-149)$$

Hasta el orden $(\kappa b^2)^2$, el periodo (ec. 7-147) se reduce entonces a

$$\tau \simeq \frac{4}{c} \int_0^b \frac{dx}{\sqrt{2\kappa(b^2 - x^2)}} \left(1 - \frac{3\kappa}{4}(b^2 - x^2) \right). \quad (7-150)$$

La integral de la ecuación (7-150) se puede evaluar por medios elementales, sencillamente mediante el cambio de variable $x = b \sin \phi$; el resultado final es

$$\tau \simeq \frac{2\pi}{c} \frac{1}{\sqrt{2\kappa}} \left[1 - \frac{3}{8}\kappa b^2 \right] = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \left[1 - \frac{3kb^2}{16mc^2} \right].$$

* Véase J. L. Synge, *Classical Dynamics*, p. 211, en Vol. III/1, *Encyclopedia of Physics*, 1960.

Démonos cuenta que el factor antepuesto al corchete es el periodo no relativista τ_0 del oscilador armónico. Por tanto, en Relatividad restringida el periodo del oscilador armónico no es independiente de la amplitud, sino que hay una corrección dependiente de la amplitud que viene dada aproximadamente por

$$\frac{\Delta v}{v_0} = - \frac{\Delta \tau}{\tau_0} \simeq \frac{3}{16} \frac{kb^2}{mc^2} = \frac{3}{8} \epsilon. \quad (7-151)$$

3. *Movimiento de una partícula cargada en un campo magnético.* En principio, podríamos partir de una lagrangiana de la forma dada por la ecuación (7-141) con $\phi = 0$ y \mathbf{A} apropiado para un campo magnético constante (ec. 5-106). Pero sabemos que tal lagrangiana corresponde a la fuerza de Lorentz que se ejerce sobre la partícula cargada y que viene dada por

$$\mathbf{F} = \frac{q}{c} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (7-152)$$

(cfr. ec. 1-61). Luego la ecuación de movimiento deberá ser

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{q}{c} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \frac{q}{mc\gamma} (\mathbf{p} \times \mathbf{B}). \quad (7-153)$$

La naturaleza de la fuerza (ec. 7-152) es claramente tal que el campo magnético no efectúa ningún trabajo sobre la partícula: $\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = 0$. Por tanto, en virtud de la ecuación (7-95) T deberá ser una constante, así como p y γ en virtud de la ecuación (7-100). Además, por la ecuación (7-152), no hay componente de la fuerza paralela a \mathbf{B} y la componente de la cantidad de movimiento según dicha dirección deberá mantenerse constante. Por tanto, no se pierde generalidad al considerar el movimiento solamente en el plano perpendicular a \mathbf{B} y hacer que \mathbf{p} represente la proyección sobre dicho plano de la cantidad de movimiento total. La ecuación (7-153) nos dice entonces que el vector \mathbf{p} (cuyo módulo es constante) tiene una precesión alrededor de la dirección del campo magnético con una frecuencia

$$\Omega = \frac{qB}{mc\gamma}. \quad (7-154)$$

Como γ es constante, el vector velocidad en el plano también tendrá módulo constante y girará con la misma frecuencia. La partícula, pues, deberá moverse en el plano describiendo uniformemente una órbita circular con celeridad angular Ω . Se deduce que el módulo de la

cantidad de movimiento en el plano vendrá dado por

$$p = m\gamma r\Omega.$$

Combinando esta expresión con la ecuación (7-154) se llega a la relación entre el radio de la circunferencia y la cantidad de movimiento:

$$r = \frac{p}{qB/c}. \quad (7-155)$$

El radio de curvatura de la trayectoria que se ve obligada a seguir la partícula sólo depende de las propiedades de ésta a través del cociente pc/q ($= Br$), al que se llama a veces *rigidez magnética* de la partícula. Notemos que aun cuando Ω (ec. 7-154) presenta correcciones relativistas a través de la presencia de γ , la relación entre r y p es la misma tanto si se tiene en cuenta la Relatividad como si no. Debemos recordar que tanto en la ecuación (7-154) como en la (7-155) p es el módulo de la cantidad de movimiento perpendicular a B , pero al calcular γ hemos de utilizar las componentes perpendicular y paralela para hallar β .*

7-9 FORMULACIONES LAGRANGIANAS COVARIANTES

El método de Lagrange dado anteriormente predice las ecuaciones de movimiento relativistas correctas. Así y todo es una formulación relativista sólo «en cierto sentido». No se ha hecho ningún esfuerzo para sujetarse al ideal de una forma cuadridimensional covariante para todas las leyes de la Mecánica. Así, se ha tratado el tiempo t como parámetro enteramente distinto de las coordenadas espaciales, mientras que una formulación covariante exigiría que se consideraran el espacio y el tiempo como coordenadas totalmente análogas en el universo. Está claro que debería utilizarse, en vez de t , un parámetro invariante para trazar el progreso del punto figurativo del sistema en el espacio de configuración. Además, los ejemplos de funciones lagrangianas tratados en el apartado anterior no tienen propiedades de transformación de Lorentz particulares. El propio principio de Hamilton debe ser manifiestamente covariante, lo cual sólo puede significar en este caso que la integral de acción debe ser un escalar de universo. Si el parámetro de integración es un invariante de Lorentz, la propia función lagrangiana deberá ser un escalar de universo en cualquier formulación covariante. Por último, en vez de ser función de x , y \dot{x} , la lagrangiana debería ser función de las coordenadas del espacio de Minkowski y de sus derivadas respecto al parámetro invariante.

* No debemos confundir la frecuencia de giro (7-154) con la frecuencia de Larmor dada por la ecuación (5-104). La frecuencia de Larmor de § 5-9 no es aplicable aquí porque la energía cinética del movimiento en el plano es del mismo orden de magnitud que el término en ω_j^2 de la ecuación (5-110) y ambos son comparables con el término lineal en B . En este caso, pues, no se reúnen las condiciones del teorema de Larmor.

Vamos a considerar en primer lugar un sistema de una sola partícula. La elección natural del parámetro invariante en dicho sistema parecería ser el tiempo propio de la partícula. Pero las diversas componentes de la velocidad generalizada, u_ν , deberán entonces cumplir la relación

$$-u_\nu u_\nu = c^2, \quad (7-75)$$

que demuestra que no son independientes. Por tanto, en vez de ello supondremos la elección de una cierta cantidad θ invariante de Lorentz sin más especificación de que sea una función monótona del progreso del punto de universo a lo largo de la línea de universo de la partícula. Para los fines de este estudio, la derivación respecto a θ se representará con acento:

$$x'_\nu \equiv \frac{dx_\nu}{d\theta},$$

mientras que la derivación respecto a t la representaremos con un punto encima de la letra. Un principio de Hamilton adecuadamente covariante deberá, pues, ser del tipo

$$\delta I = \delta \int_{\theta_1}^{\theta_2} \Lambda(x_\mu, x'_\mu) d\theta, \quad (7-156)$$

donde la función lagrangiana Λ debe ser un escalar de universo. Notemos que esta formulación incluye lo que ordinariamente se llamaría «Lagrangianas dependientes del tiempo», porque se considera que Λ es función de x_4 . Las ecuaciones de Euler-Lagrange correspondientes a la ecuación (7-156) son

$$\frac{d}{d\theta} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial x'_\mu} \right) - \frac{\partial \Lambda}{\partial x_\mu} = 0. \quad (7-157)$$

El problema estriba en hallar la forma de Λ tal que las ecuaciones (7-157) sean equivalentes a las ecuaciones de movimiento (7-83).

Una manera de buscar Λ es transformando la integral de acción pasando de la integral usual extendida a t a otra extendida a θ y tratando el tiempo t que aparece explícitamente en la lagrangiana no como parámetro, sino como una coordenada generalizada adicional. Como θ debe ser función monótona de t medida en cierto sistema de Lorentz, tenemos

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{dx_i}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = ic \frac{x'_i}{x'_4}. \quad (7-158)$$

Luego la integral de acción se transforma de la manera siguiente:

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L(x_j, t, \dot{x}_j) dt = -\frac{i}{c} \int_{\theta_1}^{\theta_2} L(x_\mu, ic \frac{x'_j}{x'_4}) x'_4 d\theta.$$

Por tanto, parece que sería una buena receta para una Λ adecuada la definida por la relación

$$\Lambda(x_\mu, x'_\mu) = -\frac{ix'_4}{c} L\left(x_\mu, ic \frac{x'_j}{x'_4}\right). \tag{7 159}$$

Sin embargo, la lagrangiana así obtenida es rara, muy diferente de todas las lagrangianas que hemos encontrado hasta ahora. Notemos que independientemente de cuál sea la forma funcional de L , la nueva lagrangiana Λ es función homogénea de primer grado de las velocidades generalizadas:

$$\Lambda(x_\mu, a x'_\mu) = a \Lambda(x_\mu, x'_\mu). \tag{7 160}$$

Este fenómeno no es un fenómeno de Física relativista por sí; es una consecuencia matemática de ampliar el espacio de configuración para que incluya t como variable dinámica y utilizar algún otro parámetro para marcar el viaje del punto figurativo del sistema por el espacio. Una lagrangiana que cumpla la ecuación (7-160) recibe a menudo el nombre (un tanto desorientador) de lagrangiana homogénea y el correspondiente problema «homogéneo» del Cálculo de variaciones exige un tratamiento especial.* La más seria de las dificultades resultantes surge en la formulación hamiltoniana, pero podemos echar una ojeada a algunas de ellas notando que como consecuencia la función energía h , según la ecuación (2-56), es idénticamente nula. Del teorema de Euler para las funciones homogéneas se deduce que si Λ es homogénea de primer grado en x'_μ , será

$$\Lambda = x'_\mu \frac{\partial \Lambda}{\partial x'_\mu}.$$

Podemos entonces demostrar (cfr. Ejercicio 29 al final del capítulo) que la función Λ resulta satisfacer *idénticamente* la relación

$$\left(\frac{d}{d\theta} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial x'_\mu}\right) - \frac{\partial \Lambda}{\partial x_\mu}\right) x'_\mu = 0. \tag{7 161}$$

* La exposición completa la podemos encontrar en H. Rund, *The Hamilton-Jacobi Theory in the Calculus of Variations* (New York: Van Nostrand, 1966), Capítulo 3.

Así pues, si se satisfacen tres cualesquiera de las ecuaciones de Lagrange (7-157) resultará, tan sólo a consecuencia de la propiedad de ser homogénea Λ , que la cuarta se satisface idénticamente.

Atrevámonos a efectuar esta transformación para el caso de una partícula libre. Según la ecuación (7-136), la lagrangiana «no covariante» para la partícula libre es

$$L = -mc\sqrt{c^2 - \dot{x}_c \dot{x}_i}.$$

En virtud de la transformación dada en la ecuación (7-159), una posible lagrangiana covariante sería entonces*

$$\Lambda = -mc\sqrt{-x'_\mu x'_\mu}. \quad (7-162)$$

Con esta lagrangiana, las ecuaciones de Euler-Lagrange son equivalentes a

$$\frac{d}{d\theta} \left(\frac{mcx'_v}{\sqrt{-x'_\mu x'_\mu}} \right) = 0.$$

El parámetro θ debe ser una función monótona del tiempo propio τ con lo que las derivadas respecto a θ están relacionadas con las derivadas en función de τ mediante la expresión

$$x'_v \equiv \frac{dx_v}{d\theta} = \frac{d\tau}{d\theta} u_v.$$

Luego, las ecuaciones de Lagrange corresponden a

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{mcu_v}{\sqrt{-u_\nu u_\nu}} \right) = \frac{d(mu_v)}{d\tau} = 0,$$

que son las ecuaciones (7-83) para una partícula libre. Según vimos anteriormente, la cuarta de estas ecuaciones nos dice que la energía cinética T se conserva (cfr. ec. 7-95), cosa que no es nueva pero que puede deducirse de las otras tres ecuaciones.

Hemos llegado así a un método lagrangiano covariante que funciona, al menos para

* En las manipulaciones algebraicas que llevan a la ecuación (7-162) hay una ambigüedad de signo que debemos decidir de tal manera que $L d\theta$ tenga el mismo valor que $\Lambda d\theta$. El paso final de la deducción deberá escribirse en la forma

$$\Lambda = imc\sqrt{x_4'^2 + x_j'x_j'} = -mc\sqrt{(-i)^2\sqrt{x_4'^2 + x_j'x_j'}} = -mc\sqrt{-x_\mu'x_\mu'}$$

Notemos también que la elección de la métrica especial definida por la ecuación (7-53) eliminaría el signo menos en la cantidad subradical, pero a expensas de otras complicaciones en la notación.

una partícula libre, pero sólo de manera tortuosa. Sin embargo, la complicada superestructura se puede simplificar mucho mediante algunos pasos audaces y pragmáticos. Ante todo, evitaremos utilizar θ y trabajaremos directamente en función del tiempo propio τ por medio de un método introducido por Dirac en un contexto ligeramente diferente. La restricción impuesta a las velocidades generalizadas en función de τ (ec. 7-75) no es una verdadera ligadura dinámica del movimiento, sino una consecuencia geométrica de cómo se define τ . En realidad, la ecuación (7-75) dice que no podemos errar por el espacio u_v de cuatro dimensiones; estamos confinados en una superficie tridimensional particular en el espacio. A las relaciones del tipo de la ecuación (7-75) Dirac las llama *ecuaciones débiles*. Podemos tratar impunemente las u_v como cantidades sin ligaduras y solamente *después* de haber efectuado todas las operaciones de derivación necesitaremos imponer la condición de la ecuación (7-75). Ciertamente, el procedimiento se podía haber aplicado antes a la lagrangiana de la partícula libre. No habría habido diferencia alguna si se hubiera hecho θ igual a τ desde el principio y aplicado la ecuación (7-75) solamente en el último paso. Por tanto, con este precepto, podremos escribir directamente en función de τ las ecuaciones de Lagrange covariantes:

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial u_v} \right) - \frac{\partial \Lambda}{\partial x_v} = 0. \tag{7-163}$$

En segundo lugar, no es una ley física sacrosanta que la integral de acción del principio de Hamilton deba tener el mismo valor cuando se exprese en función de t que cuando se exprese en función de θ (o de τ). No *necesita* venir dada por lo que prescribe la ecuación (7-159). Todo lo que se exige es que Λ sea un escalar de universo (o función de un escalar de universo) que lleve a las ecuaciones de movimiento correctas. No *tiene* que ser homogénea de primer grado en las velocidades generalizadas. Por ejemplo, una Λ adecuada para una partícula libre lo sería claramente la expresión cuadrática

$$\Lambda = \frac{1}{2} m u_v u_v. \tag{7-164}$$

Existen otras muchas posibilidades.* En todo lo que sigue utilizaremos la ecuación

* En general, Λ puede tener la forma $m f(u_v, u_v)$ donde $f(y)$ sea una función cualquiera de y tal que

$$\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{y=-c^2} = \frac{1}{2}.$$

En la ecuación (7-164) hemos utilizado $f(u_v, u_v) = \frac{1}{2} u_v u_v$. La elección

$$f(u_v, u_v) = -c \sqrt{-u_v u_v}$$

corresponde a la ecuación (7-162).

(7-162) para la parte «energía cinética» de la lagrangiana; con ello nos ahorraremos múltiples quebraderos de cabeza presentes y futuros.

Si la partícula no fuese libre, sino que estuviera sometida a fuerzas exteriores, a la lagrangiana de la ecuación (7-164) habría que añadir términos de interacción que llevaran a las fuerzas de Minkowski correspondientes. Poco podemos decir de momento acerca de los términos adicionales salvo que han de ser invariantes de Lorentz. Por ejemplo, si G_μ fuese un cierto cuadvivector (exterior), $G_\mu x_\mu$ sería un término de interacción adecuado. Si en un sistema de Lorentz determinado $G_1 = ma$ y las demás componentes fuesen nulas, tendríamos un ejemplo de fuerza constante como el estudiado en el apartado anterior. En general, dichos términos representarán la interacción de la partícula con un cierto campo exterior. La forma concreta dependerá de la formulación covariante de la teoría del campo. Sólo tenemos un ejemplo de un campo ya expresado de manera covariante —el campo electromagnético— y será, pues, instructivo examinar la lagrangiana de una partícula en un campo electromagnético.

Es fácil ver que será una lagrangiana adecuada

$$\Lambda(x_\mu, u_\mu) = \frac{1}{2} m u_\mu u_\mu + \frac{q}{c} u_\mu A_\mu(x_\lambda). \quad (7-165)$$

Las correspondientes ecuaciones de Lagrange serán, pues,

$$\frac{d}{d\tau}(m u_\nu) = -\frac{q}{c} \frac{dA_\nu}{d\tau} + \frac{\partial}{\partial x_\nu} \left(\frac{q}{c} u_\mu A_\mu \right),$$

las cuales son exactamente las ecuaciones de movimiento generalizadas (7-83), con la fuerza de Minkowski K_ν sobre una partícula cargada (ec. 7-88). Notemos de nuevo que el cuadvivector «cantidad de movimiento mecánica» p_μ es diferente de la cantidad de movimiento *canónica* p_μ :

$$p_\mu = \frac{\partial \Lambda}{\partial u_\mu} = m u_\mu + \frac{q}{c} A_\mu = p_\mu + \frac{q}{c} A_\mu \quad (7-166)$$

siendo su diferencia lineal en el potencial electromagnético. La cantidad de movimiento canónica conjugada a x_4 es ahora

$$p_4 = \frac{iT}{c} + \frac{iq\phi}{c} = \frac{i}{c} E,$$

donde E es la energía total de la partícula, $T + q\phi$. Así pues, la cantidad de movimiento conjugada a la coordenada *tiempo* es proporcional a la *energía* total. Más adelante, en la teoría no relativista, se presentará de nuevo una relación conjugada análoga entre estas dos cantidades. La relación existente entre el módulo de la cantidad de movimiento

«mecánica» espacial y la energía T sigue estando dada por la ecuación (7-100). En la ecuación (7-166) vemos que las cantidades de movimiento canónicas conjugadas a x_i constituyen las componentes de un vector cartesiano espacial \mathbf{p} relacionados con \mathbf{p} de la manera siguiente:

$$\mathbf{p} = \mathbf{p} + \frac{q}{c}\mathbf{A}. \tag{7-167}$$

En función de \mathbf{p} , podemos escribir la ecuación (7-100) en la forma

$$T^2 = \left(\mathbf{p} - \frac{q}{c}\mathbf{A} \right)^2 + m^2c^4, \tag{7-168}$$

que constituye una relación útil entre la energía T y el vector cantidad de movimiento canónica \mathbf{p} .

El término de interacción de la lagrangiana de la ecuación (7-165) es un ejemplo de interacción con un campo vectorial (como también es un término de la forma $G_\mu x_\mu$). También podríamos tener una interacción con un campo escalar sencilla en el cual el término añadido a la lagrangiana fuese un cierto escalar de universo $\psi(x_\mu)$. O podrían crearse términos de interacción invariantes más complicados que comportan un campo tensorial exterior. La naturaleza de dichas lagrangianas es algo que corresponde tratar a la vista de la teoría de campos físicos que proceda y no vamos a ocuparnos más de ella en este texto.

Hasta ahora sólo hemos hablado de sistemas constituidos por una sola partícula material. Los sistemas con muchas partículas introducen nuevas complicaciones. Un problema evidente es hallar un parámetro invariante para describir la evolución del sistema —cada partícula del sistema tiene su tiempo propio correspondiente. Sin embargo, sin gran esfuerzo mental podríamos imaginar maneras de superar dicha dificultad. Por ejemplo, el tiempo propio asociado al sistema C-D-M comporta un tratamiento simétrico de todas las partículas y podría resultar adecuado. También podríamos incluir en el cuadro interacciones de las partículas con campos exteriores de manera análoga a la empleada en el caso de una sola partícula. Sin embargo, el obstáculo mayor lo tenemos en el tratamiento del tipo de interacción que es tan natural y corriente en la Mecánica no relativista: la interacción directa entre partículas.

A primera vista, podría parecer que dichas interacciones fuesen imposibles en Mecánica relativista. Decir que la fuerza que se ejerce sobre una partícula depende de las posiciones o velocidades de otras partículas en el mismo instante implica la propagación de efectos de una partícula a otra con velocidad infinita —«acción a distancia». En Relatividad restringida, donde las señales no pueden ir más deprisa que la luz en el vacío, la acción a distancia parece estar proscrita. Y en cierto sentido esto parece ser la imagen correcta. Ya en 1963 se demostró que si exigimos que ciertas propiedades del sistema se comporten de manera normal (tales como la conservación de la cantidad de movimiento total), no podrá haber ninguna interacción directa covariante entre partículas salvo a través de fuerzas de contacto.

En los últimos años ha habido diversos intentos de soslayar este teorema de «no interacción». Después de todo, hemos visto que las fuerzas electromagnéticas se pueden expresar covariantemente y un campo electrostático da lugar a la ley de la atracción de Coulomb, la cual tiene igual forma que la supuestamente excomulgada atracción gravitatoria de Newton. Algunos de estos intentos han conducido a lagrangianas aproximadamente covariantes, correctas para ciertos grados de v^2/c^2 .^{*} Otros comportan formulaciones de Mecánica discordes con nuestras estructuras normales; la mayoría de ellas, por ejemplo, no pueden enunciarse en función de un sencillo principio de Hamilton. En este tema se sigue investigando activamente y es aún demasiado pronto para aventurar qué imagen surgirá finalmente. Ni tampoco está claro qué consecuencias, si las hay, tendrán estos desarrollos sobre otras ramas de la Física, tales como la Física de partículas. En algunas de las referencias que se citan a continuación se describe el estado en que estaba el tema en 1973.

REFERENCIAS SUGERIDAS

A. P. FRENCH, *Relatividad especial*. La literatura acerca de Relatividad ha sido una de las industrias de mayor crecimiento en las últimas décadas. Superaría todas las limitaciones de espacio el consignar tan sólo una fracción de las referencias merecedoras de atención y aquí sólo podremos dar una selección muy individualista. El libro de French se ha ensalzado justamente como uno de los mejores tratados de introducción al tema. La Matemática se mantiene a un nivel de cursos intermedios de Física en las universidades; se hace mucho hincapié en los fenómenos experimentales que condujeron a la teoría de la Relatividad restringida y a los que la han comprobado. Dos capítulos se refieren a la Mecánica, principalmente a los teoremas de conservación y a las fuerzas relativistas.

ALBERT EINSTEIN, *The Meaning of Relativity*. Este libro *no* presenta un tratamiento dirigido a audiencias populares. Poco más de un tercio de la obra se ocupa de la Relatividad restringida, si bien contiene mucha información. Se supone al lector con buena base en Electrodinámica.

R. D. SARD, *Relativistic Mechanics: Special Relativity and Classical Particle Dynamics*. Esta es una mecánica relativista al nivel de cursos intermedios de Mecánica; no se trata la Mecánica de Lagrange. Por otra parte contiene una cantidad enorme de materia. En la deducción de la transformación de Lorentz se tiene especial cuidado en reducir al mínimo los presupuestos necesarios. Se hace un considerable hincapié en la Cinemática de la partícula. Se utiliza casi siempre el espacio de Minkowski.

K. R. SYMON, *Mechanics*. Los dos últimos capítulos constituyen un tratamiento inusualmente elaborado de la Relatividad para un texto de nivel intermedio. Se introduce anteriormente el espacio de cuatro dimensiones con un tensor métrico de traza +2 y de esta manera proporciona una introducción pasito a pasito a manipulaciones en un espacio no euclídeo.

J. L. SYNGE y A. SCHILD, *Tensor Calculus*. El capítulo 2 de este libro es una de las mejores referencias compactas para el manejo de tensores en espacios de Riemann. Los textos superiores del autor acerca de Relatividad, restringida y generalizada, son tan voluminosos que desalientan al lector incidental, pero no nos permiten dejar su lectura.

^{*} Algunas lagrangianas covariantes para v^2/c^2 precedieron varios años al teorema de «no interacción», p. ej., la lagrangiana de Breit-Darwin para la interacción entre dos partículas cargadas, publicada en 1920.

J. D. JACKSON, *Classical Electrodynamics*. La primera edición de este renombrado texto cubría casi todos los temas de la Relatividad restringida, desde el experimento de Michelson-Morley hasta el movimiento relativista en aceleradores de partículas, con un apartado desusadamente extenso que trataba la Cinemática de las reacciones. Utilizaba un espacio de Minkowski complejo con $x_4 = ict$. En la segunda edición ha cambiado a un espacio con traza -2 y ha suprimido la mayoría de los experimentos primitivos y todo el apartado de Cinemática. Se han ampliado los estudios acerca de las formulaciones de Lagrange, incluyendo lagrangianas para más de una partícula que sólo son aproximadamente relativistas y lagrangianas para campos, que se tratan más adelante, en el capítulo 12. Entre las dos ediciones se tiene casi todo lo deseado de Relatividad restringida. Para los fines presentes resulta más útil la primera edición.

H. M. SCHWARTZ, *Introducción to Special Relativity*. Esta referencia es representativa de los tratados a escala total de Relatividad restringida, en particular con un tratamiento que corresponda aproximadamente al que hemos hecho aquí. Es notable cómo se tratan las propiedades de grupo de las transformaciones de Lorentz y la precesión de Thomas. Inicialmente, el estudio se basa en el espacio de Minkowski. Aun cuando se penetra muy detalladamente en la utilización de tensores en espacios planos, no queda claro con qué traza o signatura se queda al final.

V. FOCK, *Theory of Space, Time and Gravitation*. La mayor parte de este tratado de un distinguido físico ruso se dedica a lo que llamaríamos Relatividad generalizada. Sin embargo, las 100 primeras páginas tratan la Relatividad restringida, con diversas características excepcionales, tales como el análisis detallado de los experimentos «paradójicos» y la descomposición de la transformación de Lorentz en una rotación y una transformación de Lorentz pura. Cuando se utilizan tensores, el espacio tiene casi siempre una traza o signatura -2 .

C. W. MISNER; K. S. THORNE y J. A. WHEELER, *Gravitation*. Este voluminoso tratado (1279 páginas) es admirable por los grandes esfuerzos hechos para ayudar al lector a través del laberinto. La aparatosa pedagógica incluye por separado pistas marcadas, cajas de varios tipos, comentarios marginales y diagramas hábilmente diseñados. Un ángel que toca una trompeta señala el final del libro celebrado, entre otras cosas, con un par de canciones francesas y un diagrama de la Frenología de un «relativista» dedicado. La lectura sería muy divertida, si no fuese penosa por todo ello. La Física del espacio-tiempo plano (es decir, la Relatividad restringida) sólo ocupa 193 páginas y en ellas encontramos un nuevo punto de vista en cada una. La muerte de ict se proclama en la página 51; en su lugar se emplea la métrica con signatura $+2$.

A. O. BARUT, *Electrodynamics and Classical Theory of Fields and Particles*. Como preliminar al tratamiento de las teorías de campos covariantes de Lorentz, Barut da una breve introducción a la Dinámica covariante de una partícula. Entre los temas notables se cuentan la estructura de grupo de la transformación de Lorentz, la matriz de rotación que se oculta en la transformación de Lorentz y la variedad de lagrangianas covariantes. La métrica utilizada tiene por traza -2 .

R. HAGEDORN, *Relativistic Kinematics*. Naturalmente, este libro cubre un campo más extenso que el tratado por nosotros en Cinemática, pero no contiene todos los temas que hemos estudiado. Las ecuaciones de la transformación de Lorentz se utilizan directamente, en la mayor parte, junto con los invariantes, si bien hay un breve capítulo que trata de la notación tensorial, en el cual se dan fórmulas para las dos signaturas -2 y $+2$. Como se acostumbra a hacer en la Física de partículas, se utiliza siempre β en vez de v (aun cuando se escribe v) y las masas son relativas a la del protón. La tipografía lo es directamente del manuscrito y resulta abominable.

H. RUND, *Hamilton-Jacobi Theory in the Calculus of Variations*. Esta referencia es uno de los pocos libros que aborda abiertamente el problema homogéneo y lo considera extensamente (en el

Capítulo 3). Las soluciones particulares propuestas no las adoptamos nosotros, pero el estudio de los aspectos matemáticos proporciona una orientación útil. Al hablar de Relatividad, se utiliza el espacio de Minkowski.

R. A. MANN, *The Classical Dynamics of Particles: Galilean and Lorentz Relativity*. La Relatividad restringida sólo ocupa una fracción de este libro relativamente breve, el cual es principalmente un texto general de Mecánica, por lo que el tratamiento es más esquemático de lo que se podía esperar. Es uno de los pocos libros que dice algo acerca de los taquiones e incluye una demostración del teorema de «no interacción». La Relatividad restringida se describe en función de un espacio de signatura -2 . El autor está ciegamente enamorado de la teoría de grupos.

E. H. KERNER, ed. *Theory of Action-at-a-Distance in Relativistic Particle Dynamics*. Antes de una colección de reproducciones de trabajos fundamentales acerca de la cuestión, hay un breve ensayo introductorio del editor poniendo a punto el tema en 1972. Desde entonces ha progresado este campo y sigue desarrollándose. Hay que mantenerse al día en cuanto a publicaciones en revistas.

EJERCICIOS

1. Consideremos un sistema mecánico de n partículas, con un potencial conservativo consistente en términos que sólo dependen de la distancia escalar entre pares de partículas. Demostrar explícitamente que la lagrangiana del sistema expresada en coordenadas que derivan de una transformación de Galileo tienen una forma que sólo difiere de la lagrangiana original en un término que es la derivada total respecto al tiempo de una función de los vectores de posición. Este es un caso particular de invarianza ante una transformación de punto (cfr. Ejercicio 15, Capítulo 1).

2. Obtener la transformación de Lorentz en la cual la velocidad está dirigida respecto al eje z un ángulo infinitesimal $d\theta$ en sentido antihorario, por medio de una transformación de semejanza aplicada a la ecuación (7-18). Demostrar directamente que la matriz resultante es ortogonal y que la matriz inversa se obtiene sustituyendo v por $-v$.

3. Demostrar que si $\mathbf{K}(\beta)$ es el afinor

$$\mathbf{K}(\beta) = 1 + \frac{\beta\beta^T(-1)}{\beta^2},$$

la forma afinor de la parte espacial de la transformación de Lorentz pura será

$$\mathbf{r}' = \mathbf{K}(\beta) \cdot (\mathbf{r} - \beta ct).$$

4. Un cohete de longitud l_0 en el sistema respecto al cual está en reposo se mueve con celeridad constante a lo largo del eje z de un sistema inercial. Un observador situado en el origen de este sistema observa la longitud aparente del cohete en todo instante anotando las coordenadas z que pueden verse para la proa y la popa de dicho cohete. ¿Cómo variará dicha longitud aparente cuando el cohete se mueve desde el extremo de la izquierda del observador hasta el extremo de la derecha?

5. En Relatividad restringida no es necesariamente evidente que la velocidad de un sistema B observada desde un sistema A sea el vector velocidad del sistema A cambiado de sentido observado desde el sistema B. A partir de las propiedades de ortogonalidad de \mathbf{L} demostrar que los dos vectores

tienen igual módulo y son, en realidad, opuestos. Para mayor sencillez, puede suponerse una transformación de Lorentz pura, si bien no es necesaria tal condición para la demostración.

6. La ley de adición de Einstein se puede también obtener recordando que la segunda velocidad está directamente relacionada con las componentes espaciales de una cuadrivelocidad que se puede entonces transformar al sistema inicial mediante una transformación de Lorentz. Si el segundo sistema se mueve con una celeridad v' relativa al primero en la dirección de sus ejes z , mientras que un tercer sistema se mueve respecto al segundo con una velocidad v'' arbitrariamente orientada, demostrar por este procedimiento que el módulo de la velocidad v entre los sistemas primero y tercero viene dado por

$$\sqrt{1 - \beta^2} = \frac{\sqrt{1 - \beta'^2} \sqrt{1 - \beta''^2}}{1 + \beta' \beta''_z}$$

y que las componentes de v son

$$\beta_x = \frac{\beta_x'' \sqrt{1 - \beta'^2}}{1 + \beta' \beta''_z}, \quad \beta_y = \frac{\beta_y'' \sqrt{1 - \beta'^2}}{1 + \beta' \beta''_z}, \quad \beta_z = \frac{\beta' + \beta''_z}{1 + \beta' \beta''_z}$$

donde $\beta_x'' = v_x''/c$, etc. Obsérvese que la ecuación para β_z se reduce a la ecuación (7-22) (con un cambio de notación) cuando v' está dirigida según el eje z .

7. Demostrar que el módulo de la velocidad del ejercicio anterior entre los sistemas primero y tercero puede venir dada en general por

$$\beta^2 = \frac{(\beta' + \beta'')^2 - (\beta' \times \beta'')^2}{(1 + \beta' \cdot \beta'')^2}$$

8. Un haz de partículas que se mueven con velocidad uniforme choca con una colección de partículas blanco que están en reposo en un sistema particular. Sea σ_0 la sección eficaz de colisión observada en este sistema. En otro sistema, las partículas incidentes tienen una velocidad normalizada β_1 y las partículas blanco una velocidad normalizada β_2 . Si en este sistema es σ la sección eficaz observada, demostrar que

$$\sigma = \sigma_0 \sqrt{1 - \frac{(\beta_1 \times \beta_2)^2}{(\beta_1 - \beta_2)^2}}$$

Recordemos que el número de choques por unidad de tiempo debe ser invariante ante una transformación de Lorentz.

9. Se dice que un conjunto de transformaciones tiene la propiedad de grupo si posee las cuatro características siguientes:

- 1) La transformación equivalente a dos transformaciones sucesivas («producto» de transformaciones) es un elemento del conjunto.
- 2) La operación producto cumple la ley asociativa.

- 3) La transformación identidad es un elemento del conjunto.
 4) La inversa de cada transformación del conjunto es también elemento del conjunto.

Demostrar que los conjuntos de transformaciones de Lorentz generales y de transformaciones de Lorentz restringidas tienen (por separado) la propiedad de grupo, pero que los demás tipos de transformaciones de Lorentz no la tienen.

10. Demostrar que la matriz \mathbf{R} definida por la ecuación (7-31) tiene la forma de una rotación espacial formando explícitamente los elementos R_{4i} , R_{i4} y R_{44} y examinando las propiedades de la matriz 3×3 cuyos elementos son R_{ij} . Probar que no pueden haber dos matrices de rotación tales que cumplan la ecuación (7-28), es decir, que \mathbf{R} es única. Por último, demostrar que \mathbf{L} puede descomponerse análogamente en producto de una rotación por una transformación de Lorentz pura, de la forma

$$\mathbf{L} = \mathbf{P}'\mathbf{R}'.$$

11. En el caso de un satélite «próximo» a la Tierra (semieje mayor aproximadamente igual al radio terrestre), calcular numéricamente el valor de la velocidad de precesión de Thomas. Comparar el resultado con la velocidad de precesión inducida en la órbita a causa de la figura achatada de la Tierra. Suponer que el plano orbital del satélite está inclinado 30° respecto al ecuador.

12. Por multiplicación directa de la forma vectorial de la transformación de Lorentz (ec. 7-61 y 7-62), demostrar que

$$r'^2 - c^2 t'^2 = r^2 - c^2 t^2.$$

13. Examinar la transformación correspondiente al producto de dos transformaciones de Lorentz puras multiplicando las matrices \mathbf{Q} apropiadas (ec. 7-63). Demostrar que el producto contiene una rotación espacial según la dirección dada por $\kappa_1 \times \kappa_2$ de un ángulo θ definido por la ecuación

$$\cos \frac{\theta}{2} = \frac{1 + \cosh \psi_1 + \cosh \psi_2 + \cosh \psi_3}{4 \cosh \frac{\psi_1}{2} \cosh \frac{\psi_2}{2} \cosh \frac{\psi_3}{2}}$$

donde ψ_3 da la celeridad relativa efectiva de las dos transformaciones sucesivas en la forma

$$\cosh \psi_3 = \cosh \psi_1 \cosh \psi_2 + \kappa_1 \cdot \kappa_2 \operatorname{sen} \psi_1 \operatorname{sen} \psi_2.$$

14. Demostrar que a cada onda plana está asociado un cuadvectores covariante que contiene la frecuencia y el número de ondas. A partir de las consiguientes ecuaciones de transformación de las componentes del cuadvectores, deducir las ecuaciones del efecto Doppler.

15. A partir de las propiedades de transformación de la aceleración de universo, demostrar que las componentes de la aceleración \mathbf{a} vienen dadas en función de la aceleración transformada \mathbf{a}' en un

sistema momentáneamente en reposo respecto a la partícula mediante las fórmulas

$$a'_x = \frac{a_x}{1 - \beta^2}, \quad a'_y = \frac{a_y}{1 - \beta^2}, \quad a'_z = \frac{a_z}{(1 - \beta^2)^{3/2}},$$

habiéndose tomado el eje z en la dirección de la velocidad relativa.

16. Desarrollando la ecuación de movimiento (7-89), estando dada la cantidad de movimiento por la ecuación (7-90), demostrar que la fuerza es paralela a la aceleración tan sólo cuando la velocidad sea paralela o perpendicular a la aceleración. Obtener expresiones para los coeficientes de la aceleración en estos dos casos. En la literatura antigua, a estos coeficientes se les llamaba masa longitudinal y masa transversal, respectivamente.

17. Se observa que dos partículas de masas en reposo m_1 y m_2 se mueven a lo largo del eje z del observador con celeridades v_1 y v_2 respectivamente. Después de chocar se observa que quedan unidas formando una partícula de masa en reposo m_3 que se mueve con celeridad v_3 relativa al observador. Hallar m_3 y v_3 en función de m_1, m_2, v_1 y v_2 . ¿Sería posible que la partícula resultante fuese un fotón, es decir, $m_3 = 0$, si ni m_1 ni m_2 fuesen nulas?

18. En la desintegración β considerada en el ejercicio 1 del capítulo 1, el electrón tiene una masa equivalente a una energía en reposo de 0,511 MeV, mientras que el neutrino no tiene masa. ¿Cuáles son las energía totales que llevan el electrón y el neutrino? ¿Qué fracción de la masa del núcleo se convierte en energía cinética (incluida la energía en reposo del electrón)?

19. Un mesón de masa π queda en reposo y se desintegra en un mesón de masa μ y un neutrino de masa cero. Demostrar que la energía cinética del movimiento del mesón μ (es decir, sin la energía de la masa en reposo) es

$$T = \frac{(\pi - \mu)^2}{2\pi} c^2.$$

20. Un mesón π^+ de masa en reposo 139,6 MeV choca con un neutrón (masa en reposo 939,6 MeV) quieto en el sistema del laboratorio y produce un mesón K^+ (masa en reposo 494 MeV) y un hiperón Λ (masa en reposo 1115 MeV). ¿Cuál es la energía umbral para esta reacción en el sistema del laboratorio?

21. El fotón puede describirse clásicamente diciendo que es una partícula de masa nula que a pesar de ello tiene una cantidad de movimiento $h/\lambda = hv/c$ y por tanto una energía cinética hv . Si el fotón choca con un electrón de masa m en reposo se desviaría un cierto ángulo θ con una nueva energía $h\nu'$. Demostrar que la variación de energía está relacionada con el ángulo de desviación por medio de la fórmula

$$\lambda' - \lambda = 2\lambda_c \text{sen}^2 \frac{\theta}{2},$$

donde $\lambda_c = h/mc$, es la llamada longitud de onda Compton. Demostrar también que la energía

cinética del movimiento de retroceso del electrón es

$$T = h\nu \frac{2 \left(\frac{\lambda_c}{\lambda} \right) \text{sen}^2 \theta / 2}{1 + 2 \left(\frac{\lambda_c}{\lambda} \right) \text{sen}^2 \theta / 2}.$$

22. Un fotón de energía \mathcal{E} choca según un ángulo θ con otro fotón de energía E . Probar que el valor mínimo de \mathcal{E} que permite la formación de un par de partículas de masa m es

$$\mathcal{E}_{th} = \frac{2m^2 c^4}{E(1 - \cos\theta)}.$$

23. La teoría del movimiento de cohetes desarrollada en el ejercicio 3 del capítulo 1 no es aplicable en la región relativista, en parte porque no hay conservación de la masa. En vez de ello, todas las leyes de conservación se combinan en la conservación de la cantidad de movimiento de universo; la variación de cada componente de la cantidad de movimiento del cohete en un tiempo infinitesimal dt debe igualarse al valor de la misma componente de p_v de los gases expulsados por el cohete en el mismo intervalo de tiempo. Demostrar que si sobre el cohete no se ejercen fuerzas exteriores, la ecuación diferencial para su velocidad en función de la masa es

$$m \frac{dv}{dm} + a \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) = 0,$$

donde a es la velocidad constante de los gases expulsados *relativa al cohete*. Comprobar que la solución puede ponerse en la forma

$$\beta = \frac{1 - \left(\frac{m}{m_0} \right)^{\frac{2a}{c}}}{1 + \left(\frac{m}{m_0} \right)^{\frac{2a}{c}}},$$

siendo m_0 la masa inicial del cohete. Como la masa no se conserva, ¿qué sucede con la masa que se pierde?

24. En el movimiento hiperbólico partiendo del reposo en el origen, hallar el tiempo t_0 tal que si se emite un fotón desde el origen un tiempo t_0 más tarde, no llegue a alcanzar a la partícula.

25. Una partícula de masa en reposo m , carga q y velocidad inicial v_0 penetra en un campo eléctrico uniforme E perpendicular a v_0 . Hallar la subsiguiente trayectoria de la partícula y demostrar que se reduce a una parábola cuando c tienda a infinito.

26. Demostrar que el movimiento relativista de una partícula sometida a una fuerza atractiva inversamente proporcional al cuadrado de la distancia es una elipse en precesión. Calcular la precesión del perihelio de Mercurio debida a este efecto. (La respuesta, unos 7'' por siglo, es mucho menor que la precesión real de 40'' por siglo que sólo puede obtenerse mediante la Relatividad generalizada.)

27. Partiendo de la ecuación de movimiento (7-89), deducir el análogo relativista del teorema del virial, que dice que para movimientos acotados en el espacio y tales que las velocidades que intervengan no se aproximen indefinidamente a c , se cumple

$$\overline{L_0} + \overline{T} = -\overline{\mathbf{F} \cdot \mathbf{r}},$$

donde L_0 es la forma que adopta la lagrangiana en ausencia de fuerzas exteriores. Notemos que aunque ni L_0 ni T correspondan exactamente a la energía cinética en Mecánica no relativista, su suma $L + T$ desempeña el mismo papel que el doble de la energía cinética en el teorema del virial no relativista (ec. 3-26).

28. Un potencial generalizado adecuado para utilizarlo en una lagrangiana covariante para una partícula es

$$\mathcal{U} = -A_{\lambda\nu}(x_\mu)u_\lambda u_\nu,$$

donde $A_{\lambda\nu}$ representa un tensor de universo simétrico de segundo orden y u_ν son las componentes de la cuadrivelocidad. Si la lagrangiana se compone de la ecuación (7-164) menos \mathcal{U} , obtener las ecuaciones de movimiento de Lagrange. ¿Cuál es la fuerza de Minkowski? Dar las componentes de la fuerza observadas en un cierto sistema de Lorentz.

29. Demostrar que si Λ satisface a las ecuaciones de Lagrange, satisface idénticamente la ecuación (7-161) en base a la homogeneidad de Λ , formando explícitamente la derivada total respecto a θ que figura en la ecuación.

30. Se han construido ecuaciones de Lagrange covariantes para una partícula en función del tiempo propio incorporando la ligadura de la ecuación (7-75) mediante un método de multiplicadores de Lagrange. La lagrangiana Λ (que suponemos no depende explícitamente de τ) se sustituye en el principio variacional por

$$\Lambda' = \Lambda + \frac{\dot{\lambda}(\tau)}{2}(c^2 + u_\mu u_\mu).$$

Demostrar que la ecuación de Euler-Lagrange para λ da la ecuación (7-75). Las ecuaciones de Euler-Lagrange para x_μ contienen la derivada de λ respecto a τ . Demostrar que se pueden integrar para dar una expresión de λ que lleve a las ecuaciones de Lagrange:

$$\frac{d}{d\tau} \left[\frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{x}_\mu} \left(\delta_{\mu\nu} + \frac{u_\mu u_\nu}{c^2} \right) - \frac{\Lambda u_\mu}{c^2} \right] - \frac{\partial \Lambda}{\partial x_\mu} = 0.$$

Capítulo 8

Ecuaciones de movimiento de Hamilton

La formulación de Lagrange de la Mecánica se ha desarrollado en gran manera en los dos primeros capítulos y la mayor parte de lo tratado después se ha referido a aplicaciones dentro del marco del método de Lagrange. En este capítulo reasumimos el desarrollo formal de la Mecánica prestando atención a otra representación de la estructura de la teoría conocida por el nombre de formulación de Hamilton. No se añade nada nuevo a la Física que interviene; sólo obtenemos otro método (más potente) para trabajar con los principios físicos ya establecidos. Los métodos de Hamilton no son particularmente superiores a las técnicas de Lagrange en la solución directa de problemas mecánicos. La utilidad del punto de vista de Hamilton consiste, más bien, en proporcionar un marco para extensiones teóricas en muchos campos de la Física. En la Mecánica clásica constituye la base para desarrollos ulteriores, tales como la teoría de Hamilton-Jacobi y los métodos de perturbaciones. Fuera de la Mecánica clásica, la formulación de Hamilton proporciona gran parte del lenguaje con el cual se construyen la Mecánica estadística y la Mecánica cuántica de hoy en día. En los capítulos que siguen vamos a suponer que los sistemas mecánicos son holonomos y las fuerzas monógenas, es decir, que derivan o de un potencial que sólo depende de la posición, o de potenciales generalizados dependientes de la velocidad, del tipo tratado en § 1-5.

8-1 TRANSFORMACIONES DE LEGENDRE Y ECUACIONES DE MOVIMIENTO DE HAMILTON

En la formulación de Lagrange no relativista, un sistema con n grados de libertad posee n ecuaciones de movimiento de la forma

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0. \quad (8-1)$$

Como las ecuaciones son de segundo orden, el movimiento del sistema estará siempre determinado cuando se especifiquen $2n$ valores iniciales, p. ej., las n q_i y n \dot{q}_i en un instante particular t_1 , o las n q_i en dos instantes t_1 y t_2 . El estado del sistema lo representamos por un punto en un *espacio de las configuraciones* de n dimensiones cuyas coordenadas son las n coordenadas generalizadas q_i y seguimos el movimiento del punto figurativo del sistema en el transcurso del tiempo cuando recorre su trayectoria en el espacio de las configuraciones. Físicamente, desde el punto de vista de Lagrange, un sistema con n grados de libertad independientes es un problema de n variables independientes $q_i(t)$ y \dot{q}_i , sólo es una abreviatura de la derivada de q_i respecto al tiempo.

La formulación de Hamilton se basa en una visión fundamentalmente diferente. Queremos describir el movimiento mediante ecuaciones de movimiento de *primer orden*. Como el número de condiciones iniciales que determinan el movimiento ha de seguir siendo $2n$, deberá haber $2n$ ecuaciones independientes de primer orden expresadas en función de $2n$ variables independientes. Por tanto, las $2n$ ecuaciones del movimiento describen el comportamiento del punto figurativo del sistema en un *espacio fásico* cuyas coordenadas son las $2n$ variables independientes. En una tal duplicación de nuestro sistema de cantidades independientes es natural (aunque no inevitable) tomarlas de manera que la mitad de ellas sean las n coordenadas generalizadas q_i . Según veremos, la formulación resulta casi simétrica si tomamos para la otra mitad las *cantidades de movimiento conjugadas* o generalizadas p_i ya introducidas mediante la definición (cfr. ec. 2-44):

$$p_i = \frac{\partial L(q_j, \dot{q}_j, t)}{\partial \dot{q}_i} \quad (8-2)$$

Las cantidades (q, p) se denominan *variables canónicas*.*

Sin embargo, desde un punto de vista matemático, podemos pretender que se traten como variables distintas las q y las \dot{q} . En las ecuaciones de Lagrange (8-1), la derivada parcial de L respecto a q_i significa una derivada calculada considerando constantes todas las demás q y todas las \dot{q} . Análogamente, en las derivadas parciales respecto a \dot{q} , se mantienen constantes las q . Tratada estrictamente como problema matemático, la transición de la formulación de Lagrange a la de Hamilton corresponde a cambiar las variables de nuestras funciones mecánicas de (q, \dot{q}, t) a (q, p, t) , donde p está relacionada con q y \dot{q} mediante las ecuaciones (8-2). El método para conmutar las variables de esta manera lo proporciona la *transformación de Legendre*, † planeada precisamente para este tipo de cambio de variable.

* A menos que se especifique lo contrario, en este capítulo y en los siguientes p sólo se utilizará para representar la cantidad de movimiento canónica o conjugada. Cuando las fuerzas dependan de la velocidad, la cantidad de movimiento canónica diferirá de la cantidad de movimiento mecánica correspondiente (cfr. ec. 2-47).

† Una interpretación geométrica de la transformación de Legendre y del papel que desempeña en la teoría de ecuaciones diferenciales la tenemos en R. Courant y D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, Vol. II, pp. 32-39, 1962.

Consideremos una función de sólo dos variables $f(x, y)$, con lo que la diferencial de f tendrá la forma

$$df = u dx + v dy, \quad (8-3)$$

donde

$$u = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial f}{\partial y}. \quad (8-4)$$

Queremos ahora cambiar la base de descripción de x, y a un nuevo conjunto distinto de variables u, y de manera que las cantidades diferenciales se expresen en función de las diferenciales du y dy . Sea g una función de u e y definida por la ecuación

$$g = f - ux. \quad (8-5)$$

Entonces, la diferencial de g vendrá dada por

$$dg = df - u dx - x du,$$

o, según (8-3),

$$dg = v dy - x du,$$

que tiene exactamente la forma buscada. Las cantidades x y v son ahora funciones de u e y dadas por las relaciones

$$x = -\frac{\partial g}{\partial u}, \quad v = \frac{\partial g}{\partial y}, \quad (8-6)$$

que son de hecho las inversas de las ecuaciones (8-4).

La transformación de Legendre así definida se utiliza frecuentemente en Termodinámica. Por ejemplo, la entalpía X es función de la entropía S y la presión P con las propiedades

$$\frac{\partial X}{\partial S} = T, \quad \frac{\partial X}{\partial P} = V,$$

con lo cual

$$dX = T dS + V dP,$$

donde T y V son la temperatura y el volumen, respectivamente. La entalpía es útil al considerar procesos isentrópicos e isobáricos, si bien a menudo hay que tratar procesos isotérmicos e isobáricos. En tal caso necesitamos una función termodinámica de T y P solamente. La transformación de Legendre demuestra que la función buscada puede definirse en la forma

$$G = X - TS$$

siendo

$$dG = -S dT + V dP, \quad (8-7)$$

donde G es la conocida función de Gibbs, o energía libre, cuyas propiedades vienen dadas correctamente por la ecuación (8-7).

La transformación de (q, \dot{q}, t) a (q, p, t) sólo se diferencia del tipo considerado en las ecuaciones (8-3) a (8-5) en que hay que transformar más de una variable. En vez de la lagrangiana nos encontramos ante una función definida en analogía con la ecuación (8-5), salvo un signo menos:

$$H(q, p, t) = \dot{q}_i p_i - L(q, \dot{q}, t) \quad (8-8)$$

(donde se ha empleado, desde luego, el convenio de la suma). Aquí, H recibe el nombre de *hamiltoniana*. Considerada función de q , p y t solamente, la diferencial de H viene dada por

$$dH = \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt, \quad (8-9)$$

pero según la ecuación de definición (8-8) podemos también escribir

$$dH = \dot{q}_i dp_i + p_i d\dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \quad (8-10)$$

Los términos en que figura $d\dot{q}_i$ en la ecuación (8-10) se destruyen a consecuencia de la definición de cantidad de movimiento generalizada y de la ecuación de Lagrange se deduce que

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \dot{p}_i.$$

Por tanto, la ecuación (8-10) se reduce a la forma sencilla

$$dH = \dot{q}_i dp_i - \dot{p}_i dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \quad (8-11)$$

Comparando con la expresión (8-9) obtenemos el siguiente conjunto de $2n + 1$ relaciones, en analogía con las ecuaciones (8-6):

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad (8-12)$$

$$-\dot{p}_i = \frac{\partial H}{\partial q_i},$$

$$-\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}. \quad (8-13)$$

Las ecuaciones (8-12) son las llamadas *ecuaciones canónicas* de Hamilton; constituyen el sistema buscado de $2n$ ecuaciones de movimiento de primer orden que sustituyen a las ecuaciones de Lagrange.*

La primera mitad de las ecuaciones de Hamilton da las \dot{q}_i en función de las variables (q, p, t) . Por tanto, constituyen la inversa de las ecuaciones constitutivas (8-2) que definen las cantidades de movimiento p_i en función de (q, \dot{q}, t) . Podemos, pues, decir que no proporcionan nueva información. Por lo que se refiere a resolver problemas mecánicos mediante las ecuaciones canónicas, el planteamiento es correcto. Pero dentro del marco hamiltoniano, donde $H(q, p, t)$ es una cierta función dada que no importa cómo se ha obtenido, las dos mitades del sistema de ecuaciones de Hamilton son igualmente independientes y significativas. La primera mitad dice cómo depende \dot{q} de q, p y t ; la segunda dice lo mismo para \dot{p} .

Desde luego, la hamiltoniana H se construye de igual manera y tiene el mismo valor que h , la función energía definida en la ecuación (2-53). Pero son funciones de variables diferentes: al igual que la lagrangiana, h es función de q, \dot{q} (y posiblemente t), mientras

* Utilizamos aquí el término canónicas en el sentido de designar un sistema general sencillo de ecuaciones normales. El término parece ser que lo introdujo C. G. J. Jacobi en 1837 (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, 5, p. 61) pero en un contexto ligeramente diferente relativo a una aplicación de las ecuaciones de movimiento de Hamilton a la teoría de perturbaciones. Aun cuando el término tuvo una rápida aceptación, la razón de su introducción parece oscura incluso para los contemporáneos. En 1879, tan sólo 45 años después de que Hamilton introdujera sus ecuaciones, Thomson (Lord Kelvin) y Tait se sintieron impulsados por el adjetivo «canónico» a exclamar: «Sería difícil decir por qué se le ha llamado así». (*Treatise on Natural Philosophy*, 1879, Vol. 1, p. 307.)

que H debe siempre expresarse en función de q , p (y posiblemente t). Es para hacer resaltar esta diferencia de comportamiento funcional por lo que se han dado símbolos diferentes a las cantidades aun cuando tengan iguales valores numéricos.

Nominalmente, deberemos construir la hamiltoniana para cada problema a través de la formulación de Lagrange. El método formal requiere una larga secuencia de pasos:

1. Elegido un sistema de coordenadas generalizadas, q_i , se construye la lagrangiana $L(q_i, \dot{q}_i, t)$
2. Mediante las ecuaciones (8-2) se definen las cantidades de movimiento conjugadas en función de q_i, \dot{q}_i , y t .
3. Se utiliza la ecuación (8-8) para formar la hamiltoniana. En este momento tenemos h en vez de H , o más bien una función mixta de q_i, \dot{q}_i, p_i y t .
4. Se invierten entonces las ecuaciones (8-2) para obtener las \dot{q}_i en función de (q, p, t) . Más adelante trataremos algunas posibles dificultades de la inversión.
5. Se aplican los resultados del paso anterior para eliminar de H las \dot{q} de manera que quede expresada tan sólo en función de (q, p, t) .

Ahora estamos listos para utilizar la hamiltoniana en las ecuaciones canónicas de movimiento.

En muchos sistemas físicos es posible abreviar la secuencia que acabamos de describir. Según vimos en § 2-6, en muchos problemas la lagrangiana es una suma de funciones cada una homogénea en las velocidades generalizadas de grado 0, 1 y 2, respectivamente. En tal caso, según lo prescrito en la ecuación (8-8), H vendrá dada por (cfr. ec. 2-57)

$$H = L_2 - L_0, \quad (8\ 14)$$

donde L_0 es la parte de la lagrangiana independiente de las velocidades generalizadas y L_2 es la parte que es homogénea de segundo grado en \dot{q}_i . Además, si las ecuaciones que definen las coordenadas generalizadas no dependen explícitamente del tiempo, será $L_2 = T$ y si las fuerzas derivan de un potencial conservativo V , será $L_0 = -V$. Cuando se cumplan estas dos condiciones, la hamiltoniana será *automáticamente* la energía total:

$$H = T + V = E. \quad (8\ 15)$$

Si se cumple la ecuación (8-14) o la (8-15), se eliminará gran parte de las transformaciones algebraicas del tercero de los pasos antes indicados.

Podemos dar un paso más. En clases extensas de problemas sucede que L_2 es función cuadrática de las velocidades generalizadas y L_1 es función lineal de esas mismas variables. Las transformaciones algebraicas correspondientes a los pasos entre el 2 y el 5 podrán entonces efectuarse, al menos formalmente, de una vez por todas. Para ver esto coloquemos las \dot{q}_i formando una matriz columna $\dot{\mathbf{q}}$. Con las hipótesis citadas, podremos escribir la lagrangiana en la forma

$$L(q, \dot{q}, t) = L_0(q, t) + \tilde{\mathbf{q}}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\tilde{\mathbf{q}}\mathbf{T}\dot{\mathbf{q}}. \quad (8\ 16)$$

donde la matriz fila se ha escrito explícitamente en forma de traspuesta de la matriz columna en vista de las operaciones que vamos a realizar. Aquí \mathbf{a} es una matriz columna y \mathbf{T} una matriz cuadrada $n \times n$ (de manera parecida a como introducíamos en el capítulo 6 la matriz correspondiente). Los elementos de ambas son, en general, funciones de q y de t . Las cantidades de movimiento conjugadas, consideradas como elementos de una matriz columna \mathbf{p} , vendrán dadas, según la ecuación (8-2), por

$$\mathbf{p} = \mathbf{T}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{a}, \quad (8-17)$$

que puede invertirse (paso 4) en la forma

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{T}^{-1}(\mathbf{p} - \mathbf{a}). \quad (8-18)$$

Este paso presupone que exista \mathbf{T}^{-1} , cosa que sucede normalmente en virtud de la propiedad de la energía cinética de ser definida positiva. Por lo prescrito en la ecuación (8-14), la hamiltoniana, que coincide con la función energía h , viene dada por

$$h = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{q}} \mathbf{T} \dot{\mathbf{q}} - L_0.$$

Para obtener la forma funcional correcta de H , deberemos sustituir $\dot{\mathbf{q}}$ por la ecuación (8-18) en la parte cuadrática de h (paso 5). Ahora bien, es evidente que \mathbf{T} es una matriz simétrica y su inversa también lo será. Se deduce, pues, que

$$\tilde{\mathbf{q}} \mathbf{T} \dot{\mathbf{q}} = (\tilde{\mathbf{p}} - \tilde{\mathbf{a}}) \mathbf{T}^{-1} \mathbf{T} \mathbf{T}^{-1} (\mathbf{p} - \mathbf{a}).$$

Luego la forma final de la hamiltoniana es

$$H(q, p, t) = \frac{1}{2} (\tilde{\mathbf{p}} - \tilde{\mathbf{a}}) \mathbf{T}^{-1} (\mathbf{p} - \mathbf{a}) - L_0(q, t). \quad (8-19)$$

Si la lagrangiana se pudiera escribir en la forma indicada por la ecuación (8-16), podríamos pasar por alto los pasos que intervienen y escribir la hamiltoniana en la forma de la ecuación (8-19). La matriz inversa \mathbf{T}^{-1} puede usualmente obtenerse de manera muy fácil en la forma*

$$\mathbf{T}^{-1} = \frac{\tilde{\mathbf{T}}}{|\mathbf{T}|}. \quad (8-20)$$

* Véase cualquier libro de métodos matemáticos en Física, o de matrices. Por ejemplo, Margenau y Murphy, *The Mathematics of Physics and Chemistry*, 1943, (p. 295); Hildebrand, *Methods of Applied Mathematics*, 2.ª ed. 1965 (p. 16); o bien Nering, *Linear Algebra and Matrix Theory*, 1963 (p. 83). Incidentalmente, \mathbf{T}_c es lo que los matemáticos llaman matriz adjunta de \mathbf{T} (cfr. p. 180 de este libro).

Aquí T_c es la matriz adjunta cuyos elementos $(T_c)_{jk}$ son el producto de $(-1)^{j+k}$ por el menor complementario del elemento jk -ésimo de la matriz T , es decir, el determinante de la matriz que se obtiene al suprimir en T la fila j -ésima y la columna k -ésima. Fácil es ver que si T es diagonal, también lo será T^{-1} cuyos elementos serán los recíprocos de los elementos correspondientes en T .

En los problemas al final del capítulo encontraremos algunos ejercicios de aplicación de este formalismo a diversos sistemas mecánicos. Vamos a considerar dos ejemplos muy sencillos que ilustran algunos aspectos importantes de la técnica a emplear. Consideremos primeramente el movimiento espacial de una partícula en un campo de fuerzas central, utilizando para las coordenadas generalizadas las coordenadas polares esféricas (r, θ, ϕ) . La energía potencial será una cierta función $V(r)$ y la energía cinética es

$$T = \frac{m\dot{r}^2}{2} = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\text{sen}^2\theta\dot{\phi}^2 + r^2\dot{\theta}^2).$$

Está claro que la hamiltoniana es igual a la energía total $T + V$ y como T es diagonal, por simple inspección deducimos que la forma de H es

$$H(r, \theta, p_r, p_\theta, p_\phi) = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\phi^2}{r^2 \text{sen}^2\theta} \right) + V(r). \tag{8 21}$$

Notemos que la hamiltoniana tendría una forma funcional diferente si para las coordenadas generalizadas tomáramos las coordenadas cartesianas x_i de la partícula. La energía cinética tendría entonces la forma

$$T = \frac{m\dot{x}_i^2}{2} = \frac{m\dot{x}_i\dot{x}_i}{2} \tag{8 22}$$

y la hamiltoniana sería

$$H(x_i, p_i) = \frac{p_i p_i}{2m} + V(\sqrt{x_i x_i}).$$

Conviene a veces formar con las cantidades de movimiento canónicas p_i conjugadas de x_i un vector \mathbf{p} tal que la hamiltoniana se pueda escribir en la forma

$$H(x_i, p_i) = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}}{2m} + V(\sqrt{|\mathbf{r}|}). \tag{8 23}$$

Desde luego, podemos tomar las componentes de \mathbf{p} relativas al sistema de coordenadas que queramos, por ejemplo en coordenadas esféricas curvilíneas. Pero es importante que no confundamos, digamos, p_θ con la componente θ de \mathbf{p} , la cual designaremos por $(\mathbf{p})_\theta$. La

primera es la cantidad de movimiento canónica conjugada de la coordenada θ ; la segunda es la componente θ del vector cantidad de movimiento conjugado de las coordenadas cartesianas separadas; p_θ es un momento cinético, $(\mathbf{p})_\theta$ es una cantidad de movimiento. *De ahora en adelante, siempre que se utilice un vector para representar cantidades de movimiento canónicas se referirá a las cantidades de movimiento conjugadas de las coordenadas cartesianas de posición.*

Como segundo ejemplo consideremos una partícula (no relativista) que se mueva en un campo magnético. Según la ecuación (1-66), la lagrangiana para este sistema es

$$L = T - V = \frac{1}{2}mv^2 - q\phi + \frac{q}{c}\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}.$$

Tomando como coordenadas generalizadas las coordenadas cartesianas de posición, la lagrangiana podrá también escribirse en la forma

$$L = \frac{m\dot{x}_i\dot{x}_i}{2} + \frac{q}{c}A_i\dot{x}_i - q\phi, \quad (8-24)$$

donde los potenciales ϕ y \mathbf{A} son, en general, funciones de x_i y del tiempo (en esta expresión, q es la carga de la partícula y no una coordenada generalizada). Ahora hay un término lineal en las velocidades generalizadas tal que la matriz \mathbf{a} tiene los elementos qA_i/c . A causa de ese término lineal de U , la hamiltoniana *no* es $T + U$. No obstante, en este caso sigue siendo la energía total ya que la energía «potencial» de un campo electromagnético está determinada sólo por ϕ . Las cantidades de movimiento canónicas, bien sea por la ecuación (8-2) o por la ecuación (8-17), son

$$p_i = m\dot{x}_i + \frac{q}{c}A_i, \quad (8-25)$$

y la hamiltoniana (cfr. ec. 8-19) es

$$H = \frac{\left(p_i - \frac{q}{c}A_i\right)\left(p_i - \frac{q}{c}A_i\right)}{2m} + q\phi, \quad (8-26)$$

que es la energía total de la partícula. De nuevo las cantidades de movimiento p_i pueden constituir un vector \mathbf{p} y H podrá escribirse en la forma

$$H = \frac{1}{2m}\left(\mathbf{p} - \frac{q}{c}\mathbf{A}\right)^2 + q\phi, \quad (8-27)$$

y debemos recordar, también ahora, que \mathbf{p} sólo se refiere a cantidades de movimiento conjugadas de x_i .

Nos habremos dado cuenta de que las ecuaciones de movimiento de Hamilton no tratan las coordenadas y las cantidades de movimiento de manera totalmente simétrica. La ecuación para p tiene un signo menos que no figura en la ecuación para \dot{q} . Ha sido necesario derrochar ingenio para idear esquemas de nomenclatura que den lugar a ecuaciones totalmente simétricas, o que combinen los dos sistemas en uno. La mayoría de dichos esquemas no tienen más valor que el de su singularidad, si bien uno de ellos ha resultado ser una herramienta potente y elegante para manipular las ecuaciones canónicas y las expresiones relacionadas con ellas.

Para un sistema de n grados de libertad, construyamos una matriz columna $\boldsymbol{\eta}$ con $2n$ elementos tales que

$$\eta_i = q_i, \quad \eta_{i+n} = p_i; \quad i \leq n. \quad (8-28)$$

Análogamente, la matriz columna $\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\eta}}$ tiene los elementos

$$\left(\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\eta}} \right)_i = \frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \left(\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\eta}} \right)_{i+n} = \frac{\partial H}{\partial p_i}; \quad i \leq n. \quad (8-29)$$

Por último, sea \mathbf{J} la matriz cuadrada $2n \times 2n$ compuesta por las matrices $n \times n$ de ceros y unidad según el esquema

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}. \quad (8-30)$$

en donde $\mathbf{0}$ es la matriz $n \times n$ cuyos elementos son todos ceros y $\mathbf{1}$ es la matriz unidad $n \times n$. Las ecuaciones de movimiento de Hamilton pueden entonces escribirse en forma compacta de la manera siguiente:

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{J} \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\eta}}. \quad (8-31)$$

A este método de presentación de las ecuaciones de movimiento canónicas se le da el nombre de ecuaciones de Hamilton en notación matricial o *simpléctica*.* En capítulos posteriores utilizaremos frecuentemente esta forma matricial de las ecuaciones. Para su uso posterior, podemos señalar ciertas propiedades de \mathbf{J} fácilmente comprobables. La

* El término *simpléctica* proviene del griego y significa «entrelazada». Resulta particularmente apropiado para las ecuaciones de Hamilton en donde \dot{q} se aparea con una derivada respecto a p y análogamente, \dot{p} con una derivada respecto a q . H. Weyl introdujo este término en 1939 en su libro *The Classical Groups* (p. 165 tanto en la primera edición, 1939, como en la segunda, 1946).

matriz (no tiene ningún nombre normalizado) es una especie de versión $2n \times 2n$ del producto de i por la matriz de Pauli σ_2 (cfr. ec. 4-74) y por tanto, su cuadrado será la matriz $2n \times 2n$ unidad, cambiada de signo:

$$\mathbf{J}^2 = -\mathbf{1}. \quad (8-32)$$

Es también ortogonal:

$$\tilde{\mathbf{J}}\mathbf{J} = \mathbf{1} \quad (8-33)$$

con lo cual

$$\tilde{\mathbf{J}} = -\mathbf{J} = \mathbf{J}^{-1}. \quad (8-34)$$

De su ortogonalidad se deduce que el cuadrado de su determinante es 1, si bien se puede probar (cfr. Ejercicio 25) la afirmación más fuerte.

$$|\mathbf{J}| = +1. \quad (8-34')$$

8-2 COORDENADAS CÍCLICAS Y TEOREMAS DE CONSERVACIÓN

Según la definición dada en § 2-6, una coordenada cíclica q_j es la que no aparece explícitamente en la lagrangiana; en virtud de las ecuaciones de Lagrange, su cantidad de movimiento conjugada p_j será constante. Ahora bien, la comparación de la ecuación (8-9) con la (8-10) ya nos ha dicho que

$$\dot{p}_j = \frac{\partial L}{\partial q_j} = -\frac{\partial H}{\partial q_j}.$$

Una coordenada que sea cíclica estará, pues, también ausente en la hamiltoniana.* Inversamente, si en H no aparece una coordenada generalizada, se conservará la cantidad de movimiento conjugada. Los teoremas de conservación de la cantidad de movimiento y del momento cinético de § 2-6 podrán, pues, pasar a la formulación de Hamilton sin más que sustituir L por H . En particular, la relación entre la invarianza o propiedades de simetría del sistema físico y las constantes del movimiento, también podrán deducirse en función de la hamiltoniana. Por ejemplo, si un sistema está totalmente autocontenido, con sólo fuerzas internas entre las partículas, se podrá mover como conjunto rígido sin afectar a las fuerzas o al movimiento subsiguiente. Se dice entonces que el sistema es invariante ante un desplazamiento rígido. Por tanto, una coordenada generalizada que describa dicho movimiento rígido no figurará explícitamente en la hamiltoniana y se conservará la cantidad de movimiento conjugada correspondiente. Si el movimiento rígido es una

* Esta conclusión también se deduce de la definición dada por la ecuación (8-8), ya que H sólo difiere de $-L$ en $p_i \dot{q}_i$, que no contiene explícitamente a q_i .

traslación en una dirección particular, la cantidad de movimiento que se conserva será la componente cartesiana correspondiente de la cantidad de movimiento total (canónica) del sistema. Como la dirección es arbitraria, se conservará el vector cantidad de movimiento total. El desplazamiento rígido puede ser una rotación, de donde se deduciría que lo que se conserva es el vector momento cinético total. Incluso en el caso en que el sistema interactúe con fuerzas exteriores, puede haber en la situación una simetría que conduzca a la conservación de la cantidad de movimiento o del momento cinético canónico. Supongamos que el sistema sea simétrico respecto a un eje dado de manera que H será invariante ante una rotación alrededor de dicho eje. En tal caso, H no podría contener el ángulo de rotación alrededor del eje y la variable angular particular deberá ser una coordenada cíclica. Al igual que en § 2-6, se deduce que se conserva la componente del momento cinético respecto a dicho eje.

Las consideraciones referentes a h en § 2-6 han demostrado ya que si L (y a consecuencia de la ec. 8-13, también H) no es función explícita de t , H es una constante del movimiento. Podemos también ver esto directamente a partir de las ecuaciones de movimiento (8-12) escribiendo la derivada total respecto al tiempo de la hamiltoniana en la forma

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial t}.$$

A consecuencia de las ecuaciones de movimiento (8-12), las dos primeras sumas del segundo miembro se anulan entre sí y por tanto deducimos que

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}. \quad (8-35)$$

Luego si t no aparece explícitamente en L , tampoco estará presente en H y ésta será constante en el tiempo.

Además, se demostró en § 2-6 que si las ecuaciones de transformación que definen las coordenadas generalizadas (1-38),

$$\mathbf{r}_m = \mathbf{r}_m(q_1, \dots, q_n; t),$$

no dependen explícitamente del tiempo y el potencial es independiente de la velocidad, H será la energía total $T + V$. La identificación de H como constante del movimiento y como energía total son dos cuestiones separadas y las condiciones suficientes para una no bastan para la otra. Puede suceder que las ecuaciones (1-38) contengan explícitamente el tiempo y no lo contenga explícitamente H . En tal caso, H es una constante del movimiento pero *no* es la energía total. Ya insistimos en § 2-6 que la hamiltoniana depende tanto en magnitud como en forma funcional de la elección inicial de las coordenadas generalizadas. Para la lagrangiana tenemos una fórmula concreta, $L = T - V$, y un cambio de coordenadas generalizadas dentro de dicha fórmula puede alterar el aspecto funcional de

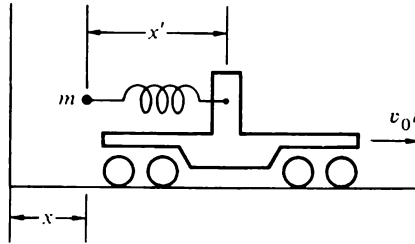


FIGURA 8-1

Ejemplo de oscilador armónico fijo a un carro que se mueve uniformemente.

L pero no su magnitud. En cambio, el empleo de un sistema diferente de coordenadas generalizadas en la definición de la hamiltoniana (ec. 8-8) puede llevar a una cantidad totalmente diferente para la hamiltoniana. Puede ser que se conserve H para un sistema de coordenadas generalizadas y que para otro varíe con el tiempo.

Para ilustrar algunos de estos puntos con un ejemplo sencillo, vamos a considerar un sistema unidimensional un tanto artificioso. Supongamos una masa puntual m unida a un resorte, de constante de rigidez k , cuyo otro extremo está fijo a un carrito sin masa que se mueve uniformemente con una celeridad v_0 gracias a un dispositivo exterior (cfr. fig. 8-1). Si como coordenada generalizada tomamos la coordenada de posición x de la partícula material en el sistema estacionario, la lagrangiana del sistema será, evidentemente,

$$\begin{aligned} L(x, \dot{x}, t) &= T - V \\ &= \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{k}{2}(x - v_0 t)^2. \end{aligned} \quad (8-36)$$

(Por razón de sencillez, hemos tomado el origen de manera que el carrito pase por él en el instante $t = 0$.) La ecuación de movimiento correspondiente será, claramente,

$$m\ddot{x} = -k(x - v_0 t).$$

La manera más fácil de resolver esta ecuación es cambiar la incógnita por la $x'(t)$ definida por

$$x' = x - v_0 t, \quad (8-37)$$

con lo que la ecuación de movimiento queda en la forma

$$m\ddot{x}' = -kx'. \quad (8-38)$$

Según la ecuación (8-37), x' es el desplazamiento de la partícula respecto al carrito; la ecuación (8-38) nos dice que un observador montado en el carrito ve que la partícula presenta un movimiento armónico simple, como era de esperar en virtud del principio de equivalencia de la Relatividad de Galileo.

Habiendo examinado la naturaleza del movimiento, consideremos la formulación de Hamilton. Como x es la coordenada cartesiana de la partícula y el potencial no contiene velocidades generalizadas, la hamiltoniana relativa a x es la suma de las energías cinética y potencial, es decir, la energía total. En forma funcional, la hamiltoniana viene dada por

$$H(x, p, t) = T + V = \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2}(x - v_0 t)^2. \quad (8-39)$$

La hamiltoniana es la energía total del sistema, pero como es función explícita de t , no se conserva. Esto es comprensible desde un punto de vista físico; del «dispositivo físico exterior» debe entrar y salir energía para mantener al carrito en movimiento uniforme venciendo la reacción de la partícula oscilante.*

Supongamos ahora que formulemos la lagrangiana desde el principio en función de la coordenada relativa x' . La misma fórmula nos da por lagrangiana

$$L(x', \dot{x}') = \frac{m\dot{x}'^2}{2} + m\dot{x}'v_0 + \frac{mv_0^2}{2} - \frac{kx'^2}{2}. \quad (8-40)$$

Al establecer la hamiltoniana correspondiente notamos que ahora hay un término lineal en x' , siendo mv_0 la única componente de a . La nueva hamiltoniana será ahora

$$H'(x', p') = \frac{(p' - mv_0)^2}{2m} + \frac{kx'^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}. \quad (8-41)$$

Notemos que el último término es una constante que no contiene ni x' ni p' ; si quisiéramos, lo podríamos suprimir de H' sin que ello afectara a las ecuaciones de movimiento resultantes. Ahora, H' no es la energía total del sistema, pero sí se conserva. Salvo en lo que se refiere al último término, se identifica fácilmente con la energía total del movimiento de la partícula relativo al carrito móvil. Las dos hamiltonianas son de diferente magnitud, diferente dependencia del tiempo y diferente comportamiento funcional. Pero el lector puede comprobar fácilmente que ambas llevan a un mismo movimiento de la partícula.

* Puesto de otra manera, el carrito móvil constituye una ligadura de la partícula dependiente del tiempo y la fuerza de ligadura no trabaja en un desplazamiento real (no virtual) del sistema.

8-3 MÉTODO DE ROUTH Y OSCILACIONES EN TORNO AL MOVIMIENTO ESTACIONARIO

Hemos indicado que la formulación de Hamilton no es particularmente útil para la solución directa de problemas mecánicos. A menudo se pueden resolver las $2n$ ecuaciones de primer orden tan sólo eliminando algunas de las variables, p. ej., las variables p , lo cual conduce rápidamente a las ecuaciones de movimiento de Lagrange de segundo orden. Pero señalemos una excepción importante. El método de Hamilton resulta especialmente adaptado al tratamiento de problemas en los que intervienen coordenadas cíclicas. Consideremos el caso de la formulación de Lagrange en el cual una coordenada, q_n , sea cíclica. La lagrangiana en función de las q y \dot{q} podrá entonces escribirse

$$L = L(q_1, \dots, q_{n-1}; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n; t).$$

En la lagrangiana figuran aún todas las velocidades generalizadas que, en general, serán funciones del tiempo. Tenemos todavía que resolver un problema de n grados de libertad aun cuando uno de ellos corresponda a una coordenada cíclica. En cambio, en la formulación de Hamilton una coordenada cíclica merece verdaderamente su descripción alternativa de «ignorable» ya que en el mismo caso p_n es una cierta constante α y H tiene la forma

$$H = H(q_1, \dots, q_{n-1}; p_1, \dots, p_{n-1}; \alpha; t).$$

En realidad, la hamiltoniana describe ahora un problema que sólo contiene $n - 1$ coordenadas, el cual se puede resolver por completo ignorando la coordenada cíclica salvo en que se manifiesta en la constante de integración α que ha de determinarse a partir de las condiciones iniciales. El comportamiento de la propia coordenada cíclica con el tiempo se encuentra integrando la ecuación de movimiento

$$\dot{q}_n = \frac{\partial H}{\partial \alpha}.$$

Las ventajas de la formulación de Hamilton en el manejo de coordenadas cíclicas se puede combinar con el procedimiento de Lagrange mediante un método ideado por Routh. En esencia, se efectúa una transformación matemática que lleve de la base q, \dot{q} a la base q, p tan sólo para las coordenadas que sean cíclicas, obteniendo sus ecuaciones de movimiento en la forma hamiltoniana, mientras que las restantes coordenadas vienen regidas por las ecuaciones de Lagrange. Si llamamos q_{s+1}, \dots, q_n a las coordenadas cíclicas, podemos introducir una nueva función R , llamada routhiana,* definida en la forma

$$R(q_1, \dots, q_n; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s; p_{s+1}, \dots, p_n; t) = \sum_{i=s+1}^n p_i \dot{q}_i - L. \quad (8-42)$$

* La función P que definimos aquí tiene el signo opuesto al de la forma usual, a fin de ponerla de acuerdo con la definición de H dada por la ecuación (8-8).

La diferencial de R vendrá, pues, dada por

$$dR = \sum_{i=s+1}^n \dot{q}_i dp_i - \sum_{i=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i - \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt,$$

de donde se deduce que

$$\frac{\partial R}{\partial q_i} = -\frac{\partial L}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} = -\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad i = 1, \dots, s; \quad (8-43)$$

$$\frac{\partial R}{\partial q_i} = -\dot{p}_i, \quad \frac{\partial R}{\partial p_i} = \dot{q}_i, \quad i = s+1, \dots, n. \quad (8-44)$$

Las ecuaciones (8-44) para las $n-s$ coordenadas ignorables q_{s+1}, \dots, q_n tienen la forma de ecuaciones de movimiento de Hamilton en donde R hace las veces de hamiltoniana, mientras que las ecuaciones (8-43) indican que las s coordenadas no ignorables obedecen a las ecuaciones de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial R}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, \dots, s, \quad (8-45)$$

en las que R es la lagrangiana. Hasta este momento no se ha hecho uso explícito de la naturaleza cíclica de las coordenadas q_{s+1} a q_n . Una coordenada ausente de L no aparecerá tampoco en la routhiana. Las $n-s$ cantidades de movimiento p_{s+1} a p_n conjugadas a las coordenadas cíclicas son constantes y pueden sustituirse en la routhiana por un conjunto de constantes $\alpha_1, \dots, \alpha_r$, donde $r = n-s$, a determinar mediante las condiciones iniciales. Con estas modificaciones, las únicas variables de la routhiana son las s coordenadas no cíclicas y sus velocidades generalizadas:

$$R = R(q_1, \dots, q_s; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s; \alpha_1, \dots, \alpha_r; t). \quad (8-46)$$

Podemos ahora resolver las ecuaciones de Lagrange (8-45) para las coordenadas no cíclicas sin tener en cuenta el comportamiento de las coordenadas cíclicas, exactamente como en la formulación de Hamilton. De hecho, el problema se ha reducido a un problema de Lagrange para un sistema de s grados de libertad y salvo los r parámetros constantes α_j podemos «ignorar» los restantes grados de libertad.

El ejemplo principal en el que podemos aplicar de manera útil el método de Routh es en el examen de desviaciones respecto al movimiento estacionario junto con la cuestión de la estabilidad de dichas desviaciones. Ya hemos considerado varios ejemplos de movimiento estacionario. En § 3-6 estudiábamos la estabilidad del movimiento estacionario de una partícula en órbita circular alrededor de un centro de fuerzas para diversas leyes de fuerza central. La precesión uniforme de una peonza pesada estudiada

en § 5-7, constituía un movimiento estacionario y el fenómeno de la nutación aparecía como una de las desviaciones respecto a dicho movimiento estacionario. En este ejemplo y en otros, el movimiento estacionario se caracteriza porque *todas las coordenadas no cíclicas son constantes*. Así, en el problema de la fuerza central, con dos coordenadas r y θ , una órbita circular significa que la única coordenada no cíclica es constante. También en el problema de la peonza pesada, de los tres ángulos de Euler θ , ϕ , ψ que son las coordenadas en la lagrangiana correspondiente a la ecuación (5-50), la única coordenada no cíclica es θ , la cual es constante en la precesión uniforme. Si nos limitamos a casos en los que la lagrangiana no sea función explícita del tiempo, se deduce que en el movimiento estacionario *las coordenadas cíclicas son funciones lineales del tiempo*. Podemos ver esto a partir de las ecuaciones de movimiento (8-44) para las coordenadas cíclicas o ignorables. Con una routhiana de la forma de la ecuación (8-46), estas ecuaciones implican que la velocidad generalizada de una coordenada ignorable q_i venga dada en función de las variables no cíclicas por medio de una relación del tipo

$$\dot{q}_i = \dot{q}_i(q_1, \dots, q_s; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s; \alpha_1, \dots, \alpha_r), \quad i = s + 1, \dots, n. \quad (8\ 47)$$

En el caso de movimiento estacionario q_1, \dots, q_s son constantes, $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s$ son cero y por tanto q_i para una variable cíclica es constante y \dot{q}_i varía linealmente con el tiempo. Así pues, en el movimiento estacionario en una órbita circular, la coordenada θ aumenta uniformemente con el tiempo. De nuevo, cuando la peonza pesada tiene una precesión uniforme, las velocidades angulares de las coordenadas cíclicas ψ y ϕ son constantes.

En lo que concierne al sistema «modificado» de s grados de libertad, se ha reducido el problema al de las oscilaciones respecto a posiciones de equilibrio q_{0i} , ya estudiado en el capítulo 6. Al igual que allá, la fuerza generalizada correspondiente a q_i debe anularse en el equilibrio, lo que indica que

$$\frac{\partial R}{\partial q_{0i}} \equiv \left(\frac{\partial R}{\partial q_i} \right)_0 = 0, \quad i = 1, \dots, s. \quad (8\ 48)$$

(cfr. ec. 6-1). Gran parte del método seguido en el capítulo 6 podemos adoptarlo aquí sin grandes cambios. La diferencia principal es que debemos partir de variables generalizadas concretas elegidas de manera que las coordenadas del movimiento estacionario sean ignorables. Éstas pueden ser tales que R no sea simplemente una función cuadrática de las velocidades generalizadas sino que pueden tener formas más complicadas.

Para ver tanto las semejanzas como las diferencias con las oscilaciones pequeñas respecto al equilibrio, vamos a seguir el método al menos en parte de su desarrollo. En el resto de este apartado volveremos a adoptar el convenio de la suma para sumas de 1 a s y tal como sugiere la ecuación (8-48), el subíndice 0 indicará valores y derivadas evaluadas en la posición de «equilibrio» correspondiente al movimiento estacionario. Al igual que en el capítulo 6, la desviación respecto a este equilibrio la denotaremos por nuevas variables ρ_i :

$$\begin{aligned} q_i &= q_{0i} + \rho_i, & i &= 1, \dots, s. \\ \dot{q}_i &= \dot{\rho}_i, \end{aligned} \quad (8\ 49)$$

Las cantidades ρ_i y $\dot{\rho}_i$ se consideran pequeñas en el sentido de que R pueda desarrollarse en serie de Taylor en torno a la configuración del movimiento estacionario conservando solamente los términos de grado inferior al tercero. A la luz de la ecuación (8-48), el desarrollo tiene la forma

$$R = R_0 + \frac{\hat{c}R}{\hat{c}\dot{q}_{0i}}\dot{\rho}_i + \frac{1}{2}\frac{\hat{c}^2R}{\hat{c}q_{0i}\hat{c}q_{0j}}\rho_i\rho_j + \frac{\hat{c}^2R}{\hat{c}q_{0i}\hat{c}\dot{q}_{0j}}\rho_i\dot{\rho}_j + \frac{1}{2}\frac{\hat{c}^2R}{\hat{c}\dot{q}_{0i}\hat{c}\dot{q}_{0j}}\dot{\rho}_i\dot{\rho}_j. \quad (8-50)$$

R y todas sus derivadas son funciones de las q_i no cíclicas solamente, de las \dot{q}_i correspondientes y de constantes. En el movimiento estacionario las q_i son constantes y las \dot{q}_i nulas. Por tanto, R_0 y todos los coeficientes de la ecuación (8-50) son constantes en el transcurso del tiempo y de R podemos suprimir R_0 por ser una constante aditiva. El término lineal en $\dot{\rho}_i$ satisface automáticamente a las ecuaciones de movimiento de Lagrange ya que su coeficiente es constante en el tiempo e independiente a ρ_i . Por tanto, también podemos suprimir dicho término y escribiremos R en la forma

$$R = \frac{1}{2}a_{ij}\dot{\rho}_i\dot{\rho}_j + g_{ij}\rho_i\dot{\rho}_j - \frac{1}{2}c_{ij}\rho_i\rho_j. \quad (8-51)$$

Notemos que los elementos matriciales a_{ij} y c_{ij} son simétricos, pero que esta propiedad no la tienen necesariamente g_{ij} . A los términos de R bilineales en ρ_i y $\dot{\rho}_j$ se les da a veces el nombre de «términos giroscópicos» porque aparecen frecuentemente en problemas referentes al movimiento giroscópico. Las ecuaciones de movimiento de Lagrange para las variables ρ_i toman entonces la forma

$$a_{ij}\ddot{\rho}_j - b_{ij}\dot{\rho}_j + c_{ij}\rho_j = 0, \quad (8-52)$$

donde

$$b_{ij} = g_{ij} - g_{ji}.$$

Comparando con las ecuaciones de movimiento del capítulo 6 (ec. 6-8), vemos que a_{ij} desempeña el papel de T_{ij} y c_{ij} corresponde a V_{ij} (de aquí el cambio de signo) pero que el término en $\dot{\rho}_i$ no tiene contrapartida. (No corresponde a los términos de fuerzas disipativas, los cuales no figuran en R ; típicamente, las fuerzas giroscópicas no trabajan y no destruyen la conservación de H .) El término bilineal de R hace imposible diagonalizar simultáneamente todos los términos de R mediante una transformación en un espacio de configuraciones como se hizo en el capítulo 6, por lo que no se podrán obtener de esta manera los modos normales.* No obstante, podemos buscar de nuevo soluciones

* La hamiltoniana correspondiente puede diagonalizarse mediante una transformación en el espacio fásico, pero ello requiere la teoría de las transformaciones canónicas que se estudiará en el capítulo siguiente. Véase el artículo de J. L. Synge en el Vol. III/1 de la Encyclopedia of Physics, p. 192 y el ejercicio 20 del capítulo 9.

exponenciales oscilatorias de la forma de la ecuación (6-9), con pulsaciones ω que sean las raíces del determinante secular:

$$|\mathbf{c} + i\omega\mathbf{b} - \omega^2\mathbf{a}| = 0. \quad (8-53)$$

(cfr. ec. 6-11). A pesar de aparecer términos lineales en ω puede demostrarse* a partir de la antisimetría de \mathbf{b} y de la simetría de las otras matrices que la ecuación secular es función de ω^2 solamente (como era de esperar en base a razonamientos físicos a partir de la simetría ante la inversión del tiempo). Si las raíces de la ecuación (8-53) corresponden a ω real, las desviaciones respecto al estado estacionario podrán estar acotadas y será posible la estabilidad. Los valores imaginarios de ω pueden conducir a un incremento de ρ ilimitado en el transcurso del tiempo, lo que indicaría inestabilidad del movimiento estacionario.

Debemos reconocer que estas afirmaciones dan una imagen demasiado simplificada del problema general de la estabilidad del movimiento. Hay muchas complicaciones, las menores de las cuales son las cuestiones acerca de la naturaleza del movimiento cuando la ecuación (8-53) tenga raíces múltiples o nulas. Más importante es la incertidumbre de hasta qué punto pueden las ecuaciones de movimiento linealizadas (8-52) representar las oscilaciones incluso para el caso de amplitudes pequeñas y representar la naturaleza de las soluciones alineales. El tema general de la estabilidad del movimiento constituye aún hoy un campo de investigación muy activo en el que se utilizan a menudo herramientas matemáticas muy sofisticadas que se salen del ámbito de este libro.

Con un ejemplo sencillo, casi trivial, podemos aclarar el método de Routh y el significado físico de las cantidades que intervienen. Consideremos el caso estudiado en § 3-6, de una partícula que se mueve en un plano bajo la influencia de una fuerza central $\vec{f}(r)$ que deriva de un potencial $V(r)$. La lagrangiana será

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(r).$$

Tal como hicimos notar antes, la coordenada ignorable es θ y si representamos por l la cantidad de movimiento conjugada, la correspondiente routhiana será

$$R = \frac{l^2}{2mr^2} + V(r) - \frac{m}{2}\dot{r}^2.$$

Vemos físicamente que la routhiana es el potencial equivalente unidimensional $V(r)$ menos la energía cinética del movimiento radial. (El signo menos aparece porque la routhiana definida por la ecuación 8-42 es la lagrangiana del problema unidimensional efectivo cambiada de signo.) En el movimiento estacionario, la coordenada no cíclica r es

* Véase K. R. Symon, *Mechanics*, 3.ª ed. (Reading, Massachusetts: Addison-Wesley, 1971), p. 483.

constante (e igual a r_0) y la coordenada cíclica θ aumenta uniformemente con el tiempo, es decir, la partícula recorre una órbita circular con velocidad angular constante. La condición de estado estacionario viene dada por la ecuación (8-48), que equivale aquí a decir que $V(r)$ es un extremo para $r = r_0$:

$$\frac{\partial R}{\partial r_0} \equiv \frac{\partial V'(r)}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = -\frac{l^2}{mr_0^3} + \frac{\partial V}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = 0,$$

o sea

$$f(r_0) = -\frac{l^2}{mr_0^3},$$

que es la ecuación (3-41). Desarrollando R en serie de Taylor en torno al estado estacionario alcanzamos una routhiana linealizada de la forma

$$R = \frac{a_{11}\dot{\rho}^2}{2} - \frac{c_{11}\rho^2}{2},$$

donde

$$a_{11} = \frac{\partial^2 R}{\partial \dot{\rho}^2} = -m, \quad c_{11} = -\frac{\partial^2 R}{\partial r_0^2} = -\frac{3l^2}{mr_0^4} + \frac{\partial f}{\partial r_0}.$$

La ecuación del determinante secular (ec. 8-53) se reduce a un solo término

$$c_{11} - \omega^2 a_{11} = 0.$$

Luego, la condición de que el movimiento sea estable, es decir, ω real, es equivalente a exigir que $c_{11}/a_{11} > 0$, o bien, utilizando la condición de movimiento estacionario,

$$\frac{\partial f}{\partial r_0} + \frac{3f(r_0)}{r_0} < 0,$$

que es la ecuación (3-43) que constituye el criterio de estabilidad del movimiento estacionario.

Típicamente, el método de Routh no añade nada a la Física del análisis presentado anteriormente en § 3-6, pero ha hecho automático el análisis. En problemas complicados con muchos grados de libertad, esta característica puede constituir una ventaja considerable. No es sorprendente, pues, que el método de Routh encuentre su mayor utilidad en la solución directa de problemas relativos a aplicaciones técnicas. Pero básicamente, la routhiana es un híbrido estéril que combina algunas características de las imágenes lagrangiana y hamiltoniana. La formulación de Hamilton completa resulta

más fructífera para el desarrollo de diversos formalismos de la Mecánica clásica.

8-4 FORMULACIÓN DE HAMILTON DE LA MECÁNICA RELATIVISTA

Al igual que con la imagen lagrangiana en Relatividad restringida, podemos adoptar dos actitudes para la formulación hamiltoniana de la Mecánica relativista. La primera no intenta una descripción covariante sino que trabaja en un determinado sistema inercial o de Lorentz. El tiempo medido en este sistema particular de Lorentz no se trata con las demás coordenadas en una base común sino que sirve, como en la mecánica no relativista, de parámetro que describe la evolución del sistema. A pesar de todo, si la lagrangiana que lleva a la hamiltoniana se basa en una teoría física relativísticamente invariante, p. ej., ecuaciones de Maxwell y fuerza de Lorentz, la imagen hamiltoniana resultante será correcta desde el punto de vista relativista. El segundo método intenta una descripción totalmente covariante de la imagen hamiltoniana, pero las dificultades que plagaban el método de Lagrange correspondiente (cfr. § 7-9) son aquí aún peores. Vamos a considerar primeramente el método no covariante.

Para la lagrangiana de una partícula de la forma de la ecuación (7-136),

$$L = -mc^2\sqrt{1 - \beta^2} - V,$$

demostramos ya que la hamiltoniana (en forma de función de energía h) es la energía total del sistema:

$$H = T + V.$$

La energía T puede expresarse en función de las cantidades de movimiento canónicas p , (ec. 7-137) mediante la ecuación (7-100):

$$T^2 = p^2c^2 + m^2c^4,$$

por lo que resulta adecuada para la hamiltoniana la forma

$$H = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} + V. \quad (8-54)$$

Cuando el sistema consiste en una partícula que se mueve en un campo electromagnético, su lagrangiana veíamos que venía dada (cfr. ec. 7-141) por

$$L = -mc^2\sqrt{1 - \beta^2} + q\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\beta} - q\phi.$$

El término de L lineal en las velocidades desaparece de la hamiltoniana, según hemos visto, mientras que el primer término lleva a que aparezca T en la hamiltoniana. Así pues,

ésta es de nuevo la energía total de la partícula:

$$H = T + q\phi. \quad (8-55)$$

Para este sistema, las cantidades de movimiento canónicas conjugadas a las coordenadas cartesianas de la partícula están definidas por (cfr. ec. 7-142)

$$p_i = mu_i + \frac{q}{c} A_i,$$

por lo que la relación entre T y p_i viene dada por la ecuación (7-168) y la hamiltoniana tiene la forma final

$$H = \sqrt{\left(\mathbf{p} - \frac{q}{c}\mathbf{A}\right)^2 c^2 + m^2 c^4} + q\phi. \quad (8-56)$$

Debemos recalcar de nuevo que aquí \mathbf{p} es el vector de las cantidades de movimiento canónicas conjugadas de las coordenadas *cartesianas* de la posición de la partícula. También podemos hacer notar que iH/c es la cuarta componente del vector de universo

$$mu_v + \frac{q}{c} A_v$$

(cfr. ec. 7-74, 7-96 y 7-166). Aun cuando la hamiltoniana (8-56) no está expresada de manera covariante, tiene un comportamiento definido ante una transformación de Lorentz al ser, en un cierto sistema de Lorentz, la cuarta componente de un vector de universo.

En un tratamiento covariante de la formulación de Hamilton, el tiempo se debe tratar de igual manera que las coordenadas espaciales, es decir, el tiempo debe considerarse como coordenada canónica que lleve asociada una cantidad de movimiento conjugada. Los fundamentos de una tal extensión de la dimensionalidad del espacio fásico se pueden construir de hecho incluso en Mecánica no relativista. Siguiendo la pauta de § 7-9, el progreso del punto figurativo del sistema a lo largo de su trayectoria en el espacio fásico puede estar marcado por un cierto parámetro θ y dejando t «suelta» para que sirva de coordenada adicional. Si representamos con un acento las derivadas respecto a θ , la lagrangiana en el espacio de configuraciones $(q_1, \dots, q_n; t)$ será (cfr. ec. 7-159)

$$\Lambda(q, q', t, t') = t L\left(q, \frac{q'}{t'}, t\right). \quad (8-57)$$

La cantidad de movimiento conjugada a t será, pues,

$$p_t = \frac{\partial \Lambda}{\partial t'} = L + t' \frac{\partial L}{\partial t'}$$

Si hacemos uso explícito de la relación $\dot{q} = q'/t'$, esta relación se convertirá en

$$p_t = L - \frac{q'_i}{t'} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = L - \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = -H. \tag{8 58}$$

La cantidad de movimiento conjugada a la «coordenada» tiempo será, pues, la hamiltoniana ordinaria cambiada de signo.* Aun cuando el marco de esta deducción es totalmente no relativista, el resultado es compatible con la identificación con iE/c de la componente temporal del cuadvectores cantidad de movimiento-energía. Según podemos ver en la definición (ec. 8-2), si se multiplica q por una constante α , la cantidad de movimiento queda dividida por α . Luego la cantidad de movimiento canónica conjugada a ict será iH/c .

Así pues, parece ser un camino natural del que se dispone para construir una hamiltoniana relativísticamente covariante. Pero el camino resulta estar minado con trampas tontas. Recordemos que la lagrangiana covariante utilizada para iniciar el proceso (ec. 7-159 o ec. 8-57) es homogénea de primer grado en las velocidades generalizadas q' y para una tal lagrangiana la fórmula descrita anteriormente (cfr. p. 422) para construir la formulación de Hamilton falla de manera irreparable. Si L es del tipo L_1 , la hamiltoniana correspondiente, llamémosla $H(q, t, p, p_1)$, es idénticamente nula. Sin embargo, incluso antes de alcanzar ese estadio, hay un fallo en el paso 4 que exige invertir el sistema de ecuaciones (8-2) para obtener las velocidades generalizadas en función de (q_i, p_i) . Para lagrangianas L_1 , esta inversión no se puede efectuar. Podemos ver esto de manera muy directa si L es homogénea de primer grado por ser simplemente lineal en las \dot{q}_i . En tal caso, p_i es independiente de todas las \dot{q}_j y no habrá manera de hallar las \dot{q}_j en función de p_j . Cuando la lagrangiana sea del tipo L_1 de manera más general, la demostración de la imposibilidad de la inversión es más complicada. Recordemos del teorema general de las funciones implícitas que si se dan n variables y_i función de n variables x_j ,

$$y_i = y_i(x_1, \dots, x_n),$$

* Las restantes cantidades de movimiento permanecen inalteradas ante el cambio de t a θ , según podemos ver evaluando la derivada correspondiente:

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{q}_i} = t' \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = t' \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = p_i.$$

se podrán invertir las funciones para hallar las x_j en función de las y_i tan sólo si el determinante de la matriz jacobiana \mathbf{M} , de elementos

$$M_{ij} = \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \quad (8-59)$$

es distinto de cero.* Aplicado a las ecuaciones (8-2), vemos que sólo podrán invertirse si no se anula el determinante

$$|\mathbf{W}| = \left| \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \right|.$$

Ahora bien, si L es del tipo L_1 tenemos

$$\dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = L.$$

Derivando respecto a \dot{q}_j llegamos a la condición

$$\dot{q}_i \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} = 0, \quad (8-60)$$

o, con notación matricial,

$$\dot{\mathbf{q}}\mathbf{W} = 0. \quad (8-60')$$

La ecuación (8-60) puede interpretarse diciendo que una columna del determinante se puede expresar en función de las demás, lo cual significa que el determinante es nulo. De otra manera, la ecuación (8-60') podemos interpretarla diciendo que \mathbf{W} sólo tiene valores propios nulos, lo cual implica de nuevo la anulación del determinante. Desde luego, la anulación del determinante jacobiano significa que no todas las cantidades de movimiento son independientes. En el caso de la formulación general en la cual se extiende el espacio fásico para incluir t y p_t , la ecuación (8-58) escrita en la forma

$$p_t = -H(q_1, \dots, q_n; p_1, \dots, p_n; t)$$

dice explícitamente que p_t no es independiente pero se da en función de todas las demás coordenadas y cantidades de movimiento. En el caso relativista de, p. ej., una partícula libre, hemos visto que esta ligadura impuesta a las cantidades de movimiento corresponde físicamente al hecho de que el cuadrivector p_μ tenga módulo constante.

* Muchos libros de Cálculo superior tratan el teorema de las funciones implícitas; cfr. S. Lang, *A Second Course in Calculus*, 2.^a ed., 1968, p. 529. Una demostración especialmente cuidadosa se encuentra en E. Hille, *Analysis*, Vol. 2, 1966, p. 367.

Debemos sacar la conclusión, pues, de que en el caso de lagrangianas homogéneas en las \dot{q}_i en el primer grado, no sirve el método de Hamilton usual. Se han ideado algunas otras maneras de formulación de la hamiltoniana en el «problema homogéneo».* Todas ellas tienen en cuenta explícitamente la ligadura que implica la anulación del determinante jacobiano, pero todas son complicadas y no se ha aceptado ninguna de ellas como técnica típica. Parece como si hubiera que evitar, como si fuera una plaga, toda lagrangiana «no invertible» homogénea posible.

Afortunadamente, no parece haber ninguna razón apremiante por la cual la lagrangiana covariante tenga que ser homogénea de primer grado, al menos en la Mecánica relativista clásica. Ya hemos visto que en el caso de una partícula libre, la lagrangiana covariante

$$\Lambda(x_\mu, u_\mu) = \frac{1}{2} m u_\mu u_\mu$$

conduce a las ecuaciones de movimiento correctas. Desde luego, las componentes u_μ de la cuadrivelocidad siguen sin ser todas independientes, pero la ligadura se puede tratar como «condición débil» a imponer solamente *después* de haberse efectuado todas las derivaciones. † No hay ahora ninguna dificultad para obtener la hamiltoniana a partir de esta lagrangiana, por el mismo camino que en Mecánica no relativista; el resultado es, claramente,

$$\mathbb{H} = \frac{p_\mu p_\mu}{2m}. \quad (8-61)$$

En el caso de una partícula en un campo electromagnético, encontramos ya anteriormente una lagrangiana, covariante:

$$\Lambda(x_\mu, u_\mu) = \frac{1}{2} m u_\mu u_\mu + \frac{q}{c} u_\mu A_\mu(x_\lambda), \quad (7-165)$$

con las cantidades de movimiento canónicas

$$p_\mu = m u_\mu + \frac{q}{c} A_\mu. \quad (7-166)$$

* La literatura que trata del «problema homogéneo» más o menos desde el punto de vista del físico, es, hoy por hoy, bastante extensa y sólo podemos citar algunas referencias. Lanczos, *The Variational Principles of Mechanics*, 4.ª ed., 1970, p. 187 da, quizá, la versión más sencilla de todas. Dirac, en algunos trabajos publicados a partir de 1933, ha desarrollado un método distintivo que está resumido en un librito, *Lectures on Quantum Mechanics*, 1964. Otra manera aún de enfocar el problema la tenemos en H. Rund, *The Hamilton-Jacobi Theory in the Calculus of Variations*, 1966, Capítulo 3.

Podemos hacer notar que el proceso de transformación de Legendre es reversible: dada una hamiltoniana se puede obtener la lagrangiana correspondiente (cfr. Ejercicio 1). Pero las dificultades surgen también en uno y otro sentido. Si se postula que una hamiltoniana es homogénea de primer grado en las cantidades de movimiento, no será posible encontrar una lagrangiana equivalente.

† Véase Dirac, *Lectures on Quantum Mechanics*, para esta clasificación de ligaduras.

En la hamiltoniana correspondiente desaparece el término en u_μ como es habitual y la parte restante L_2 en función de las cantidades de movimiento canónicas es

$$H = \frac{\left(p_\mu - \frac{q}{c}A_\mu\right)\left(p_\mu - \frac{q}{c}A_\mu\right)}{2m} \quad (8-62)$$

Las dos hamiltonianas (ec. 8-61 y 8-62) son constantes, de igual valor, $-mc^2/2$, pero para obtener las ecuaciones de movimiento lo que importa es la dependencia funcional de los cuadvectores de posición y de cantidad de movimiento. Con un sistema de una partícula, la hamiltoniana covariante conduce a ocho ecuaciones de movimiento de primer orden

$$\frac{dx_\nu}{d\tau} = \frac{\partial H}{\partial p_\nu}, \quad \frac{dp_\nu}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial x_\nu} \quad (8-63)$$

Sabemos que estas ecuaciones no pueden ser todas independientes. Las partes espaciales de las ecuaciones (8-63) conducen evidentemente a las ecuaciones de movimiento espaciales. Podríamos, pues, esperar que las dos ecuaciones restantes no nos digan nada nuevo, exactamente como en el caso lagrangiano. Podemos comprobar esto examinando las ecuaciones $\nu = 4$ en un cierto sistema particular de Lorentz. Una de ellas es la ecuación constitutiva de p_4 :

$$u_4 = \frac{\partial H}{\partial p_4} = \frac{1}{m} \left(p_4 - \frac{q}{c}A_4 \right)$$

o sea

$$p_4 = \frac{i}{c}(T + q\phi) = \frac{iH}{c},$$

conclusión general que ya habíamos observado. La otra se puede escribir en la forma

$$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{dp_4}{dt} = -\frac{1}{ic} \frac{\partial H}{\partial t}$$

o sea

$$\frac{dH}{dt} = \sqrt{1-\beta^2} \frac{\partial H}{\partial t}.$$

Comparando la forma de (8-60) con la (8-56) de H vemos que

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{T}{mc^2} \frac{\partial H}{\partial t},$$

por lo que la ecuación de movimiento se reduce a

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t},$$

que constituye el resultado general ya expresado en la ecuación (8-35).

Al igual que en el caso de la formulación de Lagrange covariante, tenemos el problema de hallar términos de potencial covariante adecuados en la lagrangiana para describir fuerzas que no sean electromagnéticas. Y en los sistemas multipartícula nos enfrentamos plenamente a las dificultades críticas de incluir interacciones que no sean con campos. En el lenguaje hamiltoniano, el teorema de «no interacción» ya mencionado dice que tan sólo en ausencia de interacciones directas entre partículas pueden describirse los sistemas invariantes de Lorentz en función de las coordenadas de posición usuales y de las cantidades de movimiento canónicas correspondientes. El ámbito del marco hamiltoniano relativista es, pues, muy limitado y por ello nos limitaremos en la mayor parte de casos a la Mecánica no relativista.

8-5 DEDUCCIÓN DE LAS ECUACIONES DE HAMILTON A PARTIR DE UN PRINCIPIO VARIACIONAL

Se ha demostrado que las ecuaciones de Lagrange son consecuencia de un principio variacional, cual es el principio de Hamilton de §2-1. El método variacional ha demostrado a menudo ser el método preferible para deducir ecuaciones de Lagrange, ya que es aplicable a tipos de sistemas que no suelen encontrarse comprendidos en el ámbito de la Mecánica. Sería igualmente ventajoso que pudiéramos encontrar un principio variacional que lleve directamente a las ecuaciones de movimiento de Hamilton. El principio de Hamilton,

$$\delta I \equiv \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0, \quad (8-64)$$

se presta a este proposito, pero tal como se formuló originalmente se refiere a caminos en el espacio de las configuraciones. Por tanto, la primera modificación es que la integral debe calcularse para la trayectoria del punto figurativo del sistema en el espacio fásico y los caminos variados deben ser próximos a dicha trayectoria en el espacio fásico. En el espíritu de la formulación hamiltoniana, q y p deben tratarse como coordenadas independientes del espacio fásico que variaremos independientemente. Para tal fin, el

integrando de la integral de acción (ec. 8-64) debe expresarse en función de q y p , así como de sus derivadas respecto al tiempo, mediante la ecuación (8-8). La ecuación (8-64) aparece entonces en la forma

$$\delta I = \delta \int_{t_1}^{t_2} (p_i \dot{q}_i - H(q, p, t)) dt = 0. \quad (8-65)$$

Considerándola como principio variacional en el espacio fásico, la ecuación (8-65) se denomina a veces *principio de Hamilton modificado*. Aun cuando se utilizará muy frecuentemente en relación con la teoría de las transformaciones (Capítulo 9) el principal interés que tenemos ahora es demostrar que el principio conduce a las ecuaciones de movimiento canónicas de Hamilton.

El principio de Hamilton modificado tiene exactamente la forma del problema variacional en un espacio de $2n$ dimensiones considerado en §2-3 (cfr. ec. 2-14):

$$\delta I = \delta \int_{t_1}^{t_2} f(q, \dot{q}, p, \dot{p}, t) dt = 0, \quad (8-66)$$

para el cual las $2n$ ecuaciones de Euler-Lagrange son

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial f}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad (8-67)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{p}_j} \right) - \frac{\partial f}{\partial p_j} = 0, \quad j = 1, \dots, n. \quad (8-68)$$

El integrando f dado en la ecuación (8-65) contiene \dot{q}_j tan sólo a través del término $p_j \dot{q}_j$ y contiene a q_j sólo en H . Luego, las ecuaciones (8-67) conducen a

$$\dot{p}_j + \frac{\partial H}{\partial q_j} = 0. \quad (8-69)$$

En cambio, el integrando de la ecuación (8-65) no tiene ninguna dependencia explícita de \dot{p}_j . Las ecuaciones (8-68) se reducen, pues, a

$$\dot{q}_j - \frac{\partial H}{\partial p_j} = 0. \quad (8-70)$$

Las ecuaciones (8-69) y (8-70) son exactamente las ecuaciones de movimiento de Hamilton (8-12). Las ecuaciones de Euler-Lagrange del principio de Hamilton modificado son, pues, las ecuaciones de movimiento canónicas buscadas.

Esta deducción de las ecuaciones de Hamilton a partir del principio variacional es tan breve que parece un truco de prestidigitación. Nos preguntamos si no se nos habrá escapado algo mientras estábamos distraídos por la charla del mago. ¿Es equivalente el principio de Hamilton modificado al principio de Hamilton, o contiene algún concepto físico adicional? La cuestión carece de importancia; la justificación primaria del principio de Hamilton modificado es que conduce a las ecuaciones de movimiento canónicas en el espacio fásico. Después de todo, no se dio ningún otro razonamiento para la validez del principio de Hamilton más que correspondía a las ecuaciones de movimiento de Lagrange. Mientras pueda construirse una hamiltoniana, el método de transformación de Legendre demuestra que las formulaciones de Lagrange y de Hamilton y por tanto sus principios variacionales respectivos, tienen el mismo contenido físico.

Sin embargo, nos preguntamos si la deducción impone limitaciones a la variación de la trayectoria que no estén presentes en el principio de Hamilton. El principio variacional que conduce a las ecuaciones de Euler-Lagrange se formula, como en § 2-2, de manera que las variaciones de las variables independientes sean nulas en los puntos extremos. En el espacio fásico ello exigiría $\delta q_i = 0$ y también $\delta p_i = 0$ en los puntos extremos, mientras que el principio de Hamilton sólo exige la anulación de δq_i en iguales circunstancias. Sin embargo, el examen de la deducción expuesta en § 2-2 mostraría que se exige que la variación sea nula en los puntos extremos sólo a fin de zafarnos de los términos integrados que surgen de las variaciones de las derivadas temporales de las variables independientes. Aun cuando la función f de la ecuación (8-66) que corresponde al principio de Hamilton modificado (ec. 8-65) es verdaderamente función de \dot{q}_j , no aparece explícitamente \dot{p}_j . Las ecuaciones (8-68) y por tanto las (8-70) se deducen de (8-65) sin estipular las variaciones de p_j en los puntos extremos. El principio de Hamilton modificado, con el integrando L definido en función de la hamiltoniana por la ecuación (8-8), conduce a las ecuaciones de Hamilton con condiciones de variación iguales a las del principio de Hamilton.*

A pesar de todo, tiene ciertas ventajas exigir que los caminos variados del principio de Hamilton modificado vuelvan a los mismos puntos extremos tanto para q como para p , ya que entonces tenemos una condición más generalizada para las ecuaciones de movimiento de Hamilton. Al igual que sucede en el principio de Hamilton, si no hay variación alguna en los puntos extremos, podemos sumar una derivada total respecto al tiempo de una función arbitraria (dos veces diferenciable), $F(q,p,t)$ al integrando sin afectar a la validez

* Puede objetarse que q y p no se pueden variar independientemente porque las ecuaciones de definición (8-2) relacionan p con q y \dot{q} . No podríamos tener entonces una variación de q (y de \dot{q}) sin la correspondiente variación de p . A veces, se intenta solventar esta objeción sustituyendo en las ecuaciones (8-2) \dot{x}_j por una nueva variable independiente r_j de manera que las variables q y r sean independientes en el principio de Hamilton modificado, siendo p_j una función derivada. Las ecuaciones de movimiento se obtienen entonces sometidas a las ligaduras $r_j = \dot{x}_j$ y resultan ser ecuaciones de movimiento de Hamilton. (Cfr. D. Ter Haar, *Elements of Hamiltonian Mechanics*, 1961, p. 100). Pero no es necesario este método y la objeción está totalmente en discordia con el intento y el espíritu de la imagen hamiltoniana. Una vez planteada la formulación de Hamilton, las ecuaciones (8-2) *no forman parte de ella*. Las cantidades de movimiento se han elevado a la categoría de variables independientes, sobre la misma base que las coordenadas y están relacionadas con ellas y el tiempo *tan sólo a través del medio de las ecuaciones de movimiento* y no por alguna relación de definición a priori.

del principio variacional. Supongamos, por ejemplo, que restamos del integrando de la ecuación (8-65) la cantidad

$$\frac{d}{dt}(q_i p_i).$$

El principio de Hamilton modificado diría entonces

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (-\dot{p}_i q_i - H(q, p, t)) dt = 0. \quad (8-71)$$

Aquí, el integrando f de la ecuación (8-66) es función de \dot{p} y se comprueba fácilmente que las ecuaciones de Euler-Lagrange (8-67) y (8-68) con esta f corresponden de nuevo a las ecuaciones de movimiento de Hamilton (8-12). Con todo, el integrando de la ecuación (8-71) no es la lagrangiana ni puede, en general, estar relacionado con ella mediante una transformación puntual en el espacio de configuraciones. Restringiendo a cero la variación de q y de p en los puntos extremos, el principio de Hamilton modificado proporciona una vía independiente y general para establecer las ecuaciones de movimiento de Hamilton sin formulación previa de la lagrangiana. Si queremos, podemos suprimir la necesidad de conexión entre las variables canónicas hamiltonianas y el correspondiente sistema lagrangiano de coordenadas y velocidades generalizadas. Esto nos va a resultar muy importante en el capítulo siguiente donde examinaremos transformaciones de variables del espacio físico que conservan la forma hamiltoniana de las ecuaciones de movimiento.

El requisito de variación independiente para q y para p , tan esencial para la deducción anterior ilumina la diferencia fundamental existente entre las formulaciones de Lagrange y de Hamilton. Ni las coordenadas q_i ni las cantidades de movimiento p_i se ha de considerar aquí que constituyan el sistema de variables más fundamental; ambos son igualmente independientes. Solamente ampliando el campo de variables independientes de n cantidades a $2n$ hemos podido obtener ecuaciones de movimiento que sean de primer orden. En cierto sentido, los nombres de «coordenadas» y «cantidades de movimiento» son poco afortunados ya que nos sugieren la idea de coordenadas espaciales y de cantidades de movimiento o, como máximo, momentos cinéticos. A dichos términos hay que darles ahora un significado más amplio. La división en coordenadas y cantidades de movimiento o momentos cinéticos sólo corresponde a una separación de las variables independientes que describen el movimiento, en dos grupos que tienen una relación casi simétrica uno respecto a otro a través de las ecuaciones de Hamilton.

8-6 PRINCIPIO DE MÍNIMA ACCIÓN

Otro principio variacional asociado a la formulación de Hamilton es el llamado *principio de mínima acción*. Contiene un nuevo tipo de variación, que llamaremos variación Δ , que exige una explicación detallada. En el proceso de variación δ utilizado en el estudio del principio de Hamilton en el capítulo 2, el camino variado en el espacio de las configuraciones terminaba siempre en puntos extremos que representaban la configura-

ción del sistema en el mismo tiempo t_1 y t_2 que el camino correcto. Para obtener las ecuaciones de movimiento de Lagrange exigíamos, también, que el camino variado volviera a los mismos puntos extremos en el espacio de las configuraciones, es decir, $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$. La variación Δ es menos restrictiva; en general, el camino variado a lo largo del cual se calcula la integral puede terminar en tiempos diferentes que el camino correcto y puede haber una variación de las coordenadas en los puntos extremos. Sin embargo, podemos utilizar la misma parametrización del camino variado que en la variación δ . En la notación de § 2-3, una familia de caminos variados posibles está definida por funciones

$$q_i(t, \alpha) = q_i(t, 0) + \alpha \eta_i(t), \quad (8-72)$$

donde α es un parámetro infinitesimal que se anula para el camino correcto. Las funciones η_i no tienen que anularse necesariamente en los puntos extremos, sea el original o el variado. Todo lo que se necesita es que sean continuas y derivables. En la figura 8-2 se ilustra esquemáticamente el camino correcto y el variado para una variación Δ en el espacio de las configuraciones.

Evaluemos la variación Δ de la integral de acción:

$$\Delta \int_{t_1}^{t_2} L dt \equiv \int_{t_1 + \Delta t_1}^{t_2 + \Delta t_2} L(x) dt - \int_{t_1}^{t_2} L(0) dt, \quad (8-73)$$

donde $L(\alpha)$ significa que la integral se calcula a lo largo del camino variado y $L(0)$ se refiere correspondientemente al camino real de movimiento. La variación se compone claramente de dos partes. Una se debe al cambio de los límites de la integral; hasta infinitésimos de primer orden esta parte es, sencillamente, el integrando del camino real multiplicado por la diferencia de tiempos en los límites. La segunda parte se debe al cambio del integrando del camino variado, pero no entre los mismos límites temporales que la integral original. Podemos, pues, escribir la variación Δ de la integral de acción en la forma

$$\Delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = L(t_2) \Delta t_2 - L(t_1) \Delta t_1 + \int_{t_1}^{t_2} \delta L dt. \quad (8-74)$$

Aquí la variación que figura en la segunda integral se puede efectuar mediante una parametrización del camino variado, exactamente como en el principio de Hamilton con la diferencia de que la variación de q_i no se anula en los puntos extremos. Los términos de los puntos extremos que surgen en la integración por partes deben conservarse y el término integral del segundo miembro adopta la forma

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta L dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] \delta q_i dt + \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right|_1.$$

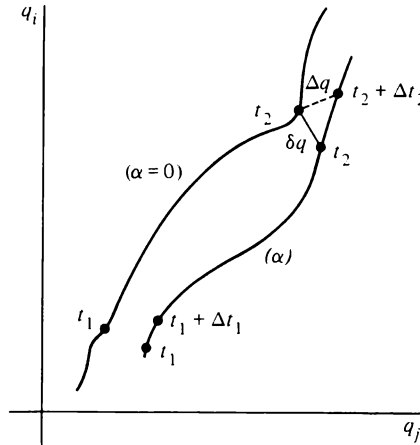


FIGURA 8-2

Ilustración esquemática de la variación Δ en el espacio de las configuraciones.

Según las ecuaciones de Lagrange, las cantidades entre corchetes se anulan y por tanto, la variación Δ toma la forma

$$\Delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = (L\Delta t + p_i \delta q_i) \Big|_1^2. \tag{8-75}$$

En la ecuación (8-75), δq_i es la variación de q_i en los tiempos t_1 y t_2 de los puntos extremos originales. Nos gustaría expresar la variación Δ en función del cambio Δq_i entre q_i en los puntos extremos del camino real y q_i en los puntos extremos del camino variado, incluyendo el cambio de tiempos en los puntos extremos. En la figura 8-2 queda claro que estas dos variaciones están relacionadas de la manera siguiente.*

$$\Delta q_i = \delta q_i + \dot{q}_i \Delta t. \tag{8-76}$$

* La ecuación (8-76) se puede deducir formalmente a partir de la forma paramétrica (ec. 8-72) del camino variado. Así, en el punto extremo superior tenemos

$$\Delta q_i(2) = q_i(t_2 + \Delta t_2, \alpha) - q_i(t_2, 0) = q_i(t_2 + \Delta t_2, 0) - q_i(t_2, 0) + \alpha \eta_i(t + \Delta t_2),$$

que hasta el primer orden de las cantidades pequeñas α y Δt_2 es

$$\Delta q_i(2) = \dot{q}_i(2) \Delta t_2 + \delta q_i(2),$$

que es lo que predice la ecuación (8-76).

Luego, la ecuación (8-75) la podremos escribir en la forma

$$\Delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = (L \Delta t - p_i \dot{q}_i \Delta t + p_i \Delta q_i) \Big|_1^2$$

o sea

$$\Delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = (p_i \Delta q_i - H \Delta t) \Big|_1^2. \quad (8-77)$$

Para obtener el principio de mínima acción restringiremos nuestras ulteriores consideraciones por tres calificaciones importantes:

1. Sólo se consideran sistemas para los cuales L y por tanto H , no sean funciones explícitas del tiempo y en consecuencia, se conservará H .
2. La variación es tal que se conserva H sobre el camino variado así como sobre el camino real.
3. Los caminos variados se limitan aún más exigiendo que en los puntos extremos se anule Δq_i (pero no Δt).

Se puede ilustrar la naturaleza de la variación resultante notando que el camino variado que satisfaga estas condiciones podría muy bien describir la misma curva en el espacio de las configuraciones que el camino real. La diferencia sería la celeridad con la cual el punto figurativo del sistema recorre esta curva; es decir, las funciones $q_i(t)$ se verán alteradas en el camino variado. Entonces, a fin de conservar el mismo valor de la hamiltoniana en todos los puntos del camino variado, deberemos cambiar los tiempos de los puntos extremos. Satisfechas estas tres calificaciones, la variación Δ de la integral de acción (ec. 8-77) se reduce a

$$\Delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = -H(\Delta t_2 - \Delta t_1). \quad (8-78)$$

Pero, en las mismas condiciones, la propia integral de acción se convierte en

$$\int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{t_1}^{t_2} p_i \dot{q}_i dt - H(t_2 - t_1),$$

y su variación Δ es

$$\Delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \Delta \int_{t_1}^{t_2} p_i \dot{q}_i dt - H(\Delta t_2 - \Delta t_1). \quad (8-79)$$

La comparación de las ecuaciones (8-78) y (8-79) nos da finalmente el *principio de mínima acción*:*

$$\Delta \int_{t_1}^{t_2} p_i \dot{q}_i dt = 0. \quad (8-80)$$

Por precaución, podemos hacer notar que el principio de Hamilton modificado se puede escribir en una forma que presenta una semejanza superficial con la ecuación (8-80). Si describimos la trayectoria del punto figurativo del sistema mediante un parámetro θ , como en § 7-9 y 8-4, el principio de Hamilton modificado se expresa en la forma

$$\delta \int_{\theta_1}^{\theta_2} (p_i \dot{q}_i - H) t' d\theta = 0. \quad (8-81)$$

Recordemos (cfr. nota pie p. 439) que las cantidades de movimiento p_i no cambian ante el paso de t a θ y que $\dot{q}_i t' = q'_i$. Además, la cantidad de movimiento conjugada a t es $-H$. Luego la ecuación (8-81) podrá escribirse en la forma:

$$\delta \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sum_{i=1}^{n+1} p_i q'_i d\theta = 0, \quad (8-82)$$

donde t se ha representado por q_{n+1} . Sin embargo, no debe haber confusión alguna entre la ecuación (8-82) y el principio de mínima acción. La ecuación (8-82) se refiere a un espacio fásico de $(2n + 2)$ dimensiones, según se indica mediante la suma explícita hasta $i = n + 1$, mientras que la ecuación (8-80) se refiere al espacio usual de las configuraciones. Pero, lo que es más importante, el principio de mínima acción se expresa mediante una variación Δ para H constante, mientras que la ecuación (8-82) utiliza la variación δ y H podría ser, en principio, función del tiempo. La ecuación (8-82) no es más que el principio de Hamilton modificado y la ausencia de hamiltoniana sólo refleja el

* Antiguamente, a la integral de la ecuación (8-80) se le daba el nombre de acción, o integral de acción y en la primera edición de este libro así lo hacíamos. Recientemente, se acostumbra a llamar acción a la integral del principio de Hamilton y en esta edición hemos aceptado tal denominación. Siguiendo el ejemplo de Landau y Lifschitz (*Mecánica*, Ed. Reverté) a la integral de la ecuación (8-80) la designaremos por el nombre de *acción abreviada*.

El principio de mínima acción se asocia corrientemente al nombre de Maupertuis y algunos autores dan a la integral que interviene el nombre de *acción de Maupertuis*. Sin embargo, el enunciado que Maupertuis dio al principio en 1744 era vagamente teleológico y difícilmente podría aceptarse hoy en día. El enunciado objetivo del principio se lo debemos a Euler y Lagrange. Desde luego, el nombre del teorema debería más bien ser *principio de la acción estacionaria*, pero el nombre histórico está demasiado firmemente arraigado en la literatura para que lo cambiemos ahora. Las circunstancias en las cuales la acción abreviada es verdaderamente mínima, las podemos encontrar en E. T. Whittaker, *A Treatise on Analytical Dynamics*, 4.^a ed., 1936, p. 250.

fenómeno de que la hamiltoniana H se anula idénticamente en el caso del «problema homogéneo».

El principio de mínima acción puede presentarse de diversas maneras. En Mecánica no relativista, si las ecuaciones de definición de las coordenadas generalizadas no contienen explícitamente el tiempo, la energía cinética será una función cuadrática de las \dot{q}_i (cfr. ec. 1-71):

$$T = \frac{1}{2} M_{jk}(q) \dot{q}_j \dot{q}_k. \quad (8 \ 83)$$

Cuando, además, el potencial no dependa de la velocidad, las cantidades de movimiento canónicas derivarán sólo de T y en consecuencia

$$p_i \dot{q}_i = 2T.$$

Para dichos sistemas, pues, el principio de mínima acción podrá escribirse en la forma

$$\Delta \int_{t_1}^{t_2} T dt = 0. \quad (8 \ 84)$$

Si, además, sobre el sistema no se ejercen fuerzas exteriores, como sucede por ejemplo en el caso de un cuerpo rígido sobre el cual se apliquen fuerzas de resultante general nula, se conservará T junto con la energía total H . En tal caso, el principio de mínima acción toma la forma especial

$$\Delta(t_2 - t_1) = 0. \quad (8 \ 85)$$

La ecuación (8-85) nos dice que de entre todos los caminos posibles entre dos puntos, compatibles con la conservación de la energía, el sistema se mueve siguiendo la trayectoria particular para la cual el tiempo de tránsito es mínimo (más estrictamente, un extremal). En esta forma, el principio de mínima acción recuerda al principio de Fermat de la Óptica geométrica según el cual un rayo luminoso recorre entre dos puntos un camino tal que el tiempo empleado en el recorrido es el mínimo. En el Capítulo 10 tendremos ocasión de volver sobre estas consideraciones cuando tratemos la relación entre la formulación de Hamilton y la óptica geométrica.

En el capítulo 6, que trataba de las oscilaciones de pequeña amplitud, introdujimos la noción (cfr. p. 314) de espacio de configuraciones curvo para el cual los elementos de la matriz \mathbf{T} formaban el tensor métrico. Un tal espacio de configuraciones tiene la propiedad de que $2T$ es el cuadrado del módulo del vector velocidad del punto figurativo del sistema. Podemos hacer ahora algo análogo, siempre que T sea de la forma indicada en la ecuación

(8-83).* Se construye así un espacio de configuraciones para el cual los coeficientes M_{jk} forman el tensor métrico. En general, el espacio será curvo y no ortogonal. El elemento de longitud en dicho espacio estará entonces definido por (cfr. ec. 6-24)

$$(d\rho)^2 = M_{jk} dq_j dq_k \quad (8-86)$$

con lo que la energía cinética tendrá la forma

$$T = \frac{1}{2} \left(\frac{d\rho}{dt} \right)^2, \quad (8-87)$$

o, lo que es equivalente,

$$dt = \frac{d\rho}{\sqrt{T}}. \quad (8-88)$$

La ecuación (8-88) nos permite un cambio de variable en la integral de acción abreviada consistente en pasar de t a ρ y el principio de mínima acción quedará en la forma

$$\Delta \int_{t_1}^{t_2} T dt = 0 = \Delta \int_{\rho_1}^{\rho_2} \sqrt{T} d\rho,$$

o, finalmente

$$\Delta \int_{\rho_1}^{\rho_2} \sqrt{H - V(q)} d\rho = 0. \quad (8-89)$$

À la ecuación (8-89) se le da a menudo el nombre de *forma de Jacobi del principio de mínima acción*. Se refiere al camino del punto figurativo del sistema en un espacio de configuraciones curvo especial caracterizado por el tensor métrico de elementos M_{jk} . El punto figurativo del sistema recorre el camino en este espacio de configuraciones con una celeridad dada por $\sqrt{2T}$. Si sobre el cuerpo no se ejercen fuerzas, T es constante y el principio de Jacobi dice que el punto figurativo del sistema se mueve a lo largo del camino más corto en el espacio de configuraciones. Dicho de otro modo equivalente, el movimiento del sistema es tal que su punto figurativo se mueve a lo largo de las geodésicas del espacio de configuraciones.

Debemos insistir en que la forma de Jacobi del principio de mínima acción se ocupa del *camino* del punto figurativo y no de su movimiento en el *tiempo*. La ecuación (8-89) es

* Los elementos de T eran independientes de los desplazamientos η_i respecto a las posiciones de equilibrio. Ahora los elementos M_{jk} son, en general, funciones de las q . Sin embargo, la diferencia no afecta a la formulación en absoluto.

una afirmación acerca del elemento de camino $d\rho$; el tiempo no aparece por ninguna parte, ya que H es constante y V sólo depende de q . La forma de Jacobi del principio de mínima acción se puede utilizar para que proporcione las ecuaciones diferenciales del camino por un procedimiento algo parecido al que conduce a las ecuaciones de Lagrange. En la forma del principio de Fermat, la versión de Jacobi del principio de mínima acción encuentra múltiples y fructíferas aplicaciones a la Óptica geométrica y a la Óptica electrónica. Entrar en detalles acerca de esto nos llevaría demasiado lejos.

Se pueden deducir numerosísimos principios variacionales parecidos. Para citar un ejemplo entre muchos, el principio de la mínima acción conduce de manera inmediata al *principio de Hertz de la mínima curvatura*, el cual dice que una partícula no sometida a la influencia de fuerzas exteriores se mueve a lo largo del camino de mínima curvatura. Según el principio de Jacobi, dicho camino debe ser una geodésica y la propiedad geométrica de curvatura mínima es una de las características conocidas de las geodésicas. Se ha mencionado que los principios variacionales no contienen en sí mismos ningún nuevo contenido físico y que raramente simplifican la solución práctica de un problema mecánico dado. Su valor reside principalmente en que pueden ser punto de partida para nuevas formulaciones de la estructura teórica de la Mecánica clásica. Para tal fin, el principio de Hamilton resulta especialmente fructífero y en menor grado, también lo es el principio de mínima acción. Los demás han demostrado tener poca utilidad, salvo en haber conducido a estériles especulaciones teleológicas y no parece oportuno profundizar más en ellos.

REFERENCIAS SUGERIDAS

P. H. BADGER, *Equilibrium Thermodynamics*. Muchos textos de Termodinámica mencionan la aplicación de la transformación de Legendre a los potenciales termodinámicos. Esta referencia contiene en su capítulo 10 un tratamiento excepcionalmente largo y explícito.

R. COURANT y D. HILBERT, *Methods of Mathematical Physics*. Tal como se ha mencionado, la transformación de Legendre tiene aplicaciones matemáticas formales a la teoría de ecuaciones en derivadas parciales. Courant, en el tomo II de su obra, proporciona un estudio de agradable lectura acerca de este aspecto y del significado geométrico de la transformación de Legendre (Capítulo 1, §6).

E. T. WHITTAKER, *Analytical Dynamics*. El tema de los principios variacionales que se encuentra en Mecánica clásica puede complicarse mucho y posee raíces muy profundas que penetran en campos que no tienen, aparentemente, ninguna relación con ellos. Por ejemplo, existe una estrecha relación entre el principio de Hamilton y la teoría general de ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden. Algunos de estos temas los trataremos en los capítulos que siguen, pero otros muchos no son apropiados para que se estudien en este libro. Análogamente, cuestiones tales como si el extremal del principio de Hamilton es un mínimo o un máximo no los podemos abordar, ni sería factible (ni deseable) considerar las múltiples subespecies de principios variacionales. El estudioso interesado en problemas de esta naturaleza encontrará abundante bibliografía; verdaderamente, hay un «embarras de richnesses». En esta lista sólo podemos mencionar una pequeña fracción del total de referencias existentes y de ellas el Whittaker constituye una de las fuentes principales. El capítulo IX y los dos primeros apartados del capítulo X son las partes pertinentes a este capítulo. Los cuatro últimos apartados del capítulo VII constituyen también una rica fuente de materias y ejemplos de oscilaciones en torno al movimiento estacionario si bien, como es frecuente, lo hace parecer más complicado de lo que es.

C. LANZOS, *Variational Principles of Mechanics*. En el capítulo 6 referente a las ecuaciones canónicas, es digno de mención el énfasis que pone en que el paso a la formulación de Hamilton duplica la dimensionalidad del conjunto de definición de las variables —del espacio de configuraciones al espacio fásico. El principio de mínima acción se presenta, en el capítulo 5, desde un punto de vista algo diferente del utilizado aquí.

J. L. SYNGE, *Classical Dynamics*. Es este un libro de tamaño respetable (224 páginas) sacado en forma de artículo en el Vol III/1 de la *Encyclopedia of Physics*. Cubre muchos de los temas usuales, a menudo desde un punto de vista muy original. En el apartado E acerca de la teoría dinámica general construye la formulación para los distintos tipos de espacios de variables que utiliza, incluido el espacio fásico ampliado con el tiempo y la energía. Se hace difícil a menudo, pero vale la pena el esfuerzo.

L. A. PARS, *Treatise on Analytical Dynamics*. Sólo se tratan las ecuaciones de Hamilton en un apartado de un capítulo referente a «Otras aplicaciones de las ecuaciones de Lagrange». Ahora bien, el estudio del método de Routh aplicado a vibraciones en torno al movimiento estacionario (en el capítulo 9) es voluminoso y valioso, si bien un tanto desorganizado.

K. R. SYMON, *Mechanics*. El estudio de las vibraciones pequeñas en torno al movimiento estacionario (§ 12.6) resulta un tanto enredado por no querer mencionar la routhiana, pero el autor habla del tema con la voz de un experto. Su interés en la investigación le ha hecho incluir la teoría de aceleradores, en donde la estabilidad de las oscilaciones pequeñas tiene gran importancia. Se estudian las oscilaciones en un betatrón a título de ejemplo. Otro ejemplo poco usual es la estabilidad de los llamados puntos lagrangianos en el problema de los tres cuerpos.

D. A. WELLS, *Lagrangian Dynamics*. Trata las ecuaciones de Hamilton, pero de manera breve y poco informativa. No obstante, hay un extenso capítulo referente a las oscilaciones respecto al movimiento estacionario desde el punto de vista de Routh, con abundancia de figuras y ejemplos de orientación técnica, principalmente.

P. A. M. DIRAC, *Lectures on Quantum Mechanics*. Libro delgado, que reproduce algunas conferencias que pronunció dando cuenta de sus trabajos acerca de la transición de la Mecánica clásica a la cuántica. Esboza su método de tratamiento del problema homogéneo, para el cual ideó una jerarquía de ligaduras débiles y fuertes. Para entender su contenido sería útil un conocimiento de las transformaciones canónicas (que se dan en el próximo capítulo).

H. RUND, *Hamilton-Jacobi Theory in the Calculus of Variations*. En el capítulo anterior se mencionó el extenso tratamiento que se da aquí del problema homogéneo, si bien el método no parece que haya sido aceptado de manera general.

D. TER HAAR, *Elements of Hamiltonian Mechanics*. Anteriormente (p. 446) se han dado razones de desacuerdo con el tratamiento que da el autor al principio de Hamilton modificado. Sin embargo, lo que vale la pena señalar es el tratamiento de los principios variacionales en donde se varíe el tiempo, como en el principio de mínima acción y en la extensión formal del tiempo y la energía como variables canónicas —aun cuando los peligros inherentes al problema homogéneo precisen poca precaución.

P. BRUNET, *Étude Historique sur le Principe de la Moindre Action*. Los interesados en la historia primitiva del principio de mínima acción la encontrarán aquí en forma fina y suave, desde los comienzos teleológicos de Maupertuis hasta los tiempos de Lagrange cuando se transformó en una poderosa herramienta para el desarrollo de la Mecánica.

R. L. LINDSAY y H. MARGENAU, *Foundations of Physics*. Los enunciados de los principios de Hamilton y de la mínima acción parecen dotar al sistema mecánico de un conocimiento consciente del estado final hacia el cual se dirige el movimiento. Tal apariencia es, desde luego, ilusoria; el movimiento del sistema sólo está determinado por las condiciones iniciales. Pero dicho punto de vista dio lugar en el pasado a numerosas especulaciones filosóficas. En el capítulo 3 de este texto se presenta un estudio adecuado de este punto y otros análogos y proporciona referencias para ulteriores lecturas a los que se interesen por el tema.

EJERCICIOS

1. a) Invertir la transformación de Legendre para deducir las propiedades $L(q_i, \dot{q}_i, t)$ a partir de $H(q_i, p_i, t)$ tratando las \dot{q}_i como variables independientes y demostrar que ello conduce a las ecuaciones de movimiento de Lagrange.

b) Por el mismo procedimiento, hallar las ecuaciones de movimiento utilizando en ellas la función

$$L'(p, \dot{p}, t) = -\dot{p}_i q_i - H(q, p, t).$$

2. Escribir el problema del movimiento de dos puntos materiales sometidos a fuerzas centrales en formulación de Hamilton, eliminando las variables cíclicas y reduciendo el problema a cuadraturas.

3. Formular el problema del péndulo doble ilustrado en la figura 1-4, en función de la hamiltoniana y las ecuaciones de movimiento de Hamilton. Sugerimos hallar la hamiltoniana directamente a partir de L y también mediante la ecuación (8-19).

4. La lagrangiana de un sistema puede escribirse en la forma

$$L = a\dot{x}^2 + b\frac{\dot{y}^2}{x} + c\dot{x}\dot{y} + f y^2 \dot{x}\dot{z} + g\dot{z} - k\sqrt{x^2 + y^2},$$

donde a, b, c, f, g y k son constantes. ¿Cuál es la hamiltoniana? ¿Qué magnitudes se conservan?

5. Un sistema dinámico tiene por lagrangiana

$$L = \dot{q}_1^2 + \frac{\dot{q}_2^2}{a + bq_1^2} + k_1 q_1^2 + k_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2,$$

donde a, b, k_1 y k_2 son constantes. Hallar las ecuaciones de movimiento en la formulación hamiltoniana.

6. Una hamiltoniana de un grado de libertad tiene la forma

$$H = \frac{p^2}{2x} - bqp e^{-x} + \frac{ba}{2} q^2 e^{-x}(x + be^{-x}) + \frac{kq^2}{2}.$$

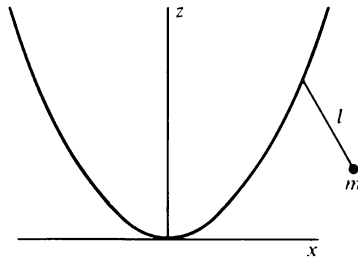
donde a , b , α y k son constantes.

- Hallar una lagrangiana que corresponda a esta hamiltoniana.
- Hallar una lagrangiana equivalente que no dependa explícitamente del tiempo.
- ¿Cuál es la hamiltoniana correspondiente a esta segunda lagrangiana y qué relación existe entre las dos hamiltonianas?

7. Hallar la hamiltoniana para el sistema descrito en el ejercicio 13 del capítulo 5 y obtener las ecuaciones de movimiento de Hamilton para el sistema. Para hallar la hamiltoniana, utilizar tanto el método directo como el matricial.

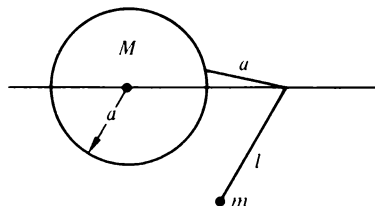
8. Repetir el ejercicio anterior, con la diferencia de que ahora se permite que el péndulo se mueva en tres dimensiones, es decir, sea un péndulo esférico cargado por resorte. Puede utilizarse el método directo o el matricial.

9. El punto de suspensión de un péndulo simple de longitud l y masa m está obligado a moverse a lo largo de una parábola $z = ax^2$ situada en un plano vertical. Deducir una hamiltoniana que rija el movimiento del péndulo y de su punto de suspensión. Obtener las ecuaciones de movimiento de Hamilton.



10. Obtener las ecuaciones de movimiento de Hamilton para un péndulo plano de longitud l y masa puntual m cuyo radio de suspensión gire uniformemente a lo largo de una circunferencia vertical de radio a . Describir físicamente la naturaleza de la cantidad de movimiento canónica y de la hamiltoniana.

11. a) El punto de suspensión de un péndulo simple plano de masa m y longitud l está obligado a moverse a lo largo de una pista horizontal y está conectado a un punto de la periferia de un volante uniforme de masa M y radio a mediante una biela sin masa cuya longitud es también a , tal como se indica en la figura. El volante gira alrededor de un centro fijo en la pista. Hallar una hamiltoniana para el sistema combinado y las ecuaciones de movimiento de Hamilton.



b) Supongamos que el punto de suspensión se mueva a lo largo de la pista según una cierta función del tiempo $x = f(t)$, tal que x se invierta en $x = \pm 2a$ (respecto al centro del volante). Hallar de nuevo la hamiltoniana y las ecuaciones de movimiento de Hamilton.

12. En el caso del sistema descrito en el ejercicio 20 del capítulo 2, hallar la hamiltoniana del sistema primero en función de las coordenadas del sistema del laboratorio y luego en función de las coordenadas del sistema giratorio. ¿Cuáles son las propiedades de conservación de las hamiltonianas y cómo están relacionadas con la energía del sistema?

13. a) Una partícula de masa m y carga eléctrica e se mueve en un plano bajo la influencia de un potencial de fuerza central $V(r)$ y un campo magnético uniforme \mathbf{B} , perpendicular al plano, generado por un potencial vector estático.

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} \mathbf{B} \times \mathbf{r}.$$

Hallar la hamiltoniana utilizando coordenadas en el sistema inercial del observador.

b) Repetir la parte (a) utilizando coordenadas que giren respecto al anterior sistema de coordenadas alrededor de un eje perpendicular al plano con una celeridad angular

$$\omega = -\frac{eB}{2mc}.$$

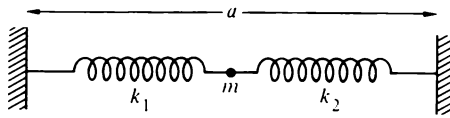
14. Se monta un cilindro uniforme de radio a y densidad ρ de manera que pueda girar libremente alrededor de un eje vertical. Sobre su superficie lateral está fija rigidamente una espiral uniforme o pista helicoidal a lo largo de la cual puede deslizarse sin rozamiento un punto material de masa m . Supongamos que una partícula parte del reposo en la parte superior del cilindro y desliza bajo la influencia de la gravedad. Utilizando un sistema de coordenadas cualquiera, llegar a una hamiltoniana para el sistema combinado de partícula y cilindro y resolver el movimiento del sistema.



15. Supongamos que en el ejemplo anterior se obliga a que el cilindro gire uniformemente con frecuencia angular ω . Plantear la hamiltoniana para la partícula en un sistema inercial de coordenadas y también en un sistema fijo en el cilindro en rotación. Identificar la naturaleza física de la hamiltoniana en cada caso e indicar si se conservan o no dichas hamiltonianas.

16. Una partícula de masa m se puede mover en una dimensión bajo la influencia de dos resortes unidos a puntos fijos separados una distancia a (v. figura). Los resortes cumplen la ley de Hooke y

tienen longitudes naturales nulas y constantes de rigidez k_1 y k_2 , respectivamente.



- a) Tomando como coordenada generalizada la posición de la partícula respecto a un punto fijo, hallar la lagrangiana y la hamiltoniana correspondiente. ¿Se conserva la energía? ¿Se conserva la hamiltoniana?
- b) Introducir una nueva coordenada Q definida por

$$Q = q - b \text{sen} \omega t, \quad b = \frac{k_2 a}{k_1 + k_2}.$$

¿Cuál es la lagrangiana en función de Q ? ¿Cuál es la hamiltoniana correspondiente? ¿Se conserva la energía? ¿Se conserva la hamiltoniana?

- 17. a) La lagrangiana de un sistema de un grado de libertad puede escribirse en la forma

$$Q = q \text{sen} \omega t$$

¿Cuál es la hamiltoniana correspondiente? ¿Se conserva?

- b) Introducir una nueva coordenada definida por

$$L = \frac{m}{2} (\dot{q}^2 \text{sen}^2 \omega t + \dot{q} q \omega \text{sen} 2\omega t + q^2 \omega^2).$$

Hallar la lagrangiana en función de la coordenada y la hamiltoniana correspondiente. ¿Se conserva H ?

18. Consideremos un sistema de partículas que interactúen entre sí mediante potenciales que sólo dependan de las separaciones escalares entre ellas y estén sometidas a fuerzas centrales conservativas respecto a un punto fijo. Obtener la hamiltoniana de la partícula respecto a un sistema de ejes, con origen en el centro de fuerzas, que gire en torno a un eje en un sistema inercial con velocidad angular ω . ¿Cuál es, en este caso, el significado físico de la hamiltoniana? ¿Es una constante del movimiento?

19. Se ha señalado anteriormente que se pueden añadir a la lagrangiana la derivada temporal total de una función de q_i y t sin que se alteren las ecuaciones de movimiento. ¿En qué afecta dicha adición a las cantidades de movimiento canónicas y a la hamiltoniana? Demostrar que las ecuaciones de movimiento en función de la nueva hamiltoniana se reducen a las ecuaciones de movimiento de Hamilton originales.

20. Supongamos que la lagrangiana sea un polinomio en \dot{q} de grado no superior al segundo. Convertir las $2n$ ecuaciones

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad \dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i},$$

en $2n$ ecuaciones para \dot{q}_i y \dot{p}_i funciones de q y p , utilizando la forma matricial de la lagrangiana. Demostrar que estas ecuaciones son las mismas que se obtendrían a partir de las ecuaciones de movimiento de Hamilton.

21. Podemos plantear una formulación parecida a la hamiltoniana en la cual \dot{q}_i y \dot{p}_i sean las variables independientes con una «hamiltoniana» $G(\dot{q}_i, \dot{p}_i, t)$. [Aquí definimos p_i en función de q_i, \dot{q}_i en la forma usual.] Partiendo de la formulación de Lagrange, mostrar detalladamente cómo se construye $G(\dot{q}_i, \dot{p}_i, t)$ y deducir las correspondientes «ecuaciones de movimiento de Hamilton».

22. Obtener la hamiltoniana de una peonza simétrica pesada con un punto fijo y de ella las ecuaciones de movimiento de Hamilton. Relacionarlas con las ecuaciones de movimiento vistas en §5-7 y en particular, mostrar cómo puede reducirse a cuadraturas la solución. Utilizar también el método de Routh para eliminar las coordenadas cíclicas.

23. En el ejercicio 13 del capítulo 1 se da el potencial dependiente de la velocidad supuesto en la Electrodinámica de Weber. ¿Cuál es la hamiltoniana para una partícula que se mueva bajo la influencia de dicho potencial?

24. Demostrar que si son λ_i los valores propios de una matriz cuadrada, la matriz recíproca, si existe, tiene por valores propios λ_i^{-1} .

25. Comprobar que la matriz \mathbf{J} tiene las propiedades dadas en las ecuaciones (8-32) y (8-33) y que su determinante vale $+1$.

26. Demostrar que el principio de Hamilton se puede escribir en la forma

$$\delta \int_1^2 [2H(\boldsymbol{\eta}, t) + \boldsymbol{\eta} \mathbf{J} \dot{\boldsymbol{\eta}}] dt = 0.$$

27. Comprobar que las dos hamiltonianas dadas por las ecuaciones (8-39) y (8-41) conducen al mismo movimiento descrito por la ecuación (8-38).

28. Tratar la nutación de una peonza «rápida» como ejemplo de oscilaciones pequeñas en torno a un movimiento estacionario, en este caso precesión a θ constante. Hallar la frecuencia de nutación.

29. Se monta una peonza simétrica de manera que pivote respecto a su centro de masa. A su vez, el pivote se fija a una distancia r del centro de un disco horizontal que puede girar libremente alrededor de un eje vertical. Se pone en movimiento la peonza con una rotación inicial en torno a su eje de figura, el cual forma inicialmente un ángulo θ_0 con la vertical. Analizar la posible nutación de la peonza como caso de oscilaciones pequeñas en torno al movimiento estacionario.

30. Dos masas puntuales m_1 y m_2 están unidas por una cuerda que hace las veces de resorte de la ley de Hooke con constante de rigidez k . Una partícula puede moverse libremente sin rozamiento sobre

una superficie plana horizontal lisa, mientras la otra pende verticalmente de la cuerda que pasa por un orificio practicado en dicha superficie. Hallar la condición de movimiento estacionario en que la masa puntual sobre el plano gire uniformemente a una distancia constante del orificio. Estudiar las oscilaciones pequeñas de la distancia radial al orificio y de la altura vertical de la segunda partícula.

31. Demostrar que el principio de Hamilton modificado, en la forma de la ecuación (8-71), conduce a las ecuaciones de movimiento de Hamilton.

32. Si las variables canónicas no son todas independientes, sino que se relacionan mediante condiciones auxiliares de la forma

$$\psi_k(q_i, p_i, t) = 0,$$

demostrar que las ecuaciones de movimiento canónicas se pueden escribir en la forma

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} + \sum_k \dot{\lambda}_k \frac{\partial \psi_k}{\partial p_i} = \dot{q}_i, \quad \frac{\partial H}{\partial q_i} + \sum_k \dot{\lambda}_k \frac{\partial \psi_k}{\partial q_i} = -\dot{p}_i,$$

donde las λ_k son los multiplicadores indeterminados de Lagrange. La formulación de las ecuaciones de Hamilton en las que t sea variable canónica es un caso a propósito, ya que existe una relación entre p_{n+1} y las demás variables canónicas:

$$H(q_1, \dots, q_{n+1}; p_1, \dots, p_n) + p_{n+1} = 0.$$

Demostrar que a consecuencia de estas circunstancias, las $2n + 2$ ecuaciones de Hamilton de esta formulación se pueden reducir a las $2n$ ecuaciones de Hamilton ordinarias más la ecuación (8-35) y la relación

$$\dot{\lambda} = \frac{dt}{d(t)}$$

Nótese que aun cuando estos resultados sean una reminiscencia de la formulación hamiltoniana covariante relativista, hemos llegado a ellos dentro del marco, totalmente, de la Mecánica no relativista.

33. Una posible lagrangiana covariante para un sistema de una partícula en interacción con un campo es

$$\Lambda = \frac{1}{2} m u_\lambda u_\lambda + D_{\lambda\nu}(x_\mu) m_{\lambda\nu},$$

donde $D_{xy}(x_\mu)$ es un tensor campo antisimétrico y $m_{\lambda\nu}$ es el tensor momento cinético antisimétrico,

$$m_{\lambda\nu} = m(x_\lambda u_\nu - x_\nu u_\lambda).$$

¿Cuáles son las cantidades de movimiento canónicas? ¿Cuál es la hamiltoniana covariante correspondiente?

Capítulo 9

Transformaciones canónicas

Cuando se aplica de manera directa, la formulación de Hamilton no suele disminuir materialmente la dificultad de resolución de cualquier problema dado de Mecánica. Se acaba prácticamente con las mismas ecuaciones diferenciales a integrar que nos daría el método de Lagrange. Las ventajas de la formulación de Hamilton no residen en su utilización como herramienta de cálculo, sino más bien en la más profunda visión que ofrece de la estructura formal de la Mecánica. La igualdad de categoría que en dicha formulación se concede a coordenadas y cantidades de movimiento en cuanto variables independientes nos anima a una mayor libertad en la selección de cantidades físicas a las que designar como «coordenadas» y «cantidades de movimiento». A consecuencia de ello llegamos a maneras más nuevas y abstractas de presentación del contenido físico de la Mecánica. Aun cuando a menudo son de gran ayuda en las aplicaciones prácticas a problemas mecánicos, dichas formulaciones más abstractas nos interesan principalmente en la actualidad a causa del papel esencial que desempeñan en la construcción de las teorías más modernas de la materia. Así pues, una u otra de estas formulaciones de la Mecánica clásica sirve de punto de partida para la Mecánica estadística y la teoría cuántica. A tales formulaciones, que surgen como consecuencias del método de Hamilton, vamos a dedicar este capítulo y el siguiente.

9-1 ECUACIONES DE LA TRANSFORMACIÓN CANÓNICA

Hay un tipo de problema para el cual la solución de las ecuaciones de Hamilton es trivial. Consideremos un caso en el cual la hamiltoniana sea una constante del movimiento y *todas* las coordenadas q_i sean cíclicas. En estas condiciones, las cantidades de movimiento conjugadas p_i son todas constantes:

$$p_i = \alpha_i,$$

y como la hamiltoniana no puede ser función explícita ni del tiempo ni de las coordenadas cíclicas, podrá escribirse en la forma

$$H = H(\alpha_1 \dots \alpha_n).$$

En consecuencia, las ecuaciones de Hamilton para \dot{q}_i serán simplemente

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial \alpha_i} = \omega_i, \quad (9-1)$$

donde las ω_i son funciones tan sólo de las α_i y por tanto son también constantes en el tiempo. Las ecuaciones (9-1) tienen las soluciones inmediatas

$$q_i = \omega_i t + \beta_i, \quad (9-2)$$

donde las β_i son constantes de integración, determinadas por las condiciones iniciales.

Podría parecer que la solución de este tipo de problema, por lo fácil que es, sólo pueda ser de interés académico ya que raramente se encontrará en la práctica que todas las coordenadas generalizadas sean cíclicas. Pero un sistema dado puede describirse por más de un sistema de coordenadas generalizadas. Así, para estudiar el movimiento de una partícula en un plano se pueden tomar como coordenadas generalizadas o bien las coordenadas cartesianas

$$q_1 = x, \quad q_2 = y,$$

o bien las coordenadas polares planas

$$q_1 = r, \quad q_2 = \theta.$$

Ambas elecciones son igualmente válidas, si bien podrá ser más conveniente uno u otro sistema para el problema que se considere. Observemos que en el caso de fuerzas centrales no son cíclicas ni x ni y , mientras que el segundo sistema contiene una coordenada cíclica, cual sería el ángulo θ . Así pues, el número de coordenadas cíclicas depende de la elección de las coordenadas generalizadas y para cada problema puede haber una elección particular para la cual todas las coordenadas sean cíclicas. Si podemos hallar tal sistema, lo que queda por hacer es trivial. Como las coordenadas generalizadas obvias sugeridas por el problema no serán normalmente cíclicas, debemos deducir primeramente un método específico para *pasar* de un sistema de variables a otro que pueda ser más conveniente.

Las transformaciones consideradas en los capítulos anteriores entrañaban pasar de un sistema de coordenadas q_i a un nuevo sistema Q_i mediante ecuaciones de transformación de la forma

$$Q_i = Q_i(q, t). \quad (9-3)$$

Por ejemplo, las ecuaciones de una transformación ortogonal, o del paso de coordenadas cartesianas a coordenadas polares planas, tienen la forma general de las ecuaciones (9-3). Según se hizo notar en el ejercicio 15 del capítulo 1, a dichas transformaciones se les da el nombre de *transformaciones puntuales*. Ahora bien, en la formulación de Hamilton las cantidades de movimiento son también variables independientes al mismo nivel que las coordenadas generalizadas. Por tanto, el concepto de transformación de coordenadas debe ampliarse para que incluya la transformación simultánea de las *coordenadas y cantidades de movimiento* independientes, q_i, p_i , a un nuevo sistema Q_i, P_i , con ecuaciones (invertibles) de transformación

$$\begin{aligned} Q_i &= Q_i(q, p, t), \\ P_i &= P_i(q, p, t). \end{aligned} \quad (9-4)$$

Así, las nuevas coordenadas estarán definidas no sólo en función de las antiguas sino también en función de las cantidades de movimiento antiguas. Puede decirse que las ecuaciones (9-3) definen una transformación de *espacio de configuraciones*; en correspondencia, las ecuaciones (9-4) definen una transformación de *espacio fásico*.

Al desarrollar la Mecánica hamiltoniana, sólo pueden interesarnos las transformaciones para las cuales las nuevas Q, P sean coordenadas canónicas. Este requisito se cumplirá si existe una cierta función $K(Q, P, t)$ tal que las ecuaciones de movimiento en el nuevo sistema estén en la forma de Hamilton

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i}, \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i}. \quad (9-5)$$

La función K desempeña el papel de la hamiltoniana en el nuevo sistema de coordenadas.* Para consideraciones posteriores importa que las transformaciones consideradas no dependan del problema. Es decir, (Q, P) deben ser coordenadas canónicas no sólo para ciertos sistemas mecánicos concretos sino para todos los sistemas de igual número de grados de libertad. Las ecuaciones (9-5) deben constituir la forma de las ecuaciones de movimiento en las nuevas coordenadas y cantidades de movimiento independientemente de cuál sea la forma inicial de H . Podemos estar impulsados a desarrollar una transformación particular de (q, p) a (Q, P) para tratar, por ejemplo, un oscilador armónico plano. Pero la misma transformación deberá conducir a las ecuaciones de movimiento de Hamilton cuando se aplique, por ejemplo, al problema de Kepler bidimensional.

En §8-5 veíamos que si Q_i y P_i han de ser coordenadas canónicas, deben cumplir un principio de Hamilton modificado que se puede escribir en la forma

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (P_i \dot{Q}_i - K(Q, P, t)) dt = 0, \quad (9-6)$$

* Se ha dicho en tono jocoso que si H representa la hamiltoniana, K debe representar la kamiltoniana. Desde luego, K es en todo tan hamiltoniana como H , pero la designación mencionada es ocasionalmente un sustituto adecuado de la expresión más larga «hamiltoniana transformada».

(donde está implícita la suma extendida al índice repetido i). Desde luego, las coordenadas canónicas antiguas satisfacen al mismo tiempo un principio análogo:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (p_i \dot{q}_i - H(q, p, t)) dt = 0. \quad (9.7)$$

La validez simultánea de las ecuaciones (9-6) y (9-7) no significa, desde luego, que sean iguales los integrandos de ambas expresiones. Como la forma general del principio de Hamilton modificado tiene variación nula en los puntos extremos, los dos enunciados se satisfarán si los integrandos están relacionados en la forma

$$\lambda(p_i \dot{q}_i - H) = P_i \dot{Q}_i - K + \frac{dF}{dt}. \quad (9.8)$$

Aquí, F es una función cualquiera de las coordenadas del espacio fásico con segundas derivadas continuas y λ es una constante independiente de las coordenadas canónicas y del tiempo. La constante multiplicativa λ está relacionada con un tipo particularmente sencillo de transformación de coordenadas canónicas conocido por el nombre de *transformación de escala*. Supongamos que cambiamos el tamaño de las unidades utilizadas para medir las coordenadas y las cantidades de movimiento de manera que las transformemos en realidad en un sistema (Q', P') definido por

$$Q'_i = \mu q_i, \quad P'_i = \nu p_i. \quad (9.9)$$

Entonces, queda claro que las ecuaciones de Hamilton de la forma (9-5) serán satisfechas por una hamiltoniana transformada $K'(Q', P') = \mu\nu H(q, p)$. Los integrandos de los correspondientes principios de Hamilton modificados estarán, evidentemente, relacionados en la forma

$$\mu\nu(p_i \dot{q}_i - H) = P'_i \dot{Q}'_i - K'. \quad (9-10)$$

que es la de la ecuación (9-8) siendo $\lambda = \mu\nu$. Con auxilio de una transformación de escala adecuada podremos siempre concentrar nuestra atención en transformaciones de coordenadas canónicas para las cuales $\lambda = 1$. Así, si tenemos una transformación de coordenadas canónicas $(q, p) \rightarrow (Q', P')$ para una $\lambda \neq 1$, siempre podremos encontrar un sistema intermedio de coordenadas canónicas (Q, P) relacionadas con (Q', P') mediante una transformación de escala sencilla de la forma (9-9) tal que $\mu\nu$ tenga también el mismo valor λ . La transformación entre los dos sistemas de coordenadas canónicas (q, p) y (Q, P) satisfará también las ecuaciones (9-8), pero ahora, con $\lambda = 1$:

$$p_i \dot{q}_i - H = P_i \dot{Q}_i - K + \frac{dF}{dt}. \quad (9.11)$$

Como la transformación de escala es básicamente trivial, tal como la han caracterizado Landau y Lifshitz,* las transformaciones consecuentes a examinar serán aquellas para las cuales se cumpla la ecuación (9-11).

Toda transformación de coordenadas canónicas para la cual $\lambda \neq 1$ recibe el nombre de *transformación canónica extensa*. Cuando $\lambda = 1$ y sea válida la ecuación (9-11), hablaremos simplemente de *transformación canónica*. La conclusión del párrafo anterior puede entonces enunciarse diciendo que toda transformación canónica extensa puede estar constituida por una transformación canónica seguida de una transformación de escala. A menos que se estipule otra cosa, todas las consideraciones futuras acerca de transformaciones entre coordenadas canónicas sólo se referirán a transformaciones canónicas. También conviene dar un nombre específico a las transformaciones canónicas para las cuales las ecuaciones (9-4) de transformación no contengan explícitamente el tiempo; las llamaremos *transformaciones canónicas restringidas*. †

El último término del segundo miembro de la ecuación (9-11) contribuye a la variación de la integral de acción sólo en los puntos extremos y por tanto se anulará si F es función de (q, p, t) , de (Q, P, t) o de cualquier mezcla de las coordenadas del espacio fásico ya que tienen variación nula en los puntos extremos. Además, mediante las ecuaciones (9-4) de transformación y de sus inversas, F puede expresarse en parte en función de las variables antiguas y en parte de las nuevas. En verdad, F es útil para especificar la forma exacta de la transformación canónica tan sólo cuando la mitad de las variables (además del tiempo) pertenecen al sistema antiguo y la mitad al nuevo. Hace entonces las veces de puente entre los dos sistemas de variables canónicas y se denomina *función generatriz* de la transformación. Para mostrar cómo especifica la función generatriz las ecuaciones de transformación, supongamos que se dé F en función de las coordenadas generalizadas antiguas y nuevas:

$$F = F_1(q, Q, t). \quad (9-12)$$

* Véase Landau y Lifshitz, *Mecánica*, Reverté, 1970, p. 173. La transformación de escala que definimos aquí está relacionada, pero no coincide, con la transformación de escala contenida en lo que se llama a veces *simetría de dilatación*. En ella la escala de tiempo se transforma también y la atención se centra en una clase particular de hamiltonianas con la misma dependencia funcional de las coordenadas canónicas nuevas y antiguas. Véase ejercicio 2.

† La mayoría de los autores actuales, pero no todos, utilizan el término transformación canónica de maneras equivalentes a la definición que damos aquí. El resto de la terminología no está normalizado. No existe ninguna práctica uniforme en la literatura y no parece que vaya a disminuir por ahora la confusión. La terminología anterior la ofrecemos por ser adecuada para las necesidades de la Física. En gran parte de la bibliografía de Física se utiliza la expresión *transformación de contacto* como sinónimo de transformación canónica, aun cuando se introdujo en Matemáticas en otro sentido. Algunos autores usan transformación de contacto cuando hay también una transformación de la coordenada tiempo. Según veremos, esto equivale a una transformación canónica restringida en un espacio fásico ampliado en el cual el tiempo es una de las coordenadas canónicas, formulación que es evidente que resulta especialmente apropiada para la teoría de la Relatividad restringida. Una descripción de transformaciones de contacto en el sentido que dan los matemáticos se encuentra en C. Carathéodory, *Calculus of Variations* Parte 1, 1965, Capítulo 7; y H. Rund, *Hamiltonian-Jacobi Theory in the Calculus of Variations*, 1966, pp. 84-85.

La ecuación (9-11) toma entonces la forma

$$\begin{aligned} p_i \dot{q}_i - H &= P_i \dot{Q}_i - K + \frac{dF_1}{dt}, \\ &= P_i \dot{Q}_i - K + \frac{\partial F_1}{\partial t} + \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F_1}{\partial Q_i} \dot{Q}_i. \end{aligned} \quad (9-13)$$

Como las coordenadas antiguas y nuevas, q_i y Q_i , son independientes por separado, las ecuaciones (9-13) se cumplirán idénticamente tan sólo si se anulan los coeficientes de las \dot{q}_i y de las \dot{Q}_i :

$$p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i}, \quad (9-14a)$$

$$P_i = - \frac{\partial F_1}{\partial Q_i}, \quad (9-14b)$$

quedando finalmente

$$K = H + \frac{\partial F_1}{\partial t}. \quad (9-14c)$$

Las ecuaciones (9-14a) constituyen n relaciones que definen las p_i en función de q_j , Q_j y t . Suponiendo que se puedan invertir, podríamos despejar las n Q_i en función de q_j , p_j y t , dando así la primera mitad de las ecuaciones de transformación (9-4). Una vez establecidas las relaciones entre Q_i y las variables canónicas antiguas (q , p), se pueden sustituir en las ecuaciones (9-14b) con lo que darán las n P_i en función de q_j , p_j y t , es decir, la segunda mitad de las ecuaciones de transformación (9-4). Para completar la historia, la ecuación (9-14c) proporciona la relación existente entre la nueva hamiltoniana K y la antigua H . Hay que tener cuidado y leer adecuadamente la ecuación (9-14c). Primero se expresan las q y p de H en función de Q y P mediante las inversas de las ecuaciones (9-4). Luego se expresan las q_i de $\partial F_1 / \partial t$ en función de Q , P de manera análoga y se suman las dos funciones para dar $K(Q, P, t)$.

El método descrito muestra cómo, partiendo de una función generatriz F_1 dada, pueden obtenerse las ecuaciones de la transformación canónica. Corrientemente, se puede invertir el proceso: dadas las ecuaciones de transformación (9-4) se puede deducir una función generatriz apropiada F_1 . Se invierten primero las ecuaciones (9-4) para expresar p_i y P_i en función de q , Q y t . Las ecuaciones (9-14a, b) constituyen entonces un sistema acoplado de ecuaciones en derivadas parciales que se puede integrar, en principio, para hallar F_1 si la transformación es verdaderamente canónica. F_1 queda definida siempre salvo una función arbitraria de t aditiva (que no afecta a las ecuaciones de

transformación) y podrán a veces haber otras ambigüedades.

Sucede a veces que no es adecuado describir la transformación canónica mediante una función generatriz del tipo $F_1(q, Q, t)$. Por ejemplo, la transformación puede ser tal que no se pueda escribir las p_i en función de q, Q y t sino en función de q, P y t . En tal caso, buscaríamos una función generatriz que sea función de las coordenadas antiguas q y de las cantidades de movimiento nuevas P . Evidentemente, en tal caso deberemos sustituir la ecuación (9-13) por una relación equivalente que contenga las \dot{P}_i en vez de las \dot{Q}_i . Podemos lograr esto escribiendo la F de la ecuación (9-11) en la forma

$$F = F_2(q, P, t) - Q_i P_i. \quad (9-15)$$

Sustituyendo esta F en la ecuación (9-11) llegamos a

$$p_i \dot{q}_i - H = -\dot{Q}_i P_i - K + \frac{d}{dt} F_2(q, P, t). \quad (9-16)$$

De nuevo, desarrollaremos la derivada total de F_2 y reagruparemos los coeficientes de \dot{q}_i y P_i con lo que llegaremos a las ecuaciones

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}, \quad (9-17a)$$

$$Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i}, \quad (9-17b)$$

con

$$K = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}. \quad (9-17c)$$

Como antes, de las ecuaciones (9-17a) habremos de obtener P_i en función de q_j, p_j y t , para corresponder a la segunda mitad de las ecuaciones de transformación (9-4). La otra mitad de las ecuaciones de transformación nos la darán las ecuaciones (9-17b).

Los métodos correspondientes para los dos restantes tipos generales de funciones generatrices resultan ahora evidentes. Una función generatriz F_3 de las antiguas cantidades de movimiento p_i , las nuevas coordenadas Q_i y el tiempo t se define haciendo

$$F = q_i p_i + F_3(p, Q, t), \quad (9-18)$$

en función de la cual, la ecuación (9-11) queda en la forma

$$-q_i \dot{p}_i - H = P_i \dot{Q}_i - K + \frac{d}{dt} F_3(p, Q, t). \quad (9-19)$$

El mismo método de igualación de coeficientes conduce a

$$q_i = -\frac{\partial F_3}{\partial p_i}, \quad P_i = -\frac{\partial F_3}{\partial Q_i}, \quad (9-20a)$$

y

$$K = H + \frac{\partial F_3}{\partial t}, \quad (9-20b)$$

derivándose las ecuaciones de transformación de las $2n$ ecuaciones (9-20a). Si la función generatriz fuese de la forma $F_4(p, P, t)$, estaría relacionada con F por medio de

$$F = q_i p_i - Q_i P_i + F_4(p, P, t), \quad (9-21)$$

con lo que la ecuación (9-11) tomaría la forma

$$-q_i \dot{p}_i - H = -Q_i \dot{P}_i - K + \frac{d}{dt} F_4(p, P, t). \quad (9-22)$$

Las ecuaciones de transformación se deducen entonces de las relaciones

$$q_i = -\frac{\partial F_4}{\partial p_i}, \quad Q_i = \frac{\partial F_4}{\partial P_i}, \quad (9-23a)$$

y de nuevo

$$K = H + \frac{\partial F_4}{\partial t}. \quad (9-23b)$$

Nos tiente contemplar los cuatro tipos generales de funciones generatrices como si estuvieran relacionadas entre sí mediante transformaciones de Legendre. Por ejemplo, la transición de F_1 a F_2 es equivalente a pasar de las variables q, Q a las q, P con la relación

$$-P_i = \frac{\partial F_1}{\partial Q_i}.$$

Esta es precisamente la forma requerida para una transformación de Legendre de las variables de base, tal como se describió en § 8-1, y en analogía con la ecuación (8-5) haríamos

$$F_2(q, P, t) = F_1(q, Q, t) + P_i Q_i, \quad (9-24)$$

que es equivalente a la ecuación (9-15) combinada con la ecuación (9-12). Las demás ecuaciones de definición de las funciones generatrices se pueden contemplar de manera análoga, en combinación con la ecuación (9-12) como transformaciones de Legendre a partir de F_1 , describiendo la ecuación (9-21) una transformación de Legendre doble. El único inconveniente de este esquema es que nos podría llevar a creer que para toda transformación canónica dada podríamos siempre encontrar funciones generatrices de los cuatro tipos por medio de estas transformaciones de Legendre. Ello no es siempre posible. Hay transformaciones que no son adecuadas para la descripción en función de ciertas formas de función generatriz, según se ha hecho notar antes y según se ilustrará en el apartado siguiente con ejemplos concretos. Si intentamos aplicar el proceso de transformación de Legendre, nos vemos conducidos a funciones generatrices idénticamente nulas o indeterminadas. Por esta razón hemos preferido definir cada tipo de función generatriz respecto a F , que es una función no especificada de $2n$ coordenadas y cantidades de movimiento indeterminadas.

Por último, debemos resaltar que una función generatriz adecuada no tiene que tener una forma que se ajuste a uno de los cuatro tipos generales para *todos* los grados de libertad del sistema. Es posible y en algunas transformaciones canónicas necesario, utilizar una función generatriz que sea una mezcla de los cuatro tipos. Como ejemplo sencillo, puede convenir que una transformación canónica particular con dos grados de libertad se defina mediante una función generatriz de la forma

$$F'(q_1, p_2, P_1, Q_2, t).$$

Esta función generatriz estaría relacionada con la F de la ecuación (9-11) por la ecuación

$$F = F'(q_1, p_2, P_1, Q_2, t) - Q_1 P_1 + q_2 p_2,$$

y las ecuaciones de transformación se obtendrían a partir de las relaciones

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{\partial F'}{\partial q_1}, & Q_1 &= \frac{\partial F'}{\partial P_1}, \\ q_2 &= -\frac{\partial F'}{\partial p_1}, & P_2 &= -\frac{\partial F'}{\partial Q_2}, \end{aligned}$$

con

$$K = H + \frac{\partial F'}{\partial t}.$$

En el apartado siguiente y en los ejercicios se dan ejemplos concretos.

9-2 EJEMPLOS DE TRANSFORMACIONES CANÓNICAS

La naturaleza de las transformaciones canónicas y el papel que desempeña la función generatriz se pueden ilustrar mediante algunos ejemplos sencillos pero importantes. Consideremos primeramente una función generatriz del segundo tipo cuya forma particular sea

$$F_2 = q_i P_i. \quad (9-25)$$

Según las ecuaciones (9-17), las ecuaciones de transformación son

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} = P_i,$$

$$Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} = q_i,$$

$$K = H.$$

Las coordenadas nuevas y antiguas son las mismas: por tanto, F_2 genera simplemente la *transformación identidad*.

Un tipo más general de transformación lo describe la función generatriz

$$F_2 = f_i(q_1, \dots, q_n; t) P_i, \quad (9-26)$$

donde las f_i pueden ser cualquier sistema conveniente de funciones independientes. Según las ecuaciones (9-17b), las nuevas coordenadas Q_i vienen dadas por

$$Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} = f_i(q, t). \quad (9-27)$$

Así, con esta función generatriz las nuevas coordenadas sólo dependen de las antiguas y

del tiempo, no conteniendo las cantidades de movimiento antiguas. Una tal transformación será, pues, ejemplo de la clase de transformaciones puntuales definida por las ecuaciones (9-3). Para definir una transformación puntual, las funciones f_i deben ser independientes e invertibles, por lo que las q_j se podrán expresar en función de las Q_i . Como, por otra parte, las f_i son totalmente arbitrarias, podemos concluir que *todas las transformaciones puntuales son canónicas*. La ecuación (9-17c) da la nueva hamiltoniana en función de la antigua y de las derivadas respecto al tiempo de las funciones f_i .

Deberíamos hacer notar que la F_2 dada por la ecuación (9-26) no es la única función generatriz que conduce a la transformación puntual especificada por las f_i . Evidentemente, la misma transformación puntual está implícita en la forma más general

$$F_2 = f_i(q_1, \dots, q_n; t)P_i + g(q_1, \dots, q_n, t). \quad (9-28)$$

donde $g(q, t)$ es una función (diferenciable) cualquiera de las coordenadas antiguas y del tiempo. Las ecuaciones de transformación (9-27) para las coordenadas, se mantienen inalteradas ante esta función generatriz. Pero las ecuaciones de transformación para las cantidades de movimiento son diferentes en una y otra forma. De las ecuaciones (9-17a) tenemos

$$p_j = \frac{\hat{\partial} F_2}{\hat{\partial} q_j} = \frac{\hat{\partial} f_i}{\hat{\partial} q_j} P_i + \frac{\hat{\partial} g}{\hat{\partial} q_j}, \quad (9-29)$$

utilizando la forma F_2 dada por la ecuación (9-28). Estas ecuaciones se pueden invertir para dar P en función de (q, p) con gran facilidad, escribiéndolas en notación matricial:

$$\mathbf{p} = \mathbf{P} \frac{\hat{\partial} \mathbf{f}}{\hat{\partial} \mathbf{q}} + \frac{\hat{\partial} g}{\hat{\partial} \mathbf{q}}. \quad (9-29')$$

Aquí, \mathbf{p} , \mathbf{P} y $\frac{\partial g}{\partial \mathbf{q}}$ son matrices columna (o fila) de n elementos y $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{q}}$ es una matriz cuadrada cuyo elemento ij -ésimo es $\frac{\partial f_i}{\partial q_j}$. Se deduce entonces que \mathbf{P} es una función lineal de \mathbf{p} dada por

$$\mathbf{P} = \left(\mathbf{p} - \frac{\hat{\partial} g}{\hat{\partial} \mathbf{q}} \right) \left(\frac{\hat{\partial} \mathbf{f}}{\hat{\partial} \mathbf{q}} \right)^{-1} \quad (9-30)$$

Así, las ecuaciones de transformación para Q son independientes de g y sólo dependen de las $f_i(q, t)$, pero las ecuaciones de transformación para P sí dependen de la forma de g y son, en general, función tanto de las coordenadas como de las cantidades de movimiento antiguas. La función generatriz dada por la ecuación (9-26) sólo es un caso particular de

la ecuación (9-28) en el cual $g = 0$, con ecuaciones de transformación para P correspondientemente particularizadas.

La función generatriz del primer tipo $F_1(q, Q, t)$ de la forma

$$F_1 = q_k Q_k. \quad (9-31)$$

proporciona una transformación instructiva. Las ecuaciones de transformación correspondientes, según (9-14a, b) son

$$p \quad (9-32a)$$

$$P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i} = -q_i. \quad (9-32b)$$

En realidad, la transformación intercambia cantidades de movimiento y coordenadas; las nuevas coordenadas son las antiguas cantidades de movimiento y las nuevas cantidades de movimiento son las antiguas coordenadas. Este ejemplo sencillo pone de relieve el status independiente de las coordenadas y cantidades de movimiento generalizadas. Necesitamos de ambas para describir el movimiento del sistema en la formulación de Hamilton y la distinción entre ellas es, prácticamente, cuestión de nomenclatura. Podemos permutar los nombres sin mas que cambiar el signo. Ya no tenemos en la teoría ningún remanente retardador del concepto de q_i como coordenada espacial y p_i como producto de la masa por la velocidad. Incidentalmente, en las ecuaciones de Hamilton

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i},$$

podemos ver directamente que esta transformación de permuta es canónica. Si sustituimos p_i por q_i , las ecuaciones siguen estando en forma canónica solamente al sustituir q_i por $-p_i$.

También es fácil ver que la transformación de permuta no puede deducirse de una función generatriz del tipo $F_2(q, P, t)$. Con una tal función generatriz, el sistema de ecuaciones en derivadas parciales (9-17a),

$$p_i = \frac{\partial F_2(q, P, t)}{\partial q_i},$$

debería tener las p_i en función de q, P y t . Pero en la transformación de permuta, p_i no es función de P en absoluto; sólo depende de las nuevas coordenadas Q . Por tanto, F_2 no resulta función generatriz adecuada para la transformación de permuta.

Mediante un argumento análogo, resulta evidente que no se puede utilizar una función

F_1 para generar la transformación identidad. En tal caso, las ecuaciones (9-14a),

$$p_i = \frac{\hat{c}F_1(q, Q, t)}{\hat{c}q_i},$$

definirían p_i en función de q , Q y t ; mientras que en la transformación identidad p_i sólo depende de P , siendo en realidad igual a P_i . No podemos obviar esta dificultad definiendo una función F_1 mediante una transformación de Legendre (cfr. ec. 9-24):

$$F_1(q, Q, t) = F_2(q, P, t) - P_i Q_i.$$

Si sustituimos F_2 por la expresión (9-25) escribiendo Q en vez de q , tendríamos el resultado siguiente:

$$F_1(q, Q, t) = Q_i P_i - P_i Q_i \equiv 0,$$

que no sirve para función generadora. Se obtendría otro resultado negativo si se intentara construir una función F_2 para generar la transformación de permuta.*

Una transformación que deje alguna de las parejas (q, p) invariadas y permute las demás (con un cambio de signo) será, evidentemente, una transformación canónica. Pero, según las consideraciones anteriores, no podrá deducirse de una función generatriz de una de las cuatro formas «puras» antes estudiadas; la función generatriz debe tener forma «mixta». Así, en un sistema de dos grados de libertad, la transformación

$$\begin{aligned} Q_1 &= q_1, & P_1 &= p_1, \\ Q_2 &= p_2, & P_2 &= -q_2 \end{aligned}$$

estaría generada por la función

$$F = q_1 P_1 + q_2 Q_2,$$

que es una mezcla de los tipos F_1 y F_2 .

Como ejemplo final consideremos una transformación canónica que pueda utilizarse para resolver el problema del oscilador armónico simple en una dimensión. Si es k la constante de rigidez, la hamiltoniana para este problema en función de las coordenadas

* Sin embargo, es fácil demostrar que una función F_3 puede generar la transformación identidad y que la transformación permuta se puede deducir de una función F_4 .

usuales es

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{kq^2}{2}, \quad (9-33)$$

Designando el cociente k/m por ω^2 , podremos escribir H en la forma

$$H = \frac{1}{2m}(p^2 + m^2\omega^2q^2). \quad (9-34)$$

Esta hamiltoniana expresada en forma de suma de dos cuadrados, sugiere una transformación en la cual H sea cíclica en la nueva coordenada. Si pudiéramos hallar una transformación canónica de la forma

$$p = f(P) \cos Q, \quad (9-35a)$$

$$q = \frac{f(P)}{m\omega} \operatorname{sen} Q, \quad (9-35b)$$

la hamiltoniana en función de Q y P sería, simplemente,

$$K = H = \frac{f^2(P)}{2m}(\cos^2 Q + \operatorname{sen}^2 Q) = \frac{f^2(P)}{2m},$$

con lo que Q resulta ser cíclica. El problema estriba en hallar la forma de la función $f(P)$ aún no especificada, tal que la transformación sea canónica. El cociente de las dos ecuaciones (9-35) da la relación

$$p = m\omega q \cot Q, \quad (9-36)$$

independiente de $f(P)$. La ecuación (9-36) tiene la forma de la ecuación (9-14a) para el tipo F_1 de función generatriz,

$$p = \frac{\partial F_1(q, Q)}{\partial q},$$

y la solución más sencilla de F_1 correspondiente a la ecuación (9-36) es, evidentemente,

$$F_1 = \frac{m\omega q^2}{2} \cot Q. \quad (9-37)$$

La ecuación (9-14b) proporciona entonces la otra mitad de las ecuaciones de transformación

$$P = -\frac{\hat{c}F_1}{\hat{c}Q} = \frac{m\omega q^2}{2\text{sen}^2 Q}. \quad (9-38)$$

Despejando q tenemos

$$q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \text{sen} Q, \quad (9-39)$$

y comparándola con la ecuación (9-35a) vemos que la única forma que puede tener $f(P)$ para que lleve a una transformación canónica es

$$f(P) = \sqrt{2m\omega P}. \quad (9-40)$$

Se deduce entonces que la hamiltoniana con variables transformadas es

$$H = \omega P. \quad (9-41)$$

Como la hamiltoniana es cíclica en Q , la cantidad de movimiento conjugada P será constante. En la ecuación (9-41) vemos que P es en realidad igual a la energía constante dividida por ω :

$$P = \frac{E}{\omega}.$$

La ecuación de movimiento para Q se reduce a la forma sencilla

$$\dot{Q} = \frac{\hat{c}H}{\hat{c}P} = \omega,$$

que tiene la solución inmediata

$$Q = \omega t + \alpha, \quad (9-42)$$

donde α es una constante de integración fijada por las condiciones iniciales. Según la

ecuación (9-39), la solución para q es

$$q = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \text{sen}(\omega t + \alpha), \quad (9-43)$$

que es la solución corriente para el oscilador armónico.*

Podría parecer que la utilización de transformaciones de contacto para resolver el problema del oscilador armónico es algo así como partir cacahuets con una mandarina. Sin embargo, tenemos aquí un ejemplo sencillo de cómo puede reducirse la hamiltoniana a una forma cíclica en todas las coordenadas por medio de transformaciones canónicas. Reservamos para el capítulo siguiente el estudio de esquemas generales para la solución de problemas mecánicos mediante esta técnica. Por ahora, seguiremos examinando las propiedades formales de las transformaciones canónicas.

9-3 MÉTODO SIMPLÉCTICO PARA TRANSFORMACIONES CANÓNICAS

Otro método de tratamiento de transformaciones canónicas, aparentemente sin relación con el formalismo generador, se puede deducir atendiendo a la formulación simpléctica o matricial de las ecuaciones de Hamilton. Como introducción a dicho método consideremos una transformación canónica restringida, es decir, en la cual no aparezca el tiempo en las ecuaciones de transformación:

$$\begin{aligned} Q_i &= Q_i(q, p), \\ P_i &= P_i(q, p). \end{aligned} \quad (9-44)$$

Sabemos que ante tal transformación no cambia la función de Hamilton. La derivada de Q_i respecto al tiempo, basándonos en las ecuaciones (9-44) será

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial Q_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial Q_i}{\partial p_j} \dot{p}_j = \frac{\partial Q_i}{\partial q_j} \frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial Q_i}{\partial p_j} \frac{\partial H}{\partial q_j}. \quad (9-45)$$

* Puede argüirse que F_1 no especifica sin ambigüedad la transformación canónica porque al despejar q de la ecuación (9-38) podríamos haber tomado la raíz cuadrada negativa en vez de la positiva como se ha hecho (implícitamente) en la ecuación (9-39). Sin embargo, las dos ecuaciones canónicas que así se deducen de F_1 sólo difieren trivialmente; alterando en π el ángulo α pasamos de una transformación a la otra. A pesar de todo, debe tenerse presente que las transformaciones deducidas de una función generatriz pueden, en ocasiones, tener dos valores o incluso presentar singularidades locales.

Por otra parte, la inversión de las ecuaciones (9-44),

$$\begin{aligned} q_j &= q_j(Q, P), \\ p_j &= p_j(Q, P), \end{aligned} \tag{9 46}$$

nos permite considerar $H(q, p, t)$ como función de Q y P y formar la derivada parcial

$$\frac{\partial H}{\partial P_i} = \frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial P_i} + \frac{\partial H}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial P_i}. \tag{9 47}$$

Comparando las ecuaciones (9-45) y (9-47) podemos sacar la conclusión de que

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial H}{\partial P_i},$$

es decir, la transformación será canónica solamente si

$$\left(\frac{\partial Q_i}{\partial q_j} \right)_{q,p} = \left(\frac{\partial p_j}{\partial P_i} \right)_{Q,P}, \quad \left(\frac{\partial Q_i}{\partial p_j} \right)_{q,p} = - \left(\frac{\partial q_j}{\partial P_i} \right)_{Q,P}. \tag{9 48a}$$

Los subíndices de las derivadas sirven para recordarnos que en el primer miembro de estas ecuaciones se considera que Q_i es función de (q, p) (cfr. ec. 9-44), mientras que en los segundos miembros las derivadas son de q_j y p_j funciones de (Q, P) (cfr. ec. 9-46). Una comparación análoga de \dot{P}_i con la derivada parcial de H respecto a Q_i conduce a las condiciones

$$\left(\frac{\partial P_i}{\partial q_j} \right)_{q,p} = - \left(\frac{\partial p_j}{\partial Q_i} \right)_{Q,P}, \quad \left(\frac{\partial P_i}{\partial p_j} \right)_{q,p} = \left(\frac{\partial q_j}{\partial Q_i} \right)_{Q,P}. \tag{9 48b}$$

Los sistemas de ecuaciones (9-48) juntos reciben a veces el nombre de «condiciones directas» para una transformación canónica (restringida).

La manipulación algebraica que conduce a las ecuaciones (9-48) se puede efectuar de manera compacta y elegante si utilizamos la notación simpléctica para la formulación de Hamilton introducida al final de §8-1. Si es η una matriz columna con los $2n$ elementos q_i, p_i , recordemos que las ecuaciones de Hamilton se pueden escribir en la forma

$$\dot{\eta} = \mathbf{J} \frac{\partial H}{\partial \eta}. \tag{8 31}$$

donde \mathbf{J} es la matriz antisimétrica definida en la ecuación (8-30). Análogamente, el nuevo sistema de coordenadas Q_i, P_i define una matriz columna ζ de $2n$ elementos y en el caso de una transformación canónica restringida las ecuaciones de transformación (9-44) adoptan la forma

$$\zeta = \zeta(\eta). \quad (9\ 49)$$

Análogamente a la ecuación (9-45) podemos buscar las ecuaciones de movimiento correspondientes a las nuevas variables atendiendo a la derivada respecto al tiempo de un elemento genérico de ζ :

$$\dot{\zeta}_i = \frac{\tilde{\zeta}_i}{\tilde{\eta}_j} \dot{\eta}_j, \quad i, j = 1, \dots, 2n.$$

En notación matricial, esta derivada respecto al tiempo podrá escribirse

$$\dot{\zeta} = \mathbf{M}\dot{\eta}. \quad (9\ 50)$$

donde \mathbf{M} es la matriz jacobiana de la transformación, cuyos elementos son los siguientes:

$$M_{ij} = \frac{\tilde{\zeta}_i}{\tilde{\eta}_j}. \quad (9\ 51)$$

Utilizando las ecuaciones de movimiento para η , la ecuación (9-50) queda en la forma

$$\dot{\zeta} = \mathbf{MJ} \frac{\partial H}{\partial \eta}. \quad (9\ 52)$$

Ahora bien, mediante la transformación inversa podemos considerar H como función de ζ y calcular la derivada respecto a η_i en la forma

$$\frac{\partial H}{\partial \eta_i} = \frac{\partial H}{\tilde{\zeta}_j} \frac{\tilde{\zeta}_j}{\tilde{\eta}_i},$$

o, en notación matricial*

$$\frac{\partial H}{\partial \eta} = \tilde{\mathbf{M}} \frac{\partial H}{\partial \zeta}. \quad (9\ 53)$$

* Los que hayan leído el §7-3 se habrán dado cuenta de que la ecuación (9-50) dice que η se transforma contravariantemente ante la transformación; y la ecuación (9-53) indica que la derivada parcial de H respecto a los elementos de η se transforma covariantemente (cfr. ec. 7-48' y 7-49').

La combinación de las ecuaciones (9-52) y (9-53) lleva a la forma de las ecuaciones de movimiento para un sistema cualquiera de variables ζ que se transforman, independientemente del tiempo, a partir del sistema canónico η :

$$\dot{\zeta} = \mathbf{MJ}\tilde{\mathbf{M}}\frac{\partial H}{\partial \zeta}. \quad (9-54)$$

Tenemos la ventaja de saber a partir del formalismo generador que en el caso de una transformación canónica *restringida*, la hamiltoniana antigua expresada en función de las nuevas variables sirve de hamiltoniana nueva:

$$\dot{\zeta} = \mathbf{J}\frac{\partial H}{\partial \zeta}.$$

La transformación que representa la ecuación (9-49) será, pues, canónica si \mathbf{M} cumple la condición

$$\mathbf{MJ}\tilde{\mathbf{M}} = \mathbf{J}. \quad (9-55)$$

Que la ecuación (9-55) es también condición necesaria para una transformación canónica restringida se demuestra directamente con facilidad invirtiendo el orden de los pasos de la demostración. Notemos que en el caso de una transformación canónica extensa independiente del tiempo, en la cual $K = \lambda H$, la condición de la ecuación (9-55) puede sustituirse por

$$\mathbf{MJ}\tilde{\mathbf{M}} = \lambda \mathbf{J}. \quad (9-56)$$

La ecuación (9-55) se puede expresar de diversas formas. Multiplicando por la derecha por la matriz inversa de $\tilde{\mathbf{M}}$ tenemos

$$\mathbf{MJ} = \tilde{\mathbf{M}}^{-1}, \quad (9-57)$$

(ya que la traspuesta de la inversa es la inversa de la traspuesta). Los elementos de la ecuación matricial (9-57) resultan ser los que dan las ecuaciones (9-48a) y (9-48b). Si multiplicamos por la izquierda la ecuación (9-57) por \mathbf{J} y por la derecha por $-\mathbf{J}$, en virtud de la ecuación (8-32) tendremos

$$\mathbf{JM} = \tilde{\mathbf{M}}^{-1}\mathbf{J},$$

o sea

$$\tilde{\mathbf{M}}\mathbf{JM} = \mathbf{J}. \quad (9-58)$$

La ecuación (9-55), o su versión equivalente, la (9-58), recibe el nombre de *condición simpléctica* para una transformación canónica y la matriz \mathbf{M} que cumpla dicha condición se dice que es una *matriz simpléctica*. (Siguiendo la interpretación de la ecuación 7-43 podemos considerar, a partir de la ecuación 9-58, que \mathbf{M} es una matriz ortogonal en un espacio fásico en el cual \mathbf{J} sea el tensor métrico, si bien esto no resulta ser especialmente fructífero.)

En el caso de una transformación canónica que contenga el tiempo como parámetro y no es válida la sencilla deducción dada para la condición simpléctica. A pesar de todo, la condición simpléctica sigue siendo condición necesaria y suficiente para una transformación canónica aun cuando contenga al tiempo. Se puede demostrar la validez general de la condición simpléctica para todas las transformaciones canónicas mediante procedimientos directos, si bien farragosos, parecidos a los utilizados en el caso de transformaciones canónicas restringidas.* En vez de ello, adoptaremos un nuevo plan de acción que aproveche la forma paramétrica de las transformaciones canónicas que contienen el tiempo. Una transformación canónica de la forma

$$\zeta = \zeta(\eta, t) \quad (9-59)$$

evoluciona con continuidad en el transcurso del tiempo a partir de un cierto valor inicial t_0 . Es un caso monoparamétrico de la familia de transformaciones continuas que por primera vez estudió en forma sistemática el matemático Sophus Lie y como tal desempeña un papel sobresaliente en la teoría de transformaciones de la Mecánica clásica. Si la transformación

$$\eta \rightarrow \zeta(t) \quad (9-60a)$$

es canónica, también lo será evidentemente la transformación

$$\eta \rightarrow \zeta(t_0). \quad (9-60b)$$

De la definición de transformación canónica se deduce entonces que también es canónica la transformación caracterizada por

$$\zeta(t_0) \rightarrow \zeta(t) \quad (9-60c)$$

Como la t_0 de la ecuación (9-60b) es una constante fija, esta transformación canónica cumple la condición simpléctica. Ahora bien, si la transformación de la ecuación (9-60c) cumple la condición simpléctica, es fácil demostrar (cfr. Ejercicio 13) que también la cumple la transformación general dada por la ecuación (9-60a).

Para poner de manifiesto que la condición simpléctica es verdaderamente válida en el caso de transformaciones canónicas del tipo de la ecuación (9-60c), introduciremos el

* Este procedimiento puede verse en L. A. Pars, *A Treatise on Analytical Dynamics*, 1965, pp. 514-515; y G. S. S. Ludford y D. W. Yantitell, *Am. J. Phys.* 36, 231 (1968).

concepto de *transformación canónica infinitesimal* (abreviadamente T. C. I.) que nos va a resultar muy útil. Al igual que en el caso de las rotaciones infinitesimales, dicha transformación es tal que las nuevas variables sólo difieren de las antiguas en infinitésimos. En los cálculos sólo conservaremos los infinitésimos de primer orden. Las ecuaciones de transformación podrán entonces escribirse en la forma

$$Q_i = q_i + \delta q_i, \tag{9 61a}$$

$$P_i = p_i + \delta p_i, \tag{9 61b}$$

o en forma matricial

$$\zeta = \eta + \delta\eta. \tag{9 61c}$$

(Aquí, δq_i y δp_i no representan desplazamientos virtuales sino, simplemente, cambios infinitesimales de las coordenadas y cantidades de movimiento.) Así pues, una transformación canónica infinitesimal sólo difiere infinitesimalmente de la transformación identidad vista en el apartado anterior. En el formalismo generador, una función generatriz adecuada para una T. C. I. sería por tanto

$$F_2 = q_i P_i + \epsilon G(q, P, t), \tag{9 62}$$

donde ϵ es un cierto parámetro infinitesimal de la transformación y G es una función (diferenciable) cualquiera de sus $2n + 1$ argumentos. Según la ecuación (9-14a), las ecuaciones de transformación para las cantidades de movimiento se encontrarán a partir de

$$p_j = \frac{\partial F_2}{\partial q_j} = P_j + \epsilon \frac{\partial G}{\partial q_j}$$

o sea

$$\delta p_j \equiv P_j - p_j = -\epsilon \frac{\partial G}{\partial q_j}. \tag{9 63a}$$

Análogamente, según la ecuación (9-14b) las ecuaciones de transformación para las Q_j están determinadas por las relaciones

$$Q_j = \frac{\partial F_2}{\partial p_j} = q_j + \epsilon \frac{\partial G}{\partial p_j}$$

Como el segundo término ya es lineal en ϵ y P sólo se diferencia de p en un infinitésimo, la aproximación de primer orden nos permite sustituir por p_j la P_j de la función derivada. Podemos entonces considerar que G es sólo función de q, p (y posiblemente t). Siguiendo

la costumbre, llamaremos a $G(q, p)$ *función generatriz de una transformación canónica infinitesimal*, aun cuando en rigor esta designación sólo pertenezca a F . La ecuación de transformación para Q_i podrá, pues, escribirse en la forma

$$\delta q_j = \epsilon \frac{\partial G}{\partial p_j} \quad (9-63b)$$

Las dos ecuaciones de transformación pueden combinarse en una ecuación matricial

$$\delta \eta = \epsilon \mathbf{J} \frac{\partial G}{\partial \eta} \quad (9-63c)$$

Ejemplo evidente de transformación canónica infinitesimal sería la transformación de la ecuación (9-60c) cuando t difiera de t_0 en un tiempo infinitesimal:

$$\zeta(t_0) \rightarrow \zeta(t_0 + dt), \quad (9-64)$$

siendo dt el parámetro infinitesimal ϵ . La evolución continua de la transformación $\zeta(\eta, t)$ a partir de $\zeta(\eta, t_0)$ significa que la transformación $\zeta(t_0) \rightarrow \zeta(t)$ puede construirse mediante una sucesión de las mencionadas T. C. I. por pasos iguales a dt . Bastará por tanto demostrar que la transformación infinitesimal (ec. 9-64) cumple la condición simpléctica. Ahora bien, a partir de las ecuaciones de transformación (9-63) podemos poner fácilmente de manifiesto que la matriz jacobiana de toda T. C. I. es una matriz simpléctica. Por definición, la matriz jacobiana para una transformación infinitesimal es

$$\mathbf{M} \equiv \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} = \mathbf{1} + \frac{\partial \delta \eta}{\partial \eta},$$

o según la ecuación (9-63c)

$$\mathbf{M} = \mathbf{1} + \epsilon \mathbf{J} \frac{\partial^2 G}{\partial \eta \partial \eta} \quad (9-65)$$

La segunda derivada de la ecuación (9-65) es una matriz cuadrada simétrica, cuyos elementos son

$$\left(\frac{\partial^2 G}{\partial \eta_i \partial \eta_j} \right)_{ij} = \frac{\partial^2 G}{\partial \eta_i \partial \eta_j}.$$

Por ser antisimétrica \mathbf{J} , la traspuesta de \mathbf{M} es

$$\tilde{\mathbf{M}} = \mathbf{1} - \epsilon \frac{\partial^2 G}{\partial \boldsymbol{\eta} \partial \boldsymbol{\eta}} \mathbf{J}. \quad (9.66)$$

La condición simpléctica entraña el valor del producto de matrices

$$\mathbf{M} \mathbf{J} \tilde{\mathbf{M}} = \left(\mathbf{1} + \epsilon \mathbf{J} \frac{\partial^2 G}{\partial \boldsymbol{\eta} \partial \boldsymbol{\eta}} \right) \mathbf{J} \left(\mathbf{1} - \epsilon \frac{\partial^2 G}{\partial \boldsymbol{\eta} \partial \boldsymbol{\eta}} \mathbf{J} \right).$$

Con la aproximación de primer orden, este producto es

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \mathbf{J} \tilde{\mathbf{M}} &= \mathbf{J} + \epsilon \mathbf{J} \frac{\partial^2 G}{\partial \boldsymbol{\eta} \partial \boldsymbol{\eta}} \mathbf{J} - \mathbf{J} \epsilon \frac{\partial^2 G}{\partial \boldsymbol{\eta} \partial \boldsymbol{\eta}} \mathbf{J} \\ &= \mathbf{J}. \end{aligned}$$

poniendo así de manifiesto que la condición simpléctica es válida para toda transformación canónica infinitesimal. De la prolija serie de razonamientos que hemos seguido se deduce, pues, que *toda* transformación canónica, contenga o no el tiempo como parámetro, cumple la condición simpléctica (ec. 9-55 o ec. 9-58).

En su mayor parte, el método simpléctico se ha desarrollado independientemente del método de la función generatriz, salvo en el tratamiento de las transformaciones canónicas infinitesimales. Desde luego, ambos métodos están relacionados. A título de ejemplo, más adelante esbozaremos una prueba de que la condición simpléctica implica la existencia de una función generatriz. Ahora bien, dicha relación tiene muy poca importancia. Ambos métodos son caminos válidos para el tratamiento de las transformaciones canónicas y ambos abarcan todas las propiedades de las transformaciones que necesitamos. Por ejemplo, puede utilizarse indistintamente el formalismo simpléctico o el generador para demostrar que las transformaciones canónicas tienen las cuatro propiedades que caracterizan un grupo (cfr. Ejercicio 13):

1. La transformación identidad es canónica.
2. Si una transformación es canónica, también lo es su inversa.
3. Dos transformaciones canónicas sucesivas (operación «producto») definen una transformación que también es canónica.
4. La operación producto es asociativa.

Por tanto, podemos utilizar libremente el formalismo generador o el simpléctico, como queramos, cosa que dependerá de cuál lleve al tratamiento más sencillo en el caso concreto que tratemos.

9-4 CORCHETES DE POISSON Y OTROS INVARIANTES CANÓNICOS

El corchete de Poisson de dos funciones u, v respecto a las variables canónicas (q, p) se define de la manera siguiente:

$$[u, v]_{q,p} = \frac{\partial u}{\partial q_i} \frac{\partial v}{\partial p_i} - \frac{\partial u}{\partial p_i} \frac{\partial v}{\partial q_i}. \quad (9-67)$$

En esta expresión bilineal tenemos una estructura simpléctica típica, como en las ecuaciones de Hamilton, donde q está acoplada a p y p a $-q$. El corchete de Poisson, pues, será fácil escribirlo en forma matricial:

$$[u, v]_{\eta} = \frac{\tilde{\partial} u}{\partial \eta} \mathbf{J} \frac{\partial v}{\partial \eta}. \quad (9-68)$$

En la primera matriz del segundo miembro se utiliza el signo de traspuesta para indicar explícitamente que en la multiplicación debemos tratar esta matriz como matriz fila. En la mayoría de ocasiones no será necesario este recordatorio y omitiremos el signo de traspuesta.

Supongamos que elegimos las funciones u, v de entre el conjunto de las propias variables canónicas (q, p) . Entonces se deduce trivialmente de la definición, bien sea la dada por la ecuación (9-67) o por la (9-68), que tales corchetes de Poisson tienen los valores

$$[q_j, q_k]_{q,p} = 0 = [p_j, p_k]_{q,p}, \quad (9-69)$$

y

$$[q_j, p_k]_{q,p} = \delta_{jk} = -[p_j, q_k]_{q,p}.$$

Las relaciones que dan las ecuaciones (9-69) las podemos resumir en una ecuación introduciendo un corchete de Poisson matriz cuadrada, $[\eta, \eta]$, cuyo elemento lm es $[\eta_l, \eta_m]$. Las ecuaciones (9-69) podrán entonces escribirse en la forma

$$[\eta, \eta]_{\eta} = \mathbf{J}. \quad (9-70)$$

Tomemos ahora para u, v los miembros de las variables transformadas (Q, P) , o sea ζ , definidos en función de (q, p) por las ecuaciones de transformación (9-59). El conjunto de todos los corchetes de Poisson que se pueden formar a partir de (Q, P) constituyen el corchete de Poisson matriz definido por

$$[\zeta, \zeta]_{\eta} = \frac{\tilde{\partial} \zeta}{\partial \eta} \mathbf{J} \frac{\partial \zeta}{\partial \eta}.$$

Pero nos damos cuenta de que las derivadas parciales definen la matriz jacobiana cuadrada de la transformación, por lo que la relación del corchete de Poisson es equivalente a

$$[\zeta, \zeta]_{\eta} = \tilde{\mathbf{M}}\mathbf{J}\mathbf{M}. \quad (9-71)$$

Si es canónica la transformación $\eta \rightarrow \zeta$, se cumple la condición simpléctica y la ecuación (9-71) se reduce a

$$[\zeta, \zeta]_{\eta} = \mathbf{J}, \quad (9-72)$$

y reciprocamente, si es válida la ecuación (9-72) la transformación es canónica.

A los corchetes de Poisson de las propias variables canónicas, tales como los dados por las ecuaciones (9-70) o (9-72), se les da el nombre de *corchetes de Poisson fundamentales*. Como de la ecuación (9-70) tenemos que

$$[\zeta, \zeta]_{\zeta} = \mathbf{J}, \quad (9-73)$$

la ecuación (9-72) establece que los corchetes de Poisson fundamentales de las variables ζ tendrán siempre el mismo valor al calcularlos respecto a *cualquier* sistema de coordenadas canónicas. Dicho de otro modo, *los corchetes de Poisson fundamentales son invariantes ante las transformaciones canónicas*. De la ecuación (9-71) hemos visto que la invarianza es condición necesaria y suficiente para que la matriz de transformación sea simpléctica. Así pues, la invarianza de los corchetes de Poisson fundamentales equivale en todos los aspectos a la condición simpléctica para una transformación canónica.

No va a costarnos mucho más demostrar que *todos* los corchetes de Poisson son invariantes ante las transformaciones canónicas. Consideremos el corchete de Poisson de dos funciones u, v respecto al sistema η de coordenadas (ec. 9-68). En analogía con la ecuación (9-53), la derivada parcial de v respecto a η puede expresarse mediante derivadas parciales respecto a ζ en la forma

$$\frac{\partial v}{\partial \eta} = \tilde{\mathbf{M}} \frac{\partial v}{\partial \zeta}$$

(es decir, la derivada parcial se transforma covariantemente). De manera análoga,

$$\frac{\tilde{\partial} u}{\tilde{\partial} \eta} = \widetilde{\mathbf{M}} \frac{\tilde{\partial} u}{\tilde{\partial} \zeta} = \frac{\tilde{\partial} u}{\tilde{\partial} \zeta} \mathbf{M}.$$

Luego, el corchete de Poisson de la ecuación (9-68) se podrá escribir

$$\begin{aligned} [u, v]_{\eta} &= \frac{\tilde{\partial} u}{\partial \eta} \mathbf{J} \frac{\partial v}{\partial \eta} \\ &= \frac{\tilde{\partial} u}{\partial \xi} \mathbf{M} \mathbf{J} \tilde{\mathbf{M}} \frac{\partial v}{\partial \xi}. \end{aligned}$$

Si es canónica la transformación, se cumplirá la condición simpléctica dada por la ecuación (9-55) y tendremos entonces

$$[u, v]_{\eta} = \frac{\tilde{\partial} u}{\partial \xi} \mathbf{J} \frac{\partial v}{\partial \xi} \equiv [u, v]_{\xi}. \quad (9-74)$$

Así pues, el corchete de Poisson tiene siempre el mismo valor cuando se calcule respecto a cualquier sistema canónico de variables —*todos los corchetes de Poisson son invariantes canónicos*. Hasta ahora, al escribir el símbolo de corchete de Poisson hemos cuidado indicar mediante un subíndice el sistema de variables en función del cual se definen los corchetes. Vemos ahora que mientras utilicemos tan sólo variables canónicas ello no es necesario y por tal razón suprimiremos, en general, el subíndice.*

El contraste de la transformación canónica es que ante ella son invariantes las ecuaciones de movimiento de Hamilton. Análogamente, la invarianza canónica de los corchetes de Poisson implica que las ecuaciones expresadas en función de corchetes de Poisson sean de forma invariante ante las transformaciones canónicas. Según veremos, podemos desarrollar una estructura de Mecánica clásica, paralela a la formulación de Hamilton, que se exprese solamente mediante corchetes de Poisson. Esta formulación, que tiene la misma forma en todas las coordenadas canónicas, resulta especialmente útil para efectuar la transición de la Mecánica clásica a la cuántica. Existe un «principio de correspondencia» sencillo que dice que se sustituye el corchete de Poisson por un conmutador de los operadores cuánticos definido adecuadamente.

Las propiedades algebraicas del corchete de Poisson son, por tanto, de considerable interés. Ya hemos utilizado las propiedades evidentes

$$[u, u] = 0 \quad (9-75a)$$

(antisimetría)

$$[u, v] = -[v, u]. \quad (9-75b)$$

* Notemos que en el caso de una transformación de escala, o de una transformación canónica extensa, en donde la condición simpléctica adopta la forma de la ecuación (9-56), los corchetes de Poisson *no* tendrán los mismos valores en todos los sistemas de coordenadas. Es esta una de las razones por las que se excluyen las transformaciones de escala de la clase de transformaciones canónicas de consideración útil.

Casi tan evidentes son las características

$$(linealidad) \quad [au + bv, w] = a[u, w] + b[v, w], \quad (9-75c)$$

donde a y b son constantes; y

$$[uv, w] = [u, w]v + u[v, w]. \quad (9-75d)$$

Hay otra propiedad que está lejos de ser evidente, pero que es muy importante para definir la naturaleza del corchete de Poisson. Suele darse en la forma de *identidad de Jacobi*, la cual dice que si u , v y w son tres funciones con derivadas segundas continuas, entonces

$$[u, [v, w]] + [v, [w, u]] + [w, [u, v]] = 0, \quad (9-75e)$$

es decir, la suma de las permutaciones cíclicas del corchete doble de Poisson de tres funciones es nula. No parece que exista ninguna manera sencilla de probar la identidad de Jacobi para el corchete de Poisson que evite engorrosas manipulaciones algebraicas. Sin embargo, se puede mitigar la complejidad de dichas manipulaciones introduciendo una nomenclatura especial. A u , v y w (o a funciones de las mismas) les pondremos subíndices para representar derivadas parciales respecto a la variable canónica correspondiente. Así

$$u_i \equiv \frac{\partial u}{\partial \eta_i}, \quad v_{ij} \equiv \frac{\partial v}{\partial \eta_i \partial \eta_j}.$$

Con esta notación, el corchete de Poisson de u y v se puede expresar en la forma

$$[u, v] = u_i J_{ij} v_j.$$

Aquí J_{ij} , como de costumbre, es el elemento ij -ésimo de \mathbf{J} . En la demostración, la única propiedad de \mathbf{J} que vamos a necesitar es su antisimetría. Consideremos ahora el primer corchete doble de Poisson de la ecuación (9-75e):

$$[u, [v, w]] = u_i J_{ij} [v, w]_j = u_i J_{ij} (v_k J_{kl} w_l)_j.$$

Como los elementos J_{kl} son constantes, la derivada respecto a η no actúa sobre ellos y tenemos

$$[u, [v, w]] = u_i J_{ij} (v_k J_{kl} w_{lj} + v_{kj} J_{kl} w_l). \quad (9-76)$$

Los otros corchetes dobles de Poisson pueden obtenerse de la ecuación (9-76) por

permutación circular de u, v, w . Hay así seis términos en total, cada uno de los cuales es una suma cuádruple extendida a los índices mudos i, j, k y l . Consideremos el término de la ecuación (9-76) que contiene una derivada segunda de w :

$$J_{ij}J_{kl}u_i v_k w_{lj}.$$

La única segunda derivada de w restante aparecerá al calcular el segundo corchete doble de Poisson de la ecuación (9-75e):

$$[v, [w, u]] = v_k J_{kl} (w_j J_{ji} u_i)_l.$$

Aquí, el término de la segunda derivada de w es

$$J_{ji} J_{kl} u_i v_k w_{jl}.$$

Como da igual en qué orden se efectúen las derivaciones, $w_{ij} = w_{ji}$ y la suma de los dos términos dará

$$(J_{ij} + J_{ji}) J_{kl} u_i v_k w_{lj} = 0,$$

en virtud de la antisimetría de J . Los cuatro términos restantes son permutaciones circulares y se pueden dividir análogamente en dos parejas, una que contenga las derivadas segundas de u y la otra las de v . Por la misma razón, cada una de dichas parejas suma cero y queda así comprobada la identidad de Jacobi.

Si consideramos que el corchete de Poisson de u, v define una operación «producto» de las dos funciones, la identidad de Jacobi sustituirá a la ley asociativa de la multiplicación. Recordemos que la multiplicación aritmética es asociativa, es decir, que es indiferente en qué orden se efectúe una sucesión de multiplicaciones:

$$a(bc) = (ab)c.$$

La identidad de Jacobi nos dice que el «producto» de corchetes no es asociativo y da el efecto de cambiar el orden de las «multiplicaciones». Junto con las propiedades (9-75b) y (9-75c), la identidad de Jacobi (ec. 9-75e) define un tipo particular de Álgebra no asociativa llamada *Álgebra de Lie* a la cual obedece el corchete de Poisson. La operación del corchete de Poisson no es el único tipo de «producto» conocido por los físicos que satisfaga las condiciones del Álgebra de Lie. Dejamos para los ejercicios demostrar que el producto vectorial de dos vectores,

$$\mathbf{v}[\mathbf{A}, \mathbf{B}] \rightarrow \mathbf{A} \times \mathbf{B},$$

y el conmutador de dos matrices,

$${}_v[A, B] \rightarrow AB - BA.$$

cumplen las mismas condiciones del Álgebra de Lie que el corchete de Poisson. Es esto lo que permite sustituir el corchete de Poisson clásico por el conmutador de los operadores mecanocuánticos. Dicho de otra manera, el «principio de correspondencia» puede funcionar tan sólo porque el corchete de Poisson y el conmutador son representaciones de un «producto» del Álgebra de Lie.*

Existen otros invariantes canónicos además del corchete de Poisson. Uno, en la actualidad de interés principalmente histórico, es el *corchete de Lagrange*. Supongamos que u y v son dos funciones tomadas de un conjunto de $2n$ funciones de las variables canónicas, independientes. Por inversión, podremos considerar que las variables canónicas son funciones del conjunto de $2n$ funciones. Basándonos en esto, definimos el corchete de Lagrange de u y v respecto a las variables (q, p) en la forma

$$\{u, v\}_{q,p} = \frac{\partial q_i}{\partial u} \frac{\partial p_i}{\partial v} - \frac{\partial p_i}{\partial u} \frac{\partial q_i}{\partial v}, \tag{9-77}$$

o bien, en notación matricial,

$$\{u, v\}_n = \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial u} \mathbf{J} \frac{\partial \eta}{\partial v}. \tag{9-78}$$

La demostración de la invarianza canónica del corchete de Lagrange es paralela a la del corchete de Poisson. Formamos primero el corchete de Lagrange respecto a las variables ζ :

$$\{u, v\}_\zeta = \frac{\partial \tilde{\zeta}}{\partial u} \mathbf{J} \frac{\partial \zeta}{\partial v}. \tag{9-79}$$

* Desde luego, no debemos confundir la aceptabilidad matemática de esta versión del principio de correspondencia con su necesidad física. La introducción de las relaciones de conmutación cuántica fue un gran descubrimiento físico de los pioneros de la Mecánica cuántica. Lo único que mostramos aquí es que existe una semejanza entre la estructura matemática de la formulación del corchete de Poisson de la Mecánica clásica y la versión de relación de conmutación de la Mecánica cuántica. La correspondencia formal es que

$$[u, v] \rightarrow \frac{1}{i\hbar} (uv - vu)$$

donde en el primer miembro u, v son funciones clásicas y en el segundo son operadores cuánticos.

No obstante, las derivadas se pueden expresar en función del sistema η en la forma

$$\frac{\partial \zeta_i}{\partial v} = \frac{\partial \zeta_i}{\partial \eta_j} \frac{\partial \eta_j}{\partial v}, \quad \text{o sea} \quad \frac{\partial \zeta}{\partial v} = \mathbf{M} \frac{\partial \eta}{\partial v}.$$

La ecuación (9-79) puede entonces escribirse en la forma

$$\{u, v\}_\zeta = \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial u} \tilde{\mathbf{M}} \mathbf{J} \mathbf{M} \frac{\partial \eta}{\partial v},$$

que en virtud de la condición simpléctica de las transformaciones canónicas (9-58) queda en la forma

$$\{u, v\}_\zeta = \frac{\partial \eta}{\partial u} \mathbf{J} \frac{\partial \eta}{\partial v} = \{u, v\}_\eta, \quad (9-80)$$

comprobando así la invarianza canónica del corchete de Lagrange.

Si para u y v tomamos dos elementos del sistema de variables canónicas, obtendremos los corchetes de Lagrange fundamentales:

$$\{q_i, q_j\} = 0 = \{p_i, p_j\}; \quad \{q_i, p_j\} = \delta_{ij}, \quad (9-81)$$

o bien, en notación matricial,

$$\{\eta, \eta\} = \mathbf{J}. \quad (9-82)$$

Los corchetes de Lagrange y de Poisson presentan claramente una especie de relación inversa entre ellos, si bien la forma precisa de dicha relación es un tanto complicada de expresar. Sea u_i , $i = 1, \dots, 2n$ un sistema de $2n$ funciones de las variables canónicas, independientes, que representaremos mediante una matriz columna (o fila) \mathbf{u} . Entonces, $\{\mathbf{u}, \mathbf{u}\}$ será la matriz $2n \times 2n$ cuyo elemento ij -ésimo es $\{u_i, u_j\}$, teniendo $[\mathbf{u}, \mathbf{u}]$ una descripción análoga. El carácter recíproco de los dos corchetes se manifiesta por la relación

$$\{\mathbf{u}, \mathbf{u}\} [\mathbf{u}, \mathbf{u}] = -\mathbf{1}. \quad (9-83)$$

Si para u elegimos el propio sistema canónico, η , la ecuación (9-83) se deduce obviamente de las fórmulas de los corchetes fundamentales (ecs. 9-70 y 9-82) y de las propiedades de \mathbf{J} . La demostración para u arbitraria no es difícil si se escribe en función de las definiciones

matriciales de los corchetes y la dejamos para los ejercicios. Aun cuando las propiedades de los corchetes de Poisson y Lagrange guardan cierto paralelismo en muchos aspectos, debemos hacer notar que los corchetes de Lagrange *no* obedecen a la identidad de Jacobi. Por tanto, los corchetes de Lagrange no se pueden calificar de operación «producto» en el Álgebra de Lie.

Otra invariante canónica importante es la magnitud de un elemento de volumen del espacio fásico. Una transformación canónica $\eta \rightarrow \zeta$ transforma el espacio fásico de $2n$ dimensiones con coordenadas η_i en otro espacio fásico con coordenadas ζ_i . El elemento de volumen

$$(d\eta) = dq_1 dq_2 \dots dq_n dp_1 \dots dp_n$$

se transforma en un nuevo elemento de volumen

$$(d\zeta) = dQ_1 dQ_2 \dots dQ_n dP_1 \dots dP_n.$$

Según sabemos,* el tamaño de los dos elementos de volumen está relacionado por el valor absoluto del determinante jacobiano:

$$(d\zeta) = \|\mathbf{M}\| (d\eta). \tag{9-84}$$

Pero tomando el determinante de uno y otro miembro de la condición simpléctica (ec. 9-55) tenemos

$$|\mathbf{M}|^2 |\mathbf{J}| = |\mathbf{J}|. \tag{9-85}$$

Así, en una transformación canónica real el determinante jacobiano vale ± 1 y el valor absoluto es siempre la unidad, lo que prueba la invarianza del elemento de volumen en el espacio fásico. También se deduce de aquí que el volumen de una región cualquiera del espacio fásico,

$$J_n = \int \dots \int (d\eta), \tag{9-86}$$

es un invariante canónico.

La integral de volumen de la ecuación (9-86) es el miembro final de una sucesión de invariantes canónicos llamados *invariantes integrales de Poincaré*, que comprenden integrales extendidas a subespacios del espacio fásico de diferentes dimensiones. Los

* Vease, por ejemplo, W. Kaplan, *Advanced Calculus*, 2.ª ed., 1973, p. 270.

demás miembros de dicha sucesión no se pueden dar simplemente en la forma de J_n y como no los necesitamos para el ulterior desarrollo de la teoría, los pasaremos por alto.*

Por último, la invarianza de los corchetes de Poisson fundamentales nos permite esbozar una demostración de que la condición simpléctica implica la existencia de una función generatriz, tal como mencionábamos al final del apartado anterior. A fin de simplificar consideraciones, sólo examinaremos un sistema de un grado de libertad; el método general de la demostración puede extenderse directamente a sistemas con muchos grados de libertad. † Supondremos que la primera de las ecuaciones de transformación,

$$Q = Q(q, p), \quad P = P(q, p),$$

es invertible y da p en función de q y Q , es decir

$$p = \phi(q, Q). \quad (9-87)$$

Sustituyendo en la segunda ecuación de transformación tendremos P en función de q y Q , es decir

$$P = \psi(q, Q). \quad (9-88)$$

En tal caso podríamos esperar que dicha transformación fuese generada por una función generatriz del primer tipo, ‡ F_1 , apareciendo entonces las ecuaciones (9-87) y (9-88) en la forma

$$p = \frac{\partial F_1(q, Q)}{\partial q}, \quad P = -\frac{\partial F_1(q, Q)}{\partial Q}. \quad (9-89)$$

Si son válidas las ecuaciones (9-89), deberá cumplirse que

$$\frac{\partial \phi}{\partial Q} = -\frac{\partial \psi}{\partial q}. \quad (9-90)$$

* Existen dificultades en la presentación usual de los invariantes integrales de orden inferior. Una exposición de los problemas puede encontrarse en H. D. Block, *Quarterly Applied Math.* 12, 201 (1954).

† Detalles de la demostración para un sistema general pueden verse en C. Carathéodory, *Calculus of Variations and Partial Differential Equations of the First Order*, traducido al inglés, Holden-Day, 1965, Vol. I §97, pp. 87-90. En la literatura, a la relación entre el método simpléctico y el formalismo generador se le llama a veces *teorema de Carathéodory*.

‡ Desde luego, si la ecuación de transformación de Q no fuese invertible, como en la transformación identidad, invertiríamos la ecuación de P y llegaríamos a una función generatriz del segundo tipo.

Recíprocamente, si podemos demostrar la validez de la ecuación (9-90), deberá existir una función F_1 tal que p y P vengan dadas por las ecuaciones (9-89).

Para poner de manifiesto la validez de la ecuación (9-90) intentaremos considerar que todas las cantidades sean función de q y Q . De esta manera tendremos, evidentemente, la identidad

$$\frac{\partial Q}{\partial Q} = 1,$$

pero si se sustituyera la ecuación (9-87) en la primera ecuación de transformación,

$$Q = Q(q, \phi(q, Q)), \quad (9-91)$$

la derivada parcial se podría también escribir en la forma

$$\frac{\partial Q}{\partial Q} = \frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial \phi}{\partial Q},$$

con lo que tendríamos la relación

$$\frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial \phi}{\partial Q} = 1. \quad (9-92)$$

Con el mismo espíritu calculamos el corchete de Poisson

$$[Q, P] \equiv \frac{\partial Q}{\partial q} \frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial P}{\partial q} \frac{\partial Q}{\partial p} = 1.$$

Las derivadas de P son derivadas de ψ considerada función de q y $Q(q, p)$. Por tanto, el corchete de Poisson se podrá escribir

$$[Q, P] = \frac{\partial Q}{\partial q} \frac{\partial \psi}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p} \left(\frac{\partial \psi}{\partial q} + \frac{\partial \psi}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial q} \right),$$

o, reagrupando términos,

$$[Q, P] = \frac{\partial \psi}{\partial Q} \left(\frac{\partial Q}{\partial q} \frac{\partial Q}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial Q}{\partial q} \right) - \frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial \psi}{\partial q},$$

y por tanto

$$1 = -\frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial \psi}{\partial q}. \quad (9-93)$$

Combinando las ecuaciones (9-92) y (9-93) tenemos

$$\frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial \phi}{\partial \dot{Q}} = -\frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial \psi}{\partial \dot{q}}.$$

Como la derivada parcial de Q respecto a p es la misma en ambos miembros, es decir, en ambos casos la otra variable que se mantiene constante es q y como la derivada no es nula (si no la ecuación Q no se podría invertir), se deduce que la ecuación (9-90) debe ser cierta. Así pues, el valor del corchete de Poisson fundamental $[Q, P]$, que hemos visto es equivalente a la condición simpléctica, nos lleva a la existencia de función generatriz. Los dos métodos para llegar a transformaciones canónicas, aun cuando hayamos llegado a ellos independientemente, son totalmente equivalentes.

9-5 ECUACIONES DE MOVIMIENTO, TRANSFORMACIONES CANÓNICAS INFINITESIMALES Y TEOREMAS DE CONSERVACIÓN CON LA FORMULACIÓN DE LOS CORCHETES DE POISSON

Se puede reconstruir mediante corchetes de Poisson casi todo el marco de la Mecánica hamiltoniana. A consecuencia de la invarianza canónica de los corchetes de Poisson, las relaciones así obtenidas serán también de forma invariante ante una transformación canónica. Por ejemplo, supongamos que consideramos la derivada total respecto al tiempo de una cierta función de las variables canónicas y el tiempo, $u(q, p, t)$, por uso de ecuaciones de movimiento de Hamilton:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial u}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial u}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} + \frac{\partial u}{\partial t},$$

o sea

$$\frac{du}{dt} = [u, H] + \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (9-94)$$

Atendiendo a la notación simpléctica, la deducción de la ecuación (9-94) daría

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\eta}} \dot{\boldsymbol{\eta}} + \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\eta}} \mathbf{J} \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\eta}} + \frac{\partial u}{\partial t},$$

de donde se deduce la ecuación (9-94) en virtud de (9-68). La ecuación (9-94) podemos considerar que es la ecuación de movimiento generalizada para una función arbitraria u en la formulación de corchetes de Poisson. Contiene como caso particular las ecuaciones de Hamilton cuando en lugar de u sustituimos una de las variables canónicas

$$\dot{q}_i = [q_i, H], \quad \dot{p}_i = [p_i, H], \tag{9-95a}$$

o, en notación simpléctica,

$$\dot{\eta} = [\eta, H]. \tag{9-95b}$$

Que las ecuaciones (9-95) coinciden con las ecuaciones de movimiento de Hamilton se puede ver directamente observando que por la definición de corchete de Poisson (ec. 9-68) tenemos

$$[\eta, H] = \mathbf{J} \frac{\partial H}{\partial \eta}, \tag{9-96}$$

con lo que la ecuación (9-95b) no es sino otra manera de escribir la ecuación (8-31). De la ecuación (9-94) podemos obtener otra propiedad conocida tomando para u la propia H . En tal caso, la ecuación (9-94) dice que

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t},$$

como habíamos ya obtenido en la ecuación (8-35). Debemos hacer notar que la ecuación de movimiento generalizada es invariante canónicamente; es válida en cualquier sistema de variables canónicas q, p que se use para expresar la función u o para calcular el corchete de Poisson. No obstante, la hamiltoniana que se utilice debe ser apropiada para el sistema particular de variables canónicas. Al pasar a otro sistema de variables mediante una transformación canónica dependiente del tiempo debemos pasar también a la hamiltoniana transformada K .

Si u es una constante del movimiento, la ecuación (9-94) nos dice que debe tener la propiedad

$$[H, u] = \frac{\partial u}{\partial t}. \tag{9-97}$$

Todas las funciones que cumplan la ecuación (9-97) son constantes del movimiento y reciprocamente, el corchete de Poisson de H con cualquier constante del movimiento debe

ser igual a la derivada temporal explícita de la función constante. Tenemos así una comprobación de la función general para buscar e identificar las constantes del sistema. Para las constantes del movimiento que no contengan explícitamente el tiempo, la comprobación indicada por la ecuación (9-97) se reduce a exigir que se anulen sus corchetes de Poisson con la hamiltoniana.*

Si se conocen dos constantes del movimiento, la identidad de Jacobi proporciona un camino posible de obtención de nuevas constantes. Supongamos que u y v sean dos constantes del movimiento que no sean funciones explícitas del tiempo. Entonces, si se toma por H la w de la ecuación (9-75c), la identidad de Jacobi dice que

$$[H, [u, v]] = 0;$$

es decir, el corchete de Poisson también es una constante en el tiempo. Aun cuando las cantidades que se conservan dependan explícitamente del tiempo, puede demostrarse (cfr. Ejercicio 28) que *el corchete de Poisson de dos constantes del movimiento cualesquiera es también una constante del movimiento* (teorema de Poisson). La aplicación repetida de la identidad de Jacobi de esta manera puede, en principio, conducir a una sucesión completa de constantes del movimiento. Sin embargo, muy a menudo el proceso resulta decepcionante. El corchete de Poisson de u y v suele ser frecuentemente una función trivial de u y v , e incluso puede ser idénticamente nulo. Así y todo, debemos tener presente la posibilidad de generar nuevas constantes del movimiento independientes mediante el teorema de Poisson.

La notación del corchete de Poisson se puede utilizar también para formular las ecuaciones básicas de una transformación canónica infinitesimal. Tal como hemos visto (p. 481) dicha transformación es un caso particular de una transformación que es una función continua de un parámetro (que si conviene se hace igual a cero). Si el parámetro es suficientemente pequeño para que podamos tratarlo como infinitésimo de primer orden, las variables canónicas transformadas diferirán infinitamente poco de las coordenadas iniciales:

$$\zeta = \eta + \delta\eta \quad (9-98)$$

dando el cambio en función del generador G a través de la ecuación (9-63c):

$$\delta\eta = \epsilon \mathbf{J} \frac{\partial G(\eta)}{\partial \eta}.$$

Ahora bien, de la definición (9-68) del corchete de Poisson se deduce que

$$[\eta, u] = \mathbf{J} \frac{\partial u}{\partial \eta} \quad (9-99)$$

* En vista del «principio de correspondencia» entre el corchete de Poisson clásico y el conmutador cuántico, se ve que esta afirmación corresponde al conocido teorema cuántico que dice que las cantidades que se conservan conmutan con la hamiltoniana.

(cfr. ec. 9-96), relación que conserva su validez cuando se calcula el corchete de Poisson en función de cualesquiera otras variables canónicas. Si para u tomamos G , vemos que las ecuaciones de transformación para una transformación canónica infinitesimal se pueden escribir en la forma

$$\delta\eta = \epsilon[\eta, G]. \quad (9-100)$$

Consideremos ahora una transformación canónica infinitesimal en la cual el parámetro continuo sea t (como se hizo al probar la condición simpléctica) de manera que $\epsilon = dt$ y sea la hamiltoniana la función generatriz G . En tal caso, las ecuaciones de transformación para esta T.C.I. serán, en virtud de la ecuación (9-100),

$$\delta\eta = dt[\eta, H] = \dot{\eta} dt = d\eta. \quad (9-101)$$

Estas ecuaciones dicen que la transformación cambia las coordenadas y cantidades de movimiento en el instante t a los valores que tienen en el instante $t + dt$. Así pues, el movimiento del sistema en un intervalo de tiempo dt puede describirse mediante una transformación de contacto infinitesimal generada por la hamiltoniana. Correspondientemente, el movimiento del sistema en un intervalo de tiempo finito desde t_0 hasta t está representado por una sucesión de transformaciones de contacto infinitesimales que, según hemos visto, equivale a una sola transformación canónica finita. Por tanto, los valores de q y p en un instante cualquiera t se pueden obtener a partir de sus valores iniciales por medio de una transformación canónica que sea una función continua del tiempo. Según este punto de vista, el movimiento de un sistema mecánico corresponde a la evolución continua de una transformación canónica. En un sentido muy literal, *la hamiltoniana es el generador del movimiento del sistema con el tiempo*.

Recíprocamente, debe existir una transformación canónica que lleve de los valores de las coordenadas y cantidades de movimiento en un instante t cualquiera a sus valores iniciales constantes. Obtener dicha transformación es, evidentemente, equivalente a resolver el problema del movimiento del sistema. Al principio de este capítulo señalábamos que un problema mecánico podría reducirse a hallar la transformación canónica para la cual todas las cantidades de movimiento sean constantes del movimiento. Las consideraciones actuales indican la posibilidad de una solución alternativa por medio de la transformación canónica para la cual *tanto* las cantidades de movimiento *como* las coordenadas sean constantes del movimiento. En el capítulo siguiente se elaborarán estas dos sugerencias para demostrar cómo pueden obtenerse soluciones formales para todo problema mecánico.

Implícita a este estudio ha estado una manera alterada de contemplar una transformación canónica y el efecto que produce. La noción de transformación canónica se introdujo diciendo que era un cambio de las coordenadas que se utilizan para caracterizar el espacio fásico. En realidad, pasábamos de un espacio fásico η con coordenadas (q, p) a otro, ζ , con coordenadas (Q, P) . Si el estado del sistema en un instante dado estaba descrito por un punto A en un sistema, también podía describirlo igualmente bien el punto transformado A' (cfr. fig. 9-1). Toda función de las variables del

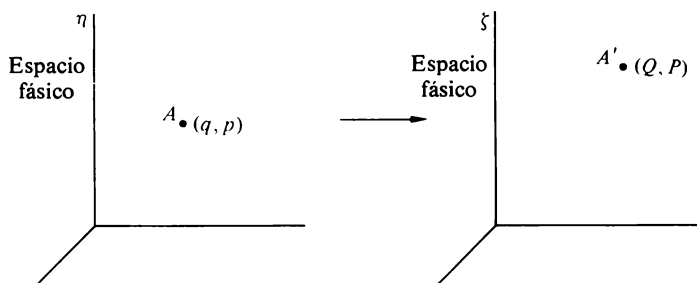


FIGURA 9-1

Ilustración del punto de vista pasivo de una transformación canónica

sistema tendría el mismo valor para una configuración dada del sistema tanto si la describiáramos mediante un sistema (q, p) como con el (Q, P) . Dicho de otro modo, la función tendría el mismo valor en A' que en A . En analogía con la descripción correspondiente de las transformaciones ortogonales, podemos decir que este es el punto de vista *pasivo* de la transformación canónica.

En contraste con esto, hemos considerado que la transformación canónica generada por la hamiltoniana relaciona las coordenadas de un punto del espacio fásico con las de otro punto del *mismo* espacio fásico. Según este punto de vista, la transformación canónica realiza, en el lenguaje de los matemáticos, una aplicación de los puntos del espacio fásico sobre los mismos. Tenemos así una interpretación *activa* de la transformación canónica según la cual «mueve» el punto figurativo del sistema de una posición de coordenadas (q, p) a otro punto (Q, P) del espacio fásico (cfr. fig. 9-2). Desde luego, por sí misma, la transformación canónica no puede mover o cambiar la configuración del sistema. Lo que hace es expresar una configuración del sistema en función de otra. Con ciertas clases de transformación canónica no resulta útil el punto de

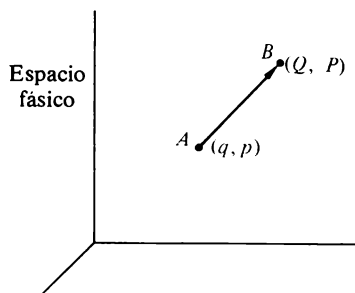


FIGURA 9-2

Ilustración del punto de vista activo de una transformación canónica.

vista activo. Por ejemplo, la transformación puntual de coordenadas cartesianas a coordenadas polares esféricas es una transformación canónica, pero una interpretación «activa» de la misma rozaría el ridículo.

El punto de vista activo es especialmente útil en el caso de transformaciones que dependan con continuidad de un solo parámetro. En la interpretación activa, el efecto de la transformación es «mover» el punto figurativo del sistema con continuidad sobre una curva en el espacio fásico a medida que varía continuamente el parámetro. Cuando el generador de la T. C. I. es la hamiltoniana, la curva sobre la cual se mueve el punto figurativo es la trayectoria del sistema en el espacio fásico.

Si consideramos la transformación canónica desde el punto de vista pasivo, la frase «cambio de una función u ante una transformación canónica» carece de sentido. La función u no tiene valor diferente cuando se evalúa en A que cuando se evalúa en A' . Es cierto que u tendrá, en general, una dependencia funcional de (Q, P) diferente de la que tiene de (q, p) pero su valor será el mismo en puntos correspondientes; $u(A') = u(A)$. En cambio, podemos dar un significado a la frase si se interpreta activamente la transformación canónica. Puede significar, por ejemplo, el cambio de *valor* de la función cuando el punto figurativo pasa de A a B . En el punto B del mismo espacio fásico, u tendrá la misma dependencia funcional de (Q, P) que tiene de (q, p) en el punto A , pero ahora el valor de la función será diferente, en general. Vamos a utilizar el símbolo \hat{c} para denotar dicho cambio de valor de una función ante una transformación canónica infinitesimal:

$$\hat{c}u = u(B) - u(A), \tag{9 102}$$

donde, desde luego, A y B estarán infinitamente próximos. Empleando la notación matricial para las variables canónicas, el cambio del valor de la función ante una T.C.I. se definiría en la forma

$$\hat{c}u = u(\boldsymbol{\eta} + \delta\boldsymbol{\eta}) - u(\boldsymbol{\eta}).$$

Desarrollando en serie de Taylor y conservando los términos infinitesimales de primer orden tenemos, en virtud de la ecuación (9-63c):

$$\hat{c}u = \frac{\hat{c}u}{\hat{c}\boldsymbol{\eta}} \delta\boldsymbol{\eta} = \epsilon \frac{\hat{c}u}{\hat{c}\boldsymbol{\eta}} \mathbf{J} \frac{\hat{c}G}{\hat{c}\boldsymbol{\eta}}.$$

Recordando la definición del corchete de Poisson (ec. 9-68) vemos que el cambio se puede escribir en la forma

$$\hat{c}u = \epsilon[u, G]. \tag{9 103}$$

Una aplicación inmediata de la ecuación (9-103) consiste en tomar para u una de las propias coordenadas del espacio fásico (o la matriz de las coordenadas). Tenemos entonces, en virtud de la ecuación (9-100),

$$\hat{\partial}\eta = \epsilon[\eta, G] = \delta\eta.$$

Desde luego, este resultado es evidente según la definición del punto B en relación con A ; el «cambio» de coordenadas de A a B es precisamente la diferencia infinitesimal entre las coordenadas viejas y nuevas.

Estas consideraciones deben generalizarse un tanto al hablar del «cambio de la hamiltoniana». Recordemos que la designación «hamiltoniana» no significa una función concreta, igual en todos los sistemas de coordenadas, sino que se refiere a la función que en el espacio fásico dado define las ecuaciones canónicas de movimiento. Cuando la transformación canónica depende del tiempo, también se ve transformado el significado de «hamiltoniana». Así, $H(A)$ no pasa a $H(A')$ sino a $K(A')$; y $H(A)$ no tendrá, necesariamente, el mismo valor que $K(A')$. En tal caso, por ∂H significaremos en realidad la diferencia entre los valores de la hamiltoniana en una y otra interpretación:

$$\partial H = H(B) - K(A'). \quad (9\ 104)$$

Cuando la propia función no cambie ante una transformación canónica, las dos formas del cambio (ec. 9-102 y ec. 9-104) serán idénticas ya que $u(A') = u(A)$. En general, K está relacionada con H mediante la ecuación

$$K = H + \frac{\partial F}{\partial t},$$

donde en el caso de una T.C.I. la función generatriz viene dada en función de G por la ecuación (9-62). Como en esa ecuación sólo puede ser función explícita del tiempo G , el valor de la nueva hamiltoniana vendrá dado por

$$K(A') = H(A') + \epsilon \frac{\partial G}{\partial t} = H(A) + \epsilon \frac{\partial G}{\partial t},$$

y el cambio de la hamiltoniana será

$$\partial H = H(B) - H(A) - \epsilon \frac{\partial G}{\partial t}. \quad (9\ 105)$$

Siguiendo el camino que nos ha traído desde la ecuación (9-103) vemos que ∂H está dado por

$$\partial H = \epsilon[H, G] - \epsilon \frac{\partial G}{\partial t}. \quad (9\ 106)$$

De la ecuación de movimiento generalizada (ec. 9-106), poniendo G en lugar de u , deducimos finalmente que el cambio de H es

$$\delta H = -\epsilon \frac{dG}{dt}. \quad (9-107)$$

Si G es una constante del movimiento, la ecuación (9-107) nos dice que genera una transformación canónica infinitesimal que no cambia el valor de la hamiltoniana. Es equivalente decir que *las constantes del movimiento son las funciones generatrices de aquellas transformaciones canónicas infinitesimales que dejan invariante la hamiltoniana*. En esta conclusión va implícita una relación entre las propiedades de simetría del sistema y las cantidades que se conservan, relación que se ve facilísimamente en el caso de constantes del movimiento que no dependan explícitamente del tiempo. El cambio de la hamiltoniana ante la transformación no es entonces más que el cambio del valor de la hamiltoniana cuando el sistema pasa de una configuración A a otra configuración B . Si el sistema es simétrico ante la operación que produce este cambio de configuración, es evidente que la hamiltoniana no quedará afectada ante la transformación correspondiente. Así, para dar un ejemplo sencillo, si el sistema es simétrico respecto a una dirección dada, la hamiltoniana no cambiará su valor cuando el sistema gire en conjunto alrededor de dicha dirección. Se deduce, pues, que la cantidad que genera (mediante una T.C.I.) dicha rotación del sistema debe conservarse. La simetría de revolución del sistema implica una constante del movimiento particular. No es este el primer ejemplo de relación entre constantes del movimiento y características de simetría. Ya habíamos encontrado otros (§§ 2-6, 8-2) en relación con la conservación de las cantidades de movimiento generalizadas. Sin embargo, ahora el teorema es más elegante y completo, ya que abarca todas las constantes del movimiento independientes y no solamente las cantidades de movimiento generalizadas.

Los teoremas de conservación de la cantidad de movimiento y del momento cinético aparecen ahora como casos particulares de un enunciado general. Si una coordenada q_i es cíclica, la hamiltoniana es independiente de q_i y será ciertamente invariante ante una transformación infinitesimal que entrañe un desplazamiento de q_i sola. Consideremos ahora una transformación generada por la cantidad de movimiento generalizada conjugada de q_i :

$$G(q, p) = p_i. \quad (9-108)$$

Según las ecuaciones (9-63 a y b) la transformación canónica infinitesimal resultante es

$$\begin{aligned} \delta q_j &= \epsilon \delta_{ij}, \\ \delta p_i &= 0. \end{aligned} \quad (9-109)$$

que es, exactamente el desplazamiento infinitesimal requerido de q_i y sólo q_i . Vemos fácilmente que esto es el conocido teorema de la cantidad de movimiento: si una coordenada es cíclica, su cantidad de movimiento conjugada es una constante del movimiento. La observación de que el desplazamiento de una coordenada sola está

generado por la cantidad de movimiento conjugada se puede poner en una forma ligeramente ampliada. Si la función generatriz de una T.C.I. viene dada por

$$G = (\mathbf{J}\boldsymbol{\eta})_l = J_{lr}\eta_r, \quad (9-110)$$

las ecuaciones de la transformación que se obtiene de la ecuación (9-63c) tendrán la forma

$$\delta\eta_k = \epsilon J_{ks} \frac{\partial G}{\partial \eta_s} = \epsilon J_{ks} J_{lr} \delta r_s = \epsilon J_{ks} J_{ls}.$$

Éstas, en virtud de la ortogonalidad de \mathbf{J} se reducen finalmente a

$$\delta\eta_k = \epsilon \delta_{kl}, \quad (9-111)$$

es decir, el desplazamiento de una sola variable canónica cualquiera η_i se genera en función de la variable conjugada en la forma dada por la ecuación (9-110). Desde luego, si η_i es q_i , según la ecuación (9-110) G será precisamente p_i ; y si η_l es p_i , entonces G será $-q_i$.

Como ejemplo concreto de estos conceptos, consideremos de nuevo la transformación de contacto infinitesimal de las variables dinámicas que produce una rotación en conjunto del sistema, de un ángulo $d\theta$. El significado físico de la función generatriz correspondiente no puede depender de la elección de las coordenadas canónicas iniciales* y para este fin conviene utilizar las coordenadas cartesianas de todas las partículas del sistema. No se pierde generalidad si los ejes están orientados de manera que la rotación infinitesimal lo sea respecto al eje z . Para una rotación infinitesimal de cada partícula en sentido antihorario, el cambio de los vectores de posición deberá encontrarse a partir de la matriz rotación infinitesimal dada por la ecuación (4-105') (p. 221). Con una rotación sólo alrededor del eje z , los cambios de las coordenadas de la partícula son

$$\delta p_{ix} = -p_{iy} d\theta, \quad \delta p_{iy} = p_{ix} d\theta, \quad \delta p_{iz} = 0. \quad (9-112a)$$

El efecto de la transformación sobre las componentes de los vectores cartesianos formados por las cantidades de movimiento conjugadas de las coordenadas de las partículas vendrá dado análogamente por

$$\delta x_i = -y_i d\theta, \quad \delta y_i = x_i d\theta, \quad \delta z_i = 0. \quad 9-112b)$$

* Puede verse esto muy fácilmente a partir del invariante canónico de la ecuación (9-100). El cambio de la variable canónica η_i sigue siendo el mismo independientemente de cuál sea el sistema de variables canónicas en el que se exprese G .

Comparando estas ecuaciones de transformación con las ecuaciones (9-63a y b) vemos que la función generatriz correspondiente es

$$G = x_i p_{iy} - y_i p_{ix}, \quad (9-113)$$

siendo $d\theta$ el parámetro infinitesimal ϵ . Para una comprobación directa, notemos que

$$\begin{aligned} \delta x_i &= d\theta \frac{\partial G}{\partial p_{ix}} = -y_i d\theta, & \delta p_{ix} &= -d\theta \frac{\partial G}{\partial x_i} = -p_{iy} d\theta, \\ \delta y_i &= d\theta \frac{\partial G}{\partial p_{iy}} = x_i d\theta, & \delta p_{iy} &= -d\theta \frac{\partial G}{\partial y_i} = p_{ix} d\theta, \end{aligned}$$

en concordancia con las ecuaciones (9-112). La función generatriz (9-113) tiene además el significado físico de ser la componente z del momento cinético canónico total:

$$G = L_z \equiv (\mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i)_z. \quad (9-114)$$

Como el eje z se ha elegido arbitrariamente, podemos decir que la función generatriz correspondiente a una rotación infinitesimal en torno a un eje representado por el vector unitario \mathbf{n} es

$$G = \mathbf{L} \cdot \mathbf{n}. \quad (9-115)$$

Hay que hacer notar que el momento cinético canónico que hemos definido puede ser diferente del momento cinético mecánico. Si las fuerzas que actúan sobre el sistema derivan de potenciales dependientes de la velocidad, los vectores cantidad de movimiento canónica \mathbf{p}_i no serán necesariamente iguales a los vectores cantidad de movimiento ordinaria y en las ecuaciones (9-114) y (9-115) \mathbf{L} puede no ser el momento cinético mecánico. El resultado que hemos obtenido es, pues, una generalización de la conclusión a la que llegamos en § 2-6 de que la cantidad de movimiento conjugada de una coordenada rotación es la componente correspondiente del momento cinético total. La demostración que presentábamos entonces se limitaba a sistemas con potenciales independientes de la velocidad. En virtud de las ecuaciones (9-108) y (9-109) podemos sacar ahora la conclusión de que la cantidad de movimiento conjugada de una coordenada generalizada que mida la rotación del sistema en conjunto en torno a un eje \mathbf{n} es la componente del momento cinético canónico total según el mismo eje. Al igual que la hamiltoniana es el generador de un desplazamiento del sistema en el tiempo, el momento cinético es el generador de las rotaciones espaciales del sistema.

Ya hemos hecho notar que, en la interpretación «activa», la transformación canónica dependiente de un parámetro «mueve» al punto figurativo del sistema a lo largo de una trayectoria continua en el espacio fásico. Decíamos que la transformación finita puede considerarse que es la suma de una sucesión de infinitas transformaciones canónicas

infinitesimales, cada una de las cuales corresponde a un desplazamiento infinitesimal a lo largo de la curva. Desde un punto de vista formal sería, pues, posible obtener la transformación finita integrando la expresión de los desplazamientos infinitesimales. Podemos hacerlo notando que cada punto de la trayectoria en el espacio fásico corresponde a un valor particular del parámetro, que llamaremos α , partiendo de la configuración inicial del sistema representada por $\alpha = 0$. Si es u una cierta función de la configuración del sistema, u será función continua de α a lo largo de la trayectoria, $u(\alpha)$, con un valor inicial $u_0 = u(0)$. (Para mayor sencillez, consideraremos que u no depende explícitamente del tiempo.) La ecuación (9-103) para el cambio infinitesimal de u sobre la trayectoria se podrá escribir en la forma

$$\hat{c}u = dx[u, G],$$

o en forma de ecuación diferencial en la variable α :

$$\frac{du}{d\alpha} = [u, G]. \quad (9-116)$$

Integrando esta ecuación diferencial podemos obtener $u(\alpha)$ y por tanto el efecto de la transformación canónica finita. La solución formal se puede obtener desarrollando $u(\alpha)$ en serie de Taylor en torno a las condiciones iniciales:

$$u(\alpha) = u_0 + \alpha \left. \frac{du}{d\alpha} \right|_0 + \frac{\alpha^2}{2!} \left. \frac{d^2u}{d\alpha^2} \right|_0 + \frac{\alpha^3}{3!} \left. \frac{d^3u}{d\alpha^3} \right|_0 + \dots$$

Por la ecuación (9-116) tenemos

$$\left. \frac{du}{d\alpha} \right|_0 = [u, G]_0,$$

donde el subíndice cero significa que hay que tomar el valor del corchete de Poisson en el punto inicial, $\alpha = 0$. La aplicación reiterada de la ecuación (9-116), tomando el propio $[u, G]$ como función de la configuración del sistema, da

$$\frac{d^2u}{d\alpha^2} = [[u, G], G],$$

y se puede iterar el proceso para dar la tercera derivada de u y así sucesivamente. La serie de Taylor para $u(\alpha)$ conduce, pues, a la solución formal por serie

$$u(\alpha) = u_0 + \alpha [u, G]_0 + \frac{\alpha^2}{2!} [[u, G], G]_0 + \frac{\alpha^3}{3!} [[[u, G], G], G]_0 + \dots \quad (9-117)$$

Si tomamos para u una cualquiera de las variables canónicas ζ_i , siendo entonces u_0 el conjunto de variables η_i de partida, la ecuación (9-115) será una fórmula para hallar las ecuaciones de transformación de la transformación canónica finita generada por G .

No es difícil encontrar ejemplos concretos que muestren que este procedimiento funciona. Supongamos que para G tomamos L_z , con lo que la transformación canónica final correspondería a una rotación finita alrededor del eje z . El parámetro natural a utilizar para α es el ángulo de rotación. Para u tomemos la coordenada x de la partícula i -ésima del sistema. Bien sea por evaluación directa de los corchetes de Poisson o por lo que se infiere de las ecuaciones (9-112a), es fácil ver que

$$[X_i, L_z] = -Y_i, \quad [Y_i, L_z] = X_i, \quad (9-118)$$

donde se han utilizado mayúsculas para denotar las coordenadas después de una rotación θ , es decir, las coordenadas finales. Las coordenadas iniciales, o sea, antes de la rotación, las representamos, como de costumbre, por minúsculas. Se deduce entonces que

$$\begin{aligned} [X_i, L_z]_0 &= -y_i, \\ [[X_i, L_z], L_z]_0 &= -[Y_i, L_z]_0 = -x_i, \\ [[[X_i, L_z], L_z], L_z]_0 &= -[X_i, L_z]_0 = y_i, \end{aligned}$$

etc. La representación por serie de X_i será, pues,

$$\begin{aligned} X_i &= x_i - y_i\theta - x_i\frac{\theta^2}{2} + y_i\frac{\theta^3}{3!} + x_i\frac{\theta^4}{4!} - \dots \\ &= x_i\left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots\right) - y_i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \dots\right). \end{aligned}$$

Vemos que estas dos series son el desarrollo del coseno y del seno, respectivamente. Luego, la ecuación para la transformación finita de X_i será, pues,

$$X_i = x_i \cos \theta - y_i \text{sen } \theta,$$

que es exactamente lo que podría esperarse para la rotación finita de un vector alrededor del eje z en sentido contrario al de las agujas del reloj.

Para dar otro ejemplo, consideremos el caso en que $G = H$ y el parámetro sea el tiempo. La ecuación (9-116) se reduce entonces a la ecuación de movimiento de u :

$$\frac{du}{dt} = [u, H],$$

con la solución formal

$$u(t) = u_0 + t[u, H]_0 + \frac{t^2}{2!} [[u, H], H]_0 + \frac{t^3}{3!} [[[u, H], H], H]_0 + \dots \quad (9-119)$$

Aquí, el subíndice cero se refiere a las condiciones iniciales en $t = 0$. Apliquemos esta fórmula al sencillo problema de movimiento unidimensional con aceleración a constante, para el cual la hamiltoniana es

$$H = \frac{p^2}{2m} - max,$$

siendo u la coordenada de posición x . Los corchetes de Poisson que se necesitan en la ecuación (9-119) se pueden calcular fácilmente en forma directa o bien a partir de los corchetes fundamentales:

$$\begin{aligned} [x, H] &= \frac{p}{m}, \\ [[x, H], H] &= \frac{1}{m} [p, H] = a. \end{aligned}$$

Como este último corchete de Poisson es una constante, todos los corchetes de orden superior se anularán idénticamente y termina la serie, estando dada la solución total por

$$x = x_0 + \frac{p_0 t}{m} + \frac{at^2}{2}.$$

Recordando que $p_0/m = v_0$, vemos en esta última expresión la conocida solución elemental del problema.

Podemos sentir que lo que hemos hecho es un *tour de force*, una mera representación de virtuoso. La objeción procede. No propondríamos nunca la solución formal dada por la ecuación (9-119) como método preferido para resolver problemas reales de Mecánica. Seguramente es uno de los procedimientos más recónditos que podríamos concebir para resolver los fáciles problemas de Física de los alumnos de primer curso. A pesar de todo, esta técnica proporciona una visión profunda de la estructura de la Mecánica clásica basada en la teoría de las transformaciones canónicas. El desarrollo en serie muestra de manera directa que las transformaciones canónicas infinitesimales pueden generar transformaciones canónicas finitas, dependientes de un parámetro, llevando así a soluciones de las ecuaciones de movimiento. De especial interés para la relación entre la Mecánica clásica y la cuántica es la observación de que las series de las ecuaciones (9-117) o (9-119) tienen cierto aire de familia con el desarrollo en serie de la función

exponencial. El juego de paréntesis de Poisson del término n -ésimo puede considerarse que es la n -ésima aplicación repetida (por la derecha) del operador $[\quad , G]$, o potencia n -ésima del operador. La ecuación (9-119), por ejemplo, se podría escribir simbólicamente en la forma

$$u(t) = ue^{\hat{H}t}|_0. \quad (9-120)$$

Aquí, la exponencial sólo significa su desarrollo en serie y el símbolo \hat{H} se utiliza para indicar el operador $[\quad , H]$. Lo que tenemos aquí nos recuerda la imagen que da Heisenberg de la Mecánica cuántica* donde $u(t)$ se convierte en operadores variables con el tiempo, cuya dependencia temporal viene dada por $\exp [iHt/\hbar]$ de tal manera que conduzca a la misma ecuación de movimiento (9-94). (El factor adicional i/\hbar surge de la correspondencia entre el corchete de Poisson y el conmutador cuántico.) La formulación por corchetes de Poisson de la Mecánica es, pues, la analogía clásica de la imagen de Heisenberg de la Mecánica cuántica.

9-6 RELACIONES DEL CORCHETE DE POISSON MOMENTO CINÉTICO

Identificar el momento cinético canónico con el generador de una rotación rígida del sistema lleva a algunas interesantes e importantes relaciones del corchete de Poisson. La ecuación (9-103) para el cambio de una función u ante una transformación canónica infinitesimal (desde el punto de vista «activo») también es válida si para u tomamos la componente de un vector según un eje *fijo* en el espacio ordinario. Así pues, si es \mathbf{F} una función vectorial de la configuración del sistema, será

$$\partial F_i = [F_i, G].$$

Es importante notar que la dirección según la cual se toma la componente debe ser fija, es decir, no debe estar afectada por la transformación canónica. Si dicha dirección se determina en función de las variables del sistema, la **transformación** cambiará no sólo el valor de la función sino también la naturaleza de la función, al igual que la hamiltoniana. Teniendo esto presente, el cambio de un vector \mathbf{F} ante una rotación del sistema alrededor de un eje fijo \mathbf{n} , generado por $\mathbf{L} \cdot \mathbf{n}$, podemos escribirlo con notación vectorial en la forma

$$\hat{c}\mathbf{F} = d\theta[\mathbf{F}, \mathbf{L} \cdot \mathbf{n}]. \quad (9-121)$$

Dicho de otro modo, la ecuación (9-121) implica que los vectores unitarios \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} que forman la base para \mathbf{F} no se vean girados por $\mathbf{L} \cdot \mathbf{n}$.

* Véase, por ejemplo Schiff, *Quantum Mechanics*, 3.ª ed., 1968, pp. 170-171, o bien Merzbacher, *Quantum Mechanics*, 1961, pp. 343-349.

Las palabras que describen qué significa la ecuación (9-121) deben elegirse con cuidado por otra razón aún. Se habla de la rotación del sistema ante la T.C.I., no necesariamente de la rotación del vector \mathbf{F} . El generador $\mathbf{L} \cdot \mathbf{n}$ induce una rotación espacial de las variables del sistema y no, por ejemplo, de un vector exterior tal como el campo magnético o la aceleración de la gravedad. ¿En qué condiciones, pues, generará $\mathbf{L} \cdot \mathbf{n}$ una rotación espacial de \mathbf{F} ? La respuesta es clara —cuando \mathbf{F} sea función solamente de las variables del sistema (q, p) y no contenga cantidades o vectores exteriores que no estén afectados por la T.C.I. Tan sólo en estas condiciones, una rotación espacial implicará una rotación correspondiente de \mathbf{F} . A tales vectores los designaremos por el nombre de *vectores del sistema*. El cambio de un vector ante una rotación infinitesimal alrededor de un eje \mathbf{n} ha sido tratado ya varias veces (cfr. ec. 2-50 y ec. 4-111', p. 221):

$$d\mathbf{F} = \mathbf{n} d\theta \times \mathbf{F}.$$

Para un vector del sistema \mathbf{F} , el cambio inducido ante una T.C.I. generada por $\mathbf{L} \cdot \mathbf{n}$ podrá por tanto escribirse en la forma

$$\partial\mathbf{F} = d\theta[\mathbf{F}, \mathbf{L} \cdot \mathbf{n}] = \mathbf{n} d\theta \times \mathbf{F}. \quad (9-122)$$

La ecuación (9-122) implica una importante identidad para el corchete de Poisson que cumplen todos los vectores del sistema:

$$[\mathbf{F}, \mathbf{L} \cdot \mathbf{n}] = \mathbf{n} \times \mathbf{F}. \quad (9-123)$$

Notemos que en la ecuación (9-123) ya no hay ninguna referencia a transformación canónica, ni tampoco a rotación espacial. Es simplemente un enunciado referente al valor de ciertos corchetes de Poisson para una clase concreta de vectores y como tal, puede **comprobarse por evaluación directa en cualquier caso que se dé**. Por ejemplo, supongamos que tenemos un sistema de una partícula no vinculada y que utilizáramos como coordenadas espaciales canónicas las coordenadas cartesianas. En tal caso, el vector cartesiano \mathbf{p} será, ciertamente, un vector de sistema adecuado. Si es \mathbf{n} el vector unitario correspondiente a la dirección z por evaluación directa tenemos

$$[p_x, xp_y - yp_x] = -p_y,$$

$$[p_y, xp_y - yp_x] = p_x,$$

$$[p_z, xp_y - yp_x] = 0.$$

Los segundos miembros de estas identidades coinciden con las componentes de $\mathbf{k} \times \mathbf{p}$, tal como preve la ecuación (9-123). En cambio, supongamos que en el mismo problema

intentáramos utilizar para \mathbf{F} el vector $\mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{r} \times \mathbf{B})$ donde $\mathbf{B} = B\mathbf{i}$ es un vector fijo dirigido según el eje x . Vemos que el vector \mathbf{A} es el potencial vector correspondiente a un campo magnético uniforme \mathbf{B} que tiene la dirección x . Como \mathbf{A} depende de un vector exterior al sistema, podríamos esperar que no tuviera las características de vector de sistema y que para él no fuera válida la ecuación (9-123). Verdaderamente, vemos que los corchetes de Poisson que intervienen en este caso son

$$\begin{aligned} [0, x p_y - y p_x] &= 0, \\ [\frac{1}{2}zB, x p_y - y p_x] &= 0, \\ [-\frac{1}{2}yB, x p_y - y p_x] &= -\frac{1}{2}Bx, \end{aligned}$$

mientras que el vector $\mathbf{k} \times \mathbf{A}$ tiene por componentes $(-\frac{1}{2}Bz, 0, 0)$.

La relación que da la ecuación (9-123) se puede expresar con diversas notaciones. Así, con notación de afinor sería

$$[\mathbf{F}, \mathbf{L}] = -\mathbf{1} \times \mathbf{F}, \quad (9-124)$$

donde $\mathbf{1}$ es el afinor unidad $\mathbf{ii} + \mathbf{jj} + \mathbf{kk}$. La ecuación (9-124) se reduce fácilmente a la ecuación (9-123) multiplicando interiormente por \mathbf{n} a la derecha. Es más útil una forma que utiliza la densidad de Levi-Civita para expresar el producto vectorial (cfr. ec. 4-113', p. 220). La componente i -ésima de la ecuación (9-123) para \mathbf{n} cualquiera podrá entonces escribirse en la forma

$$[F_i, L_j n_j] = \epsilon_{ijk} n_j F_k, \quad (9-125)$$

que implica el sencillo resultado

$$[F_i, L_j] = \epsilon_{ijk} F_k.$$

Otro enunciado de la ecuación (9-125) consiste en notar que si l, m, n son tres índices en orden cíclico, será

$$[F_l, L_m] = F_n, \quad l, m, n \text{ en orden cíclico} \quad (9-125')$$

Otra consecuencia de la ecuación (9-123) se refiere al producto escalar de dos vectores de sistema: $\mathbf{F} \cdot \mathbf{G}$. Por ser escalar dicho producto, deberá ser invariante ante la rotación y vemos que es fácil demostrar que es nulo el corchete de Poisson del producto

escalar y $\mathbf{L} \cdot \mathbf{n}$:

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{F} \cdot \mathbf{G}, \mathbf{L} \cdot \mathbf{n}] &= \mathbf{F} \cdot [\mathbf{G}, \mathbf{L} \cdot \mathbf{n}] + \mathbf{G} \cdot [\mathbf{F}, \mathbf{L} \cdot \mathbf{n}] \\
 &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \times \mathbf{G} + \mathbf{G} \cdot \mathbf{n} \times \mathbf{F} \\
 &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \times \mathbf{G} + \mathbf{F} \cdot \mathbf{G} \times \mathbf{n} \\
 &= 0.
 \end{aligned} \tag{9-126}$$

Por tanto, el módulo de todo vector de sistema tendrá un corchete de Poisson nulo con cualquier componente de \mathbf{L} .

Quizá la aplicación más frecuente de **estos** resultados la tengamos cuando tomemos para \mathbf{F} el mismo vector \mathbf{L} . Tenemos entonces

$$[\mathbf{L}, \mathbf{L} \cdot \mathbf{n}] = \mathbf{n} \times \mathbf{L}, \tag{9-127}$$

$$[L_i, L_j] = \epsilon_{ijk} L_k, \tag{9-128}$$

y

$$[L^2, \mathbf{L} \cdot \mathbf{n}] = 0. \tag{9-129}$$

De las ecuaciones (9-127) a (9-129) se deducen algunas consecuencias interesantes. Si L_x y L_y son constantes del movimiento, el teorema de Poisson dice entonces que $[L_x, L_y] = L_z$ es también una constante del movimiento. Así pues, si son constantes dos componentes cualesquiera del momento cinético, el vector momento cinético se conserva. Como nuevo ejemplo, supongamos que además de conservarse L_x y L_y , exista un vector cartesiano de cantidad de movimiento canónica \mathbf{p} siendo p_z una constante del movimiento. No sólo se conserva entonces L_z sino que además tenemos otras dos constantes del movimiento:

$$[p_z, L_x] = p_y$$

y

$$[p_z, L_y] = -p_x,$$

es decir, se conservan \mathbf{L} y \mathbf{p} . Tenemos aquí un ejemplo en el cual el teorema de Poisson da nuevas constantes del movimiento. Sin embargo, observemos que si las constantes del movimiento dadas fuesen p_x , p_y y L_z , sus corchetes de Poisson serían

$$[p_x, p_y] = 0,$$

$$[p_x, L_z] = p_y,$$

$$[p_y, L_z] = p_x.$$

En este caso no pueden obtenerse nuevas constantes a partir del teorema de Poisson.

De los corchetes de Poisson fundamentales (ec. 9-69), recordemos que el corchete de Poisson de dos cantidades de movimiento canónicas debe siempre ser cero. Ahora bien, según la ecuación (9-128), L_i no tiene un corchete de Poisson nulo con las otras componentes de \mathbf{L} . Así pues, aun cuando hemos descrito a \mathbf{L} diciendo que es el momento cinético canónico total en virtud de su definición $\mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i$ (sumado para todas las partículas), dos componentes de \mathbf{L} no podrán ser simultáneamente variables canónicas. No obstante, la ecuación (9-129) indica que pueden tomarse como variables canónicas al mismo tiempo el módulo de \mathbf{L} y una cualquiera de sus componentes.*

9-7 GRUPOS DE SIMETRÍA DE SISTEMAS MECÁNICOS

Ya hemos señalado que las transformaciones canónicas forman grupo. Las transformaciones canónicas que sean funciones analíticas de parámetros continuos forman grupos separados que pertenecen a la clase conocida con el nombre de grupos de Lie. Así, las transformaciones canónicas correspondientes a rotaciones espaciales del sistema forman un grupo con tres parámetros, p. ej., los ángulos de Euler de rotación. Las rotaciones en torno a un eje particular forman un subgrupo (en realidad el grupo de rotaciones en dos dimensiones) con un solo parámetro. El grupo de transformaciones finitas tiene las mismas propiedades que el grupo de las transformaciones canónicas infinitesimales asociadas y se acostumbra a trabajar principalmente con las T.C.I. por ser de más fácil manejo. Los grupos de Lie de transformaciones canónicas infinitesimales cuyos generadores sean las constantes del movimiento del sistema se denominan *grupos de simetría* del sistema ya que, según hemos visto, dichas transformaciones dejan invariante la hamiltoniana. Hallar los grupos de simetría de un sistema constituye un largo camino para resolver el problema de su movimiento clásico y está más próximo a la solución del problema mecanocuántico.

Un sistema con simetría de esfericidad es invariante ante la rotación en torno a un eje cualquiera. Podríamos, pues, esperar que uno de sus grupos de simetría fuese el grupo de rotaciones en tres dimensiones $R(3) \equiv SO(3)$. En un tal sistema se conserva el vector \mathbf{L} de

* Hemos señalado anteriormente que la correspondencia entre las Mecánicas cuántica y clásica es tal que el conmutador mecanocuántico pasa esencialmente a ser corchete de Poisson cuando $\hbar \rightarrow 0$. Gran parte de la estructura formal de la Mecánica cuántica es una transcripción estrecha de la formulación del corchete de Poisson de la Mecánica clásica. Por tanto, todos los resultados obtenidos en este apartado tienen analogías cuánticas. Por ejemplo, el hecho de que dos componentes de \mathbf{L} no puedan ser simultáneamente cantidades de movimiento canónicas se corresponde con el hecho conocido de que L_i y L_j no pueden tener valores propios simultáneos. Pero L^2 y cualquier L_i pueden estar cuantizados juntos. Verdaderamente, la mayoría de estas relaciones se conocen mucho más en su forma cuántica que en la de teoremas clásicos. Así, una de las primeras referencias a los corchetes de Poisson clásicos para el momento cinético parece ser el tratado publicado en 1930 de Born y Jordan, *Elementare Quantenmechanik*. También, aun cuando el cambio general de una función vectorial ante una rotación (ec. 9-123) se conoce desde hace mucho en Mecánica cuántica (cfr. Condon y Shortley, *The Theory of Atomic Spectra*, p. 59), hasta hace muy poco la única referencia a su versión clásica figuraba en la famosa tesis de H. B. G. Casimir, *Rotation of a Rigid Body in Quantum Mechanics*, 1931, p. 30.

† Este apartado se puede omitir en una primera lectura.

acuerdo con nuestra identificación de las componentes de \mathbf{L} como generadores de rotaciones espaciales. El carácter de grupo de Lie está determinado por las relaciones de corchetes (sea de Poisson, conmutadores, etc.) entre los generadores de la transformación que constituye el grupo. En general, si son G_i los generadores de las transformaciones individuales de un parámetro, las relaciones de corchetes en un grupo de Lie serán lineales, de la forma*

$$[G_i, G_j] = C_{ijk} G_k, \quad (9-130)$$

donde las cantidades C_{ijk} reciben el nombre de *constantes de estructura* del grupo de Lie (o del Álgebra de Lie asociada que contiene el «producto» de corchetes). En el caso del grupo de transformaciones generadas por L_i , la ecuación (9-128) indica que las constantes de estructura son $C_{ijk} = \epsilon_{ijk}$ y es esta relación la que imprime al grupo la marca de grupo de rotaciones en tres dimensiones. Así se ha visto que los generadores matriciales \mathbf{M}_i de rotaciones infinitesimales (ec. 4-117) obedecen a las relaciones de conmutación (4-118),

$$[\mathbf{M}_i, \mathbf{M}_j] = \epsilon_{ijk} \mathbf{M}_k, \quad (4-118)$$

es decir, con las mismas constantes de estructura que para L_i . Las cantidades L_i y \mathbf{M}_i son diferentes desde un punto de vista físico; los corchetes de las ecuaciones (9-125) y (4-118) se refieren a operaciones diferentes (aun cuando tengan las mismas propiedades algebraicas importantes). Ahora bien, la identidad de las constantes de estructura de L_i y de \mathbf{M}_i indica que tienen la misma estructura de grupo: la de $SO(3)$.

En el caso del problema de Kepler acotado hemos visto (§ 3-9) que además de \mathbf{L} existe otra magnitud vectorial, \mathbf{A} , que se conserva, cual es el vector de Laplace definido por

$$\mathbf{A} = \mathbf{p} \times \mathbf{L} - \frac{mk\mathbf{r}}{r}. \quad (3-82)$$

Las relaciones de corchete de Poisson de las componentes de \mathbf{A} consigo mismas y con las componentes de \mathbf{L} se pueden obtener de manera directa. Como \mathbf{A} se califica claramente como vector de sistema, tenemos inmediatamente las relaciones de corchete de Poisson

$$[A_i, L_j] = \epsilon_{ijk} A_k. \quad (9-131)$$

Los corchetes de Poisson de las componentes de \mathbf{A} entre ellas no se pueden obtener mediante una estratagema tan sencilla, sino tras una engorrosa manipulación que lleva a †

$$[A_1, A_2] = - \left(p^2 - \frac{2mk}{r} \right) L_3. \quad (9-132)$$

* Véase, por ejemplo, L. P. Eisenhart, *Continuous Groups of Transformations*, pp. 25-28.

† Se logra cierta reducción en lo farragoso de la deducción identificando $\mathbf{p} \times \mathbf{L}$ con un vector \mathbf{C} y calculando primero los corchetes de Poisson $[C_1, (\mathbf{p} \times \mathbf{L})_2]$ y $[C_1, \mathbf{r}/r]$ haciendo uso al máximo de los corchetes de Poisson fundamentales y de las ecuaciones (9-125).

La cantidad entre paréntesis en el segundo miembro vemos que es $2mH$, que tiene el valor conservativo $2mE$. Por tanto, si introducimos un nuevo vector constante \mathbf{D} definido en la forma

$$\mathbf{D} = \frac{\mathbf{A}}{\sqrt{-2mE}} \equiv \frac{\mathbf{A}}{\sqrt{2m|E|}} \quad (9-133)$$

(tenemos en cuenta que E es negativa en el caso de movimiento acotado), las componentes de \mathbf{D} satisfacen la relación de corchetes de Poisson

$$[D_1, D_2] = L_3.$$

Por permutación circular de los índices se obtiene de manera inmediata el sistema completo de corchetes de Poisson. Así pues, las componentes de \mathbf{L} y \mathbf{D} juntas forman un grupo de simetría para el problema de Kepler acotado, con constantes de estructura que se obtendrán de las identidades

$$[L_i, L_j] = \epsilon_{ijk} L_k, \quad (9-128)$$

$$[D_i, L_j] = \epsilon_{ijk} D_k, \quad (9-134)$$

y

$$[D_i, D_j] = \epsilon_{ijk} L_k. \quad (9-135)$$

El examen de las matrices fundamentales para la rotación demuestra que el grupo de simetría para el problema de Kepler acotado debe identificarse con el grupo de rotaciones reales cuatridimensionales. Designada ordinariamente por $SO(4)$ o $R(4)$, dicha transformación conserva el valor de la forma cuadrática $x_\mu x_\mu$, donde todas las x_μ son reales. Una transformación ortogonal en cuatro dimensiones tiene diez condiciones impuestas a los dieciseis elementos de la matriz, por lo que sólo seis serán independientes. Considerando la transformación infinitesimal constituida por una sucesión de rotaciones en los distintos planos, podemos obtener fácilmente los seis generadores, correspondientes. Tres de ellos son rotaciones en los tres planos distintos x_i-x_j y por tanto corresponden a los generadores \mathbf{M}_i de las ecuaciones (4-117), con la diferencia de que se han añadido ceros en la fila y columna cuartas. Las tres restantes generan rotaciones infinitesimales en los planos x_i-x_4 . Así pues, la matriz generatriz para una rotación infinitesimal en el plano x_1-x_4 sería

$$\mathbf{N}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (9-136)$$

y \mathbf{N}_2 y \mathbf{N}_3 se darían de manera análoga. La multiplicación directa de matrices demuestra que estas seis matrices satisfacen las condiciones de conmutador (o de corchete de Lie)

$$[\mathbf{M}_i, \mathbf{M}_j] = \epsilon_{ijk} \mathbf{M}_k,$$

$$[\mathbf{N}_i, \mathbf{M}_j] = \epsilon_{ijk} \mathbf{N}_k,$$

$$[\mathbf{N}_i, \mathbf{N}_j] = \epsilon_{ijk} \mathbf{M}_k.$$

Como estas relaciones son las mismas que las de corchetes de Poisson (ecs. 9-128, 9-134 y 9-135), queda así probada la identificación con $R(4)$ del grupo de simetría del problema de Kepler acotado.

Notemos que en el caso del problema de Kepler con energía positiva (es decir, dispersión), \mathbf{A} sigue siendo una constante del movimiento,* pero el vector real reducido apropiado, en vez de ser \mathbf{D} , es el \mathbf{C} definido por

$$\mathbf{C} = \frac{\mathbf{A}}{\sqrt{2mE}}, \quad (9-137)$$

y las relaciones de corchete de Poisson para \mathbf{L} y \mathbf{C} son ahora

$$[L_i, L_j] = \epsilon_{ijk} L_k,$$

$$[C_i, L_j] = \epsilon_{ijk} C_k, \quad (9-138)$$

$$[C_i, C_j] = -\epsilon_{ijk} L_k.$$

Comparándolas con las ecuaciones (7-70) vemos que estas constantes de estructura son las mismas que para el grupo de Lorentz restringido, las cuales deben por tanto constituir el grupo de simetría para el problema de Kepler de energía positiva — en la Mecánica no relativista. Desde luego, debemos tener cuidado de no apreciar la cualidad de ideas físicas en esta situación. El problema de Kepler *no* contiene en él el germen de las concepciones fundamentales de la Relatividad restringida; es puramente un problema de Mecánica newtoniana no relativista. Que el grupo de simetría pueda entrañar un espacio de mayor número de dimensiones que el espacio ordinario se relaciona con el hecho de que la simetría que estamos buscando es una simetría en el espacio fásico de seis dimensiones. El grupo de simetría consiste en las transformaciones canónicas en este espacio que dejen invariada la hamiltoniana. No será, pues, sorprendente que pueda interpretarse el grupo en función de transformaciones de espacios de más de tres dimensiones.

El oscilador armónico isótropo bidimensional es otro sistema mecánico para el cual se identifica fácilmente un grupo de simetría. En coordenadas cartesianas, la hamiltoniana

* Los argumentos de §3-9 son independientes del signo de E o de la constante de rigidez k .

de este sistema se puede escribir en la forma

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + m^2\omega^2x^2) + \frac{1}{2m}(p_y^2 + m^2\omega^2y^2). \quad (9-139)$$

Como no depende explícitamente del tiempo, la hamiltoniana es constante e igual a la energía total del sistema. El eje z es un eje de simetría del sistema y por tanto, el momento cinético respecto a dicho eje (que, de hecho, es el momento cinético total) será también una constante del movimiento:

$$L = xp_y - yp_x. \quad (9-140)$$

Para este problema existen aún otras constantes del movimiento que se pueden escribir en forma de componentes de un tensor bidimensional simétrico \mathbf{A} definido por

$$A_{ij} = \frac{1}{2m}(p_i p_j + m^2\omega^2 x_i x_j). \quad (9-141)$$

De los tres elementos distintos del tensor, los términos de la diagonal se pueden identificar con las energías asociadas a los movimientos unidimensionales separados según los ejes x e y , respectivamente. Desde un punto de vista físico, como no hay acoplamiento entre los dos movimientos, las dos energías deben ser constantes por separado. De manera algo más formal, de la manera cómo se ha escrito H en la ecuación (9-139) resulta evidente que A_{11} y A_{22} tienen cada una un corchete de Poisson con H que es nulo. El elemento no diagonal de \mathbf{A} ,

$$A_{12} = A_{21} = \frac{1}{2m}(p_x p_y + m^2\omega^2 xy), \quad (9-142)$$

es algo más difícil de reconocer. Podemos ver fácilmente que es una constante del movimiento calculando el corchete de Poisson con H . En relación con los movimientos separados según x y según y , A_{11} y A_{22} están relacionados con las amplitudes de las oscilaciones, mientras que A_{12} está determinada por la diferencia de fase entre las dos vibraciones. Así pues, las soluciones del movimiento se pueden escribir en la forma

$$x = \sqrt{\frac{2A_{11}}{m\omega^2}} \text{sen}(\omega t + \theta_1),$$

$$y = \sqrt{\frac{2A_{22}}{m\omega^2}} \text{sen}(\omega t + \theta_2),$$

y de la ecuación (9-142) se deduce que

$$A_{12} = \sqrt{A_{11}A_{22}} \cos(\theta_2 - \theta_1). \quad (9-143)$$

La traza del tensor \mathbf{A} es la energía total del oscilador armónico. Con los elementos de la matriz podemos formar otras dos constantes del movimiento distintas, que conviene escribir en la forma

$$S_1 = \frac{A_{12} + A_{21}}{2\omega} = \frac{1}{2m\omega}(p_x p_y + m^2 \omega^2 xy), \quad (9-144)$$

$$S_2 = \frac{A_{22} - A_{11}}{2\omega} = \frac{1}{4m\omega}(p_y^2 - p_x^2 + m^2 \omega^2 (y^2 - x^2)). \quad (9-145)$$

A estas podemos añadir una tercera constante del movimiento:

$$S_3 = \frac{L}{2} = \frac{1}{2}(xp_y - yp_x). \quad (9-146)$$

Las cantidades S_i más la energía total H forman cuatro constantes del movimiento algebraicas que no contienen explícitamente el tiempo. Está claro que no todas ellas pueden ser independientes, porque en un sistema de dos grados de libertad puede haber como máximo tan sólo tres constantes del movimiento. Sabemos que la órbita del oscilador armónico isótropo es una elipse y se necesitan tres constantes del movimiento para describir los parámetros de la órbita en el plano —por ejemplo, el semieje mayor, la excentricidad y la orientación de la elipse. La cuarta constante del movimiento deberá estar relacionada con el paso de la partícula por un punto concreto en un tiempo dado y por tanto, dependerá explícitamente del tiempo. Luego, debe existir una relación única entre S_i y H . Es fácil demostrar por evaluación directa que*

$$S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = \frac{H^2}{4\omega^2}. \quad (9-147)$$

Con una manipulación inmediata de los corchetes de Poisson podemos comprobar que las cantidades S_i cumplen las relaciones

$$[S_i, S_j] = \epsilon_{ijk} S_k. \quad (9-148)$$

* Una forma equivalente a la condición dada por la ecuación (9-147) es que el determinante de \mathbf{A} es $L^2 \omega^2 / 4$. Recordemos que, análogamente, en el caso del problema de Kepler las componentes de la constante del movimiento \mathbf{A} no eran todas independientes de las otras constantes del movimiento. Existen dos relaciones entre \mathbf{A} , \mathbf{L} y H : las ecuaciones (3-83) y (3-87).

Son estas relaciones iguales a las del vector momento cinético tridimensional, o de los generadores de rotación en un espacio tridimensional. El grupo de transformaciones generado por S_i puede, por tanto, identificarse con $R(3)$ o $SO(3)$. En realidad, en la identificación hay cierta ambigüedad. Hemos visto anteriormente (cfr. p. 193) que existe un homomorfismo entre $R(3)$ y el grupo unimodular unitario $SU(2)$. Resulta* que en este caso es más apropiado $SU(2)$. Para vislumbrar las circunstancias que justifican esta elección podemos notar que la ecuación (9-147) sugiere que hay un espacio tridimensional cada uno de cuyos puntos corresponde a un conjunto particular de parámetros orbitales. Para una energía del sistema dada, la ecuación (9-147) dice que, en este espacio, los «puntos» de la órbita se encuentran sobre una esfera. Las constantes S_i generan en esta esfera rotaciones tridimensionales, es decir, cambian una órbita en otra órbita que tiene igual energía. Puede demostrarse que S_i genera una transformación que cambia la excentricidad de la órbita y que para toda excentricidad final dada se pueden encontrar *dos* transformaciones que lleven a ella. Esta cualidad bivalente de la transformación es la que indica que es $SU(2)$ y no $R(3)$ el grupo de simetría correcto para el oscilador armónico bidimensional. En caso de mayor número de dimensiones, las constantes de estructura de los grupos de rotación y los grupos $SU(n)$ ya no son idénticas y puede establecerse una neta separación entre ambos. En el caso del oscilador armónico isótropo tridimensional hay de nuevo una constante del movimiento tensorial definida por la ecuación (9-141) con la diferencia de que ahora los índices toman los valores 1, 2 y 3. Las componentes distintas de este tensor, junto con las componentes de L satisfacen ahora las relaciones de corchete de Poisson con constantes de estructura un tanto complicadas que pertenecen a $SU(3)$. Se puede demostrar† que para el oscilador armónico isótropo n -dimensional el grupo de simetría es $SU(n)$.

Hemos señalado (cfr. p. 131) que existe una relación entre la existencia de constantes del movimiento algebraicas adicionales —y por tanto de grupos de simetría superiores— y la degeneración de los movimientos del sistema. En el caso de Kepler y del oscilador armónico isótropo las constantes del movimiento adicionales están relacionadas con parámetros de la órbita. A menos que la órbita sea cerrada, es decir, que el movimiento esté confinado a una sola curva, será difícil hablar de tales parámetros. Solamente cuando las diversas componentes del movimiento tengan periodos conmensurados, es decir, sean degeneradas, será cerrada la órbita. El ejemplo clásico lo tenemos en el oscilador anisótropo bidimensional. Cuando las frecuencias en las direcciones x e y sean un múltiplo entero de la otra, la partícula recorrerá una curva de Lissajous cerrada. Pero si las frecuencias no son conmensurables entre sí, el movimiento de la partícula llena todo el espacio o sea es ergódico, llegando a aproximarse cuanto queramos a cualquier punto concreto contenido en el rectángulo definido por las energías de movimiento en las dos direcciones. La naturaleza exacta de esta relación entre propiedades de simetría y degeneración sigue siendo tema de estudio. Los intentos de encontrar grupos de simetría complicados (tal vez complejos) para sistemas no degenerados, aplicables a todos los problemas de un mismo número de grados de libertad, no han resultado fructíferos todavía. En el próximo capítulo tendremos ocasión de considerar más a fondo la relación entre simetría y degeneración.

* Véase H. V. McIntosh, *Am. Jour. Phys.* 27, 620 (1959) para un estudio más completo.

† Esto lo demostró para el caso mecanocuántico G. A. Baker, Jr., *Phys. Rev.* 103, 1119 (1956), mediante razonamientos que también se pueden expresar en el lenguaje de la Mecánica clásica.

9-8 TEOREMA DE LIOUVILLE

Como aplicación final del formalismo de los corchetes de Poisson, estudiaremos brevemente un teorema fundamental de la Mecánica estadística conocido por el nombre de teorema de Liouville. Aun cuando en la Mecánica clásica el movimiento exacto de un sistema cualquiera está determinado por completo por las condiciones iniciales, a menudo resulta impracticable calcular una solución exacta para sistemas complejos. Por ejemplo, es evidente que no podemos esperar poder calcular por completo el movimiento de unas 10^{23} moléculas contenidas en un volumen de gas. Además, es frecuente que las condiciones iniciales sólo se conozcan de manera incompleta. Podemos decir que en t_0 una masa de gas tenga cierta energía, pero no podemos determinar las coordenadas y velocidad inicial de cada molécula. Por tanto, la Mecánica estadística no intenta obtener una solución completa en caso de sistemas que contengan muchas partículas. En vez de ello, pretende predecir ciertas propiedades medias examinando el movimiento de un gran número de sistemas iguales. Los valores de las cantidades buscadas se calculan entonces formando promedios extendidos a todos los sistemas de esta *colectividad*. Todos los miembros de ésta se parecen al sistema real tanto como lo permita nuestro imperfecto conocimiento, pero pueden tener cualquiera de las condiciones iniciales compatibles con esta información incompleta. Como cada sistema está representado por un punto en el espacio fásico, la colectividad de sistemas corresponderá a un enjambre de puntos en el espacio fásico. El teorema de Liouville dice que la densidad de sistemas en la proximidad de un cierto sistema dado en el espacio fásico se mantiene constante en el transcurso del tiempo.

La densidad, D , tal como se ha definido puede variar con el tiempo a través de dos mecanismos separados. Como es la densidad en la proximidad del punto figurativo de un sistema dado, habrá una dependencia *implícita* al variar con el tiempo las coordenadas del sistema (q_i, p_i) y el punto figurativo vagará por el espacio fásico. También puede haber una dependencia explícita del tiempo. La densidad puede aún variar con el tiempo aun cuando se calcule en un punto fijo del espacio fásico. Según la ecuación (9-94), la derivada total de D respecto al tiempo debida a los dos tipos de variación temporal puede escribirse en la forma

$$\frac{dD}{dt} = [D, H] + \frac{\partial D}{\partial t}, \quad (9-149)$$

donde el corchete de Poisson se debe a la dependencia implícita y el último término a la explícita.

La colectividad de puntos del sistema que se mueven a través del espacio fásico se comporta de manera muy parecida a como lo haría un fluido en un espacio multidimensional y existen numerosas semejanzas entre nuestro estudio de la colectividad y las conocidas nociones de la Dinámica de fluidos. En la ecuación (9-149) la derivada total es una derivada de la densidad cuando seguimos el movimiento en el tiempo de una porción particular del «fluido» colectividad. Se le da a veces el nombre de derivada *material* o *hidrodinámica*. En cambio, la derivada parcial es para (q, p) fijas; es como si nos estacionáramos en un punto particular del espacio fásico y midiéramos la variación de la

densidad en el transcurso del tiempo cuando la colectividad de puntos del sistema pase por donde estamos. Estas dos derivadas corresponden a dos puntos de vista que se utilizan frecuentemente al considerar el movimiento de un fluido. La derivada parcial en un punto fijo del espacio fásico está en línea con el punto de vista de Euler que considera que las **coordenadas sólo identifican un punto del espacio**. La derivada total encaja en la imagen de Lagrange en la cual se siguen en el tiempo las partículas individuales; las coordenadas más bien identifican una partícula que un punto en el espacio. Básicamente, nuestra consideración del espacio fásico ha estado más próxima al punto de vista de Lagrange; la colección de cantidades (q, p) identifica un sistema y su configuración cambiante con el tiempo.

Consideremos un volumen infinitesimal del espacio fásico que rodee a un punto figurativo dado del sistema, estando limitado el volumen por una cierta superficie de puntos figurativos próximos en el instante $t = 0$. En el transcurso del tiempo, los puntos figurativos que definen el volumen se mueven por el espacio fásico y el volumen que contienen adoptará diversas formas a medida que progresa el tiempo. La curva de trazos de la figura 9-3 indica esquemáticamente la evolución con el tiempo del volumen infinitesimal. Está claro que el número de sistemas dentro del volumen se mantiene **constante, ya que un sistema que esté inicialmente dentro no podrá salir nunca**. Si un cierto punto figurativo del sistema cruzase la frontera, ocuparía en cierto instante la misma posición en el espacio fásico que uno de los puntos figurativos que definen la superficie límite. Como el movimiento subsiguiente de un sistema está determinado unívocamente por su situación en el espacio fásico en un instante particular, los dos sistemas se moverían **juntos de entonces en adelante**. Por tanto, el sistema no podrá abandonar nunca el volumen. Por análogo razonamiento, un sistema que inicialmente esté fuera no podrá nunca penetrar en el volumen.

Hemos visto que en la imagen activa de una transformación canónica el movimiento de un punto figurativo en el tiempo no es más que la evolución de una transformación canónica generada por la hamiltoniana. Las variables canónicas (q, p) en el instante t_2 , según vemos en la figura 9-3, están relacionadas con las variables en el instante t_1 ,

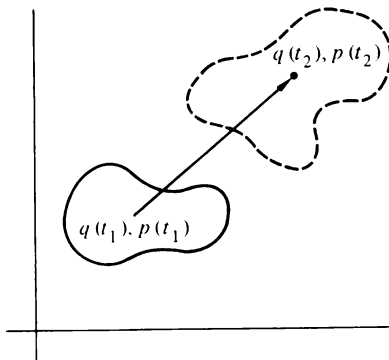


FIGURA 9-3
Movimiento de un volumen en el espacio fásico.

mediante una transformación canónica particular. El cambio del elemento de volumen infinitesimal en torno al punto figurativo a lo largo del intervalo de tiempo viene dado por la misma transformación canónica. Ahora bien, el invariante integral de Poincaré (ec. 9-87) dice que un elemento de volumen del espacio fásico es invariante ante una transformación canónica. Por tanto, el tamaño del elemento de volumen en torno al punto del sistema no puede variar con el tiempo.

Así pues, tanto el número de sistemas dN de la región infinitesimal como el volumen dV son constantes y en consecuencia, la densidad

$$D = \frac{dN}{dV}$$

también deberá ser constante en el tiempo, es decir,

$$\frac{dD}{dt} = 0,$$

lo cual demuestra el teorema de Liouville. De la ecuación (9-149) deducimos otra manera de enunciar este teorema, cual es

$$\frac{\partial D}{\partial t} = -[D, H]. \quad (9-150)$$

Cuando la colectividad de sistemas está en equilibrio estadístico, el número de sistemas en un estado dado debe ser constante en el tiempo, lo que equivale a decir que la densidad de puntos figurativos en un punto dado del espacio fásico no cambia con el tiempo. La variación de D con el tiempo en un punto fijo corresponde a la derivada parcial respecto a t , la cual por tanto debe anularse en el equilibrio estadístico. De la ecuación (9-150) se deduce que la condición de equilibrio se puede expresar en la forma

$$[D, H] = 0.$$

Por tanto, podemos asegurar el equilibrio tomando para la densidad D una función de aquellas constantes del movimiento del sistema en las que no intervenga explícitamente el tiempo, ya que entonces el corchete de Poisson con H deberá ser nulo. Así, en el caso de sistemas conservativos D podrá ser una función cualquiera de la energía y la condición de equilibrio se satisfará automáticamente. Las características de la colectividad estarán **determinadas por la elección de función D . Por ejemplo, una colectividad bien conocida, la colectividad *microcanónica*, tiene lugar si D es constante para sistemas que tengan una energía dada y nula en los demás casos.**

Hemos presentado estas consideraciones para ilustrar la utilidad de la formulación por corchetes de Poisson en la Mecánica estadística clásica. Profundizar más en estas cuestiones nos apartaría demasiado de nuestro objetivo.

REFERENCIAS SUGERIDAS

C. CARATHÉODORY, *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*. Las transformaciones canónicas o de contacto las introdujeron los matemáticos por primera vez en la teoría de ecuaciones en derivadas parciales. Gran parte de las propiedades de las transformaciones que utilizan hoy en día los físicos se desarrollaron primeramente para estos fines. La exposición más completa de estos orígenes matemáticos de los que proceden las aplicaciones físicas se encuentra en el tratado magistral de Carathéodory. Afortunadamente, en la actualidad se puede encontrar traducido al inglés. Las referencias pertinentes se encuentran en los capítulos 4-7 del Vol. 1 que trata de las ecuaciones en derivadas parciales. Entre otros temas contienen una demostración más completa de lo citado anteriormente (p. 492) con el nombre de «Teorema de Carathéodory». Se vuelve una y otra vez a Carathéodory para ver cómo «se hace adecuadamente».

H. RUND, *Hamilton-Jacobi Theory in the Calculus of Variations*. Esta referencia proporciona una imagen matemática algo diferente (en el capítulo 2, §§ 12-14) teniendo bien presentes las aplicaciones físicas. En gran parte del estudio se considera que el tiempo es una de las variables canónicas.

M. BORN, *The Mechanics of the Atom*. El tema de las transformaciones canónicas de la Mecánica clásica desempeñó un papel importante en las primeras formulaciones de la teoría cuántica de Bohr y de la moderna Mecánica cuántica. Por ello muchos tratados dedicados ostensiblemente a una u otra de estas formas de la Mecánica cuántica contienen a menudo exposiciones detalladas de las partes necesarias de la Mecánica clásica. De entre ellos destaca este libro de Born publicado en 1924, escrito con anterioridad a la aparición de la Mecánica ondulatoria. El primer capítulo estudia sucintamente las transformaciones canónicas y da muchos ejemplos físicos interesantes. No se hace mención de los corchetes de Poisson ya que sólo tuvieron interés para el físico moderno cuando apareció la formulación de Heisenberg y de Dirac de la Mecánica cuántica.

R. C. TOLMAN, *The Principles of Statistical Mechanics*. Verdadera enciclopedia de la Física teórica, el capítulo II de este voluminoso libro da un estudio breve pero claro de las transformaciones canónicas y de temas semejantes de la Mecánica clásica. En el tratamiento se incluyen las propiedades de los corchetes de Poisson. El §19, Capítulo III, trata del teorema de Liouville.

C. LANZOS, *The Variational Principles of Mechanics*. Las transformaciones canónicas entraron por primera vez en la Mecánica a través de la teoría de perturbaciones en la Mecánica clásica, si bien desde hacía mucho tiempo se sabía perfectamente qué eran. (Las referencias acerca de estas aplicaciones se darán más adelante, en el Capítulo 11 acerca de la teoría de perturbaciones.) En la actualidad, todo texto de Mecánica de nivel superior al intermedio dedica mucha atención a los temas de formulaciones por corchetes de Poisson y transformaciones canónicas. Sólo podemos citar explícitamente algunas referencias. Lanczos tiene un punto de vista diferente que los demás; habla mucho y escribe relativamente pocas ecuaciones. El tema está sujeto a sus orígenes matemáticos, pero la utilización es física.

L. PARS, *A Treatise on Analytical Dynamics*. En este texto se hace uso de las transformaciones canónicas antes de llamarlas así explícitamente y estudiarlas (como transformaciones de contacto) en el capítulo 24. Se incluyen los métodos simpléctico y generador. Es particularmente notable una demostración relativa al teorema de Carathéodory que conduce explícitamente a la función generatriz.

J. L. SYNGE, *Classical Dynamics*. En la mayor parte del libro Synge trabaja en un espacio fásico que incluye a t y su cantidad de movimiento conjugada H , pero por lo demás, el método presenta

considerables semejanzas con el que se ha adoptado aquí. El método simpléctico se da en forma matricial, si bien la notación es totalmente diferente. Se da un método para pasar del procedimiento simpléctico al de la función generatriz, pero el camino a seguir no queda claro o no siempre resulta convincente.

C. W. KILMISTER, *Hamiltonian Dynamics*. Para los poseedores de una base matemática moderna de Análisis tensorial y Geometría diferencial, este librito presenta un estudio elegante y compacto con fuerte énfasis en el método simpléctico. El autor presenta un «generador universal» en η y ζ de donde se pueden deducir los cuatro tipos.

E. J. SALETAN y A. H. CROMER, *Theoretical Mechanics*. Se dedica mucho espacio a las transformaciones canónicas principalmente desde el punto de vista simpléctico, pero incluyendo la transición al método de la función generatriz. El término canónica se utiliza en el sentido que damos aquí a la transformación canónica extensa. Se añade además la poco ortodoxa, si no definitivamente peligrosa, noción de transformación *canonoide* —que sólo es canónica para determinados tipos de hamiltoniana. (La mayor parte de aplicaciones de las transformaciones canónicas dependen de la propiedad de ser canónicas para *todas* las hamiltonianas.) Se estudian explícitamente las transformaciones canónicas que dependen de un parámetro continuo.

E. C. G. SUDARSHAN y N. MUKUNDA, *Classical Dynamics*. Es un tratado de Mecánica impregnado de un método de teoría de grupos. Se podría denominar Mecánica clásica por un físico especializado en teoría de partículas. Gran parte del libro se ocupa verdaderamente de transformaciones canónicas y de las implicaciones de las simetrías del sistema y las transformaciones.

H. V. MCINTOSH, *Symmetry and Degeneracy*, en *Group Theory and its Applications*, vol. II, E. M. Loeb, ed. Se hace referencia de nuevo a esta entusiástica revisión de las relaciones entre simetrías del sistema y constantes del movimiento. Aun cuando raramente se mencionan las transformaciones canónicas *per se*, aparece frecuentemente la noción de que los generadores de operaciones de simetría proporcionan las constantes del movimiento y se presentan muchos ejemplos.

EJERCICIOS

1. Uno de los intentos de combinar los dos sistemas de ecuaciones de Hamilton en uno consiste en tomar q y p como partes real e imaginaria de un número complejo. Demostrar directamente a partir de las ecuaciones de movimiento de Hamilton que, en el caso de un sistema de un grado de libertad, la transformación

$$Q = q + ip, \quad P = Q^*$$

no es canónica si se deja inalterada la hamiltoniana. ¿Podemos encontrar otro sistema de coordenadas Q, P que estén relacionadas con Q, P mediante un cambio de escala tan sólo y sean canónicas?

2. a) En el caso de un sistema unidimensional con la hamiltoniana

$$H = \frac{p^2}{2} - \frac{1}{2q^2},$$

demostrar que existe una constante del movimiento

$$D = \frac{pq}{2} - Ht.$$

b) Como generalización del apartado (a), en el caso de movimiento en un plano con la hamiltoniana

$$H = |\mathbf{p}|^n - ar^{-n},$$

donde \mathbf{p} es el vector de las cantidades de movimiento conjugadas a las coordenadas cartesianas, demostrar que hay una constante del movimiento

$$D = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{n} - Ht.$$

c) La transformación $Q = \lambda q, p = \lambda P$ es, evidentemente canónica. Sin embargo, la misma transformación con dilatación del tiempo $t, Q = \lambda q, p = \lambda P, t' = \lambda^2 t$, no lo es. Demostrar, no obstante, que las ecuaciones de movimiento para q y p con la hamiltoniana del apartado (a) son invariantes ante la transformación. Se dice entonces que la constante del movimiento D está asociada a esta invarianza.

3. En §8-4 se estudian algunos problemas del tratamiento del tiempo como variable canónica. Si pudiéramos obviar dichas dificultades, demostrar que las ecuaciones de transformación en las que t se considera variable canónica se reducen a las ecuaciones (9-14) si dicha transformación no afecta en realidad a la escala de tiempos.

4. Demostrar directamente que la transformación

$$Q = \log \left(\frac{1}{q} \operatorname{sen} p \right), \quad P = q \operatorname{ctg} p$$

es canónica.

5. Demostrar directamente que, en el caso de un sistema de un grado de libertad, la transformación

$$Q = \operatorname{arctg} \frac{\alpha q}{p}, \quad P = \frac{\alpha q^2}{2} \left(1 + \frac{p^2}{\alpha^2 q^2} \right)$$

es canónica, donde α es una constante arbitraria de dimensiones adecuadas.

6. Las ecuaciones de transformación entre dos sistemas de coordenadas son

$$Q = \log (1 + q^2 \cos p),$$

$$P = 2(1 + q^2 \cos p)q^2 \operatorname{sen} p.$$

a) A partir de estas ecuaciones de transformación, demostrar directamente que Q , P son variables canónicas si lo son q y p .

b) Demostrar que la función que genera esta transformación es

$$F_3 = -(e^Q - 1)^2 \operatorname{tg} p.$$

7. a) Si para una transformación canónica dada existe cada uno de los cuatro tipos de función generatriz, utilizar la transformación de Legendre para deducir relaciones entre ellas.

b) Hallar una función generatriz del tipo F_4 para la transformación identidad y del tipo F_3 para la transformación de intercambio.

c) Demostrar que para una transformación puntual ortogonal de q en un sistema de n grados de libertad, las nuevas cantidades de movimiento vienen dadas igualmente por la transformación ortogonal de un vector de n dimensiones cuyas componentes son las cantidades de movimiento antiguas más un gradiente en el espacio de configuraciones.

8. Probar directamente que la transformación

$$Q_1 = q_1, \quad P_1 = p_1 - 2p_2,$$

$$Q_2 = p_2, \quad P_2 = -2q_1 - q_2$$

es canónica y hallar una función generatriz.

9. Para la transformación puntual en un sistema de dos grados de libertad,

$$Q_1 = q_1^2, \quad Q_2 = q_1 + q_2,$$

hallar las ecuaciones de transformación más generales para P_1 y P_2 compatibles con que la transformación global sea canónica. Demostrar que con una elección particular de P_1 y P_2 la hamiltoniana

$$H = \left(\frac{p_1 - p_2}{2q_1} \right)^2 + p_2 + (q_1 + q_2)^2$$

se puede transformar en otra en la cual sean ignorables Q_1 y Q_2 . Resolver el problema por este medio y obtener expresiones de q_1 , q_2 , p_1 y p_2 en función del tiempo y de sus valores iniciales.

10. Demostrar que la siguiente transformación para un sistema de un grado de libertad,

$$Q = q \cos \alpha - p \operatorname{sen} \alpha,$$

$$P = q \operatorname{sen} \alpha + p \cos \alpha,$$

cumple la condición simpléctica para todo valor del parámetro α . Hallar una función generatriz para la transformación. ¿Cuál es el significado físico de la transformación para $\alpha = 0$? ¿Y para $\alpha = \pi/2$? ¿Sirve la función generatriz para estos dos casos?

11. Determinar si la transformación

$$Q_1 = q_1 q_2, \quad P_1 = \frac{p_1 - p_2}{q_2 - q_1} + 1,$$

$$Q_2 = q_1 + q_2, \quad P_2 = \frac{q_2 p_2 - q_1 p_1}{q_2 - q_1} - (q_2 + q_1)$$

es canónica.

12. Demostrar que las condiciones directas para una transformación canónica vienen dadas de manera inmediata por la condición simpléctica expresada en la forma

$$\mathbf{JM} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{J}.$$

13. El conjunto de transformaciones canónicas restringidas tiene la propiedad de grupo definida por las condiciones expuestas en el ejercicio 9 del capítulo 7. Comprobar esta afirmación, una vez utilizando la invarianza del principio de Hamilton ante una transformación canónica (cfr. ec. 9-11) y de nuevo, utilizando la condición simpléctica.

14. Demostrar, por un método cualquiera, que la siguiente transformación es canónica:

$$x = \frac{1}{\alpha} (\sqrt{2P_1} \operatorname{sen} Q_1 + P_2), \quad p_x = \frac{\alpha}{2} (\sqrt{2P_1} \cos Q_1 - Q_2),$$

$$y = \frac{1}{\alpha} (\sqrt{2P_1} \cos Q_1 + Q_2), \quad p_y = -\frac{\alpha}{2} (\sqrt{2P_1} \operatorname{sen} Q_1 - P_2).$$

donde α es un parámetro fijo.

Aplicar esta transformación al problema de una partícula de carga q que se mueva en un plano normal a un campo magnético constante \mathbf{B} . Expresar la hamiltoniana para este problema en las coordenadas (Q, P) dejando que el parámetro α adopte la forma

$$\alpha^2 = \frac{qB}{c}.$$

A partir de esta hamiltoniana, obtener el movimiento de la partícula en función del tiempo.

15. Hallar en qué condiciones

$$Q = \frac{\alpha p}{x}, \quad P = \beta x^2,$$

donde α y β son constantes, representa una transformación canónica para un sistema de un grado de

libertad y obtener una función generatriz adecuada. Aplicar la transformación a la solución del oscilador armónico lineal.

16. Probar que la transformación

$$\begin{aligned} Q_1 &= q_1^2, & Q_2 &= q_2 \sec p_2, \\ P_1 &= \frac{p_1 \cos p_2 - 2q_2}{2q_1 \cos p_2}, & P_2 &= \operatorname{sen} p_2 - 2q_1 \end{aligned}$$

es canónica, mediante un método cualquiera. Hallar una función generatriz adecuada que conduzca a dicha transformación.

17. a) Demostrar que la transformación

$$Q = p + iaq, \quad P = \frac{p - iaq}{2ia}$$

es canónica y hallar una función generatriz.

b) Utilizar la transformación para resolver el problema del oscilador armónico lineal.

18. a) La hamiltoniana de un sistema tiene la forma

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{q^2} + p^2 q^4 \right).$$

Hallar la ecuación de movimiento para q .

b) Hallar una transformación canónica que reduzca H a la forma de un oscilador armónico. Demostrar que, para las variables transformadas, la solución es tal que se cumple la ecuación de movimiento hallada en el apartado (a).

19. Un sistema de n partículas se mueve en un plano bajo la influencia de fuerzas de interacción que derivan de términos potenciales que sólo dependen de las separaciones escalares de las partículas.

- Utilizando coordenadas polares planas para cada partícula (relativas a un origen común), identificar la forma de la hamiltoniana para el sistema.
- Hallar una función generatriz para la transformación canónica que corresponda a una transformación a coordenadas que giren en el plano en sentido antihorario con velocidad angular ω uniforme (la misma para todas las partículas). ¿Cuáles serán las ecuaciones de transformación para las cantidades de movimiento?
- ¿Cuál es la nueva hamiltoniana? ¿Qué significado físico podemos dar a la diferencia entre la hamiltoniana antigua y la nueva?

20. a) En el problema de pequeñas oscilaciones en torno a un movimiento estacionario, demostrar que en el punto de movimiento estacionario todas las variables η de la hamiltoniana son constantes. Si los valores para movimiento estacionario son η_0 con lo que $\eta = \eta_0 + \zeta$, demostrar que a la

aproximación no nula inferior, la hamiltoniana efectiva para oscilación pequeña se puede escribir en la forma

$$H(\eta_0, \zeta) = \frac{1}{2} \zeta \mathbf{S} \zeta,$$

donde \mathbf{S} es una matriz cuadrada con componentes que sólo son función de η_0 .

b) Suponiendo distintas todas las frecuencias de oscilación pequeña, sea \mathbf{M} una matriz cuadrada de $2n \times 2n$ formada por las componentes de un conjunto posible de vectores propios (tanto para frecuencias positivas como negativas). Sólo están fijas las direcciones de los vectores propios, no sus módulos. Demostrar que es posible aplicar condiciones a los vectores propios (en realidad fijando sus módulos) que hagan de \mathbf{M} la matriz jacobiana de una transformación canónica.

c) Demostrar que la transformación canónica así encontrada transforma la hamiltoniana efectiva dándole la forma

$$H = i\omega_j q_j p_j,$$

donde ω_j es la magnitud de las frecuencias nomales. ¿Cuáles son las ecuaciones de movimiento en este sistema de coordenadas canónicas?

d) Por último, demostrar que

$$F_2 = q_j P_j + \frac{i}{2} \frac{P_j^2}{\omega_j} - \frac{i}{4} \omega_j q_j^2$$

conduce a una transformación canónica que descompone a H en las hamiltonianas de un conjunto de osciladores armónicos lineales no acoplados que oscilan según los modos normales.

21. a) Utilizando los corchetes de Poisson fundamentales hallar los valores de α y β para los cuales las ecuaciones

$$Q = q^x \cos \beta p, \quad P = q^x \sin \beta p$$

representan una transformación canónica.

b) ¿Para qué valores de α y β representan estas ecuaciones una transformación canónica *extensa*? Hallar una función generatriz de la forma F_3 para la transformación.

c) En base al apartado (b), ¿pueden modificarse las ecuaciones de transformación de manera que describan una transformación canónica para todos los valores de β ?

22. En el caso del cuerpo rígido simétrico, obtener fórmulas para calcular los corchetes de Poisson

$$[\dot{\phi}, f(\theta, \phi, \psi)], \quad [\dot{\psi}, f(\theta, \phi, \psi)]$$

donde θ , ϕ y ψ son los ángulos de Euler y f es una función arbitraria de dichos ángulos de Euler.

23. Una partícula cargada se mueve por el espacio con un campo magnético constante \mathbf{B} tal que

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{B} \times \mathbf{r})$$

- a) Si son v_j las componentes cartesianas de la velocidad de la partícula, calcular los corchetes de Poisson

$$[v_i, v_j], \quad i \neq j = 1, 2, 3.$$

- b) Si es p_i la cantidad de movimiento canónica conjugada de x_i , calcular también los corchetes de Poisson

$$\begin{aligned} [x_i, v_j], & \quad [p_i, v_j], \\ [x_i, \dot{p}_j], & \quad [p_i, \dot{p}_j]. \end{aligned}$$

24. El semieje mayor a de la órbita elíptica de Kepler y la excentricidad e son funciones de las integrales primeras del movimiento y por tanto de las variables canónicas. Análogamente, la anomalía media

$$\phi \equiv \omega(t - T) = \psi - e \operatorname{sen} \psi$$

es función de r , θ y de las cantidades de movimiento conjugadas. Aquí, T es el tiempo de paso por el periastron y es una constante del movimiento. Calcular los corchetes de Poisson que pueden formarse de a , e , ϕ , ω y T . En realidad sólo hay nueve corchetes de Poisson distintos no nulos entre estas cantidades.

25. Demostrar que se cumple la identidad de Jacobi si el signo de corchetes de Poisson se emplea para representar al conmutador de dos matrices cuadradas:

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = \mathbf{AB} - \mathbf{BA}.$$

Demostrar también que para la misma representación de corchetes de Poisson que

$$[\mathbf{A}, \mathbf{BC}] = [\mathbf{A}, \mathbf{B}]\mathbf{C} + \mathbf{B}[\mathbf{A}, \mathbf{C}].$$

26. Probar la ecuación (9-83) utilizando la notación matricial simpléctica para los corchetes de Lagrange y Poisson.

27. Verificar la análoga de la identidad de Jacobi para los corchetes de Lagrange,

$$\frac{\partial \{u, v\}}{\partial w} + \frac{\partial \{v, w\}}{\partial u} + \frac{\partial \{w, u\}}{\partial v} = 0,$$

donde u , v y w son tres funciones mediante las cuales se puede especificar el sistema (q, p) .

28. a) Probar que el corchete de Poisson de dos constantes del movimiento es otra constante del movimiento incluso cuando las constantes dependen explícitamente del tiempo.

b) Demostrar que si la hamiltoniana y una cantidad F son constantes del movimiento, la derivada parcial n -ésima de F respecto a t debe también ser una constante del movimiento.

c) A título de ilustración de este resultado, consideremos el movimiento uniforme de una

partícula libre de masa m . La hamiltoniana se conserva ciertamente y existe una constante del movimiento

$$F = x - \frac{pt}{m}.$$

Demostrar por cálculo directo que la derivada parcial de F respecto a t , que es una constante del movimiento, coincide con $[H, F]$.

29. Empleando corchetes de Poisson, demostrar que para un oscilador armónico unidimensional existe una constante del movimiento u definida así:

$$u(q, p, t) = \ln(p + im\omega q) - i\omega t, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

¿Cuál es el significado físico de esta constante del movimiento?

30. Un sistema de dos grados de libertad está descrito por la hamiltoniana

$$H = q_1 p_1 - q_2 p_2 - aq_1^2 + bq_2^2.$$

Demostrar que

$$F_1 = \frac{p_1 - aq_1}{q_2} \quad \text{y} \quad F_2 = q_1 q_2$$

son constantes del movimiento. ¿Existen más constantes del movimiento algebraicas independientes? ¿Puede construirse alguna a partir de la identidad de Jacobi?

31. Establecer el monopolio magnético descrito en el ejercicio 23 del capítulo 3 con formulación de Hamilton (podemos necesitar el empleo de coordenadas polares esféricas). Por medio de la formulación con corchetes de Poisson, demostrar que se conserva la cantidad D definida en dicho ejercicio.

32. Obtener el movimiento en el tiempo de un oscilador armónico lineal por medio de la solución formal para la versión del corchete de Poisson de la ecuación de movimiento deducida de la ecuación (9-116). Suponer que en el instante $t = 0$ los valores iniciales son x_0 y p_0 .

33. Una partícula se mueve en una dimensión bajo un potencial

$$V = \frac{mk}{x^2}.$$

Hallar x en función del tiempo utilizando la solución simbólica de la forma de corchete de Poisson de la ecuación de movimiento para la cantidad $y = x^2$. Las condiciones iniciales son que en $t = 0$, $x = x_0$ y $v = 0$.

34. a) Comprobar que la ecuación (9-123) puede escribirse en forma de afinor así:

$$[\mathbf{F}, \mathbf{L}] = -\mathbf{1} \times \mathbf{F} = -\mathbf{F} \times \mathbf{1}.$$

b) Demostrar que si \mathbf{n} es un vector unitario normal al plano orbital del movimiento bajo una fuerza central, entonces si \mathbf{F} es una función vectorial cualquiera de la posición y la cantidad de movimiento solamente, se deduce que

$$[\mathbf{F}, \mathbf{n}] = -\frac{\mathbf{F} \times (\mathbf{1} \cdot \mathbf{n})}{L},$$

donde L es el módulo del momento cinético orbital.

35. a) En el caso de una sola partícula, demostrar directamente, es decir, por cálculo directo de los corchetes de Poisson, que si u es una función escalar de sólo r^2 , p^2 y $\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}$, entonces

$$[u, \mathbf{L}] = 0.$$

b) Análogamente, demostrar de manera directa que si \mathbf{F} es una función vectorial

$$\mathbf{F} = u\mathbf{r} + v\mathbf{p} + w(\mathbf{r} \times \mathbf{p}),$$

donde u , v y w son funciones escalares del mismo tipo que se ha citado en el apartado (a), será

$$[F_i, L_j] = \epsilon_{ijk} F_k.$$

36. a) Utilizando el teorema referente a corchetes de Poisson de funciones vectoriales y componentes del momento cinético, demostrar que si \mathbf{F} y \mathbf{G} son dos funciones vectoriales de las coordenadas y las cantidades de movimiento solamente, entonces

$$[\mathbf{F} \cdot \mathbf{L}, \mathbf{G} \cdot \mathbf{L}] = \mathbf{L} \cdot (\mathbf{G} \times \mathbf{F}) + L_i L_j [F_i, G_j].$$

b) Sea \mathbf{L} el momento cinético total de un cuerpo rígido con un punto fijo y sean L_μ sus componentes según un sistema de ejes cartesianos fijos en el cuerpo rígido. Por medio del apartado (a) hallar una expresión general para

$$[L_\mu, L_\nu], \quad \mu, \nu = 1, 2, 3.$$

(Sugerencia: Para \mathbf{F} y \mathbf{G} tomar vectores unitarios según los ejes μ y ν .)

c) De las ecuaciones de movimiento por corchetes de Poisson para L_μ deducir las ecuaciones de movimiento de Euler para un cuerpo rígido.

37. Plantear el problema del péndulo esférico con formulación de Hamilton, utilizando coordenadas polares esféricas para las q_i . Calcular directamente en función de estas variables canónicas los siguientes corchetes de Poisson:

$$[L_x, L_y], \quad [L_y, L_z], \quad [L_z, L_x],$$

demostrando que tienen los valores predichos por la ecuación (9-128). ¿Por qué pueden tomarse p_θ y p_ϕ como cantidades de movimiento canónicas, aun siendo componentes perpendiculares del momento cinético?

38. En la página 510 se ha demostrado que si se conservan dos componentes cualesquiera del momento cinético, se conserva el momento cinético total. Si dos de sus componentes son idénticamente nulas, la tercera deberá conservarse. De esto podría parecer que en todo movimiento confinado a un plano, con lo que las componentes del momento cinético en el plano son nulas, el momento cinético total es constante. Para esta predicción parecen haber algunas contradicciones; p. ej., el momento cinético de un resorte oscilante de un reloj de pulsera, o el momento cinético de un disco plano vertical que rueda hacia abajo por un plano inclinado. Discutir la fuerza de estas objeciones y si el enunciado del teorema precisa de algunas restricciones.

39. a) A partir de la condición de corchete de Poisson para cantidades conservativas, demostrar que el vector \mathbf{A} de Laplace-Runge-Lenz,

$$\mathbf{A} = \mathbf{p} \times \mathbf{L} - \frac{mk\mathbf{r}}{r},$$

es una constante del movimiento para el problema de Kepler.

b) Comprobar las relaciones de corchetes de Poisson para las componentes de \mathbf{A} dadas por la ecuación (9-131).

40. a) Comprobar que las componentes de la matriz bidimensional \mathbf{A} definida por la ecuación (9-141) son constantes del movimiento en el problema del oscilador armónico isótropo bidimensional.

b) Comprobar que las cantidades S_i , $i = 1, 2, 3$, definidas por las ecuaciones (9-144), (9-145), (9-146), tienen las propiedades indicadas en las ecuaciones (9-147) y (9-148).

Capítulo 10

Teoría de Hamilton-Jacobi

Ya hemos mencionado que las transformaciones canónicas pueden utilizarse para proporcionar un método general de resolución de problemas mecánicos. Se han sugerido dos métodos. Si se conserva la hamiltoniana, se podría obtener una solución pasando a nuevas coordenadas canónicas que sean todas cíclicas, puesto que la integración de las nuevas ecuaciones resulta entonces trivial. Otra técnica consiste en buscar una transformación canónica que lleve de las coordenadas y cantidades de movimiento, (q, p) , en el instante t , a un nuevo sistema de cantidades constantes que pueden ser los $2n$ valores iniciales, (q_0, p_0) en $t = 0$. Con una tal transformación, las ecuaciones de transformación que relacionan las antiguas variables canónicas con las nuevas constituirán exactamente la solución del problema mecánico buscada:

$$q = q(q_0, p_0, t),$$

$$p = p(q_0, p_0, t),$$

ya que dan las coordenadas y cantidades de movimiento en función de sus valores iniciales y del tiempo. Este último procedimiento es el más general, especialmente porque es aplicable, al menos en principio, incluso cuando la hamiltoniana contenga el tiempo. Empezaremos, pues, nuestro estudio considerando cómo puede hallarse tal transformación.

10-1 ECUACIÓN DE HAMILTON-JACOBI PARA LA FUNCIÓN PRINCIPAL DE HAMILTON

Podemos asegurar automáticamente que las nuevas variables sean constantes en el tiempo

exigiendo que la hamiltoniana transformada, K , sea idénticamente nula, ya que entonces las ecuaciones de movimiento serán

$$\begin{aligned}\frac{\partial K}{\partial P_i} &= \dot{Q}_i = 0, \\ -\frac{\partial K}{\partial Q_i} &= \dot{P}_i = 0.\end{aligned}\tag{10-1}$$

Ya vimos que K debe estar relacionada con la hamiltoniana antigua y con la función generatriz por medio de la ecuación

$$K = H + \frac{\partial F}{\partial t},$$

y por tanto, será nula si F satisface la ecuación

$$H(q, p, t) + \frac{\partial F}{\partial t} = 0.\tag{10-2}$$

Conviene tomar F en función de las antiguas coordenadas q_i , las nuevas cantidades de movimiento P_i y el tiempo; con la notación del capítulo anterior designaríamos a la función generatriz por $F_2(q, P, t)$. Para escribir en la ecuación (10-2) la hamiltoniana en función de las mismas variables, podemos utilizar las ecuaciones de transformación (cfr. ec. 9-17a),

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i},$$

con lo que la ecuación (10-2) queda en la forma

$$H\left(q_1, \dots, q_n; \frac{\partial F_2}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial F_2}{\partial q_n}; t\right) + \frac{\partial F_2}{\partial t} = 0.\tag{10-3}$$

La ecuación (10-3), llamada *ecuación de Hamilton-Jacobi*, constituye una ecuación en derivadas parciales con $(n + 1)$ variables, $q_1, \dots, q_n; t$, para la función generatriz buscada. La solución de la ecuación (10-3) suele representarse por S y recibe el nombre de *función principal de Hamilton*.

Desde luego, la integración de la ecuación (10-3) sólo nos da la dependencia de las

coordenadas antiguas y del tiempo; no parece decirnos cómo están contenidas en S las nuevas cantidades de movimiento. Éstas no se han especificado todavía y sólo sabemos que han de ser constantes. No obstante, la naturaleza de la solución indica cómo hay que seleccionar las nuevas P_i .

Matemáticamente, la ecuación (10-3) tiene la forma de ecuación en derivadas parciales de primer orden con $n + 1$ variables. Supongamos que exista una solución de la ecuación (10-3) de la forma

$$F_2 \equiv S = S(q_1, \dots, q_n; \alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}; t), \quad (10-4)$$

donde las cantidades $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}$ son $n + 1$ constantes de integración *independientes*. A dichas soluciones las llamamos *soluciones completas* de la ecuación en derivadas parciales de primer orden.* Sin embargo, una de las constantes de integración resulta irrelevante, en realidad, para la solución, ya que podemos observar que la propia S no aparece en la ecuación (10-3); tan sólo intervienen sus derivadas parciales respecto a q o t . Por tanto, si S es una solución de la ecuación en derivadas parciales, también lo será $S + \alpha$, donde α es una constante cualquiera. Una de las $n + 1$ constantes de integración de la ecuación (10-4) deberá aparecer sólo en forma de constante aditiva pegada a S . Pero, a mayor abundamiento, una constante aditiva no tiene importancia alguna en una función generatriz, ya que en las ecuaciones de transformación sólo figuran derivadas parciales de la función generatriz. Luego, para nuestros fines, una solución completa de la ecuación (10-3) podrá escribirse en la forma

$$S = S(q_1, \dots, q_n; \alpha_1, \dots, \alpha_n; t), \quad (10-5)$$

donde ninguna de las n constantes independientes es únicamente aditiva. En este atuendo matemático, S concuerda exactamente con la forma buscada para una función generatriz de tipo F_2 , ya que la ecuación (10-5) presenta a S como función de n coordenadas, del tiempo t y de n cantidades independientes α_i . Podemos, pues, con toda libertad, tomar para las n constantes de integración las cantidades de movimiento nuevas (que son constantes):

$$P_i = \alpha_i. \quad (10-6)$$

Esta elección no contradice la afirmación original de que las nuevas cantidades de movimiento están relacionadas con los valores iniciales de q y p en el instante t_0 . Las n

* La ecuación (10-4) no es el único tipo de solución posible para la ecuación (10-3). La forma más general de solución contiene una o más funciones arbitrarias en vez de constantes arbitrarias. Véase, p. ej., R. Courant y D. Hilbert: *Methods of Mathematical Physics*, Vol. II, 1962, pp. 24-28 y V. I. Smirnov: *A Course of Higher Mathematics*, Vol. IV, 1964, §111. Ni siquiera hay necesariamente una solución única de la forma (10-4). Pueden haber varias soluciones completas para la ecuación dada. Pero lo único que importa para el razonamiento subsiguiente es que exista *una* solución completa.

ecuaciones de transformación (9-17a) pueden escribirse ahora en la forma

$$p_i = \frac{\hat{c}S(q, \alpha, t)}{\hat{c}q_i}, \quad (10-7)$$

donde q, α representan el sistema completo de cantidades. En el instante t_0 constituyen n ecuaciones que relacionan las $n \alpha$ con los valores iniciales de q, p , permitiendo así calcular las constantes de integración en función de las condiciones iniciales específicas del problema. La otra mitad de las ecuaciones de transformación, que proporciona las nuevas coordenadas constantes, aparece en la forma

$$Q_i = \beta_i = \frac{\hat{c}S(q, \alpha, t)}{\hat{c}\alpha_i}. \quad (10-8)$$

Las constantes β se pueden obtener análogamente de las condiciones iniciales, simplemente calculando el valor del segundo miembro de la ecuación (10-8) en $t = t_0$ con los valores iniciales conocidos de q_i . Las ecuaciones (10-8) se pueden «volver del revés» para dar q_i en función de α, β y t :

$$q_j = q_j(\alpha, \beta, t), \quad (10-9)$$

lo que resuelve el problema de dar las coordenadas en función del tiempo y de las condiciones iniciales.* Una vez efectuada la derivación en las ecuaciones (10-7), podemos sustituir las q por las ecuaciones (10-9) y tendremos así las cantidades de movimiento p_i en función de las α, β y t :

$$p_i = p_i(\alpha, \beta, t). \quad (10-10)$$

Las ecuaciones (10-9) y (10-10) constituyen, pues, la solución completa buscada de las ecuaciones de movimiento de Hamilton.

* Desde un punto de vista matemático se puede cuestionar si el proceso de «volver del revés» es factible en el caso de las ecuaciones (10-7) y (10-8), es decir, si se pueden despejar α_i y q_i , respectivamente. La cuestión estriba en si las ecuaciones de cada sistema son independientes, ya que de no ser así no serán, evidentemente, suficientes para determinar las n cantidades independientes α_i o q_i , según sea el caso. Para simplificar la notación, simbolicemos por S_n miembros del conjunto de derivadas parciales de S respecto de α_i , con lo que la ecuación (10-8) se representaría por $\beta = S_n$. Que las derivadas S_n de (10-8) constituyen funciones de las q que son independientes entre sí se deduce directamente de la naturaleza de una solución completa de la ecuación de Hamilton-Jacobi: es precisamente esto lo que queremos significar al decir que las n constantes de integración son independientes. En consecuencia, el jacobiano de S respecto a q , no puede ser nulo. Como el orden de derivación es indiferente, esto equivale a decir que el jacobiano de S_q respecto a α_i no puede anularse, lo cual prueba la independencia de las ecuaciones (10-7).

La función principal de Hamilton es, pues, el generador de una transformación canónica a coordenadas y cantidades de movimiento constantes; *al resolver la ecuación de Hamilton-Jacobi estamos obteniendo al mismo tiempo una solución del problema mecánico*. Desde un punto de vista matemático, hemos establecido una equivalencia entre las $2n$ ecuaciones de movimiento canónicas, que son ecuaciones diferenciales de primer orden, y la ecuación de Hamilton-Jacobi que es en derivadas parciales de primer orden. Esta correspondencia no es exclusiva de las ecuaciones regidas por la hamiltoniana; la teoría general de ecuaciones en derivadas parciales de primer orden se ocupa ampliamente de las propiedades del sistema equivalente de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden. En esencia, podemos considerar que la relación mencionada se debe al hecho de que la ecuación en derivadas parciales y sus ecuaciones canónicas se apoyan en un principio variacional común, en este caso el principio modificado de Hamilton.

La elección de las α_i como nuevas cantidades de movimiento es, hasta cierto punto, arbitraria. Podríamos haber elegido igualmente n cantidades γ_i cualesquiera que fuesen funciones de las constantes de integración α_i , independientes entre sí:

$$\gamma_i = \gamma_i(\alpha_1, \dots, \alpha_n). \quad (10-11)$$

Por medio de estas relaciones de definición, la función principal de Hamilton puede escribirse como función de q_i , γ_i y t , quedando inalterado el resto de la deducción. A menudo resulta conveniente tomar para las nuevas cantidades de movimiento un conjunto particular de γ_i , en vez de las constantes de integración que aparecen de manera natural al integrar la ecuación de Hamilton-Jacobi.

Una visión más profunda del significado físico de S la da un examen de su derivada total respecto al tiempo, la cual puede calcularse a partir de la fórmula

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial S}{\partial t},$$

ya que las P_i son constantes en el tiempo. Según las ecuaciones (10-7) y (10-3), esta relación también se puede escribir en la forma

$$\frac{dS}{dt} = p_i \dot{q}_i - H = L, \quad (10-12)$$

por lo que la función principal de Hamilton diferirá como máximo en una constante de la integral indefinida de la lagrangiana según el tiempo;

$$S = \int L dt + \text{constante} \quad (10-13)$$

Ahora bien, el principio de Hamilton es un enunciado respecto a la integral definida de L y de él hemos obtenido la solución del problema a través de las ecuaciones de Lagrange. Ahora la misma integral de acción, en forma de integral indefinida, nos da otra manera de resolver el problema. En los cálculos reales, el resultado expresado por la ecuación (10-13) no tiene ninguna utilidad, porque no podemos integrar la lagrangiana respecto al tiempo hasta que conozcamos q_i y p_i en función del tiempo, es decir, hasta que esté resuelto el problema.*

10-2 EL PROBLEMA DEL OSCILADOR ARMÓNICO COMO EJEMPLO DEL MÉTODO DE HAMILTON-JACOBI

A fin de ilustrar la técnica de Hamilton-Jacobi para resolver el movimiento de sistemas mecánicos desarrollaremos en detalle el sencillo problema del oscilador armónico unidimensional. La hamiltoniana es

$$H = \frac{1}{2m}(p^2 + m^2\omega^2q^2) \equiv E, \quad (10-14)$$

donde

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad (10-15)$$

siendo k la constante de rigidez. La ecuación de Hamilton-Jacobi para S se obtiene haciendo p igual a $\partial S/\partial q$ y sustituyendo en la hamiltoniana; el requisito de que se anule la nueva hamiltoniana queda en la forma

$$\frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial q} \right)^2 + m^2\omega^2q^2 \right] + \frac{\partial S}{\partial t} = 0. \quad (10-16)$$

Como el que S dependa explícitamente de t sólo se manifiesta en el último término, se podrá encontrar una solución de la ecuación (10-16) cuya forma sea

$$S(q, x, t) = W(q, x) - \alpha t, \quad (10-17)$$

* Históricamente, el reconocimiento por Hamilton de que la integral temporal de L es una solución especial de una ecuación en derivadas parciales se produjo antes de que se viera cómo la ecuación de Hamilton-Jacobi puede dar la solución de un problema mecánico. Fue Jacobi quien se dio cuenta de que el recíproco es también cierto, de que por las técnicas de las transformaciones canónicas podía utilizarse cualquier solución completa de la ecuación de Hamilton-Jacobi para describir el movimiento del sistema.

donde α es una constante de integración (que posteriormente designaremos cantidad de movimiento transformada). Eligiendo esta solución podemos eliminar el tiempo de la ecuación (10-16).

$$\frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial W}{\partial q} \right)^2 + m^2 \omega^2 q^2 \right] = \alpha. \quad (10-18)$$

Así pues, la constante de integración α debe identificarse con la energía total E . Podemos ver esto directamente a partir de la ecuación (10-17) y la relación (cfr. ec. 10-3)

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H = 0,$$

que se reduce entonces a

$$H = \alpha.$$

La ecuación (10-18) puede integrarse inmediatamente dando

$$W = \sqrt{2m\alpha} \int dq \sqrt{1 - \frac{m\omega^2 q^2}{2\alpha}},$$

con lo que

$$S = \sqrt{2m\alpha} \int dq \sqrt{1 - \frac{m\omega^2 q^2}{2\alpha}} - \alpha t. \quad (10-19)$$

Aun cuando la integración que figura en la ecuación (10-19) no es demasiado difícil, no hay necesidad de efectuarla ahora, ya que lo que se busca no es S sino sus derivadas parciales. La obtención de q resulta de la ecuación de transformación (10-8):

$$\beta = \frac{\partial S}{\partial \alpha} = \sqrt{\frac{m}{2\alpha}} \int \frac{dq}{\sqrt{1 - \frac{m\omega^2 q^2}{2\alpha}}} - t,$$

que puede integrarse sin dificultad dando

$$t + \beta = \frac{1}{\omega} \arcsen q \sqrt{\frac{m\omega^2}{2\alpha}}. \quad (10-20)$$

La ecuación (10-20) puede «volverse del revés» de manera inmediata para dar q en función de t y de las dos constantes de integración α y β :

$$q = \sqrt{\frac{2\alpha}{m\omega^2}} \text{sen } \omega(t + \beta), \quad (10-21)$$

que es la conocida solución del oscilador armónico. Desde un punto de vista formal, la obtención de la cantidad de movimiento se debe a la ecuación de transformación (10-7) la cual, utilizando la ecuación (10-18), puede escribirse en la forma

$$p = \frac{\partial S}{\partial q} = \frac{\partial W}{\partial q} = \sqrt{2m\alpha - m\omega^2 q^2}.$$

Teniendo en cuenta la ecuación (10-21), resulta

$$p = \sqrt{2m\alpha(1 - \text{sen}^2 \omega(t + \beta))},$$

o sea

$$p = \sqrt{2m\alpha} \cos \omega(t + \beta). \quad (10-22)$$

Desde luego, este resultado comprueba la sencilla identificación de p con $m\dot{q}$.

Para completar la historia, debemos relacionar las constantes α y β con las condiciones iniciales q_0 y p_0 en el instante $t = 0$. Elevando al cuadrado las ecuaciones (10-21) y (10-22) vemos que α viene dada en función de q_0 y p_0 a través de la ecuación

$$2m\alpha = p_0^2 + m^2\omega^2 q_0^2. \quad (10-23)$$

El mismo resultado se tiene inmediatamente, desde luego, al identificar α con la energía total E que se conserva, tal como hicimos anteriormente. Por último, la constante de fase β está relacionada con q_0 y p_0 por la expresión

$$\text{tg } \omega\beta = m\omega \frac{q_0}{p_0}. \quad (10-24)$$

Así pues, la función principal de Hamilton es el generador de una transformación canónica a una nueva coordenada que mide el ángulo de fase de la oscilación y a una

nueva cantidad de movimiento canónica que se identifica con la energía total.

Si sustituimos en la ecuación (10-19) q por la solución obtenida, la función principal de Hamilton podrá escribirse en la forma

$$S = 2\alpha \int \cos^2 \omega(t + \beta) dt - \alpha t = 2\alpha \int (\cos^2 \omega(t + \beta) - \frac{1}{2}) dt.$$

Ahora, la lagrangiana es

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2m}(p^2 - m^2\omega^2 q^2) \\ &= \alpha(\cos^2 \omega(t + \beta) - \text{sen}^2 \omega(t + \beta)) \\ &= 2\alpha(\cos^2 \omega(t + \beta) - \frac{1}{2}), \end{aligned}$$

con lo que S es la integral temporal de la lagrangiana, de acuerdo con la relación general (10-13). Notemos que no se podría probar la identidad hasta *después* de haber obtenido la solución del problema.

10-3 ECUACIÓN DE HAMILTON-JACOBI PARA LA FUNCIÓN CARACTERÍSTICA DE HAMILTON

La ecuación de Hamilton-Jacobi para el oscilador armónico simple se ha podido integrar, principalmente porque se podía separar S en dos partes, una de las cuales sólo contiene a q y la otra sólo al tiempo. Tal separación de variables será siempre posible *cuando la hamiltoniana antigua no contenga explícitamente el tiempo*.

Si H no es función explícita de t , la ecuación de Hamilton-Jacobi para S adoptará la forma

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}\right) = 0.$$

El primer término contiene solamente la dependencia de t , mientras que el segundo sólo se refiere a la dependencia de S respecto a las q_i . Podremos, pues, separar la variable tiempo suponiendo una solución para S de la forma

$$S(q_i, \alpha_i, t) = W(q_i, \alpha_i) - \alpha_1 t. \quad (10-25)$$

Al sustituir esta solución de ensayo, la ecuación en derivadas parciales se reduce a la expresión

$$H\left(q_i, \frac{\partial W}{\partial q_i}\right) = \alpha_1, \quad (10-26)$$

que ya no contiene el tiempo. Una de las constantes de integración que aparecen en S , a saber α_1 , es pues igual al valor constante de H . (Normalmente, H será la energía, pero debemos tener presente que no tiene por qué ser así siempre, cfr. § 8-2.)

La función W independiente del tiempo aparece aquí simplemente como una parte de la función generatriz S cuando H es constante. También puede demostrarse que W genera por separado su propia transformación de contacto con propiedades diferentes de las de la generada por S . Consideremos una transformación canónica en la cual las nuevas cantidades de movimiento sean todas constantes del movimiento α_i y donde α_1 en particular es la constante del movimiento H . Si representáramos por $W(q, P)$ la función generatriz de esta transformación, las ecuaciones de transformación serían

$$p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i}, \quad Q_i = \frac{\partial W}{\partial P_i} = \frac{\partial W}{\partial \alpha_i}. \quad (10-27)$$

Aun cuando estas ecuaciones se asemejan a las ecuaciones (10-7) y (10-8) para la función principal de Hamilton S , la condición que determina ahora a W es que H ha de ser igual a la nueva cantidad de movimiento α_1 :

$$H(q_i, p_i) = \alpha_1.$$

Utilizando las ecuaciones (10-27) este requisito se convierte en una ecuación en derivadas parciales de W :

$$H\left(q_i, \frac{\partial W}{\partial q_i}\right) = \alpha_1,$$

que vemos coincide con la ecuación (10-26). Como W no contiene el tiempo, las hamiltonianas nueva y antigua son iguales y deducimos que $K = \alpha_1$.

La función W , llamada *función característica de Hamilton*, genera así una transformación canónica en la cual todas las coordenadas nuevas son cíclicas. En el capítulo anterior señalábamos que cuando H es una constante del movimiento, una transformación de esta naturaleza resuelve en realidad el problema mecánico en cuestión, ya que entonces la integración de las nuevas ecuaciones de movimiento es trivial. De hecho, las ecuaciones canónicas P_i no hacen sino repetir que las cantidades de movimiento conjugadas de las coordenadas cíclicas son todas constantes:

$$\dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i} = 0, \quad P_i = \alpha_i, \quad (10-28a)$$

Como la nueva hamiltoniana sólo depende de una de las cantidades de movimiento α_i , las

ecuaciones de movimiento para \dot{Q}_i son

$$\begin{aligned}\dot{Q}_i &= \frac{\partial K}{\partial \alpha_i} = 1 & i = 1, \\ &= 0 & i \neq 1,\end{aligned}$$

con las soluciones inmediatas

$$\begin{aligned}Q_1 &= t + \beta_1 \equiv \frac{\partial W}{\partial \alpha_1}, \\ Q_i &= \beta_i \equiv \frac{\partial W}{\partial \alpha_i} \quad i \neq 1.\end{aligned}\tag{10-28b}$$

La única coordenada que no es simplemente una constante del movimiento es Q_1 , que es igual al tiempo más una constante. Tenemos aquí otro ejemplo de la relación conjugada entre el tiempo considerado como coordenada y la hamiltoniana considerada como su cantidad de movimiento conjugada.

La dependencia de W respecto de las coordenadas antiguas q_i está determinada por la ecuación en derivadas parciales (10-26) la cual, al igual que la ecuación (10-3), recibe también el nombre de ecuación de Hamilton-Jacobi. En una solución completa habrá ahora n constantes de integración, pero de nuevo una de ellas será, simplemente, una constante aditiva. Las $n-1$ constantes independientes restantes, $\alpha_2, \dots, \alpha_n$, junto con α_1 podrán entonces tomarse como nuevas cantidades de movimiento constantes. Al evaluar en t_0 la primera mitad de las ecuaciones (10-27), permiten relacionar las n constantes α_i con los valores iniciales de q_i y p_i . Finalmente, de las ecuaciones (10-28b) podemos despejar las q_i en función de α_i , β_i y el tiempo t , completando así la solución del problema. Notemos que $(n-1)$ de las ecuaciones (10-28b) no contienen en absoluto el tiempo. Podemos elegir como variable independiente una de las q_i y las restantes coordenadas las podremos entonces expresar en función de ella resolviendo solamente estas ecuaciones independientes del tiempo. Nos vemos así conducidos directamente a las *ecuaciones orbitales* del movimiento. En el movimiento debido a una fuerza central, por ejemplo, esta técnica daría r en función de θ , sin necesidad de hallar por separado r y θ en función del tiempo.

No siempre es necesario tomar α_i y las constantes de integración de W como nuevas cantidades de movimiento constantes. En ocasiones es preferible utilizar un determinado sistema particular de n funciones de las α_i que sean independientes como cantidades de movimiento transformadas. Llamando γ_i a estas constantes, la función característica W podrá expresarse en función de q_i y γ_i que serán las variables independientes. La hamiltoniana dependerá, en general, de más de una de las γ_i y las ecuaciones de movimiento para \dot{Q}_i se convertirán en

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial \gamma_i} = v_i,$$

donde las v_i son funciones de γ_i . En este caso, las nuevas coordenadas son todas funciones lineales del tiempo:

$$Q_i = v_i t + \beta_i. \quad (10-29)$$

La función característica W posee un significado físico similar al de S . Como W no contiene explícitamente el tiempo, su derivada total respecto al tiempo es

$$\frac{dW}{dt} = \frac{\partial W}{\partial q_i} \dot{q}_i = p_i \dot{q}_i,$$

y por tanto

$$W = \int p_i \dot{q}_i dt = \int p_i dq_i. \quad (10-13')$$

Las anteriores integrales vemos que definen la acción abreviada, de la que se ha tratado en § 8-6. También ahora esta información es de poca utilidad; la forma de W no se puede encontrar a priori sin obtener una integral completa de la ecuación de Hamilton-Jacobi. Los métodos para la resolución de problemas mecánicos bien sea mediante la función principal o la característica de Hamilton los podemos resumir ahora con ayuda de la forma tabular siguiente:

Son aplicables los dos métodos de solución cuando la hamiltoniana

sea una función general cualquiera de q, p, t : se conserve:

$$H(q, p, t).$$

$$H(q, p) = \text{constante}$$

Buscamos transformaciones canónicas a nuevas variables tales que

todas las coordenadas y cantidades de movimiento Q_i, P_i sean constantes del movimiento

todas las cantidades de movimiento P_i sean constantes.

Para reunir estos requisitos es suficiente exigir que la nueva hamiltoniana

se anule idénticamente:

$$K = 0.$$

sea cíclica en todas las coordenadas:

$$K = H(P_i) = \alpha_1.$$

En estas condiciones, las nuevas ecuaciones de movimiento serán

$$\begin{array}{l|l} \dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i} = 0, & \dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i} = v_i, \\ \dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i} = 0, & \dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i} = 0, \end{array}$$

con las soluciones inmediatas

$$\begin{array}{l|l} Q_i = \beta_i, & Q_i = v_i t + \beta_i \\ P_i = \gamma_i, & P_i = \gamma_i \end{array}$$

que cumplen los requisitos estipulados.

La función generatriz que da lugar a la transformación deseada es la

$$\begin{array}{l|l} \text{Función principal:} & \text{Función característica} \\ S(q, P, t), & W(q, P), \end{array}$$

de Hamilton que satisface a la ecuación en derivadas parciales de Hamilton-Jacobi:

$$\begin{array}{l|l} H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0, & H\left(q, \frac{\partial W}{\partial q}\right) - \alpha_1 = 0. \end{array}$$

Una solución completa de la ecuación contiene

$$\begin{array}{l|l} n \text{ constantes de integración no triviales} & n - 1 \text{ constantes de integración no triviales} \\ \alpha_1, \dots, \alpha_n. & \text{que junto con } \alpha_1 \text{ forman un conjunto de} \\ & n \text{ constantes independientes } \alpha_1, \dots, \alpha_n. \end{array}$$

Las nuevas cantidades de movimiento constantes, $P_i = \gamma_i$, se pueden elegir como n funciones de las n constantes de integración, que sean independientes entre sí:

$$P_i = \gamma_i(x_1, \dots, x_n), \quad | \quad P_i = \gamma_i(x_1, \dots, x_n).$$

con lo que las soluciones completas de la ecuación de Hamilton-Jacobi se puede considerar que son funciones de las nuevas cantidades de movimiento:

$$S = S(q_i, \gamma_i, t) \quad | \quad W = W(q_i, \gamma_i).$$

En particular, las γ_i se pueden elegir de manera que sean las propias α_i . La mitad de las ecuaciones de transformación,

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}, \quad | \quad p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i},$$

se satisfacen automáticamente ya que se han utilizado para construir la ecuación de Hamilton-Jacobi. La otra mitad,

$$Q_i = \frac{\partial S}{\partial \gamma_i} = \beta_i, \quad | \quad Q_i = \frac{\partial W}{\partial \gamma_i} = v_i(\gamma_j)t + \beta_i,$$

pueden darnos q_i en función de t y las $2n$ constantes β_i, γ_i . La solución del problema se completa evaluando estas $2n$ constantes en función de los valores iniciales, (q_{i0}, p_{i0}) , de las coordenadas y las cantidades de movimiento.

Cuando la hamiltoniana no contenga explícitamente al tiempo, ambos métodos serán adecuados y las funciones generatrices estarán relacionadas entre si mediante la fórmula

$$S(q, P, t) = W(q, P) - \alpha_1 t.$$

10-4 SEPARACIÓN DE VARIABLES EN LA ECUACIÓN DE HAMILTON-JACOBI

De lo dicho en el apartado anterior podría desprenderse que con la introducción del método de Hamilton-Jacobi no hemos ganado gran cosa. En vez de resolver las $2n$ ecuaciones diferenciales ordinarias que constituyen las ecuaciones canónicas del movimiento, debemos ahora resolver la ecuación en derivadas parciales de Hamilton-Jacobi y las ecuaciones en derivadas parciales tienen una resolución notablemente complicada. Sin embargo, en ciertas condiciones es posible separar las variables en la ecuación de Hamilton-Jacobi y entonces la solución se podrá siempre reducir a cuadraturas. En la práctica, la técnica de Hamilton-Jacobi resulta ser una útil herramienta de cálculo tan sólo cuando pueda efectuarse dicha separación.

Diremos que una coordenada q_i es separable en la ecuación de Hamilton-Jacobi cuando (digamos) la función principal de Hamilton pueda desdoblarse en dos partes aditivas, una de las cuales sólo dependa de la coordenada q_j y la otra sea totalmente independiente de q_j . Así pues, si tomamos q_1 como coordenada separable, la hamiltoniana deberá ser tal que podamos escribir

$$S(q_1, \dots, q_n; \alpha_1, \dots, \alpha_n; t) = S_1(q_1; \alpha_1, \dots, \alpha_n; t) + S'(q_2, \dots, q_n; \alpha_1, \dots, \alpha_n; t), \quad (10-30)$$

y la ecuación de Hamilton-Jacobi podrá desdoblarse en dos ecuaciones —una separadamente para S_1 y la otra para S' . Análogamente, diremos que la ecuación de Hamilton-Jacobi es *completamente separable* (o simplemente, *separable*) si todas las coordenadas del problema son separables. Una solución para la función principal de Hamilton de la forma

$$S = \sum_i S_i(q_i; \alpha_1, \dots, \alpha_n; t) \quad (10-31)$$

desdoblará entonces la ecuación de Hamilton-Jacobi en n ecuaciones del tipo

$$H_i \left(q_i; \frac{\partial S_i}{\partial q_i}; \alpha_1, \dots, \alpha_n \right) = \alpha_i \quad (10-32a)$$

(no hay suma). A las constantes α_i las llamamos ahora *constantes de separación*. Cada una de las ecuaciones (10-32) contiene una sola de las coordenadas q_i y la correspondiente derivada parcial de S_i respecto a q_i . Constituyen, pues, un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de forma particularmente sencilla. Como las ecuaciones son sólo de primer orden, siempre podremos reducirlas a cuadraturas; sólo tendremos que despejar la derivada parcial de S_i respecto a q_i y luego integrar para q_i .

El paso de la función principal de Hamilton S a la función característica para sistemas mecánicos conservativos se puede tratar como ejemplo en el cual t sea variable separable en la ecuación de Hamilton-Jacobi. En tal caso, buscamos una solución para S de una forma que corresponda a la prescrita por la ecuación (10-30):

$$S(q, \alpha, t) = S_0(\alpha, t) + W(q, \alpha). \quad (10-32b)$$

Como, por hipótesis, H no es función explícita del tiempo, al ensayar esta solución la ecuación de Hamilton-Jacobi queda en la forma

$$H \left(q, \frac{\partial W}{\partial q} \right) + \frac{\partial S_0}{\partial t} = 0. \quad (10-33)$$

El primer término de la ecuación (10-33) es independiente de t y sólo puede depender de las q , mientras que el segundo término puede ser función, como máximo, de t . Luego la ecuación sólo puede valer si ambos términos son constantes y sus valores son opuestos (de igual valor absoluto):

$$\frac{\partial S_0}{\partial t} = -\alpha_1, \quad (10-34a)$$

$$H\left(q, \frac{\partial W}{\partial q}\right) = \alpha_1. \quad (10-34b)$$

La primera ecuación se satisface con $S_0 = -\alpha_1 t$, como en las ecuaciones (10-17) y (10-25), mientras la segunda es la ecuación de Hamilton-Jacobi para W . El valor constante de la hamiltoniana, α_1 , aparece pues en este método bajo el aspecto de constante de separación.

Es posible encontrar ejemplos en los cuales la ecuación de Hamilton-Jacobi pueda resolverse sin separar la variable tiempo (p. ej., Ejercicio 8). A pesar de todo, casi todas las aplicaciones útiles del método de Hamilton-Jacobi comportan hamiltonianas que no dependen explícitamente del tiempo para las cuales, por tanto, t es variable separable. El estudio subsiguiente de la separabilidad se limitará, pues, a sistemas en los cuales H sea una constante del movimiento y se utilizará exclusivamente la función característica de Hamilton W .

Podemos demostrar fácilmente que toda coordenada cíclica o ignorable es separable. Supongamos que la coordenada cíclica sea q_1 ; la cantidad de movimiento conjugada p_1 es una constante, llamémosla γ . La ecuación de Hamilton-Jacobi para W será

$$H\left(q_2, \dots, q_n; \gamma; \frac{\partial W}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial W}{\partial q_n}\right) = \alpha_1. \quad (10-35)$$

Si ensayamos una solución separada de la forma

$$W = W_1(q_1, \alpha) + W'(q_2, \dots, q_n; \alpha), \quad (10-36)$$

resulta evidente que la ecuación (10-35) sólo contiene la función separada W' , mientras que W_1 es la solución de la ecuación

$$P_1 = \gamma = \frac{\partial W_1}{\partial q_1}. \quad (10-37)$$

La constante γ es, pues, la constante de separación y la solución evidente para W_1 (salvo una constante aditiva trivial) es

$$W_1 = \gamma q_1.$$

y W viene dada por

$$W = W' + \gamma q_1. \quad (10-38)$$

Existe una semejanza evidente entre la ecuación (10-38) y la forma que adopta S cuando H no es función explícita del tiempo (ec. 10-25). Podemos considerar que las dos ecuaciones surgen en circunstancias análogas. Hemos visto que t puede considerarse en cierto sentido como coordenada generalizada cuya cantidad de movimiento canónica es $-H$ (cfr. ec. 8-58). Si se conserva H , se podrá tratar t como coordenada cíclica y la ecuación (10-34a) corresponderá directamente a la ecuación (10-37) que conduce a soluciones similares.

Si fuesen cíclicas todas las coordenadas menos una, por aplicación repetida del método utilizado antes se podría separar completamente la ecuación de Hamilton-Jacobi. Para exhibir específicamente la separación conviene ahora designar por q_1 la coordenada *no cíclica* con lo que todas las cantidades de movimiento conjugadas q_i , $i > 1$, serán constantes $\alpha_2, \dots, \alpha_n$. Siguiendo los mismos pasos que en el caso de una sola coordenada cíclica, la forma separada de W resulta ser

$$W = \sum_{i=1}^n W_i(q_i, \alpha) = W_1(q_1, \alpha) + \sum_{i=2}^n \alpha_i q_i, \quad (10-39)$$

(cfr. ec. 10-38). Aquí W_1 es la solución de la ecuación de Hamilton-Jacobi reducida:

$$H\left(q_1; \frac{\partial W_1}{\partial q_1}; \alpha_2, \dots, \alpha_n\right) = \alpha_1. \quad (10-40)$$

Como ésta es una ecuación diferencial ordinaria de primer orden con la variable independiente q_1 , se puede reducir a cuadraturas de manera inmediata y obtener la solución completa de W .*

* Podemos llegar también a la forma de (10-39) mediante las consideraciones siguientes. Debemos recordar que W ha de ser la función generatriz de una transformación a nuevas coordenadas que sean todas cíclicas. Pero si q_2, \dots, q_n ya son cíclicas, no se necesitará para ellas ninguna ulterior transformación. Por lo que a ellas respecta, W puede ser la transformación identidad. Como las α_i son las nuevas cantidades de movimiento, la suma de (10-39) se puede escribir en la forma

$$\sum_{i=2}^n q_i P_i,$$

que vemos es el generador de la transformación identidad (cfr. ec. 9-25) para las coordenadas q_2, \dots, q_n .

En general, una coordenada q_j se puede separar si q_j y la cantidad de movimiento conjugada p_j pueden segregarse en la hamiltoniana en una cierta función $f(q_j, p_j)$ que no contenga ninguna de las demás variables. Si buscamos entonces una solución a ensayar de la forma

$$W = W_j(q_j, \alpha) + W'(q_i, \alpha),$$

donde q_i representa al conjunto de todas las q *excepto* la q_j , la ecuación de Hamilton-Jacobi aparecerá en la forma

$$H\left(q_i, \frac{\partial W'}{\partial q_i}, f\left(q_j, \frac{\partial W_j}{\partial q_j}\right)\right) = \alpha_1. \quad (10-41)$$

Al menos en principio, la ecuación (10-41) se puede invertir de manera que quede despejada f :

$$f\left(q_j, \frac{\partial W_j}{\partial q_j}\right) = g\left(q_i, \frac{\partial W'}{\partial q_i}, \alpha_1\right). \quad (10-42)$$

El razonamiento que utilizábamos en relación con la ecuación (10-33) será válido ahora bajo un aspecto ligeramente variado: f no es una función de todas las q *excepto* la q_j ; en cambio, g es independiente de q_j . Luego, la ecuación (10-42) sólo se cumplirá si los dos miembros son iguales a una misma constante, independiente de todas las q :

$$\begin{aligned} f\left(q_j, \frac{\partial W_j}{\partial q_j}\right) &= \alpha_j, \\ g\left(q_i, \frac{\partial W'}{\partial q_i}\right) &= \alpha_j, \end{aligned} \quad (10-43)$$

y se habrá logrado la separación de la variable.

Debemos recalcar que la separabilidad de la ecuación de Hamilton-Jacobi no sólo depende del problema físico en cuestión sino también de la elección del sistema de coordenadas generalizadas que se utilice. Así, el problema de un cuerpo sometido a una fuerza central es separable en coordenadas polares, pero no en coordenadas cartesianas. En algunos problemas no es posible en absoluto separar completamente la ecuación de Hamilton-Jacobi, siendo ejemplo de ello el famoso problema de los tres cuerpos. En cambio, en muchos de los problemas fundamentales de la Mecánica y de la Física atómica, la separación es posible en más de un sistema de coordenadas. En general, es factible resolver la ecuación de Hamilton-Jacobi en forma explícita tan sólo cuando las

variables sean totalmente separables. Se ha desplegado un gran ingenio en hallar los sistemas de coordenadas separables apropiados para cada problema.

No puede darse ningún criterio simple para indicar qué sistemas de coordenadas conducen a ecuaciones de Hamilton-Jacobi separables para un problema particular cualquiera. En el caso de sistemas de coordenadas ortogonales han resultado útiles las llamadas condiciones de Staeckel. Proporcionan condiciones necesarias y suficientes para la separabilidad en determinadas circunstancias. En el apéndice D (en el que también se consignan más referencias a la literatura acerca del tema) encontraremos una demostración de la suficiencia de las condiciones. Vamos a enunciar las condiciones de Staeckel, junto con un ejemplo de su aplicación.

Estipularemos las siguientes restricciones al tipo de situación que se considera:

1. La hamiltoniana se conserva.
2. La lagrangiana no es más que una función cuadrática de las velocidades generalizadas, con lo que la hamiltoniana adopta la forma (cfr. ec. 8-19):

$$H = \frac{1}{2}(\mathbf{p} - \mathbf{a})\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{p} - \mathbf{a}) + V(q). \quad (10\ 44)$$

3. El sistema de coordenadas generalizadas q_i constituye un sistema ortogonal de coordenadas, por lo que la matriz \mathbf{T} es diagonal. Se sigue que la matriz inversa \mathbf{T}^{-1} también es diagonal con elementos no nulos:

$$(\mathbf{T}^{-1})_{ii} = \frac{1}{T_{ii}} \quad (\text{no es suma}). \quad (10-45)$$

En el caso de problemas y coordenadas que satisfagan esta descripción, las condiciones de Staeckel dicen que la ecuación de Hamilton-Jacobi será totalmente separable si

- a. el vector \mathbf{a} tiene elementos a_i que sean función solamente de la coordenada correspondiente, es decir, $a_i = a_i(q_i)$;
- b. la función potencial $V(q)$ puede escribirse como suma de la forma

$$V(q) = \sum_i \frac{V_i(q_i)}{T_{ii}}; \quad (10\ 46)$$

- c. existe una matriz ϕ cuadrada $n \times n$ con elementos $\phi_{ij} = \phi_{ij}(q_i)$ tal que

$$(\phi^{-1})_{ij} = \frac{1}{\phi_{jj}} \quad (\text{no es suma}). \quad (10-47)$$

Si se cumplen las condiciones de Staeckel, la función característica de Hamilton será totalmente separable:

$$W(q) = \sum_i W_i(q_i),$$

satisfaciendo las W_i ecuaciones de la forma

$$\left[\frac{\partial W_i}{\partial q_i} - a_i \right]^2 = -2V_i(q_i) + 2\phi_{ij}\gamma_j, \quad (10-48)$$

donde γ_j son constantes de integración (y sólo hay suma extendida al índice j).

Aun cuando estas condiciones parezcan misteriosas y complicadas, su aplicación suele ser bastante inmediata. Como ejemplo de algunas de las ideas que hemos desarrollado acerca de la separabilidad, estudiaremos en coordenadas polares la ecuación de Hamilton-Jacobi para una partícula en movimiento bajo la acción de una fuerza central. Después generalizaremos el problema para leyes de potencial arbitrarias, a fin de proporcionar una aplicación de las condiciones de Staeckel.

Consideremos primeramente el problema de la fuerza central en función de las coordenadas polares (r, ψ) en el plano de la órbita. El movimiento tiene entonces sólo dos grados de libertad y la hamiltoniana adopta la forma

$$H = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_\psi^2}{r^2} \right) + V(r), \quad (10-49)$$

y es cíclica en ψ . En consecuencia, la función característica de Hamilton aparece en la forma

$$W = W_1(r) + \alpha_\psi \psi, \quad (10-50)$$

donde α_ψ es el momento cinético constante p_ψ conjugado de ψ . La ecuación de Hamilton-Jacobi se convierte entonces en

$$\left(\frac{\partial W_1}{\partial r} \right)^2 + \frac{\alpha_\psi^2}{r^2} + 2mV(r) = 2m\alpha_1,$$

donde α_1 es la constante que se identifica físicamente con la energía total del sistema. Despejando de (10-51) la derivada parcial de W_1 obtenemos

$$\frac{\partial W_1}{\partial r} = \sqrt{2m(\alpha_1 - V) - \frac{\alpha_\psi^2}{r^2}}, \quad (10-51)$$

con lo que W es

$$W = \int dr \sqrt{2m(\alpha_1 - V) - \frac{\alpha_\psi^2}{r^2}} + \alpha_\psi \psi. \quad (10-52)$$

Con esta forma de función característica, las ecuaciones de transformación (10-28b) presentan el aspecto siguiente:

$$t + \beta_1 = \frac{\partial W}{\partial \alpha_1} = \int \frac{m dr}{\sqrt{2m(\alpha_1 - V) - \frac{\alpha_\psi^2}{r^2}}}, \quad (10-53a)$$

y

$$\beta_2 = \frac{\partial W}{\partial \alpha_\psi} = - \int \frac{\alpha_\psi dr}{r^2 \sqrt{2m(\alpha_1 - V) - \frac{\alpha_\psi^2}{r^2}}} + \psi. \quad (10-53b)$$

La ecuación (10-53a) nos da r en función de t y concuerda con la solución correspondiente (ec. 3-18) hallada en el capítulo 3, escribiendo explícitamente α_1 y α_ψ en forma de E y l , respectivamente. Ya hemos hecho notar anteriormente que las restantes ecuaciones de transformación para Q_i , en este caso solamente la ecuación (10-53b), proporcionan la ecuación de la órbita. Si en la ecuación (10-53b) efectuamos el cambio de variable $u = 1/r$, resulta

$$\psi = \beta_2 - \int \frac{du}{\sqrt{\frac{2m}{\alpha_\psi^2}(\alpha_1 - V) - u^2}},$$

que concuerda con la ecuación (3-37) antes encontrada para la órbita, si identificamos ψ con θ y β_2 con θ_0 .

Como nuevo ejemplo de separación de variables, examinaremos el mismo problema de fuerza central pero con coordenadas polares esféricas, es decir, ignorando nuestro conocimiento previo de que la órbita es plana. Ya vimos que la hamiltoniana apropiada es (cfr. ec. 8-21):

$$H = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\phi^2}{r^2 \sin^2 \theta} \right) + V(r). \quad (10-54)$$

Si fuesen separables las variables de la ecuación de Hamilton-Jacobi correspondiente, la función característica de Hamilton debería tener la forma

$$W = W_r(r) + W_\theta(\theta) + W_\phi(\phi). \quad (10-55)$$

La coordenada ϕ es cíclica en la hamiltoniana y por tanto

$$W_\phi = \alpha_\phi \phi \quad (10-56)$$

donde α_ϕ es una constante de integración. En función de esta forma de W , la ecuación de Hamilton-Jacobi se reduce a

$$\left(\frac{\partial W_r}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left[\left(\frac{\partial W_\theta}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{\alpha_\phi^2}{\sin^2 \theta} \right] + 2mV(r) = 2mE, \quad (10-57)$$

donde hemos identificado explícitamente la hamiltoniana constante con la energía total E . Notemos que toda dependencia de θ y solamente de θ , se ha segregado a la expresión entre corchetes. Entonces, la ecuación de Hamilton-Jacobi presenta un aspecto análogo al de la ecuación (10-41) y siguiendo el razonamiento dado entonces vemos que la cantidad entre corchetes debe ser una constante:

$$\left(\frac{\partial W_\theta}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{\alpha_\phi^2}{\sin^2 \theta} = \alpha_\theta^2. \quad (10-58)$$

Finalmente, W depende de r con una dependencia que viene dada por el resto de la ecuación de Hamilton-Jacobi:

$$\left(\frac{\partial W_r}{\partial r}\right)^2 + \frac{\alpha_\theta^2}{r^2} = 2m(E - V(r)). \quad (10-59)$$

Las variables de la ecuación de Hamilton-Jacobi quedan así totalmente separadas. Las ecuaciones (10-58) y (10-59) pueden reducirse fácilmente a cuadraturas proporcionando al menos una solución formal para $W_\theta(\theta)$ y $W_r(r)$, respectivamente.

Notemos que las constantes de integración α_ϕ , α_θ , α_1 tienen todos significados físicos reconocibles directamente. Desde luego, la cantidad α_ϕ es el valor constante del momento cinético respecto al eje polar:

$$\alpha_\phi = p_\phi = \frac{\partial W_\phi}{\partial \phi}. \quad (10-60)$$

Para identificar α_θ , podemos escribir la ecuación (10-58) en la forma

$$p_\theta^2 + \frac{p_\phi^2}{\sin^2 \theta} = \alpha_\theta^2, \quad (10-58')$$

con lo que la hamiltoniana. (ec. 10-54) se escribirá

$$H = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{\alpha_\theta^2}{r^2} \right) + V(r). \quad (10\ 54')$$

Comparando esta expresión con la hamiltoniana dada en la ecuación (10-49) en función de las coordenadas polares en el plano de la órbita, vemos que α_θ es lo mismo que q_ψ , que es el módulo del momento cinético total:

$$\alpha_\theta = p_\psi \equiv l. \quad (10\ 61)$$

Por último, α_1 es desde luego la energía total E . En verdad, las tres ecuaciones diferenciales para las partes componentes de W se pueden considerar como enunciados de teoremas de conservación. La ecuación (10-60) dice que la componente z del vector momento cinético, \mathbf{L} , se conserva, mientras que la ecuación (10-58) establece la conservación del módulo, l , del momento cinético. Y la ecuación (10-59) constituye una forma del teorema de conservación de la energía.

En este sencillo ejemplo empieza a aparecer algo la potencia y elegancia del método de Hamilton-Jacobi. Con unos pocos pasos cortos podremos obtener cómo depende r de t y la ecuación de la órbita (ec. 10-53 a y b) se habría obtenido anteriormente de manera muy laboriosa. Las cantidades conservadas del problema de la fuerza central aparecen también automáticamente. La separación de variables para el problema de la fuerza puramente central también se puede lograr en otros sistemas de coordenadas, p. ej., coordenadas parabólicas y entonces las cantidades que se conservan aparecen en formas apropiadas para las coordenadas en cuestión.

Finalmente, podemos utilizar las condiciones de Staeckel para hallar la forma más general de potencial escalar V para una partícula para la cual la ecuación de Hamilton-Jacobi sea separable en coordenadas polares esféricas. La matriz Φ de las condiciones de Staeckel sólo depende del sistema de coordenadas y no del potencial. Como la ecuación de Hamilton-Jacobi es separable en coordenadas esféricas para al menos un potencial, es decir, para el potencial de la fuerza central, se deduce que la matriz Φ existe. La forma específica de Φ no es necesaria para responder a nuestra pregunta.* Es más, como a es nula por hipótesis, todo lo que hemos de hacer es aplicar la ecuación (10-46) para hallar la forma separable más general de V . De la energía cinética (v. p. 424), los elementos diagonales de T resultan ser

$$T_{rr} = m, \quad T_{\theta\theta} = mr^2, \quad T_{\phi\phi} = mr^2 \sin^2 \theta.$$

* Para la forma real de Φ apropiada para las coordenadas polares esféricas, véase el apéndice D.

Por la ecuación (10-40), el potencial buscado deberá tener la forma

$$V(q) = V_r(r) + \frac{V_\theta(\theta)}{r^2} + \frac{V_\phi(\phi)}{r^2 \sin^2 \theta}. \quad (10\ 62)$$

Es fácil comprobar directamente que con este potencial la ecuación de Hamilton-Jacobi sigue siendo totalmente separable en coordenadas polares esféricas.

10-5 VARIABLES ACCIÓN-ÁNGULO EN SISTEMAS DE UN GRADO DE LIBERTAD

De particular importancia en muchas ramas de la Física son los sistemas en los cuales el movimiento es periódico. A menudo no nos interesarán tanto los detalles de la órbita como las frecuencias del movimiento. Un método muy elegante y potente de tratamiento de dichos sistemas lo proporciona una variante del método de Hamilton-Jacobi. En esta técnica, para las constantes de integración α_i que aparecen directamente en la solución de la ecuación de Hamilton-Jacobi no se toman las nuevas cantidades de movimiento. En vez de ello utilizamos constantes J_i adecuadamente definidas que forman un sistema de n funciones de las α_i independientes entre sí y a las que daremos el nombre de *variables de acción*.

Por razón de sencillez, vamos a considerar primeramente, en este apartado, sistemas de un solo grado de libertad. Supondremos conservativo el sistema, con lo que la hamiltoniana se podrá escribir en la forma

$$H(q, p) = \alpha_1.$$

Despejando la cantidad de movimiento, tenemos

$$p = p(q, \alpha_1), \quad (10\ 63)$$

que podemos considerar como ecuación de la órbita descrita por el punto figurativo del sistema en el espacio fásico bidimensional cuando la hamiltoniana tiene el valor constante α_1 . Lo que se quiere significar con la expresión «movimiento periódico» está determinado por las características de la órbita en el espacio fásico. Podemos distinguir dos tipos de movimiento periódico:

1. En el primer tipo, la órbita es *cerrada*, según se indica en la figura 10-1(a) y el punto figurativo del sistema repite periódicamente sus estados de movimiento. Tanto q como p son entonces funciones periódicas del tiempo de la misma frecuencia. Encontraremos un movimiento periódico de esta naturaleza cuando la posición inicial se encuentre entre dos ceros de la energía cinética. Se le designa a menudo con el nombre astronómico de *libración*, aun cuando para un físico es más probable que le recuerde a sistemas oscilatorios comunes, tal como el oscilador armónico unidimensional.

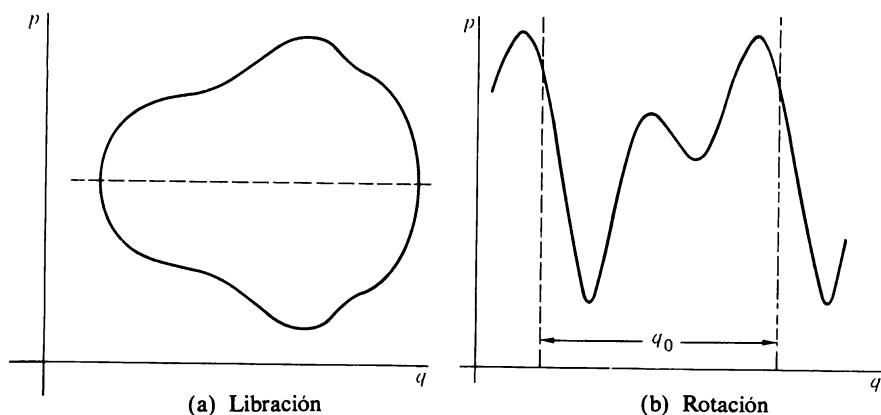


FIGURA 10-1

Orbita del punto figurativo del sistema en el espacio fásico en el caso de movimiento periódico de un sistema unidimensional.

2. En el segundo tipo de movimiento periódico, la órbita en el espacio fásico es tal que p es una cierta función periódica de q , con periodo q_0 , según se ilustra en la figura 10-1(b). Equivalentemente, este tipo de movimiento implica que cuando q se incrementa en q_0 , la configuración del sistema permanece invariada en esencia. El ejemplo más conocido es el de un cuerpo rígido obligado a girar alrededor de un eje dado, siendo q el ángulo de rotación. Al aumentar q en 2π no se produce entonces ningún cambio esencial del estado del sistema. Verdaderamente, la coordenada de posición en este tipo de periodicidad es invariablemente un ángulo de rotación y al movimiento le llamaremos, simplemente, *rotación*,* en contraste con la libración. Los valores de q ya no están acotados sino que pueden aumentar indefinidamente.

Para aclarar estas ideas, hagamos notar que los dos tipos de periodicidad pueden tener lugar en un mismo sistema físico. El ejemplo clásico lo tenemos en el péndulo simple en donde q es el ángulo θ de desviación. Si es l la longitud del péndulo y se toma igual a cero la energía potencial en el punto de suspensión, la energía constante del sistema vendrá dada por

$$E = \frac{p_0^2}{2ml^2} - mgl \cos \theta. \quad (10-64)$$

Despejando p_0 de la ecuación (10-64), la ecuación de la trayectoria del punto figurativo del sistema en el espacio fásico es

$$p_0 = \pm \sqrt{2ml^2(E + mgl \cos \theta)}.$$

* También se llama a veces *circulación*, o *revolución*.

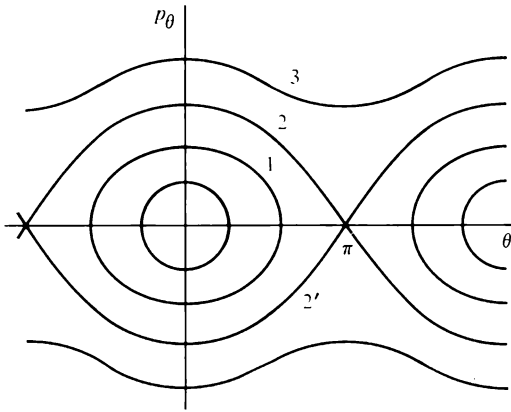


FIGURA 10-2

Órbitas en el espacio fásico correspondientes al péndulo simple.

Si E fuese menor que $mg\ell$, el movimiento físico del sistema sólo podrá tener lugar para θ inferior a una cota, θ' , definida por la ecuación

$$\cos \theta' = -\frac{E}{mg\ell}.$$

En estas condiciones, el péndulo oscila entre $-\theta'$ y $+\theta'$, lo que constituye un movimiento periódico del tipo libración. El punto figurativo del sistema recorre entonces en el espacio fásico un camino tal como la curva 1 de la figura 10-2. En cambio, si $E > mg\ell$, todos los valores de θ corresponden a movimiento físico y θ podrá crecer sin límite para dar lugar a un movimiento periódico del tipo rotación. Lo que sucede físicamente en este caso es que el péndulo tiene tanta energía que puede sobrepasar la posición vertical $\theta = \pi$ y en consecuencia, sigue girando. La curva 3 de la figura 10-2 corresponde al movimiento de rotación de péndulo. El caso límite en que $E = mg\ell$ está representado por las curvas 2 y 2' de la figura 10-2. Con esta energía, el péndulo llega a $\theta = \pi$, posición vertical, con energía cinética nula, es decir, $p_\theta = 0$. Se encuentra entonces en equilibrio inestable y podría, en principio, quedar en él indefinidamente. No obstante, la menor perturbación le haría seguir en movimiento o bien a lo largo de la curva 2 o pasar a la curva 2' —podría caer de una u otra manera. El punto $\theta = \pi, p_\theta = 0$ es un punto de silla de la función hamiltoniana $H = E(p_\theta, \theta)$ y existen dos caminos de E constantes en el espacio fásico que se cortan en el punto de silla. Tenemos aquí un ejemplo (afortunadamente raro) de lo que ha venido a llamarse *bifurcación*, fenómeno de creciente interés en Matemáticas.

Para uno y otro tipo de movimiento periódico, podemos introducir una nueva variable

J destinada a sustituir a α_1 en su papel de cantidad de movimiento (constante) transformada. La llamada variable de acción J se define en la forma

$$J = \oint p dq, \quad (10-65)$$

donde la integración se extiende a todo un periodo de libración o de rotación, según sea el caso. (La designación de variable de acción se apoya en la semejanza existente entre la ecuación (10-65) y la acción abreviada de §8-6. Notemos que J tiene siempre las dimensiones de un momento cinético.) De la ecuación (10-63) se deduce que J es siempre función exclusiva de α_1 :

$$\alpha_1 \equiv H = H(J). \quad (10-66)$$

Luego, la función característica de Hamilton se podrá escribir en la forma

$$W = W(q, J). \quad (10-67)$$

La coordenada generalizada conjugada de J , llamada *variable ángulo** w está definida por la ecuación de transformación:

$$w = \frac{\partial W}{\partial J}. \quad (10-68)$$

Correspondientemente, la ecuación de movimiento para w es

$$\dot{w} = \frac{\partial H(J)}{\partial J} = \nu(J), \quad (10-69)$$

donde ν es una función constante de J solamente. La ecuación (10-69) tiene la solución inmediata

$$w = \nu t + \beta, \quad (10-70)$$

* El nombre «variables acción-ángulo» lo utilizó por primera vez K. Schwarzschild en un trabajo que ha hecho época (*Sitzungsber. der Kgl. Akad. d. Wiss.*, 1916, p. 548), que marcó el final de una brillante carrera, cortada trágicamente por la Primera guerra mundial.

con lo que w es función lineal del tiempo, exactamente como en la ecuación (10-29).

Hasta ahora, las variables acción-ángulo sólo aparecen como un sistema particular de la clase general de coordenadas transformadas a la cual lleva la ecuación de Hamilton-Jacobi. De la ecuación (10-68) podríamos despejar q en función de w y J , lo cual, en combinación con la ecuación (10-70), nos daría la solución buscada para q en función del tiempo. Pero cuando se utilizan de esta manera, las variables no presentan ninguna ventaja sobre cualquier otro sistema de coordenadas generado por W . Su mérito particular se debe más bien a la interpretación física que se puede dar a v . Consideremos el cambio de w cuando q describe un ciclo completo de libración o rotación, dado por

$$\Delta w = \oint \frac{\partial w}{\partial q} dq. \quad (10-71)$$

Según la ecuación (10-68), esto se puede también escribir en la forma

$$\Delta w = \oint \frac{\partial^2 W}{\partial q \partial J} dq. \quad (10-72)$$

Como J es una constante, podemos sacar del signo integral la derivada respecto a J :

$$\Delta w = \frac{d}{dJ} \oint \frac{\partial W}{\partial q} dq = \frac{d}{dJ} \oint p dq = 1, \quad (10-73)$$

donde hemos utilizado la definición de J dada por la ecuación (10-65).

La ecuación (10-73) nos dice que w cambia en una unidad cuando q varía a lo largo de un periodo completo. Pero de la ecuación (10-70) se deduce que si es τ el periodo para un ciclo completo de q , será

$$\Delta w = 1 = \nu \tau.$$

Luego, la constante ν podemos identificarla con el recíproco del periodo,

$$\nu = \frac{1}{\tau} \quad (10-74)$$

y será, por tanto, *la frecuencia asociada al movimiento periódico de q* . Así pues, la utilización de las variables acción-ángulo nos proporciona una técnica potente para la obtención de la frecuencia de un movimiento periódico *sin hallar una solución completa del movimiento del sistema*. Si sabemos de antemano que un sistema de un grado de

libertad es periódico según las definiciones dadas anteriormente, podremos hallar la frecuencia una vez determinada H en función de J . La derivada de H respecto a J , según la ecuación (10-69), nos dará directamente la frecuencia ν del movimiento. La designación de w como variable ángulo resulta obvia a partir de la identificación de la ν de la ecuación (10-70) como frecuencia. También hemos señalado que J tiene las dimensiones de un momento cinético y, desde luego, la coordenada conjugada de un momento cinético es un ángulo.*

Como ejemplo de aplicación de las variables acción-ángulo para hallar frecuencias, consideremos de nuevo el conocido problema del oscilador armónico lineal. De las ecuaciones (10-18) y de la ecuación de definición (10-65), la variable de acción constante J viene dada por

$$J = \oint p dq = \oint \sqrt{2m\alpha - m^2\omega^2 q^2} dq,$$

donde α es la energía total constante y ω es tal que $\omega^2 = k/m$. El cambio de variable

$$q = \sqrt{\frac{2\alpha}{m\omega^2}} \text{sen } \theta$$

reduce la integral a

$$J = \frac{2\alpha}{\omega} \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta, \quad (10-75)$$

donde los límites son tales que corresponden a un ciclo completo de q . Como el valor medio de $\cos^2 \theta$ para un ciclo completo es $1/2$, la ecuación (10-75) se reduce simplemente a

$$J = \frac{2\pi\alpha}{\omega}$$

o bien, despejando α ,

$$\alpha \equiv H = \frac{J\omega}{2\pi}. \quad (10-76)$$

* En algunas aplicaciones, la variable de acción se define en la literatura de Mecánica celeste diciendo que es $(2\pi)^{-1}$ multiplicado por el valor dado en la ecuación (10-65). Según la ecuación (10-73), la variable ángulo correspondiente es igual a 2π por nuestra definición y en lugar de ν tenemos ω , que es la pulsación. No obstante, nos adheriremos siempre a las definiciones familiares utilizadas en Física, que hemos dado anteriormente.

La frecuencia de oscilación será, pues,

$$\frac{\partial H}{\partial J} = v = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad (10-77)$$

que es la expresión conocida de la frecuencia de un oscilador armónico lineal. Aun cuando no sea necesario para obtener las frecuencias, resulta instructivo (y útil en futuras aplicaciones) escribir las soluciones dadas por las ecuaciones (10-21) y (10-22) en función de J y w . Ante todo, démonos cuenta de que la combinación $\omega(t + \beta)$ es, en virtud de las ecuaciones (10-77) y (10-70) lo mismo que $2\pi w$, redefiniendo adecuadamente la constante de integración. Luego, las soluciones de q (ec. 10-21) y p (ec. 10-22) adoptan la forma siguiente:

$$q = \sqrt{\frac{J}{\pi m \omega}} \operatorname{sen} 2\pi w, \quad (10-78)$$

$$p = \sqrt{\frac{mJ\omega}{\pi}} \cos 2\pi w. \quad (10-79)$$

Notemos que las ecuaciones (10-78) y (10-79) podemos también considerar que son las ecuaciones de transformación que llevan del sistema de variables canónicas (w, J) al sistema canónico (q, p).

10-6 VARIABLES ACCIÓN-ÁNGULO PARA SISTEMAS TOTALMENTE SEPARABLES*

También podemos introducir las variables acción-ángulo para ciertos tipos de movimiento de sistemas con múltiples grados de libertad, con tal que existan uno o más sistemas de coordenadas en los cuales la ecuación de Hamilton-Jacobi sea totalmente separable. Como antes, solamente consideraremos sistemas conservativos, por lo que utilizaremos la **función característica de Hamilton**. **Separabilidad total** significa que las ecuaciones de transformación canónica tienen la forma

$$p_i = \frac{\partial W_i(q_i; \alpha_1, \dots, \alpha_n)}{\partial q_i}, \quad (10-80)$$

que nos da cada p_i en función de q_i y de n constantes de integración α_j :

$$p_i = p_i(q_i; \alpha_1, \dots, \alpha_n). \quad (10-81)$$

* A menos que se indique lo contrario, en este apartado *no* se utilizará el convenio de suma.

La ecuación (10-81) es la contrapartida de la ecuación (10-63) que se aplicó a sistemas de un grado de libertad. Démonos cuenta de que la ecuación (10-81) representa aquí la ecuación de la órbita de la proyección del punto figurativo del sistema sobre el plano (q_i, p_i) en el espacio fásico. Podemos definir variables acción-ángulo para sistemas cuando las ecuaciones de órbita para *todos* los pares (q_i, p_i) describan o bien órbitas cerradas (libración, como en la figura 10-1a) o funciones periódicas de q_i (rotaciones, como en la figura 10-1b).

Debemos recalcar que esta caracterización del movimiento no significa que cada q_i y p_i sean necesariamente funciones periódicas del tiempo, es decir, que repitan sus valores a intervalos fijos de tiempo. Incluso cuando cada uno de los sistemas (q_i, p_i) por separado sean periódicos en este sentido, el movimiento global del sistema no tiene por qué ser periódico. Así, en un oscilador armónico tridimensional las frecuencias de movimiento según los tres ejes cartesianos pueden ser diferentes. En tal ejemplo queda claro que el movimiento completo de la partícula puede no ser periódico. Si las frecuencias separadas no son fracciones racionales unas de otras, la partícula no describirá una curva cerrada en el espacio sino una «figura de Lissajous» abierta. Tal movimiento diremos que es *múltiplemente periódico*. Las variables acción-ángulo presentan la ventaja de llevar a una evaluación de todas las frecuencias que intervienen en un movimiento múltiplemente periódico sin necesitar una solución completa del movimiento.

En analogía con la ecuación (10-65), las variables de acción J_i se definen mediante integrales curvilíneas para periodos completos de la órbita en el plano (q_i, p_i) :

$$J_i = \oint p_i dq_i. \quad (10-82)$$

Si es cíclica una de las coordenadas de separación, su cantidad de movimiento conjugada será constante. La órbita correspondiente en el plano q_i, p_i del espacio fásico será entonces una recta horizontal, la cual no parecería estar en la naturaleza de un movimiento periódico. En realidad, el movimiento puede considerarse como caso límite del tipo rotación de periodicidad, en el cual se puede asignar a q_i un periodo arbitrario cualquiera. Como la coordenada en una periodicidad de rotación es invariablemente un ángulo, una tal q_i cíclica tiene siempre un periodo natural igual a 2π . En consecuencia, la integral de la definición variable acción correspondiente a una coordenada ángulo cíclica deberá calcularse de 0 a 2π y por tanto

$$J_i = 2\pi p_i \quad (10-83)$$

para todas las variables cíclicas.

Según la ecuación (10-80), J_i podrá también escribirse en la forma

$$J_i = \oint \frac{\partial W_i(q_i; \alpha_1, \dots, \alpha_n)}{\partial q_i} dq_i. \quad (10-84)$$

Como aquí q_i es simplemente una variable de integración, cada variable de acción J_i será función solamente de las n constantes de integración que aparecen en la solución de la ecuación de Hamilton-Jacobi. Además, de la independencia entre los pares de variables (q_i, p_i) se deduce que las J_i forman n funciones de las α_i independientes entre sí y por tanto resultan adecuadas para ser utilizadas como sistemas de las nuevas cantidades de movimiento constantes. Expresando las α_i en función de las variables de acción, podremos escribir la función característica W en la forma

$$W = W(q_1, \dots, q_n; J_1, \dots, J_n) = \sum_j W_j(q_j; J_1, \dots, J_n),$$

mientras la hamiltoniana aparece en función de las J_i solamente:

$$H = \alpha_1 = H(J_1, \dots, J_n). \quad (10-85)$$

Al igual que en el sistema de un grado de libertad, podemos definir variables ángulo conjugadas w_i por medio de las ecuaciones de transformación que ahora aparecen en la forma

$$w_i = \frac{\partial W}{\partial J_i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial W_j(q_j; J_1, \dots, J_n)}{\partial J_i}. \quad (10-86)$$

Las w_i satisfacen ecuaciones de movimiento dadas por

$$\dot{w}_i = \frac{\partial H(J_1, \dots, J_n)}{\partial J_i} = v_i(J_1, \dots, J_n). \quad (10-87)$$

Como las v_i son constantes, funciones solamente de las variables de acción, las variables ángulo serán todas funciones lineales del tiempo

$$w_i = v_i t + \beta_i. \quad (10-88)$$

Notemos que, en general, las w_i individuales aumentan en el tiempo con distinta rapidez.

Las constantes v_i se pueden identificar con las frecuencias del movimiento de periodicidad múltiple, pero el razonamiento para poner de manifiesto la relación es más sutil que en el caso de sistemas periódicos de un grado de libertad. Las ecuaciones de transformación al sistema (w, J) de variables implica que cada q_j (y cada p_j) sea función de las constantes J_i y las variables w_i . Lo que queremos hallar es qué tipo de función matemática de las q son las w . Para ello vamos a examinar el cambio de una w_i particular cuando se toma cada una de las variables q_j a lo largo de un número entero m_j de ciclos de

libración o rotación. Al efectuar este método puramente matemático está claro que *no* seguimos el movimiento del sistema en el tiempo. Es como si suspendiéramos el transcurso del tiempo y se moviera cada una de las q , como si lo hiciéramos manualmente, independientemente a lo largo de unos cuantos ciclos de su movimiento. En realidad, **estamos tratando con los desplazamientos virtuales del capítulo 1 y en consecuencia, representaremos por δw_i la variación infinitesimal de w_i cuando se varían infinitesimalmente las q_j , la cual viene dada por**

$$\delta w_i = \sum_j \frac{\partial w_i}{\partial q_j} dq_j = \sum \frac{\partial^2 W}{\partial J_i \partial q_j} dq_j,$$

en donde hemos utilizado la ecuación (10-86). La derivada respecto a q_j se anula salvo para la W_j constituyente de W , con lo que por la ecuación (10-80) δw_i se reduce a

$$\delta w_i = \frac{\partial}{\partial J_i} \sum_j p_j(q_j, J) dq_j. \quad (10-89)$$

La ecuación (10-89) nos da δw_i en forma de suma de contribuciones independientes, cada una de las cuales contiene solamente el movimiento de q_j . El cambio total de w_i a consecuencia de la maniobra especificada será, pues,

$$\Delta w_i = \sum_j \frac{\partial}{\partial J_i} \oint_{m_j} p_j(q_j, J) dq_j.$$

El operador derivada parcial respecto a J_i se puede sacar de los signos integral porque a lo largo del movimiento cíclico de q_j todas las J se mantienen constantes. Bajo cada signo integral el símbolo m_j indica que la integración se extiende a m_j ciclos de q_j . Pero, por la definición de las variables de acción, cada una de las integrales es exactamente $m_j J_j$. Como las J son independientes, se deduce que

$$\Delta w_i = m_i. \quad (10-90)$$

Es más, notemos que si alguna q_j no efectuara un número completo de ciclos, en la integración sobre q_j quedaría un resto de integral sobre una fracción de ciclo y Δw_i no tendría un valor entero. Si los conjuntos de las w y de las m se trataran como vectores \mathbf{w} y \mathbf{m} , respectivamente, la ecuación (10-90) podría escribirse en la forma

$$\Delta \mathbf{w} = \mathbf{m}. \quad (10-90')$$

Supongamos, primeramente, que los movimientos separables sean todos del tipo libración con lo que cada q_j , así como cada p_j , vuelve a su valor inicial al completar un ciclo. El resultado descrito por la ecuación (10-90) podríamos expresarlo ahora de la manera siguiente: $\boldsymbol{\eta}$ (vector de las q y las p) es una función de \mathbf{w} tal que una variación $\Delta\boldsymbol{\eta} = 0$ corresponde a una variación $\Delta\mathbf{w} = \mathbf{m}$, vector de valores enteros. Como los números de ciclos en los movimientos de q_j elegidos son arbitrarios, \mathbf{m} puede tomarse nulo salvo para $m = 1$ y todas las componentes de $\boldsymbol{\eta}$ permanecen invariadas o vuelven a su valor original. Luego, en el caso más general, las componentes de $\boldsymbol{\eta}$ deben ser funciones periódicas de cada w_i con periodo unidad; es decir, las q y las p son funciones de periodicidad múltiple de las w con periodos unidad. Una tal función de periodicidad múltiple puede siempre representarse mediante un desarrollo de Fourier múltiple el cual, para q_k por ejemplo, sería

$$q_k = \sum_{j_1 = -\infty}^{\infty} \sum_{j_2 = -\infty}^{\infty} \dots \sum_{j_n = -\infty}^{\infty} a_{j_1, \dots, j_n}^{(k)} e^{2\pi i(j_1 w_1 + j_2 w_2 + j_3 w_3 + \dots + j_n w_n)}, \quad (\text{libración})$$

(10-91)

donde las j son n índices enteros que van de $-\infty$ a $+\infty$. Tratando también al conjunto de las j como vector en el mismo espacio n dimensional que \mathbf{w} , el desarrollo se puede escribir de manera más compacta en la forma

$$q_k = \sum_j a_j^{(k)} e^{2\pi i \mathbf{j} \cdot \mathbf{w}}, \quad (\text{libración}). \quad (10-91')$$

Si escribimos análogamente la ecuación (10-88) en forma de ecuación vectorial,

$$\mathbf{w} = \mathbf{v}t + \boldsymbol{\beta}, \quad (10-88')$$

la dependencia de q_k respecto al tiempo aparece en la forma

$$q_k(t) = \sum_j a_j^{(k)} e^{2\pi i \mathbf{j} \cdot (\mathbf{v}t + \boldsymbol{\beta})}, \quad (\text{libración}). \quad (10-92)$$

Notemos que, en general, $q_k(t)$ no es función periódica de t . A menos que las distintas v_i estén conmensuradas, es decir, sean múltiplos racionales unas de otras, q_k no repetirá sus valores a intervalos de tiempo regulares.* Finalmente, debemos recordar que los coeficientes $a_j^{(k)}$ se pueden hallar por el método normal utilizado para los coeficientes de Fourier, es decir, vienen dados por la integral múltiple extendida a la celda unidad en el espacio \mathbf{w} :

$$a_j^{(k)} = \int_0^1 \dots \int_0^1 q_k(\mathbf{w}) e^{-2\pi i \mathbf{j} \cdot \mathbf{w}} (d\mathbf{w}). \quad (10-93)$$

* Como función de t , q_k se describe como función *cuasi-periódica*.

Aquí, $(d\mathbf{w})$ representa el elemento de volumen en el espacio n -dimensional de las w_i .

Cuando el movimiento tenga la naturaleza de una rotación, en un ciclo completo del par de variables separado (q_k, p_k) la coordenada q_k no vuelve a su valor original, sino que aumenta en el valor de su periodo q_{0k} . Por tanto, dicha coordenada de rotación no es ni siquiera de periodicidad múltiple. En cambio, hemos visto que durante el ciclo w_k aumenta en la unidad. Luego, la función $q_k - w_k q_{0k}$ vuelve a su valor inicial y al igual que las coordenadas de libración, es una función multiperíodica de todas las w con periodos unidad. Podemos, pues, desarrollar la función en serie múltiple de Fourier análoga a la de la ecuación (10-91):

$$q_k - w_k q_{0k} = \sum_j a_j^{(k)} e^{2\pi i j \cdot \mathbf{w}}, \quad (\text{rotación}) \quad (10-93)$$

o sea

$$q_k = q_{0k}(v_k t + \beta_k) + \sum_j a_j^{(k)} e^{2\pi i j \cdot (v t + \beta)}, \quad (\text{rotación}). \quad (10-94)$$

Así pues, siempre es posible deducir una función de periodicidad múltiple a partir de una coordenada de rotación, la cual se puede entonces manejar exactamente como una coordenada de libración. A fin de simplificar el ulterior estudio, por tanto, nos limitaremos principalmente al tipo de movimiento de libración.

Las coordenadas cantidad de movimiento separables, p_k , por la naturaleza del movimiento supuesto, son también funciones de periodicidad múltiple de las w y se pueden desarrollar en serie de Fourier múltiple análoga a la de la ecuación (10-91). Deducimos entonces que toda función de los distintos pares de variables (q_k, p_k) será también función de periodicidad múltiple de las w y podrá escribirse en la forma

$$f(q, p) = \sum_j b_j e^{2\pi i j \cdot \mathbf{w}} = \sum_j b_j e^{2\pi i j \cdot (v t + \beta)}. \quad (10-95)$$

Por ejemplo, cuando las coordenadas cartesianas de partículas del sistema no sean las coordenadas de separación, seguirán escribiéndose como funciones del tiempo en la forma indicada por la ecuación (10-95).

Aun cuando las ecuaciones (10-91) y (10-92) representan el tipo de movimiento más general compatible con la naturaleza supuesta del problema, no todos los sistemas presentarán esta generalidad total. En particular, en la mayoría de problemas suficientemente sencillos para ser utilizados como ilustraciones de la aplicación de variables acción-ángulo, cada coordenada de separación q_k sólo será función de su correspondiente w_k . Cuando esto suceda, q_k será función periódica de w_k (y por tanto del tiempo) y la serie múltiple de Fourier se reduce a una serie de Fourier simple:

$$q_k = \sum_j a_j^{(k)} e^{2\pi i j w_k} = \sum_j a_j^{(k)} e^{2\pi i j (v_k t + \beta_k)}. \quad (10-96)$$

En el lenguaje del capítulo 6, en tales problemas las q_k son, en realidad, las coordenadas normales del sistema. No obstante, incluso cuando podamos simplificar tanto el movimiento de las q , sucede frecuentemente que funciones de todas las q , tales como las coordenadas cartesianas, siguen siendo funciones de periodicidad múltiple de las w y se deben representar en la forma indicada por la ecuación (10-95). Si las distintas frecuencias ν_k no están conmensuradas, dichas funciones no serán periódicas del tiempo. El movimiento de un oscilador armónico anisótropo bidimensional constituye un ejemplo conveniente y conocido de estas consideraciones. Supongamos que en un sistema particular de coordenadas cartesianas la hamiltoniana venga dada por

$$H = \frac{1}{2m} [(p_x^2 + 4\pi^2 m^2 \nu_x^2 x^2) + (p_y^2 + 4\pi^2 m^2 \nu_y^2 y^2)].$$

Estas coordenadas cartesianas serán, pues, variables de separación adecuadas y cada una exhibirá un movimiento armónico simple de frecuencias ν_x y ν_y , respectivamente. Así pues, las soluciones para x e y son formas particularmente sencillas de los desarrollos simples de Fourier de la ecuación (10-96). Supongamos ahora que se giren las coordenadas 45° alrededor del eje z ; las componentes del movimiento según los nuevos ejes x' , y' serán

$$\begin{aligned} x' &= \frac{1}{\sqrt{2}} [x_0 \cos 2\pi(\nu_x t + \beta_x) + y_0 \cos 2\pi(\nu_y t + \beta_y)], \\ y' &= \frac{1}{\sqrt{2}} [y_0 \cos 2\pi(\nu_y t + \beta_y) - x_0 \cos 2\pi(\nu_x t + \beta_x)]. \end{aligned} \quad (10-97)$$

Si ν_x/ν_y fuese un número racional, estas dos expresiones serían simplemente periódicas y corresponderían a una curva de Lissajous cerrada. Pero si ν_x y ν_y fuesen inconmensurables, la figura de Lissajous no se volvería nunca a recorrer exactamente y las ecuaciones (10-97) darían ejemplos sencillos de desarrollos en serie de periodicidad múltiple de la forma (10-95).

Incluso cuando q_k sea una función de periodicidad múltiple de todas las w , intuimos que debe existir una relación especial entre q_k y su correspondiente w_k (y por tanto ν_k). Después de todo, el razonamiento que culmina en la ecuación (10-90) dice que cuando q_k sola efectúa su ciclo completo, la w_k aumenta en una unidad mientras que las demás w vuelven a sus valores iniciales. En 1961 logró J. Vinti expresar con un enunciado preciso y riguroso el sentimiento intuitivo a que hemos hecho referencia.* Supongamos que un intervalo de tiempo T contenga m ciclos completos de q_k más una fracción de ciclo. En general, los tiempos exigidos para cada ciclo sucesivo serán diferentes, ya que q_k no es función periódica de t . Entonces, basándose en un teorema de la teoría de números,

* J. Vinti, *J. Res. Nat. Bur. Standards*, **65B**, 131 (1961). Véase también, R. Garfinkel en *Space Mathematics*, Part 1. p. 57, 1966.

demonstró Vinti que cuando T crece indefinidamente,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{L}{T} = \nu_k. \quad (10-98)$$

La frecuencia *media* del movimiento de q_k vendrá, por tanto, dada siempre por ν_k , incluso cuando el movimiento total sea más complicado que una simple función periódica de frecuencia ν_k .

Excluyendo la conmensurabilidad de todas las frecuencias, siempre podremos formar una función de periodicidad múltiple a partir de la función generatriz W . La ecuación de definición de J_i (ec. 10-84) establece que cuando q_i efectúa un ciclo completo, es decir, cuando w_i varía en una unidad, la función característica aumenta en J_i . Deducimos que la función

$$W' = W - \sum_k w_k J_k \quad (10-99)$$

se mantiene invariada cuando *cada* w_k aumente en una unidad, permaneciendo constantes las demás variables ángulo. Por tanto, la ecuación (10-99) representa una función de periodicidad múltiple que puede desarrollarse en función de las w_i (o de las frecuencias ν_i), mediante una serie de la forma de la ecuación (10-95). Como las ecuaciones de transformación para las variables ángulo son

$$w_k = \frac{\partial W}{\partial J_k},$$

nos damos cuenta de que la ecuación (10-99) define una transformación de Legendre que lleva de la base q, J a la base q, w . La comparación con la ecuación (9-15) en combinación con la ecuación (9-12) demuestra que si $W(q, J)$ es una función generatriz de la forma $F_2(q, P)$, entonces $W'(q, w)$ es la función generatriz correspondiente del tipo $F_1(q, Q)$, pasando en ambos casos de las variables (q, p) a las variables (w, J) . Aun cuando W' genera así la misma transformación que W , *no* es, desde luego, solución de la ecuación de Hamilton-Jacobi.*

* Hemos definido las variables acción-ángulo en función de las coordenadas separables simplemente periódicas. Demostrábamos que el movimiento global del sistema era, en general, de periodicidad múltiple. Debemos mencionar que se puede invertir el proceso. Partiendo del hecho de que el movimiento del sistema es de periodicidad múltiple, es posible introducir las variables acción-ángulo de manera que la configuración del sistema y la función generatriz $W'(q, w)$ sean de periodicidad múltiple en las w con periodo unidad y la hamiltoniana sea cíclica en todas las w . De esta manera podemos evitar la necesidad de referirnos a las coordenadas de separación. Para más detalles, véase Born, *The Mechanics of the Atom*, § 15.

Hemos recalcado que la configuración del sistema es de periodicidad múltiple tan sólo si las frecuencias ν_i no son fracciones racionales unas de otras. En caso contrario, la configuración se repite al cabo de un tiempo suficientemente largo y sería simplemente periódica. La condición formal para la conmensurabilidad de todas las frecuencias es que existan $n - 1$ relaciones de la forma

$$\sum_{i=1}^n j_i \nu_i = 0, \quad (10-100)$$

donde las j_i son números enteros. Resolviendo estas ecuaciones podremos expresar cualquier ν_i en forma de fracción racional de cualquiera de las otras frecuencias. Cuando entre las frecuencias fundamentales existan solamente m relaciones de la forma (10-100), diremos que el sistema es m veces degenerado. Si m es igual a $n - 1$, con lo que el movimiento sería simplemente periódico, diremos que el sistema es *completamente degenerado*. Así pues, siempre que *la órbita del punto figurativo del sistema sea cerrada, el movimiento será completamente degenerado*.

Existe una relación interesante entre degeneración y las coordenadas en las cuales es separable la ecuación de Hamilton-Jacobi. Puede demostrarse que el camino del punto figurativo del sistema en el caso de un sistema no degenerado llena por completo una región limitada de los espacios de configuraciones y fásico. (cfr. Born, *The Mechanics of the Atom*, Apéndice 1.) Supongamos un problema en el cual el movimiento en una cualquiera de las coordenadas de separación sea simplemente periódico y se haya por tanto demostrado que es independiente del movimiento de las otras coordenadas. Por tanto, el camino del punto figurativo deberá estar limitado en su conjunto por las superficies de q_i y p_i constantes que marcan los límites del movimiento oscilatorio de las variables de separación. (El razonamiento se extiende fácilmente a la rotación limitando todos los ángulos al intervalo entre 0 y 2π .) Estas superficies definen, pues, el volumen del espacio que está relleno por la órbita del punto figurativo del sistema. De aquí se deduce evidentemente que la separación de variables en sistemas no degenerados debe ser única; la ecuación de Hamilton-Jacobi no puede separarse en dos sistemas de coordenadas diferentes (aparte de variaciones triviales tales como el cambio de escala). Por tanto, la posibilidad de separar el movimiento en más de un sistema de coordenadas proporciona normalmente la evidencia de que el sistema es degenerado.*

Los ejemplos más sencillos de degeneración se presentan cuando son iguales dos o más frecuencias. Si son iguales dos de las constantes de rigidez de un oscilador armónico tridimensional, las frecuencias correspondientes serán iguales y el sistema es simplemente degenerado. En un oscilador lineal isótropo, las constantes de rigidez son iguales en todas direcciones, todas las frecuencias son iguales y el sistema es completamente degenerado.

* Existen casos patológicos en los que una hamiltoniana puede ser separable en varios sistemas de coordenadas; aun así las órbitas son cerradas, es decir, degeneradas, solamente si están contenidas en una subregión particular. Si la órbita atraviesa ciertos límites pueden aparecer discontinuidades. Véase E. Onofri y M. Pauri, *Jour. Math. Phys.* **14**, 1106 (1973). Tales restricciones a la degeneración «local» no se presentan en la hamiltoniana usual que es continua y derivable.

Siempre que exista degeneración, las frecuencias fundamentales ya no son independientes y el movimiento periódico del sistema se puede describir con menos que el complemento total de n frecuencias. Las m condiciones de degeneración pueden utilizarse para reducir el número de frecuencias a $n - m$ y diremos que el movimiento del sistema es $n - m$ veces periódico. La reducción de las frecuencias se puede realizar de manera elegante por medio de una transformación puntual de las variables acción-ángulo. Las m condiciones de degeneración se pueden escribir de manera resumida en la forma siguiente:

$$\sum_{i=1}^n j_{ki} v_i = 0, \quad k = 1, \dots, m. \quad (10-101)$$

Consideremos ahora una transformación puntual que lleve de (w, J) a (w', J') definida por la función generatriz (cfr. ec. 9-26 donde se aplica el convenio de suma):

$$F_2 = \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^n J'_k j_{ki} w_i + \sum_{k=m+1}^n J'_k w_k. \quad (10-102)$$

Las coordenadas transformadas son

$$\begin{aligned} w'_k &= \sum_{i=1}^n j_{ki} w_i, & k &= 1, \dots, m, \\ w'_k &= w_k, & k &= m+1, \dots, n. \end{aligned} \quad (10-103)$$

Correspondientemente, las nuevas frecuencias son

$$\begin{aligned} v'_k &= \dot{w}'_k = \sum_{i=1}^n j_{ki} v_i = 0 & k &= 1, \dots, m, \\ &= v_k & k &= m+1, \dots, n. \end{aligned} \quad (10-104)$$

Así, en las coordenadas transformadas son nulas m de las frecuencias y nos queda un sistema de $n - m$ frecuencias independientes. Es evidente que las nuevas w'_k pueden también denominarse variables ángulo en el sentido de que la configuración del sistema tiene periodicidad múltiple en las coordenadas w'_k con periodo fundamental unidad. Las correspondientes variables de acción constantes vienen dadas por la solución de las n ecuaciones de transformación

$$J_i = \sum_{k=1}^m J'_k j_{ki} + \sum_{k=m+1}^n J'_k \delta_{ki}. \quad (10-105)$$

Las frecuencias nulas corresponden a factores constantes en el desarrollo de Fourier. Éstos están también presentes en la serie de Fourier original en función de las v (ec. 10-91), figurando siempre que los índices j_i sean tales que se cumplan las condiciones de degeneración. Como

$$v'_i = \frac{\partial H}{\partial J'_i},$$

la hamiltoniana debe ser independiente de las variables de acción J'_i cuyas frecuencias correspondientes sean nulas. En un sistema completamente degenerado, por tanto, podremos hacer que la hamiltoniana sólo dependa de una variable de acción.

Observemos que la función característica de Hamilton W sirve también de función generatriz para la transformación que lleva del sistema (q, p) al sistema (w', J') . Como las cantidades J' son n constantes independientes, las constantes de integración originales se podrán expresar en función del sistema J' y podremos dar W en la forma $W(q, J')$. En esta forma es una función generatriz que lleva a un nuevo sistema de variables canónicas para el cual las J' son las cantidades de movimiento canónicas. Ahora bien, en virtud de la transformación puntual generada por la F_2 de la ecuación (10-102) sabemos que w' es conjugada de J' . Luego se deduce que las nuevas coordenadas generadas por $W(q, J')$ deben constituir el nuevo sistema w' , con ecuaciones de transformación dadas por

$$w'_i = \frac{\partial W}{\partial J'_i}. \quad (10-106)$$

(Para una demostración más formal de la ecuación 10-106 basada en la estructura algebraica de la ecuación (10-102), véase el ejercicio 17.)

El problema del movimiento acotado de una partícula sometida a una fuerza central inversamente proporcional al cuadrado de la distancia ilustra muchos fenómenos que comporta la degeneración. El estudio de este problema ofrece también la oportunidad de mostrar cómo se aplica la técnica de acción-ángulo a sistemas concretos y de indicar las relaciones con la Mecánica cuántica de Bohr y con la Mecánica celeste. En consecuencia, dedicaremos el apartado siguiente a tratar con detalle el problema de Kepler mediante variables acción-ángulo.

10-7 PROBLEMA DE KEPLER TRATADO CON VARIABLES ACCIÓN-ÁNGULO*

Para exhibir todas las propiedades de la solución examinaremos el movimiento en el espacio, en vez de aprovechar nuestro conocimiento previo de que la órbita es plana. En función de las coordenadas polares esféricas, el problema de Kepler se convierte en un

* De ahora en adelante volvemos a adoptar el convenio de suma.

caso particular del tratamiento general dado anteriormente en § 10-4 para el caso de movimiento debido a una fuerza central en el espacio. Podemos tomar de manera inmediata las ecuaciones que van de la (10-54) a la (10-61), sustituyendo $V(r)$ doquiera que aparezca por la forma concreta

$$V(r) = -\frac{k}{r}. \quad (10-107)$$

Hemos visto que la ecuación de Hamilton-Jacobi con este potencial es completamente separable en coordenadas polares esféricas. Vamos a limitar nuestro estudio al caso acotado, es decir, $E < 0$. Por tanto, el movimiento en cada una de las coordenadas será periódico —libración en r y θ y rotación en ϕ . Se cumplen así las condiciones para la aplicación de variables acción-ángulo y podemos pasar a construir las variables de acción basándonos en la ecuación de definición (10-84). De la ecuación (10-56) deducimos

$$J_\phi = \oint \frac{\partial W}{\partial \phi} d\phi = \oint \alpha_\phi d\phi. \quad (10-108a)$$

Análogamente, basándonos en la ecuación (10-58), J_θ viene dada por

$$J_\theta = \oint \frac{\partial W}{\partial \theta} d\theta = \oint \sqrt{\alpha_\theta^2 - \frac{\alpha_\phi^2}{\sin^2 \theta}} d\theta. \quad (10-108b)$$

Finalmente, según la ecuación (10-59),

$$J_r = \oint \frac{\partial W}{\partial r} dr = \oint \sqrt{2mE + \frac{2mk}{r} - \frac{\alpha_\theta^2}{r^2}} dr. \quad (10-108c)$$

La primera integral es trivial; ϕ varía 2π radianes en una revolución completa y por tanto

$$J_\phi = 2\pi\alpha_\phi = 2\pi p_\phi. \quad (10-109)$$

Este resultado se podía prever de antemano, ya que ϕ es una coordenada cíclica en H y la ecuación (10-109) no es más que un caso particular de la ecuación (10-83) para las variables de acción correspondientes a coordenadas cíclicas. La integración de la ecuación (10-108b) se puede efectuar de diversas maneras; vamos a esbozar un método en el que sólo intervienen reglas elementales de integración. Si representamos por i el ángulo

polar del vector momento cinético total, con lo que

$$\cos i = \frac{\alpha_\phi}{\alpha_\theta}, \quad (10-110)$$

la ecuación (10-108b) podrá también escribirse en la forma

$$J_\theta = \alpha_\theta \oint \sqrt{1 - \cos^2 i \csc^2 \theta} d\theta.$$

El camino de integración cerrado completo es el que recorre θ yendo desde un límite $-\theta_0$ a $+\theta_0$ y regreso, siendo $\sin \theta_0 = \cos i$, o sea $\theta_0 = (\pi/2) - i$. Por tanto, la integral extendida al camino cerrado tendrá un valor cuádruplo de la integral entre 0 y θ_0 , que con alguna manipulación resulta ser

$$J_\theta = 4\alpha_\theta \int_0^{\theta_0} \csc \theta \sqrt{\sin^2 i - \cos^2 \theta} d\theta.$$

La sustitución

$$\cos \theta = \sin i \operatorname{sen} \psi$$

transforma la integral en

$$J_\theta = 4\alpha_\theta \sin^2 i \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 \psi d\psi}{1 - \sin^2 i \operatorname{sen}^2 \psi}.$$

Por último, con la sustitución

$$u = \operatorname{tg} \psi,$$

la integral queda en la forma

$$J_\theta = 4\alpha_\theta \sin^2 i \int_0^x \frac{du}{(1+u^2)(1+u^2 \cos^2 i)} = 4\alpha_\theta \int_0^x du \left[\frac{1}{1+u^2} - \frac{\cos^2 i}{1+u^2 \cos^2 i} \right].$$

Esta última forma sólo contiene integrales conocidas y el resultado final* es

$$J_{\theta} = 2\pi\alpha_{\theta}[1 - \cos i] = 2\pi(\alpha_{\theta} - \alpha_{\phi}). \quad (10-112)$$

La última integral, para J_r , podemos escribirla ahora así:

$$J_r = \oint \sqrt{2mE + \frac{2mk}{r} - \frac{(J_{\theta} + J_{\phi})^2}{4\pi^2 r^2}} dr. \quad (10-113)$$

Efectuada esta integración, podemos despejar la energía $E \equiv H$ en función de las tres variables de acción J_{ϕ} , J_{θ} , J_r . Notemos que J_{ϕ} y J_{θ} sólo pueden figurar en E a través de la combinación $J_{\theta} + J_{\phi}$, y por tanto, las frecuencias correspondientes ν_{ϕ} y ν_{θ} deben ser iguales, lo que indica degeneración. Este resultado no ha incluido a la ley de proporcionalidad inversa del cuadrado de la distancia para la fuerza central; *todo movimiento debido a una fuerza central es, al menos, simplemente degenerado*. La degeneración es, desde luego, consecuencia del hecho de que el movimiento está confinado a un plano normal al vector momento cinético \mathbf{L} constante. El movimiento en este plano implica que θ y ϕ están relacionados de tal manera que cuando ϕ realiza un periodo 2π completo, θ varía un ciclo completo entre los límites $(\pi/2) \pm i$. Por tanto, las frecuencias de θ y ϕ son necesariamente iguales.

La integral de la ecuación (10-113) se puede calcular por procedimientos elementales, pero la integración se efectúa de manera más rápida y elegante utilizando el método de los residuos, procedimiento que utilizó por primera vez Sommerfeld. En favor de los que conocen esta técnica, esbozaremos los pasos de la integración de la ecuación (10-113). Desde luego, el movimiento acotado sólo puede tener lugar cuando E es negativa (cfr. § 3-3) y como el integrando es igual a $p_r = m\dot{r}$, los límites del movimiento están definidos por las raíces r_1 y r_2 de la cantidad subradical. Si r_1 es la cota interior, como en la figura 3-6, un ciclo completo de r comprende ir de r_1 a r_2 y volver de nuevo a r_1 . En la mitad exterior del viaje (de r_1 a r_2) p_r es positiva y deberemos tomar la raíz cuadrada positiva. En cambio, en el viaje de retorno a r_1 , p_r es negativa y la raíz cuadrada debe ser análogamente negativa. La integración comporta, pues, las dos ramas de una función bivalente, siendo r_1 y r_2 los puntos de ramificación. En consecuencia, podemos representar el plano complejo como una de las hojas de una superficie de Riemann, rasgada a lo largo del eje real de r_1 a r_2 (tal como se indica en la figura 10-3).

Como el camino de integración encierra al segmento rectilíneo entre los puntos de ramificación, no podemos aplicar directamente el método de los residuos. No obstante, podemos también considerar que dicho camino encierra al resto del plano complejo,

* Al calcular la integral del segundo término del integrando final de la ecuación (10-111) se ha supuesto positivo $\cos i$. Esto siempre es posible, ya que en el problema no hay ninguna dirección preferente para el eje z , el cual podremos tomarlo a voluntad. Si $\cos i$ fuese negativo, el signo de α_{ϕ} en la ecuación (10-112) sería positivo. Para cambios en las fórmulas subsiguientes, véase el Ejercicio 23.

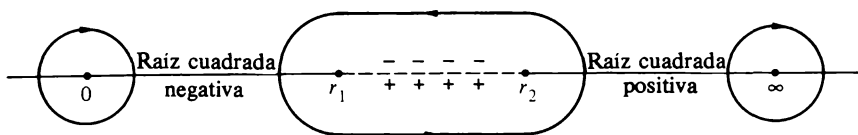


FIGURA 10-3

El plano complejo r en la proximidad del eje real; se indican los caminos de integración utilizados en el cálculo de J .

siendo ahora el sentido de recorrido para la integración el inverso (el horario).^{*} En esta región, el integrando es función uniforme y no hay ningún inconveniente para la aplicación del método de los residuos. Sólo hay dos puntos singulares, a saber, el origen y el infinito y podemos deformar el camino de integración según dos circunferencias descritas en sentido horario y que encierren a estos dos puntos. Ahora bien, el signo ante la raíz cuadrada del integrando debe ser el negativo para la región a lo largo del eje real por debajo de r_1 , según podemos ver examinando el comportamiento de la función en la proximidad de r . Si representamos el integrando en la forma

$$-\sqrt{A + \frac{2B}{r} - \frac{C}{r^2}},$$

el residuo en el origen es

$$R_0 = -\sqrt{-C}.$$

Por encima de r_2 , el signo de la raíz cuadrada en el eje real resulta ser positivo y se obtiene el residuo mediante la técnica normal de cambiar la variable de integración en la forma $z = r^{-1}$:

$$-\oint \frac{1}{z^2} \sqrt{A + 2Bz - Cz^2} dz. \quad (10-114)$$

El desarrollo en torno a $z = 0$ nos da el residuo

$$R_z = -\frac{B}{\sqrt{A}}.$$

^{*} Para visualizar este cambio de punto de vista conviene considerar el plano complejo proyectado estereográficamente sobre una superficie esférica que tenga el origen en su polo sur y el punto del infinito en el polo norte. El eje real se convierte en un círculo meridiano que une los dos polos. Todo camino de integración sobre la esfera divide a su superficie en dos zonas. Podremos considerar que el camino encierra a una u otra, según cuál sea el sentido de integración.

La integral total es el producto de $-2\pi i$ por la suma de los residuos:

$$J_r = 2\pi i \left(\sqrt{-C} + \frac{B}{\sqrt{A}} \right), \quad (10-115)$$

o sea, sustituyendo los coeficientes A , B y C :

$$J_r = -(J_\theta + J_\phi) + \pi k \sqrt{\frac{2m}{-E}}. \quad (10-116)$$

La ecuación (10-116) nos da la dependencia funcional de H respecto de las variables de acción; despejando E tenemos

$$H \equiv E = -\frac{2\pi^2 m k^2}{(J_r + J_\theta + J_\phi)^2}. \quad (10-117)$$

Notemos que, tal como se predijo, J_θ y J_ϕ sólo aparecen a través de la combinación $J_\theta + J_\phi$. Aún más, las tres variables de acción sólo aparecen en la forma $J_r + J_\theta + J_\phi$. Por tanto, todas las frecuencias son iguales; *el movimiento es completamente degenerado*. Este resultado lo podíamos haber previsto de antemano, ya que sabemos que con una fuerza inversamente proporcional al cuadrado de la distancia la órbita es cerrada para las energías negativas. Con una órbita cerrada, el movimiento es simplemente periódico y por tanto, completamente degenerado. Si la fuerza central contuviera un término en r^{-3} , como el que proporcionan las correcciones relativistas, la órbita ya no sería cerrada sino que tendría la forma de una elipse en precesión. En este caso se suprimiría una de las degeneraciones pero el movimiento aún sería simplemente degenerado, ya que $\nu_\theta = \nu_\phi$ para todas las fuerzas centrales. La frecuencia del movimiento viene dada, en este caso, por

$$\nu = \frac{\partial H}{\partial J_r} = \frac{\partial H}{\partial J_\theta} = \frac{\partial H}{\partial J_\phi} = \frac{4\pi^2 m k^2}{(J_r + J_\theta + J_\phi)^3}. \quad (10-118)$$

Si evaluamos la suma de las J en función de la energía expresada por la ecuación (10-117) el periodo de la órbita resulta ser

$$\tau = \pi k \sqrt{\frac{m}{-2E^3}}. \quad (10-119)$$

Esta fórmula del periodo está conforme con la tercera ley de Kepler (ec. 3-71) si recordamos que el semieje mayor a es igual a $-k/2E$.

Se pueden eliminar las frecuencias degeneradas mediante una transformación canónica que lleve a un nuevo sistema de variables acción-ángulo, siguiendo el procedimiento esbozado en el apartado anterior. Expresando las condiciones de degeneración en la forma

$$v_\phi - v_\theta = 0, \quad v_\theta - v_r = 0,$$

la función generatriz apropiada es

$$F = (w_\phi - w_\theta)J_1 + (w_\theta - w_r)J_2 + w_r J_3. \quad (10-120)$$

Las nuevas variables ángulo son

$$\begin{aligned} w_1 &= w_\phi - w_\theta, \\ w_2 &= w_\theta - w_r, \\ w_3 &= w_r, \end{aligned} \quad (10-121)$$

y tal como queríamos, dos de las nuevas frecuencias, v_1 y v_2 , son nulas. Las nuevas variables de acción las podemos obtener a partir de las ecuaciones de transformación

$$\begin{aligned} J_\phi &= J_1, \\ J_\theta &= J_2 - J_1, \\ J_r &= J_3 - J_2, \end{aligned}$$

lo que da las relaciones

$$\begin{aligned} J_1 &= J_\phi, \\ J_2 &= J_\phi + J_\theta, \\ J_3 &= J_\phi + J_\theta + J_r. \end{aligned} \quad (10-122)$$

En función de estas variables transformadas, la hamiltoniana aparece en la forma

$$H = -\frac{2\pi^2 mk^2}{J_3^2}, \quad (10-123)$$

la cual sólo contiene la variable de acción para la cual es distinta de cero la frecuencia correspondiente.

Si quisiéramos utilizar, desde el principio, nuestro conocimiento previo de que el movimiento en el problema de Kepler acotado sigue una órbita cerrada particular plana, podríamos calcular las integrales de J_θ y J_ϕ , de manera muy rápida y simple. En el caso de la integral de J_θ podemos utilizar un procedimiento sugerido por J. H. Van Vleck. Recordemos que cuando las ecuaciones de definición de las coordenadas generalizadas no contienen el tiempo explícitamente, se cumple

$$p_i \dot{q}_i = 2L_2 = 2T.$$

Sabiendo que el movimiento está confinado en un plano, podemos expresar la energía cinética T o en coordenadas polares esféricas o en coordenadas polares planas (r, ψ). Deducimos, pues, que

$$2T = p_r \dot{r} + p_\theta \dot{\theta} + p_\phi \dot{\phi} = p_r \dot{r} + p \dot{\psi}, \quad (10-124)$$

donde p ($\equiv l$) es el módulo del momento cinético total. Luego, la definición de J_θ se puede escribir en la forma

$$J_\theta \equiv \oint p_\theta d\theta = \oint p d\psi - \oint p_\phi d\phi.$$

Como las frecuencias de θ y ϕ son iguales, ϕ y ψ variarán en 2π cuando θ efectúe un ciclo de libración completo y las integrales que definen a J_θ se reducen a

$$J_\theta = 2\pi(p - p_\phi) = 2\pi(\alpha_\theta - \alpha_\phi),$$

de acuerdo con la ecuación (10-112).

La integral de J_ϕ (ec. 10-113) se calculó para obtener $H \equiv E$ en función de las tres variables de acción. Si utilizamos el hecho de que la órbita elíptica cerrada del problema de Kepler acotado es tal que la frecuencia de r es igual a la de θ y ϕ , podremos también obtener a partir de la ecuación (10-124) la dependencia funcional entre H y J . De hecho, en tal caso estamos calculando J , de otra manera. El teorema del virial nos dice que, para las órbitas acotadas del problema de Kepler (cfr. ec. 3-30)

$$\bar{V} = -2\bar{T},$$

donde la raya encima indica un valor medio para el periodo completo del movimiento. Deducimos que

$$H \equiv E = \bar{T} + \bar{V} = -\bar{T}. \quad (10-125)$$

Integrando la ecuación (10-124) respecto al tiempo para un periodo completo, tenemos

$$\frac{2\bar{T}}{\nu_3} = J_r + J_\theta + J_\phi = J_3,$$

donde ν_3 es la frecuencia del movimiento, es decir, el recíproco del periodo. Combinando las ecuaciones (10-125) y (10-126), llegamos a la relación

$$-\frac{2}{J_3} = \frac{\nu_3}{H} = \frac{1}{H} \frac{dH}{dJ_3}, \quad (10-127)$$

donde hemos utilizado la ecuación (10-87). De hecho, la ecuación (10-127) es una ecuación diferencial para el comportamiento funcional de H dependiente de J_3 . La integración de la ecuación conduce inmediatamente a la solución

$$H = \frac{D}{J_3^2}, \quad (10-128)$$

donde D es una constante que no puede contener ninguna J y dependerá, por tanto, tan sólo de m y k . En consecuencia, podemos calcular D considerando el caso elemental de una órbita circular, de radio r_0 , en el cual $J_r = 0$ y $J_3 = 2\pi p$. En este caso, la energía total es

$$H = -\frac{k}{2r_0} \quad (10-129)$$

(según se puede ver a partir del teorema de virial de manera casi inmediata). Además, la condición de ser circular (ec. 3-41) se puede escribir en el caso de la fuerza inversamente proporcional al cuadrado de la distancia en la forma

$$\frac{k}{r_0^2} = \frac{p^2}{mr_0^3} = \frac{J_3^2}{4\pi^2 mr_0^3}. \quad (10-130)$$

Eliminando r_0 entre las ecuaciones (10-129) y (10-130) llegamos a

$$H = -\frac{2\pi^2mk^2}{J_3^2}.$$

Este resultado lo hemos deducido para órbitas circulares tan sólo. Pero la ecuación (10-128) nos dice que también ha de ser correcto para *todas* las órbitas acotadas del problema de Kepler y en verdad es idéntica a la ecuación (10-123). Así pues, si consideramos conocida de antemano la existencia de un solo periodo para todas las coordenadas, podremos obtener $H(J)$ sin calcular directamente las integrales circuitales.

En todo problema con tres grados de libertad deberán haber, desde luego, seis constantes del movimiento. Hemos señalado anteriormente que en el problema de Kepler cinco de ellas son funciones algebraicas de las coordenadas y cantidades de movimiento y describen la naturaleza de la órbita en el espacio y sólo la última hace referencia a la posición de la partícula en la órbita en un tiempo dado (cfr. § 3-9). Fácil es ver que se necesitan cinco parámetros para especificar por completo, por ejemplo, la órbita elíptica del problema de Kepler acotado en el espacio. Como el movimiento es plano, se necesitan dos constantes para describir la orientación en el espacio del plano de la órbita. Se necesita una constante para dar la *escala* de la elipse, es decir, el semieje mayor a y otra para la *forma* de la elipse, por ejemplo, mediante la excentricidad e . Por último, el quinto parámetro debe especificar la *orientación* de la elipse respecto a una cierta dirección arbitraria en el plano de la órbita.

Los *elementos* astronómicos clásicos de la órbita proporcionan los parámetros orbitales de manera casi directa en la forma dada anteriormente. Dos de los ángulos que aparecen entre estos elementos tienen nombres un tanto raros pero consolidados en el tiempo. La figura 10-4 puede ayudarnos a comprender sus definiciones y sus funciones

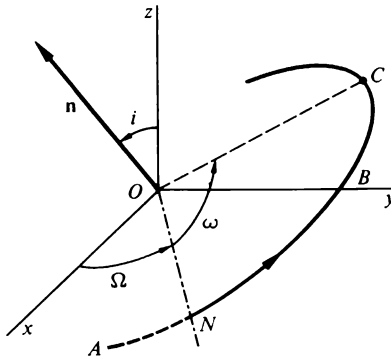


FIGURA 10-4

Elementos angulares de la órbita en el problema de Kepler acotado.

como parámetros orbitales. En ella, xyz definen el sistema de ejes que tomamos fijos en el espacio y el vector unitario \mathbf{n} caracteriza la normal al plano de la órbita. La intersección del plano xy con el plano de la órbita se denomina *línea de nodos*. En ella hay dos puntos en los que la órbita elíptica corta al plano xy ; el punto en el cual la partícula pasa del hemisferio inferior al superior (o pasa del hemisferio «sur» al hemisferio «norte») se denomina *nodo ascendente*. En la figura 10-4, la porción de órbita existente en el hemisferio sur se ha representado en línea de trazos para mayor claridad. La recta ON de trazo y punto es una parte de la línea de nodos que contiene al nodo ascendente. La dirección de ON en el plano xy podemos medirla por el ángulo xON , que acostumbra a simbolizarse por Ω y se denomina *longitud del nodo ascendente*. Por último, si representamos por C al periápside de la órbita, al ángulo NOC en el plano de la órbita lo representaremos por ω y le llamaremos *argumento del perihelio*.* El ángulo i introducido anteriormente en la ecuación (10-110) es más conocido y en su empleo en Astronomía se denomina *inclinación de la órbita*. Por tanto, un sistema usual de elementos astronómicos consta de las seis constantes

$$i, \Omega, a, e, \omega, T.$$

donde la última, T , es el tiempo de paso por el periápside. De las cinco restantes, las dos primeras definen la orientación del plano de la órbita en el espacio, mientras que a , e y ω especifican directamente la escala, forma y orientación de la órbita elíptica, respectivamente.

El tratamiento del problema de Kepler mediante variables acción-ángulo lleva también a cinco constantes del movimiento algebraicas. Tres de ellas son, evidentemente, las tres variables de acción constante J_1, J_2 y J_3 . Las dos restantes son las variables ángulo w_1 y w_2 , que son constantes, porque sus frecuencias correspondientes son nulas. Deberá, pues, ser posible expresar las cinco constantes J_1, J_2, J_3, w_1 y w_2 en función de los elementos orbitales clásicos i, Ω, a, e y ω y recíprocamente. Algunas de estas interrelaciones son inmediatas. De las ecuaciones (10-122) y (10-112) se deduce

$$J_2 = 2\pi\alpha_\theta \equiv 2\pi l, \quad (10-131)$$

y por tanto, según la ecuación (10-110),

$$\frac{J_1}{J_2} = \cos i. \quad (10-132)$$

* Esta terminología parece emplearse incluso en el caso de órbitas que no tengan lugar en torno al Sol.

Ya sabemos que el semieje mayor a sólo es función de la energía total E (cfr. ec. 3-61) y por tanto, según la ecuación (10-123), a viene dado directamente en función de J_3 :

$$a = -\frac{k}{2E} = \frac{J_3^2}{4\pi^2 mk}. \quad (10-133)$$

La excentricidad se puede escribir en función de J_2 (ec. 3-62) en la forma

$$e = \sqrt{1 - \frac{J_2^2}{4\pi^2 mka}},$$

o sea

$$e = \sqrt{1 - \left(\frac{J_2}{J_3}\right)^2}. \quad (10-134)$$

Sólo quedan por relacionar las coordenadas ángulo w_1 y w_2 con los elementos clásicos de la órbita. Evidentemente, deben contener Ω y ω . De hecho, podemos demostrar que con una elección adecuada de constantes de integración aditivas son proporcionales a Ω y ω , respectivamente. Lo demostraremos para w_1 y dejamos como ejercicio la identificación de w_2 .

La ecuación de transformación que define w_1 es, según la ecuación (10-106),

$$w_1 = \frac{\partial W}{\partial J_1}.$$

Podemos ver en la ecuación (10-13') (p. 544) o en la forma separada de W (ec. 10-55) que W se puede escribir en forma de suma de integrales indefinidas de la manera siguiente:

$$W = \int p_\phi d\phi + \int p_\theta d\theta + \int p_r dr. \quad (10-135)$$

En el estudio de J , hemos visto que la cantidad de movimiento radial p_r no contiene a J_1 , sino tan sólo a J_3 (a través de E) y a la combinación $J_\theta + J_\phi = J_2$. Por tanto, en la derivada respecto a J_1 sólo figuran las dos primeras integrales. Por la ecuación (10-109),

$$p_\phi = \alpha_\phi = \frac{J_1}{2\pi}, \quad (10-136)$$

y por la ecuación (10-58), con ayuda de las ecuaciones (10-131) y (10-136),

$$p_{\theta} = \pm \sqrt{x_{\theta}^2 - \frac{x_{\phi}^2}{\text{sen}^2 \theta}} = \pm \frac{1}{2\pi} \sqrt{J_2^2 - \frac{J_1^2}{\text{sen}^2 \theta}}.$$

Para relacionar w_1 con el nodo ascendente es necesario tomar el signo negativo de la raíz cuadrada.* La variable ángulo w_1 estará, pues, determinada por

$$w_1 = \frac{\phi}{2\pi} + \frac{J_1}{2\pi} \int \frac{d\theta}{\text{sen}^2 \theta \sqrt{J_2^2 - J_1^2 \text{csc}^2 \theta}},$$

o sea

$$\begin{aligned} 2\pi w_1 &= \phi + \cos i \int \frac{d\theta}{\text{sen}^2 \theta \sqrt{1 - \cos^2 i \text{csc}^2 \theta}} \\ &= \phi + \int \frac{\cot i \text{csc}^2 \theta d\theta}{\sqrt{1 - \cot^2 i \cot^2 \theta}}. \end{aligned}$$

Efectuando el cambio de variable

$$\text{sen } u = \cot i \cot \theta, \quad (10-137)$$

la integral se convierte en inmediata y la expresión de w_1 se reduce a

$$2\pi w_1 = \phi - u. \quad (10-138)$$

La coordenada ángulo ϕ es el acimut de la proyección sobre el plano xy medido respecto al eje x . En la ecuación (10-137) queda claro que u es función del ángulo polar θ de la partícula. Pero, ¿cuál es su significado geométrico? Podemos ver qué es u aplicando las reglas de Napier† al triángulo esférico definido por la línea de nodos, el radio vector y la proyección de éste sobre el plano xy . No obstante, puede ser más satisfactorio permitirnos

* Notemos que cuando la partícula pasa por el nodo ascendente (cfr. fig. 10-4) θ está disminuyendo y el momento cinético correspondiente es negativo. Al calcular J_{θ} no teníamos que preocuparnos por la elección de signo, porque al efectuar un ciclo completo se encuentran los dos signos.

† Véase cualquier libro de Trigonometría esférica, o manuales tales como el *Handbook of Mathematical Tables* (Chemical Rubber Publishing Co.) o el *Handbook of Applied Mathematics* (Van Nostrand-Reinhold).

algunas transformaciones trigonométricas y deducir la relación *ab initio*. En la figura 10-5 la recta *ON* es la línea de nodos, *OR* la posición del radio vector en determinado tiempo y la línea de trazos *OP* es la proyección del radio vector sobre el plano *xy*. El ángulo que forma *OP* con el eje *x* es el acimut ϕ . Afirmamos que *u* es el ángulo que forma *OP* con la línea de nodos. Para demostrarlo, imaginemos un plano que sea normal al plano *xy* y a la línea de nodos, que corte al radio vector a una distancia del origen *O* igual a la unidad. Los puntos de intersección *A*, *B*, *C*, con las tres rectas concurrentes en el origen definen, junto con éste, cuatro triángulos rectángulos. Como *OB* tiene longitud unidad, deberá ser $BC = \cos \theta$ y por tanto, $AC = \cos \theta \cot i$. Por otra parte, $OC = \sin \theta$ y en consecuencia, se cumplirá que $AC = \sin \theta \sin u$. Luego $\sin u = \cot i \cot \theta$, cosa que coincide con la ecuación (10-137) y prueba la identificación que habíamos estipulado para el ángulo *u*. En la figura 10-5 vemos claramente que la diferencia entre ϕ y *u* debe ser Ω , con lo cual

$$2\pi w_1 = \Omega. \tag{10-139}$$

De manera análoga podemos identificar la naturaleza física de la constante w_2 . De las integrales que figuran en la ecuación (10-135), las dos correspondientes a θ y *r* contienen J_2 y por tanto figuran en la obtención de w_2 . Derivada *W* respecto a J_2 , podemos calcular la integral correspondiente a θ por medio de una sustitución trigonométrica del mismo tipo que la utilizada para calcular w_1 . La integral correspondiente a *r* se puede calcular de diversas maneras, la más directa de las cuales utiliza la ecuación de la órbita que da *r* en

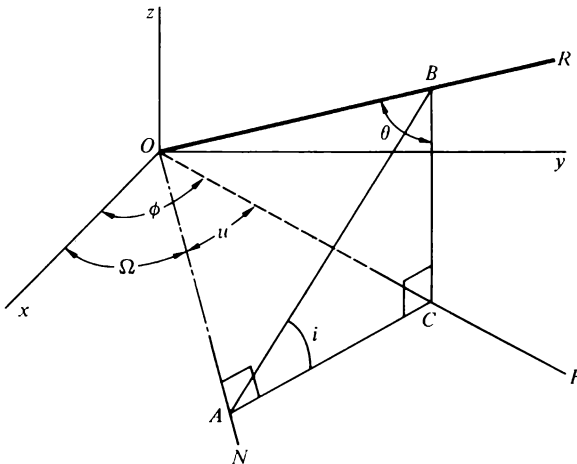


FIGURA 10-5

Diagrama en el que figuran los ángulos que aparecen en el tratamiento por acción-ángulo del problema de Kepler.

función del ángulo polar en el plano orbital. Elijiendo adecuadamente el límite inferior de integración, que es arbitrario, puede encontrarse que $2\pi w_2$ es la diferencia entre dos ángulos en el plano de la órbita, uno de los cuales es el ángulo que forma el radio vector con la línea de nodos y el otro es el ángulo que forma aquél con la línea de periápsides. dicho de otro modo, $2\pi w_2$ es el argumento del perihelio:

$$2\pi w_2 = \omega. \quad (10-140)$$

La deducción detallada se deja para uno de los ejercicios.

El método de las variables acción-ángulo no nos parece la manera más rápida para resolver el problema de Kepler y la utilidad práctica del sistema de variables no es evidente. No obstante, su mérito ha quedado bien patente en la Mecánica celeste, donde aparecen en forma de *variables de Delaunay*.* En el próximo capítulo veremos que proporcionan los elementos naturales de la órbita que se utilizarán en la teoría de perturbaciones, por ejemplo, cuando buscamos las modificaciones de las órbitas normales de Kepler debidas a pequeñas desviaciones de la fuerza respecto a la ley de proporcionalidad inversa del cuadrado de la distancia. Muchos estudios básicos de perturbaciones posibles de órbitas de satélites se han efectuado utilizando las variables acción-ángulo.

Durante un tiempo corto, las variables acción-ángulo desempeñaron, particularmente en el problema de Kepler, un papel destacado en las mismísimas fronteras de la investigación física. Poco después del advenimiento de la teoría cuántica del átomo de Bohr en 1913, se vio que las condiciones cuánticas se podían enunciar de la manera más fácil mediante las variables de acción. Durante una década, iniciada hacia 1915, hubo un interés desusado en las propiedades de las variables acción-ángulo y gran parte de la «teoría cuántica antigua» se construyó en torno a ellas. En Mecánica clásica las variables de acción poseen un dominio continuo de valores, pero no sucede así en Mecánica cuántica. Las condiciones cuánticas de Sommerfeld y Wilson exigían que el movimiento se limitara a órbitas para las cuales las variables de acción «propias» tuvieran valores discretos que fuesen múltiplos enteros del quantum de acción h . (Variables de acción propias son aquellas J cuyas frecuencias sean no degeneradas y diferentes de cero. Por ejemplo, J_3 es una variable de acción propia.) Según dijo Sommerfeld, el método de las variables acción-ángulo proporcionaba entonces «un camino real para la cuantización». Solamente había que resolver el problema en Mecánica clásica utilizando variables acción-ángulo y se podía cuantizar el movimiento de manera inmediata sustituyendo las J por múltiplos enteros de la constante de Planck h .

Como ejemplo de este procedimiento podemos observar que los niveles energéticos cuantizados de un átomo hidrogenoide se obtienen inmediatamente de la ecuación (10-123) si se hace k igual a Ze^2 y se sustituye J_3 por nh :

$$E = -\frac{2\pi^2 m Z^2 e^4}{n^2 h^2}. \quad (10-141)$$

* Según la definición habitual, las variables de Delaunay se diferencian del sistema (J_i, w_i) por constantes multiplicativas.

El entero n que aquí figura se conoce con el nombre de *número cuántico principal* y es el único número cuántico en el caso de sistema completamente degenerado. La degeneración se puede suprimir en parte introduciendo correcciones relativistas, que producen una precesión de los periápsides en el plano de la órbita. La variable ángulo w_2 , que mide la posición del periápside varía entonces con el tiempo y la variable de acción conjugada se convierte en variable «propia» y debe también estar cuantizada:

$$J_2 = kh,$$

donde k es el *número cuántico acimutal*. Como v_3 y v_2 son ambas distintas de cero, la energía deberá depender de J_3 y de J_2 , es decir, de n y de k . Obtenemos así la conocida estructura fina relativista de los niveles del hidrógeno. La degeneración puede suprimirse totalmente introduciendo un campo magnético constante dirigido según el eje polar arbitrario. El plano de la órbita ejecuta entonces una precesión de Larmor en torno al eje polar, dando lugar a un aumento uniforme de la variable ángulo w_1 , con el tiempo. Por tanto, J_1 se convierte en variable de acción propia en presencia de un campo magnético y deberá, análogamente, obedecer condiciones cuánticas:

$$J_1 = mh,$$

donde m es el número cuántico *magnético*. La energía depende ahora de los tres números cuánticos y la supresión de la degeneración de esta manera tiene como consecuencia el desdoblamiento Zeeman de los niveles atómicos.*

Pasando del sencillo átomo de hidrógeno a los otros elementos de la tabla periódica, la aplicación de la teoría cuántica antigua resulta cada vez más complicada a medida que avanzamos en aquélla. Los problemas clásicos subyacentes ya no se pueden resolver exactamente y se hace necesario tratar como pequeños elementos perturbadores muchas de las fuerzas adicionales. Aun existiendo muchos puntos de semejanza entre la teoría clásica de las perturbaciones y los métodos de perturbaciones de la Mecánica ondulatoria, según veremos, las técnicas clásicas son mucho más complicadas que sus contrapartidas cuánticas, sobre todo cuando haya degeneración.

Sin embargo, se ve en seguida que las dificultades no son meramente matemáticas: la teoría cuántica de Bohr no es simplemente una imagen precisa de la Naturaleza. Según sabemos, esta dificultad que surgió en su presentación se obvió con la introducción casi simultánea de la Mecánica ondulatoria y de las matrices. En estas nuevas teorías, las técnicas para la resolución de problemas cuánticos son totalmente diferentes y el interés en las variables acción-ángulo menguó bruscamente. Sin embargo, en los últimos tiempos se ha reavivado el uso y aplicación de las variables acción-ángulo no solamente en Mecánica celeste sino en problemas que entrañan los movimientos de partículas cargadas

* El desdoblamiento que así se obtiene sólo representa el efecto Zeeman normal. El efecto Zeeman anómalo correcto sólo puede calcularse, desde luego, incluyendo los efectos del «spin».

en campos electromagnéticos. La propiedad de invarianza adiabática de las variables de acción, que estudiaremos más adelante en § 11-7, ha llevado a muchas aplicaciones fructíferas de las variables acción-ángulo en la Física del plasma y en el proyecto de aceleradores de partículas.

Aun cuando pueda parecer extraño, la raíz de la más moderna Mecánica ondulatoria surgió también de la teoría de Hamilton-Jacobi. Si la formulación por corchetes de Poisson de la Mecánica clásica sirve de punto de partida a la Mecánica de las matrices, el germen de la Mecánica ondulatoria se encuentra en la relación entre la teoría de Hamilton-Jacobi y la Óptica geométrica. Pasemos a estudiar esta relación.

10-8 TEORÍA DE HAMILTON-JACOBI, ÓPTICA GEOMÉTRICA Y MECÁNICA ONDULATORIA

Vamos a considerar solamente sistemas para los cuales la hamiltoniana sea una constante del movimiento y se identifique con la energía total. En tal caso, las funciones principal y característica de Hamilton están relacionadas por la ecuación

$$S(q, P, t) = W(q, P) - Et. \quad (10-142)$$

Como la función característica es independiente del tiempo, las superficies de W constante en el espacio de las configuraciones tienen posiciones fijas. Una superficie caracterizada por un valor constante de S debe coincidir en un instante dado con una superficie particular de W constante. No obstante, el valor de W correspondiente a un valor definido de S varía con el tiempo de acuerdo con la ecuación (10-12). Así, en $t = 0$ las superficies $S = a$ y $S = b$ coinciden con las superficies para las cuales $W = a$ y $W = b$, respectivamente (cfr. fig. 10-6). Un tiempo dt más tarde, la superficie $S = a$ coincidirá con

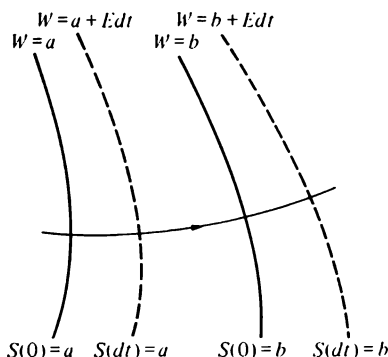


FIGURA 10-6

Movimiento de las superficies de S constante en el espacio de las configuraciones.

la superficie para la cual $W = a + E dt$ y análogamente, $S = b$ estará situada en la superficie $W = b + E dt$. De hecho, en un tiempo dt la superficie $S = a$ habrá pasado de $W = a$ a $W = a + E dt$. El movimiento de la superficie en el transcurso del tiempo es análogo a la propagación de un frente de onda como, por ejemplo, de una onda de choque a través del espacio. Podremos, pues, considerar que las superficies de S constante son *frentes de onda que se propagan en el espacio de las configuraciones*.

Como las superficies de S constante cambian, en general, su forma en el transcurso del tiempo, la velocidad de la onda, es decir, la velocidad con que se mueven las superficies, no será uniforme para todos los puntos de las superficies. No obstante, es posible calcular el valor de la velocidad de la onda en un punto dado cualquiera. Por razón de conveniencia, vamos a considerar un sistema que conste sólo de una partícula y tomemos para las coordenadas generalizadas las coordenadas cartesianas de posición. El espacio de las configuraciones se reduce entonces al espacio tridimensional ordinario, lo que simplifica en gran manera la geometría del problema. La velocidad de la onda en un punto particular de una superficie de S constante viene dada por la distancia perpendicular al frente de onda que éste se desplaza en un tiempo infinitesimal dt dividida por este intervalo de tiempo dt . Llamando ds al desplazamiento mencionado, la velocidad de la onda es

$$u = \frac{ds}{dt}. \quad (10\ 143)$$

Ahora bien, en el tiempo dt la superficie S pasa de una superficie W a una nueva superficie sobre la cual el valor de la función característica es $W + dW$, donde

$$dW = E dt.$$

La variación dW está también relacionada con el desplazamiento ds según la fórmula

$$dW = |\nabla W| ds, \quad (10\ 144)$$

por lo cual

$$u = \frac{ds}{dt} = \frac{E}{|\nabla W|}. \quad (10\ 145)$$

El módulo del gradiente de W lo da la ecuación de Hamilton-Jacobi la cual, en función de las coordenadas cartesianas de una partícula, tiene la forma

$$(\nabla W)^2 = 2m(E - V). \quad (10\ 146)$$

Luego la velocidad de la onda es

$$u = \frac{E}{\sqrt{2m(E - V)}}. \quad (10\ 147)$$

La ecuación (10-147) puede expresarse en diversas formas. La diferencia entre E y V es, simplemente, la energía cinética T , por lo cual

$$u = \frac{E}{\sqrt{2mT}}. \quad (10-148)$$

En el caso del sistema de una sola partícula que estamos considerando, $2mT = m^2v^2 = p^2$ y la ecuación (10-148) puede también escribirse en la forma

$$u = \frac{E}{p} = \frac{E}{mv}. \quad (10-149)$$

La ecuación (10-149) dice que la velocidad de un punto de una superficie de S constante es inversamente proporcional a la velocidad espacial de la partícula cuyo movimiento está descrito por S . Es muy fácil demostrar que las trayectorias de la partícula deben siempre ser normales a las superficies de S constante. El sentido de la trayectoria en todo punto del espacio está determinado por el sentido de la cantidad de movimiento \mathbf{p} . Sin embargo, según las ecuaciones (10-27),

$$\mathbf{p} = \nabla W, \quad (10-150)$$

y el gradiente de W determina la normal a las superficies de S o W constante. Así pues, toda familia de superficies de W constante crea un conjunto de trayectorias de posible movimiento que siempre son normales a las superficies. Cuando una partícula recorre una de las trayectorias, las superficies de S que generan el movimiento se moverán también por el espacio, pero los dos movimientos no llevan un mismo paso. De hecho, cuando la partícula se ralentiza la superficie se mueve más deprisa y viceversa.

Todas estas consideraciones las hemos realizado limitándonos al caso de un sistema de una partícula a fin de simplificar el estudio. Ahora bien, la mayoría de resultados resultan ser válidos para sistemas de muchas partículas si la energía cinética es función cuadrática de las velocidades generalizadas, como sucede en la ecuación (8-85). Al final del capítulo 8 vimos que podemos construir un espacio de configuraciones curvilíneo en el cual el punto figurativo del sistema se mueva con velocidad $\sqrt{2T}$ (cfr. p. 452). Observemos que esta velocidad es la misma que la de una partícula de masa unidad. Por tanto, no nos sorprende que pueda demostrarse que la velocidad de onda de las superficies S en el espacio de configuraciones curvilíneo particular resulte ser*

$$u = \frac{E}{\sqrt{2(E-V)}} = \frac{E}{\sqrt{2T}}. \quad (10-147')$$

* Para un estudio del movimiento de las superficies S en el espacio de las configuraciones, véase L. Brillouin, *Les tenseurs en Mécanique et en Elasticité*, Masson, Paris, 1049.

Además, se conserva la relación recíproca entre la velocidad de onda, u y la del punto figurativo del sistema, $\sqrt{2T}$. Análogamente, se vuelve a encontrar que las trayectorias posibles del sistema son normales a las superficies de S constante. La transición a un sistema de muchas partículas, pues, no introduce resultados físicos nuevos y a fin de simplificar la matemática, seguiremos limitando nuestro estudio a sistemas de una sola partícula.

Las superficies de S constante se han caracterizado como frentes de onda porque se propagan por el espacio de igual manera que las superficies de onda de fase constante. Incluso hemos llegado a calcular la velocidad de la onda. Pero nada hemos dicho acerca de la naturaleza o del origen de estas ondas cuyos frentes son superficies de S constante. Las características más destacadas de los movimientos ondulatorios resultan de su periodicidad y hasta ahora no se ha hecho ninguna indicación referente a los espectros en frecuencia y longitud de onda asociados a S . Para echar luz sobre estas cuestiones, vamos a examinar algunas propiedades de un movimiento ondulatorio bien conocido: las ondas luminosas.

La ecuación de onda escalar de la Óptica es

$$\nabla^2 \phi - \frac{n^2}{c^2} \frac{d^2 \phi}{dt^2} = 0, \quad (10-151)$$

donde ϕ es una cantidad escalar tal como el potencial electromagnético, c es la velocidad de la luz en el vacío y n es el índice de refracción que es igual al cociente entre c y la velocidad de la luz. En general, n depende del medio y será función de la posición en el espacio. Si n es constante, la ecuación (10-151) se satisface por una solución onda plana de la forma

$$\phi = \phi_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad (10-152)$$

donde el número de ondas k y la pulsación ω guardan la relación

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{n\omega}{c}. \quad (10-153)$$

Por razón de sencillez, tomaremos el eje z en la dirección de \mathbf{k} , con lo que la solución onda plana podrá también escribirse en la forma

$$\phi = \phi_0 e^{ik_0(nz - ct)}, \quad (10-154)$$

donde k_0 es el número de ondas en el vacío. Sin embargo, lo que nos interesa es el caso de la *Óptica geométrica* en el cual n no es exactamente constante sino que varía lentamente en el espacio. Entonces, la onda plana ya no será solución de la ecuación de onda (10-151); la variación del índice de refracción con la posición deformará la onda y la desviará. Como

suponemos que n tan sólo varía gradualmente en el espacio, buscaremos una solución que se parezca todo lo posible a la onda plana:

$$\phi = e^{A(\mathbf{r}) + ik_0(L(\mathbf{r}) - ct)}. \quad (10-155)$$

Tomaremos las cantidades A y L como funciones a determinar de la posición y las consideraremos reales. Por tanto, A es una medida de la amplitud de la onda. Si n fuese constante, L se reduciría a nz por lo que recibe el nombre de *longitud del camino óptico* o fase de la onda. También se le llama frecuentemente *eikonal*. Aplicando sucesivamente el operador gradiente a la solución ϕ se llega a las relaciones

$$\begin{aligned} \nabla\phi &= \phi \nabla(A + ik_0L), \\ \nabla^2\phi &= \phi[\nabla^2(A + ik_0L) + (\nabla(A + ik_0L))^2], \end{aligned}$$

o sea

$$\nabla^2\phi = \phi[\nabla^2 A + ik_0 \nabla^2 L + (\nabla A)^2 - k_0^2(\nabla L)^2 + 2ik_0 \nabla A \cdot \nabla L].$$

La ecuación de onda se convierte ahora en

$$ik_0[2\nabla A \cdot \nabla L + \nabla^2 L]\phi + [\nabla^2 A + (\nabla A)^2 - k_0^2(\nabla L)^2 + n^2 k_0^2]\phi = 0. \quad (10-156)$$

Como A y L son reales, la ecuación sólo se cumple si se anulan por separado las dos expresiones entre corchetes:

$$\nabla^2 A + (\nabla A)^2 + k_0^2(n^2 - (\nabla L)^2) = 0, \quad (10-157a)$$

$$\nabla^2 L + 2\nabla A \cdot \nabla L = 0. \quad (10-157b)$$

Hasta ahora no hemos hecho ninguna aproximación; las dos ecuaciones son rigurosas. Podemos introducir ahora la hipótesis de que n sólo varía ligeramente con la distancia; en particular, que n no varía mucho a lo largo de distancias del orden de la longitud de onda. Efectivamente, esto significa que la longitud de onda es pequeña frente a la dimensión de cualquier variación en el medio, lo cual es la hipótesis de la Óptica geométrica. El término que contiene $k_0^2 = 4\pi^2/\lambda_0^2$ en la ecuación (10-157a) será, pues, el que predomine y la ecuación se podrá reducir a la forma sencilla

$$(\nabla L)^2 = n^2. \quad (10-158)$$

La ecuación (10-158) se denomina *ecuación de eikonal de la Óptica geométrica*. * Las superficies de L constante determinadas por esta ecuación son las superficies de fase óptica constante y por tanto definen los frentes de onda. Las trayectorias de los rayos son perpendiculares a los frentes de onda en todos los puntos y por tanto, también quedan determinados por la ecuación (10-158).

No tenemos por qué hablar más de Óptica geométrica, pues veremos que la ecuación de eikonal (10-158) es formalmente igual a la ecuación mecánica de Hamilton-Jacobi para W , (10-146). La función característica W desempeña el mismo papel que la eikonal L y $[2m(E - V)]^{1/2}$ hace las veces de índice de refracción. La ecuación de Hamilton-Jacobi, nos dice pues, que *la Mecánica clásica se corresponde con el límite de un movimiento ondulatorio que constituye la Óptica geométrica* en el cual los rayos ortogonales a los frentes de onda corresponden a las trayectorias de las partículas ortogonales a las superficies de S constante. Queda ahora claro por qué la teoría ondulatoria de Huygens y la teoría corpuscular de Newton para la luz podían explicar igualmente los fenómenos de reflexión y refracción, ya que ambas teorías de la Óptica geométrica son formalmente iguales. También se explica la semejanza existente entre el principio de mínima acción de Fermat y la Óptica geométrica. Atendiendo a la forma de Jacobi del principio de mínima acción (ec. 8-89), vemos que en la Óptica geométrica hay que sustituir el integrando $\sqrt{H - V}$ por algo proporcional al índice de refracción o al recíproco de la velocidad de la onda. Luego el principio de mínima acción podrá también escribirse en las formas

$$\Delta \int n ds = \Delta \int \frac{ds}{u} = 0, \quad (10\ 159)$$

que son las dos conocidas variaciones del principio de Fermat para las trayectorias de los rayos luminosos.

Todavía no hemos establecido las frecuencias y longitudes de onda de las ondas asociadas al movimiento clásico. Lo único que hemos determinado es que la longitud de onda debe ser muchísimo menor que las extensiones en el espacio de las fuerzas y los potenciales. No podemos avanzar más en el dominio de la Mecánica clásica. Como especie de Óptica geométrica, la Mecánica clásica es precisamente el campo en donde no pueden tener lugar los fenómenos que dependen de la longitud de onda (interferencias, difracción, etc.). Incluso en la Mecánica clásica existe una dualidad entre partícula y onda, pero es la partícula quien manda y el aspecto ondulatorio no tiene ninguna oportunidad de exhibir sus características únicas.

A pesar de todo, podemos especular acerca de la forma de la ecuación de onda para la cual la ecuación de Hamilton-Jacobi represente el límite en las ondas cortas. La semejanza existente entre la ecuación de eikonal (10-158) y la ecuación de Hamilton-Jacobi (10-146) no implica la equivalencia entre L y W : es necesario, meramente, que estas cantidades sean una proporcional a la otra. Vamos a ver que la constante de propor-

* Aún cuando hayamos deducido la ecuación de eikonal partiendo de la ecuación de onda escalar, puede también obtenerse a partir de las ecuaciones de onda de las intensidades de los vectores campo del campo electromagnético. Véase Born y Wolf, *Principles of Optics*.

cionalidad constituye una medida de la magnitud de la longitud de onda. Si W corresponde a L , deberá $S = W - Et$ ser proporcional a la fase total de la onda luminosa descrita por la ecuación (10-155):

$$k_0(L - ct) = 2\pi \left(\frac{L}{\lambda_0} - vt \right). \quad (10-160)$$

Por tanto, la energía E de la partícula y la frecuencia ν deben ser proporcionales y representaremos la razón constante de las dos cantidades mediante el símbolo h :

$$E = h\nu. \quad (10-161)$$

La longitud de onda y la frecuencia están relacionadas, en general, con la velocidad de la onda por la relación

$$\lambda\nu = u,$$

con lo que, según la ecuación (10-149), λ vendrá dada por

$$\lambda = \frac{u}{\nu} = \frac{E/p}{E/h},$$

o sea

$$\lambda = \frac{h}{p}. \quad (10-162)$$

La expresión de la fase de onda dada por el segundo miembro de la ecuación (10-160) puede también escribirse en la forma

$$\frac{2\pi}{h} \left(\frac{Lh}{\lambda_0} - h\nu t \right).$$

Está claro que la cantidad entre paréntesis tiene la forma de $W - Et = S$. Ello nos sugiere que la amplitud de la onda debe estar asociada al movimiento mecánico de la partícula en la forma

$$\psi = \psi_0 e^{iS/h}, \quad (10-163)$$

donde, como de costumbre, $\hbar \equiv h/2\pi$. Si nuestra imagen es correcta, la ecuación que rige a esta amplitud de la onda deberá reducirse en el límite de las λ cortas (o lo que es equivalente, de valores muy pequeños de \hbar) a la ecuación de Hamilton-Jacobi. Sabemos, a posteriori desde luego, que la ecuación que satisface ψ es la ecuación de onda de Schrödinger (dependiente del tiempo)

$$\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi - V\psi = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial t}. \quad (10-164)$$

¿Es la ecuación de Hamilton-Jacobi el límite en las ondas cortas de la ecuación de Schrödinger?

Para estudiar esta cuestión podemos sustituir la ecuación (10-163) en la ecuación de Schrödinger. Tenemos

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{i}{\hbar} \psi \frac{\partial S}{\partial t}; \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{i}{\hbar} \psi \frac{\partial S}{\partial x}.$$

Luego la laplaciana de ψ en coordenadas cartesianas equivale a

$$\nabla^2 \psi = \frac{i}{\hbar} \psi \nabla^2 S - \frac{\psi}{\hbar^2} (\nabla S)^2.$$

Por tanto, la ecuación de Schrödinger se podrá escribir en función de S en la forma

$$\left[\frac{1}{2m} (\nabla S)^2 + V \right] + \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{i\hbar}{2m} \nabla^2 S. \quad (10-165)$$

La cantidad entre corchetes vemos que es la hamiltoniana de la ecuación de Hamilton-Jacobi para una partícula descrita en coordenadas cartesianas. En verdad, la ecuación (10-165) sería la ecuación de Hamilton-Jacobi clásica para la función principal de Hamilton si fuese nulo el segundo miembro. La ecuación (10-165) puede denominarse ecuación mecanocuántica de Hamilton-Jacobi; se reduce a la ecuación clásica en el límite, cuando \hbar (y por tanto λ) tiende a cero.* Las condiciones para poder despreciar el término $\nabla^2 S$ se pueden especificar de diversas maneras. Una consiste en observar que $\nabla^2 S$ surge asociada a $(\nabla S)^2$ en la evaluación de $\nabla^2 \psi$. Por tanto, podremos prescindir del término si

$$\hbar \nabla^2 S \ll (\nabla S)^2$$

* Si desarrollamos S en la ecuación (10-165) en serie de potencias de \hbar y agrupamos los coeficientes de las mismas potencias de \hbar , la aproximación inferior será, evidentemente, la ecuación clásica de Hamilton-Jacobi. La siguiente aproximación, lineal en \hbar , lleva a la aproximación semiclásica o WKB.

o, lo que es equivalente, si

$$h \nabla \cdot \mathbf{p} \ll p^2.$$

En una sola dimensión, esto sería lo mismo que exigir que

$$\frac{\hbar}{p} \frac{dp}{dx} \ll 1, \quad (10-166)$$

donde $\hbar = \lambda/2\pi$ es la llamada longitud de onda reducida. La ecuación (10-166) nos dice que la Mecánica clásica, como el límite de la Óptica geométrica, es válida cuando la longitud de onda es tan corta que la cantidad de movimiento varíe en una fracción despreciable a lo largo de una distancia λ . A su vez, esto implica que el potencial no varíe apreciablemente a lo largo de una longitud de onda.*

Vemos que la diferencia entre las versiones cuántica y clásica de la ecuación de Hamilton-Jacobi depende del tamaño de h . Cuanto menor sea h , menor es la longitud de onda y mejor la aproximación a la Óptica geométrica. Ahora bien, la equivalencia entre las ecuaciones de Hamilton-Jacobi y de eikonal la vio Hamilton en 1834; la ecuación de onda correspondiente la dedujeron De Broglie y Schrödinger en 1926. Se ha dicho que si Hamilton hubiera avanzado un poco más, habría descubierto la ecuación de Schrödinger. No es así; le faltaba autoridad experimental para dar ese salto. En los tiempos de Hamilton se consideraba que la Mecánica clásica era rigurosamente cierta y no existían justificaciones basadas en la experiencia para considerar que fuese una aproximación a una teoría más amplia. Dicho de otro modo, Hamilton no tenía ninguna razón para considerar que el valor de h fuese diferente de cero. Solamente cuando se descubrieron los efectos que dependen de la longitud de onda de la partícula —como en los experimentos de interferencias de Davisson y Germer— se dieron cuenta de que de la Mecánica clásica era sólo una *aproximación* a una teoría ondulatoria que daba la Óptica geométrica como tal aproximación. Sólo entonces se pudo atribuir realidad física a h que es, desde luego, la famosa constante de Planck.†

A pesar de todo, podemos ver ahora que la Mecánica clásica contiene en su seno los gérmenes de la teoría cuántica y que la formulación de Hamilton-Jacobi es particularmente adecuada para mostrar cómo generalizar de la Mecánica clásica a la ondulatoria. Avanzar más en estos temas nos alejaría del ámbito de este libro que podría entonces

* Incidentalmente, podemos darnos cuenta ahora de por qué la ecuación de Schrödinger y la ecuación de Hamilton-Jacobi tienen las mismas condiciones de separabilidad. Sin embargo, las soluciones separadas tiene forma diferente. En la ecuación (10-163) vemos que cuando se separa $W = S + Et$ en suma de funciones cada una de las cuales sólo contenga una coordenada, ψ se separa en *producto* de tales funciones.

† En el desarrollo de la teoría ondulatoria de la luz se presentó un caso semejante. Hasta que se observaron en la luz los fenómenos de interferencias y difracción no había razón para preferir la teoría ondulatoria de Huygens a los rayos corpúsculares de Newton.

titularse «La Óptica geométrica de la Mecánica ondulatoria».

REFERENCIAS SUGERIDAS

R. COURANT y D. HILBERT, *Methods of Mathematical Physics*. La ecuación de Hamilton-Jacobi es un ejemplo de ecuación en derivadas parciales de primer orden de varias variables y las características matemáticas de este tipo de ecuación son importantes (según se ha hecho notar) para el desarrollo de la teoría de Hamilton-Jacobi. El tomo 2 de Courant y Hilbert da una introducción bastante asequible a la matemática relevante, primero en un apartado introductorio (§4) en el capítulo 1 y luego en un estudio explícito muy elaborado de la teoría de Hamilton-Jacobi en el capítulo 2.

C. CARATHÉODORY, *Calculus of Variations and Partial Differential Equations of the First Order*. Durante muchos años, Carathéodory ha sido considerado la primera autoridad en ecuaciones en derivadas parciales de primer orden. La exposición que hace en el tomo I profundiza mucho más que lo que hacen Courant y Hilbert y es particularmente elaborada al desarrollar la teoría de las llamadas «características». A la ecuación de Hamilton-Jacobi no se la llama así, pero tanto ella como su relación con la Mecánica predominan en la mayor parte del libro.

C. LANCZOS, *The Variational Principles of Mechanics*. El tratamiento de la teoría de Hamilton-Jacobi (en el Capítulo 8) hace hincapié en los fundamentos de la teoría y sus interpretaciones geométricas. Se efectúa un estudio considerable de las condiciones necesarias para las variables acción-ángulo (lo llama «tratamiento de Delaunay») y de su naturaleza. Las aplicaciones detalladas son escasas.

D. TER HAAR, *Elements of Hamiltonian Mechanics*. El tratamiento de la ecuación de Hamilton-Jacobi y sus aplicaciones, incluido el método de las variables acción-ángulo para estudiar el problema de Kepler, sigue un camino aproximadamente paralelo al seguido en este capítulo. Hay diferencias inevitables en el énfasis y el punto de vista, pero es interesante que el lector compare ambos estudios.

M. BORN, *The Mechanics of the Atom*. En el apogeo de la Mecánica cuántica antigua, los físicos prestaron poca atención a las variables acción-ángulo. Entonces, dicha teoría cuántica constituía el «camino real» para la cuantización. El libro de Born fue un producto de dicho periodo y sigue presentando uno de los mejores estudios de la teoría de Hamilton-Jacobi y las variables acción-ángulo accesible a los físicos. El estudio de Born acerca de las variables acción-ángulo y la teoría de perturbaciones con ellas relacionada constituye una fuente para los estudios en estos campos que se encuentran en muchos textos de Mecánica y el presente libro no constituye ninguna excepción. Sin embargo, el lector debe ser cauto en la aceptación de las afirmaciones que se realizan en el libro de Born acerca de la estructura atómica. La mayoría de ellas están ya fuera de tiempo.

A. SOMMERFELD, *Atomic Structure and Spectral Lines*. La exposición de la teoría de Hamilton-Jacobi y las variables acción-ángulo que se encuentran dispersas por el texto y los apéndices es mucho menos detallada que en el libro de Born. Probablemente por ello resulta mucho más legible. Especialmente digno de mención es el estudio de la relación entre el número de sistemas de coordenadas de separación y la degeneración del movimiento. El cálculo de las integrales que aparecen en el problema de Kepler, por medio de la teoría de residuos, se explica en un apéndice (y también se da en el libro de Born).

J. H. VAN VLECK, *Quantum Principles and Line Spectra*. El capítulo de esta obra titulado «Técnicas matemáticas» proporciona una rápida visión de la teoría de Hamilton-Jacobi y las variables acción-ángulo, junto con una introducción a la teoría de perturbaciones. La mayor parte del resto del libro sólo tiene interés histórico. La cautela que hemos citado para el libro de Born es igualmente aplicable a este libro y también al de Sommerfeld.

B. GARFINKEL, *The Lagrange-Hamilton-Jacobi Mechanics in Space Mathematics, Part I*. Las variables acción-ángulo se han utilizado en Mecánica celeste (aun cuando no con ese nombre) mucho antes de que tuvieran interés físico y su empleo sigue siendo hoy un método elegante de estudio de la teoría de perturbaciones. En esta referencia se muestra cómo se ve el tema desde el punto de partida de la Mecánica celeste, en un ensayo que es breve y conciso pero extraordinariamente legible (característica que falta notoriamente en muchos tratados de Mecánica analítica). En 36 páginas escasas trata la Mecánica de Lagrange mediante la teoría de perturbaciones pero condensa una gran cantidad de materias en un espacio tan breve. Son ejemplo las condiciones de separabilidad de Staeckel (falta evidentemente un factor 2 en la ecuación (82)), el teorema de Vinti y los elementos Delaunay. Algunas notaciones y convenios son diferentes de las que acostumbran a seguirse en Física.

L. A. PARS, *A Treatise on Analytical Dynamics*. En tres capítulos se tratan los temas que van de la ecuación de Hamilton-Jacobi a las variables acción-ángulo, lo que permite un tratamiento pausado y gran cantidad de ejemplos. Es desusado el estudio de los sistemas separables como propiedad per se, independientemente de su aplicación a la ecuación de Hamilton-Jacobi. La condición de Staeckel se trata detenidamente. No se mencionan explícitamente las variables acción-ángulo (aun cuando sean variables ángulo) pero son muy extensos los apartados referentes a movimiento de periodicidad múltiple.

H. V. MCINTOSH, *Symmetry and Degeneracy* en *Group Theory and its Applications*, Vol. 2, ed. E. M. Loebl. Como era de esperar, en esta referencia hay un estudio considerable de la relación entre separabilidad y degeneración (y las propiedades de simetría del sistema). Se trata detalladamente el argumento de que las propiedades de la órbita que llena el espacio milita contra la separabilidad y se consideran las consecuencias para una amplia variedad de sistemas (incluidos algunos tan poco usuales como el monopolio magnético). Con todo, esta referencia es probablemente la mejor que se dispone en la década de 1970 acerca de la relación degeneración-separabilidad-simetría.

L. BRILLOUIN, *Les tenseurs en Mécanique et en Élasticité*. Libro de redacción encantadora que contiene mucha información acerca de una amplia variedad de temas, desde la Geometría diferencial a la Mecánica cuántica de sólidos (de hacia 1938). El movimiento de las superficies de S constante en la Mecánica de configuraciones se presenta en detalle en el Capítulo VIII y los vínculos entre la Mecánica clásica, la Óptica geométrica y la Mecánica ondulatoria se estudian a fondo en el Capítulo IX.

M. BORN y E. WOLF, *Principles of Optics*. Una referencia típica acerca de las aplicaciones de la teoría de Hamilton-Jacobi a la Óptica geométrica es el formidable tratado de J. L. Synge, *Geometrical Optics*. Born y Wolf nos dan una introducción más comprensible que presta mucha atención a una ulterior extensión a la ecuación de onda de Schrödinger. Un capítulo que trata de los fundamentos de la Óptica geométrica contiene, entre otras materias, una deducción de la ecuación de eikonal para un campo vectorial. El capítulo siguiente que trata de la teoría geométrica de las imágenes ópticas se inicia, cuando menos, con un método hamiltoniano. En relación con esto hay dos apéndices de especial interés. El primero es un tratado breve de Cálculo de variaciones, en el que se hace hincapié en la ecuación de Hamilton-Jacobi. El contenido del siguiente apéndice queda bien indicado en su título: «Óptica de la luz, Óptica electrónica y Mecánica ondulatoria».

EJERCICIOS

1. Demostrar que, para un sistema conservativo, resolviendo una ecuación en derivadas parciales adecuada se puede construir una transformación canónica tal que la nueva hamiltoniana sea función de las nuevas *coordenadas* solamente. (No emplear la transformación de intercambio.) Mostrar cómo viene dada en función de las nuevas coordenadas y cantidades de movimiento una solución formal para el movimiento del sistema.

2. En el texto hemos obtenido la ecuación de Hamilton-Jacobi para S buscando una transformación de contacto que lleve de las coordenadas canónicas (q, p) a las constantes (α, β) . Inversamente, si es $S(q_i, \alpha_i, t)$ una solución completa cualquiera de la ecuación de Hamilton-Jacobi (10-3), demostrar que el sistema de variables (q_i, p_i) definido por las ecuaciones (10-7) y (10-8) son variables canónicas, es decir, que satisfacen a las ecuaciones de Hamilton.

3. Resolver el problema de movimiento de un proyectil puntiforme en un plano vertical, utilizando el método de Hamilton-Jacobi. Hallar la ecuación de la trayectoria y la dependencia del tiempo de las coordenadas, suponiendo que el proyectil se ha disparado en el instante $t = 0$ desde el origen con una velocidad v_0 que forma un ángulo α con la horizontal.

4. Plantear el problema de la peonza simétrica pesada, con un punto fijo, en el método de Hamilton-Jacobi y obtener la solución formal del movimiento dada por la ecuación (5-63).

5. Demostrar que la función

$$S = \frac{m\omega}{2}(q^2 + x^2) \cot \omega t - m\omega q x \csc \omega t$$

es solución de la ecuación de Hamilton-Jacobi para la función principal de Hamilton correspondiente al oscilador armónico lineal siendo

$$H = \frac{1}{2m}(p^2 + m^2\omega^2q^2).$$

Demostrar que esta función genera una solución correcta para el movimiento del oscilador armónico en el tiempo.

6. Una partícula cargada está obligada a moverse en un plano bajo la influencia de una fuerza central (no electromagnética) que deriva de un potencial $V = \frac{1}{2}kr^2$ y un campo magnético constante \mathbf{B} perpendicular al plano, de manera que

$$(\mathbf{A} = \frac{1}{2}\mathbf{B} \times \mathbf{r}),$$

Establecer la ecuación de Hamilton-Jacobi para la función característica de Hamilton en coordenadas polares planas. Separar dicha ecuación y reducirla a cuadraturas. Estudiar el movimiento si la cantidad de movimiento canónica p_θ es nula en el instante $t = 0$.

7. a) Una partícula se mueve por el espacio bajo la acción de un potencial conservativo. Establecer la ecuación de Hamilton-Jacobi en coordenadas elipsoidales u, v, ϕ definidas en función de las

coordenadas cilíndricas usuales r, z, ϕ por las ecuaciones

$$r = a \sinh v \operatorname{sen} u \quad z = a \cosh v \cos u.$$

¿Para qué formas de $V(u, v, \phi)$ es separable la ecuación?

b) Utilizar los resultados del apartado (a) para reducir a cuadraturas el problema de un punto material de masa m que se mueva en el campo gravitatorio de dos puntos materiales desiguales fijos en el eje z y separados una distancia $2a$.

8. Supongamos que en un problema de un solo grado de libertad el potencial depende linealmente del tiempo, de manera que la hamiltoniana tenga la forma

$$H = \frac{p^2}{2m} - mAxt,$$

donde A es una constante. Resolver el problema dinámico por medio de la función principal de Hamilton, con las condiciones iniciales $t = 0, x = 0, p = mt_0$.

9. Plantear el problema de Kepler en función de las coordenadas generalizadas

$$u = r + x,$$

$$v = r - x.$$

Obtener la ecuación de Hamilton-Jacobi en función de estas coordenadas y reducirla a cuadraturas (al menos).

10. Un extremo de una varilla uniforme de longitud $2l$ y masa m se apoya sobre un suelo horizontal liso y el otro contra una superficie vertical lisa. Suponiendo que la varilla esté obligada a moverse por la acción de la gravedad con sus extremos siempre en contacto con las superficies mencionadas, utilizar cualquiera de las ecuaciones de Hamilton-Jacobi para reducir a cuadraturas la solución del problema.

11. Una partícula está obligada a moverse por unas montañas rusas, la ecuación de cuya curva es

$$z = A \cos^2 \frac{2\pi x}{\lambda}.$$

Existe la usual fuerza constante hacia abajo de la gravedad. Estudiar las trayectorias del sistema en el espacio fásico en todas las condiciones iniciales posibles, describiendo las órbitas en el espacio fásico con tanto detalle como sea posible, prestando especial atención a los puntos de inversión y a las transiciones entre diferentes tipos de movimiento.

12. Una partícula de masa m se mueve en un plano en un pozo de potencial cuadrado:

$$\begin{aligned} V(r) &= -V_0 & 0 < r < r_0, \\ &= 0 & r > r_0. \end{aligned}$$

- a) ¿Con qué condiciones iniciales se puede aplicar el método de las variables acción-ángulo?
 b) Suponiendo que se cumplan estas condiciones, utilizar el método de las variables acción-ángulo para hallar las frecuencias del movimiento.

13. Una partícula se mueve con movimiento periódico en una dimensión bajo la influencia de un potencial $V(x) = F|x|$, donde F es una constante. Utilizando variables acción-ángulo hallar el periodo del movimiento en función de la energía de la partícula.

14. Una partícula de masa m se mueve en una dimensión bajo un potencial $V = -k/|x|$. Para las energías negativas, el movimiento es acotado y oscilatorio. Mediante el método de las variables acción-ángulo, hallar una expresión del periodo del movimiento en función de la energía de la partícula.

15. Una partícula de masa m se mueve en una dimensión sometida al potencial

$$V = \frac{a}{\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{x_0}\right)}.$$

Obtener una expresión integral para la función característica de Hamilton. ¿En qué condiciones pueden utilizarse variables acción-ángulo? Suponiendo que se cumplan éstas, hallar la frecuencia de oscilación por el método acción-ángulo. (La integral para J se puede calcular manipulando el integrando de manera que la raíz cuadrada aparezca en el denominador.) Comprobar el resultado en el límite de oscilaciones de pequeña amplitud.

16. Una partícula de masa m está obligada a moverse siguiendo una curva en el plano vertical definida por las ecuaciones paramétricas

$$y = l(1 - \cos 2\phi),$$

$$x = l(2\phi + \sin 2\phi).$$

Existe la fuerza de la gravedad usual cuya dirección es la vertical y . Por medio del método de las variables acción-ángulo hallar la frecuencia de oscilación para todas las condiciones iniciales tales que el máximo de ϕ sea menor o igual que $\pi/4$.

17. En el formalismo acción-ángulo, las variables de la función característica de Hamilton son las coordenadas originales q_k y las variables de acción J_k . En caso de degeneración, se realiza una transformación canónica subsiguiente de las variables (w_k, J_k) a nuevas variables (w'_i, J'_i) , a fin de sustituir las degeneraciones por frecuencias cero. Considerando cada J_k función de las cantidades J'_i definidas por la ecuación (10-105), demostrar que sigue siendo cierto que

$$\frac{\partial W}{\partial J'_i} = w'_i.$$

18. En el caso del sistema descrito en el ejercicio 12 del capítulo 6, hallar una transformación puntual lineal a variables en las cuales sea separable la ecuación de Hamilton-Jacobi. Utilizando las variables acción-ángulo, hallar luego las frecuencias propias del sistema.

19. Un oscilador armónico tridimensional tiene una constante de rigidez k_1 según las direcciones x e y y k_3 según la dirección z . Utilizando coordenadas cilíndricas (con el eje del cilindro en la dirección z), describir el movimiento en función de las variables acción-ángulo correspondientes, mostrando cómo pueden obtenerse las frecuencias. Transformar pasando a las variables acción-ángulo «propias» para eliminar las frecuencias degeneradas.

20. Hallar las frecuencias de un oscilador armónico tridimensional con constantes de rigidez *desiguales* utilizando el método de las variables acción-ángulo. Obtener cada coordenada cartesiana y cada cantidad de movimiento conjugada en función de las variables acción-ángulo.

21. a) En el oscilador armónico del ejercicio 20, dejar que todas las frecuencias se hagan iguales (oscilador isótropo) con lo que el movimiento será completamente degenerado. Transformar pasando a las variables acción-ángulo «propias», expresando la energía en función de una sola variable de acción.

b) Resolver el problema del oscilador isótropo en variables acción-ángulo utilizando coordenadas polares esféricas. Transformar de nuevo pasando a variables acción-ángulo propias y comparar con el resultado obtenido en el apartado (a). ¿Son los mismos los dos sistemas de variables propias? ¿Cuáles son sus significados físicos? Este problema ilustra la posibilidad de separar un movimiento degenerado en más de un sistema de coordenadas. El oscilador no degenerado sólo se puede separar en coordenadas cartesianas, no en coordenadas polares.

22. El movimiento de un oscilador armónico plano degenerado se puede separar en cualquier sistema de coordenadas cartesianas. Obtener las relaciones entre los dos sistemas de variables acción-ángulo correspondientes a dos sistemas cartesianos de ejes que formen entre sí un ángulo θ . Obsérvese que la transformación entre los dos sistemas *no* es la transformación ortogonal de la rotación.

23. a) Calcular la integral J_θ en el problema de Kepler por el método de integración a lo largo de un camino complejo. Para poner la integral en forma útil, se sugiere que podría efectuarse la sustitución $\cos \theta = x \sin i$.

b) Verificar el método de integración utilizando para J_θ en el texto efectuando las integraciones finales de la ecuación (10-111).

c) Seguir las consecuencias de que la inclinación sea mayor que 90° , es decir, $\cos i$ negativo. En particular, ¿cuáles son los cambios de la ecuación (10-112) en la transformación canónica a frecuencias cero y por tanto, de las ecuaciones (10-122)? ¿Podemos escribir estas ecuaciones en una forma tal que sean válidas tanto si $\cos i$ es positivo como si es negativo?

24. Calcular la integral de J_r del problema de Kepler mediante métodos elementales. Ello incluye el empleo de tablas de integrales pero, de ser así, deberán darse referencias explícitas y detalladas de las tablas utilizadas.

25. Demostrar, por medio del método esbozado en el texto (o cualquier otro) que $2\pi\omega_2$ es el argumento ω del periápside, en el problema de Kepler tridimensional.

26. Los llamados elementos de Poincaré de las órbitas de Kepler se pueden escribir en la forma

$$\begin{array}{ll} w_1 + w_2 + w_3, & J_\phi, \\ \frac{J_r}{\pi} \cos 2\pi(w_2 + w_1), & \frac{J_r}{\pi} \operatorname{sen} 2\pi(w_2 + w_1), \\ \frac{J_\theta}{\pi} \cos 2\pi w_1, & \frac{J_\theta}{\pi} \operatorname{sen} 2\pi w_1. \end{array}$$

demostrar que constituyen un sistema de coordenadas canónico en el cual las nuevas coordenadas forman la columna de la izquierda y sus cantidades de movimiento conjugadas la de la derecha.

27. Describir el fenómeno de las pequeñas oscilaciones radiales en torno a un movimiento circular estacionario en un potencial de fuerza central como problema unidimensional en el formalismo acción-ángulo. Con un desarrollo en serie de Taylor adecuado del potencial, hallar el periodo de las oscilaciones pequeñas. Expresar el movimiento en función de J y la variable ángulo conjugada.

28. Plantear en variables acción-ángulo el problema del movimiento de Kepler relativista, utilizando la hamiltoniana en la forma dada por la ecuación (8-54). En particular, demostrar que la energía total (incluida la masa en reposo) viene dada por

$$\frac{E}{mc^2} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4\pi^2 k^2}{[(J'_3 - J'_2)c + \sqrt{J'^2_2 c^2 - 4\pi^2 k^2}]^2}}}$$

Obsérvese que se ha quitado parcialmente la degeneración, porque la órbita ya no es cerrada, pero sigue estando confinada en un plano. Demostrar que en el límite, cuando c tienda a infinito, esta expresión se reduce a la ecuación (10-123).

Capítulo 11

Teoría canónica de la perturbación

11-1 INTRODUCCIÓN

Casi todos los problemas de Mecánica clásica tratados hasta ahora en este libro, sea en el texto o en los ejercicios, han podido tener soluciones exactas. Sin embargo, no debemos pensar que puedan hallarse soluciones completas para todos los problemas de Mecánica, ni siquiera para la mayoría de ellos. Probablemente, la inmensa mayoría de problemas no podrán resolverse de manera exacta. Hemos encontrado soluciones para el problema de Kepler de dos cuerpos, pero el movimiento clásico de tres cuerpos puntuales sometidos solamente a sus fuerzas gravitatorias mutuas no ha sido posible tratarlo. Incluso en el caso de dos cuerpos las soluciones son implícitas; no se pueden hallar fórmulas explícitas para las coordenadas en función del tiempo (cfr. p. 122, § 3-8). Ello nos impulsa a desarrollar métodos de resolución aproximados.

Afortunadamente, sucede a menudo que en un problema físico que no se pueda resolver directamente, la hamiltoniana sólo difiera ligeramente de la hamiltoniana correspondiente a un problema que pueda resolverse de manera rigurosa. Se dice entonces que el problema más complicado es una *perturbación* del problema soluble y la diferencia entre ambas hamiltonianas se denomina *hamiltoniana de perturbación*. La teoría de la perturbación consiste en técnicas para obtener soluciones aproximadas, basándose aquéllas en la pequeñez de la hamiltoniana de perturbación.

Debemos hacer notar que aun cuando el cambio de la hamiltoniana debe ser pequeño, el efecto que pueda tener la perturbación sobre el movimiento puede ser grande. Así, consideremos un oscilador armónico plano isótropo, es decir, de frecuencias iguales para los movimientos según las direcciones x e y . La trayectoria del oscilador puntual es una curva cerrada sencilla; en general, una elipse. Supongamos que haya una perturbación infinitesimal de la constante de rigidez según la dirección y de tal manera que las dos frecuencias sean ahora desiguales e inconmensurables. A consecuencia de esta pequeña perturbación de H , la trayectoria ya no será cerrada y en el transcurso del tiempo llegará a

haber llenado el espacio —alegremente hablando, que habrá pasado por todo punto de un rectángulo definido por las amplitudes de los movimientos según x y según y . Hemos visto que el achatamiento del campo gravitatorio terrestre origina pequeñas perturbaciones las cuales dan lugar a cambios cuantitativos apreciables en el movimiento de un satélite puntual. En el campo central sin perturbar, el movimiento del satélite está confinado en un plano; toda perturbación cuadrupolar gravitatoria, por pequeña que sea, hace que el movimiento se salga del plano inicial (mientras el eje del cuadrupolo no sea perpendicular al plano).

El desarrollo de la teoría de la perturbación se remonta a los primeros tiempos de la Mecánica celeste. Por ejemplo, Newton se dio cuenta de que la mayoría de las oscilaciones en el movimiento de la Luna se debían a pequeñas variaciones de la atracción solar en el movimiento de la Luna alrededor de la Tierra. Sus intentos iniciales de una teoría lunar que incluyera dichos efectos correspondía aproximadamente a una forma de teoría de la perturbación. Muchos de los desarrollos subsiguientes de la estructura formal de la Mecánica clásica, tales como la teoría canónica de Hamilton, se apoyaban en gran medida en la aplicación de técnicas de perturbación perfectas en Mecánica celeste. La necesidad de predecir órbitas muy precisas para vehículos espaciales y el enorme incremento de la capacidad de cálculos numéricos han impulsado recientemente aún más la teoría de la perturbación. (No obstante, la mayoría de estos desarrollos recientes se salen del ámbito de nuestro estudio.)

La teoría clásica de la perturbación podemos dividirla en dos aspectos: perturbación dependiente del tiempo y perturbación independiente del tiempo. La terminología se ha escogido con la vista puesta en la teoría de la perturbación desarrollada para la Mecánica cuántica y en verdad existen muchos puntos de analogía entre las técnicas de perturbación clásicas y sus contrapartidas cuánticas. Hablando de manera general, la teoría clásica de la perturbación es mucho más complicada que la versión correspondiente a la Mecánica cuántica. Trataremos primeramente la perturbación dependiente del tiempo que es la forma más fácil de entender. Aun cuando la teoría de la perturbación se puede desarrollar para todas las versiones de Mecánica clásica, lo más fácil es utilizar la formulación de Hamilton-Jacobi.

11-2 PERTURBACIÓN DEPENDIENTE DEL TIEMPO (VARIACIÓN DE CONSTANTES)

Sea $H_0(q, p, t)$ la hamiltoniana correspondiente al problema resoluble, no perturbado. Imaginemos que se ha obtenido la solución mediante la función principal de Hamilton $S(q, \alpha, t)$, la cual genera una transformación canónica en la cual la nueva hamiltoniana, K_0 , para el problema no perturbado es idénticamente nula. Las variables canónicas transformadas (α, β) son entonces todas constantes en el caso no perturbado. Consideremos ahora el problema perturbado para el cual escribiremos la hamiltoniana en la forma

$$H(q, p, t) = H_0(q, p, t) + \Delta H(q, p, t). \quad (11-1)$$

Hemos recalcado anteriormente que la propiedad canónica de una transformación de

coordenadas dada es independiente de la forma particular de la hamiltoniana. Por tanto, la transformación

$$(p, q) \rightarrow (\alpha, \beta)$$

generada por $S(q, \alpha, t)$ sigue siendo transformación canónica en el problema perturbado. Tan sólo ahora no se anulará la nueva hamiltoniana y las variables transformadas pueden no ser constantes. En el caso del problema perturbado, la hamiltoniana transformada será

$$K(\alpha, \beta, t) = H_0 + \Delta H + \frac{\partial S}{\partial t} = \Delta H(\alpha, \beta, t). \quad (11-2)$$

Luego las ecuaciones de movimiento que satisfacen las variables transformadas son ahora

$$\dot{\alpha}_i = -\frac{\partial \Delta H(\alpha, \beta, t)}{\partial \beta_i}, \quad \dot{\beta}_i = \frac{\partial \Delta H(\alpha, \beta, t)}{\partial \alpha_i}. \quad (11-3)$$

Las ecuaciones (11-3) son rigurosas; aún no hemos hecho ninguna aproximación. Si del sistema de $2n$ ecuaciones podemos obtener α_i y β_i en función del tiempo, las ecuaciones de transformación entre (p, q) y (α, β) darán q_j y p_j en función del tiempo, es decir, resuelven el problema. No obstante, la solución exacta de las ecuaciones (11-3) no suele ser menos difícil de obtener que en el caso de las ecuaciones de movimiento originales. Por tanto, la utilización de las ecuaciones (11-3) para la solución rigurosa no será particularmente fructífera.

Sin embargo, en la técnica de perturbación se aprovecha el hecho de ser pequeño ΔH . Por tanto, las cantidades (α, β) aun no siendo ya constantes no varían rápidamente, al menos si comparamos con la dependencia explícita de ΔH respecto al tiempo. Una primera aproximación a la variación temporal de (α, β) se obtiene sustituyendo α y β en los segundos miembros de las ecuaciones (11-3) por sus valores constantes no perturbados:

$$\dot{\alpha}_{1i} = \left. \frac{\partial \Delta H(\alpha, \beta, t)}{\partial \beta_i} \right|_0; \quad \dot{\beta}_{1i} = -\left. \frac{\partial \Delta H(\alpha, \beta, t)}{\partial \alpha_i} \right|_0. \quad (11-4)$$

Aquí, α_{1i} y β_{1i} representan las soluciones de perturbación de primer orden para α_i y β_i , respectivamente, y las barras verticales con subíndice 0 indican que después de la derivación hay que sustituir α y β por sus formas no perturbadas, es decir, por las constantes (α_0, β_0) . Las ecuaciones (11-4) se pueden escribir en forma matricial

designando por γ la matriz columna de las variables canónicas β y α , con lo cual

$$\dot{\gamma}_1 = \mathbf{J} \left. \frac{\partial \Delta H(\gamma, t)}{\partial \gamma} \right|_0, \quad (11-5)$$

donde \mathbf{J} es la matriz dada por la ecuación (8-30). Las ecuaciones (11-4) se pueden ahora integrar directamente para dar las α_i y β_i en función del tiempo. Mediante las ecuaciones de transformación se obtienen entonces las (q, p) en función del tiempo en primera aproximación. Está claro que la perturbación de segundo orden se obtiene utilizando la primera aproximación de la dependencia de α y β respecto al tiempo en los segundos miembros de las ecuaciones (11-4), etc. En general, la solución de perturbación de orden n se obtiene integrando las ecuaciones de γ_n (en forma matricial) dadas por

$$\dot{\gamma}_n = \mathbf{J} \left. \frac{\partial \Delta H(\gamma, t)}{\partial \gamma} \right|_{n-1}. \quad (11-6)$$

Como ejemplo trivial de estos procedimientos, consideremos que el sistema no perturbado es el movimiento unidimensional exento de fuerzas de una partícula de masa m . La hamiltoniana no perturbada es

$$H_0 = \frac{p^2}{2m}.$$

Está claro que se conserva la cantidad de movimiento p ; llamemos α a su valor constante. Para este sistema la ecuación de Hamilton-Jacobi es

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial S}{\partial t} = 0. \quad (11-7)$$

Como el sistema es conservativo y x es cíclica, sabemos de manera inmediata que la solución para la función principal de Hamilton es

$$S = \alpha x - \frac{x^2 t}{2m}. \quad (11-8)$$

La cantidad de movimiento transformada es α ; la coordenada constante transformada es

$$Q \equiv \beta = \frac{\partial S}{\partial \alpha} = x - \frac{\alpha t}{m}$$

o sea

$$x = \frac{\alpha t}{m} + \beta, \quad (11-9)$$

es la solución buscada para el movimiento exento de fuerzas. Aun cuando la ecuación (11-9) es evidente a priori, esta deducción formal mediante la ecuación de Hamilton-Jacobi demuestra al menos que α y β , definidas de esta manera, forman un sistema canónico.

Supongamos ahora que la hamiltoniana de la perturbación sea

$$\Delta H = \frac{m\omega^2 x^2}{2}, \quad (11-10)$$

donde ω es una consante. La hamiltoniana total será

$$H = H_0 + \Delta H = \frac{1}{2m}(p^2 + m^2\omega^2 x^2). \quad (11-11)$$

Estamos, pues, considerando que el potencial del oscilador armónico es una perturbación del movimiento exento de fuerzas. En función de las variables α , β la hamiltoniana de la perturbación, en virtud de la ecuación (11-9) es

$$\Delta H = \frac{m\omega^2}{2} \left(\frac{\alpha t}{m} + \beta \right)^2. \quad (11-12)$$

En el sistema perturbado, las ecuaciones de movimiento para α y β son (cfr. ec. 11-3)

$$\dot{\alpha} = -m\omega^2 \left(\frac{\alpha t}{m} + \beta \right), \quad (11-13a)$$

$$\dot{\beta} = \omega^2 t \left(\frac{\alpha t}{m} + \beta \right). \quad (11-13b)$$

Observemos que

$$\dot{\beta} + \frac{t}{m} \dot{\alpha} = 0. \quad (11-14)$$

Podemos obtener una solución rigurosa de las ecuaciones (11-13) derivando respecto al tiempo la ecuación (11-13a):

$$\ddot{x} = -\omega^2\alpha - m\omega^2\left(\dot{\beta} + \frac{\dot{x}t}{m}\right) = -\omega^2\alpha. \quad (11-15)$$

Así pues, en el sistema perturbado α tiene una variación armónica simple con el tiempo. De las ecuaciones (11-13a) y (11-9) se deduce que $x = -\dot{x}/(m\omega^2)$ y por tanto, la solución para x es también un movimiento armónico simple. En consecuencia, considerando que son ecuaciones de movimiento rigurosas, las ecuaciones (11-13) conducen adecuadamente a la solución correcta conocida.

Pero consideremos ahora que $m\omega^2$ ($\equiv k$, constante de rigidez) sea un parámetro pequeño y busquemos soluciones de perturbación. La perturbación de primer orden se obtiene sustituyendo en el segundo miembro α y β por sus valores no perturbados α_0 y β_0 . Por razón de sencillez tomaremos $x = 0$ inicialmente, con lo que $\beta_0 = 0$; el valor inicial de p es entonces α_0 . Las ecuaciones de movimiento de primer orden son entonces

$$\dot{\alpha}_1 = -\omega^2\alpha_0 t, \quad \dot{\beta}_1 = \alpha_0 \frac{\omega^2 t^2}{m}, \quad (11-16)$$

con soluciones inmediatas

$$\alpha_1 = \alpha_0 - \frac{\omega^2\alpha_0 t^2}{2}, \quad \beta_1 = \frac{\alpha_0\omega^2 t^3}{3m}. \quad (11-17)$$

Las soluciones para x y p de primer orden son entonces

$$x = \frac{\alpha_1 t}{m} + \beta_1 = \frac{\alpha_0}{m\omega} \left[\omega t - \frac{\omega^3 t^3}{6} \right], \quad (11-18a)$$

y

$$p = \alpha_1 = \alpha_0 \left[1 - \frac{\omega^2 t^2}{2} \right]. \quad (11-18b)$$

Sustituyendo en los segundos miembro de las ecuaciones (11-13) α y β por sus expresiones (11-17), las ecuaciones de movimiento de segundo orden quedan en la forma

$$\dot{\alpha}_2 = -\alpha_0\omega^2 \left(t - \frac{\omega^2 t^3}{6} \right), \quad \dot{\beta}_2 = \frac{\alpha_0\omega^2}{m} \left(t^2 - \frac{\omega^2 t}{b} \right), \quad (11-19)$$

con soluciones

$$\alpha_2 = \alpha_0 - \frac{\omega^2 \alpha_0 t^2}{2} + \frac{\omega^4 \alpha_0 t^4}{24},$$

$$\beta_2 = \frac{\alpha_0 \omega^2}{m} \left(\frac{t^3}{3} - \frac{\omega^2 t^5}{30} \right).$$
(11-20)

Las soluciones de segundo orden correspondientes a x y p son

$$x = \frac{\alpha_0}{m\omega} \left[\omega t - \frac{\omega^3 t^3}{3!} + \frac{\omega^5 t^5}{5!} \right],$$

$$p = \alpha_0 \left[1 - \frac{\omega^2 t^2}{2!} + \frac{\omega^4 t^4}{4!} \right].$$
(11-21)

Tenemos ya lo suficiente para ver a qué tiende la solución de orden n -ésimo. Las cantidades entre corchetes de las ecuaciones (11-21) son los tres primeros términos de los desarrollos en serie del seno y del coseno, respectivamente. En el límite del orden de perturbación infinito será, claramente,

$$x \rightarrow \frac{\alpha_0}{m\omega} \text{sen } \omega t, \quad p \rightarrow \alpha_0 \text{cos } \omega t,$$

que son las soluciones típicas compatibles con las condiciones iniciales.

Las variables transformadas (α , β) contienen información referente a los parámetros de la órbita sin perturbar. Así, si el problema de Kepler en tres dimensiones describe el sistema no perturbado, un sistema adecuado de (α , β) lo constituyen las variables de Delaunay, es decir, las variables de acción constantes J_i y los términos constantes de las variables ángulo correspondientes w_i . En § 10-7 vimos que las variables de Delaunay están relacionadas de manera sencilla con los parámetros orbitales —semieje mayor, excentricidad, inclinación, etc. El efecto de la perturbación es hacer variar estos parámetros con el tiempo. Si la perturbación es pequeña, la variación de los parámetros durante un periodo del movimiento no perturbado también será pequeña. La teoría de la perturbación dependiente del tiempo —variación de constantes— implica, pues, una imagen en la cual el sistema perturbado se mueve durante cortos intervalos de tiempo en una órbita de igual forma funcional que el sistema sin perturbar, órbita cuyos parámetros, no obstante, variarán con el tiempo. La órbita no perturbada a lo largo de la cual viaja momentáneamente el sistema se denomina a veces «órbita osculatriz». En posición y dirección de la tangente, coincide instantáneamente con la trayectoria verdadera.

Determinados mediante el tratamiento de perturbaciones, los parámetros de la órbita osculatriz pueden variar con el tiempo de dos maneras. Puede haber una variación

periódica, en la cual el parámetro vuelve a un valor inicial tras un intervalo de tiempo que en primera aproximación suele ser el periodo del movimiento no perturbado. O bien puede mantenerse un incremento neto del valor del parámetro al final de cada uno de los periodos orbitales sucesivos —y se dice entonces que los parámetros perturbados presentan una variación *secular*. Los efectos periódicos de la perturbación no alteran los parámetros medios de la órbita; en conjunto, la trayectoria sigue teniendo un aspecto muy parecido al de la órbita no perturbada. Una variación secular, por muy pequeño que sea el periodo orbital, significa que al cabo de muchos periodos los parámetros perturbados instantáneos pueden ser muy diferentes de sus valores no perturbados. El principal interés de un cálculo de perturbación residirá pues, a menudo, tan sólo en el término secular y los efectos periódicos los podremos eliminar ya al principio, promediando la perturbación para un periodo no perturbado. En realidad, esto es lo que hicimos en § 5-8 cuando promediamos el potencial gravitatorio perturbador de la Tierra achatada para un periodo del satélite (cfr. ec. 5-90).*

A menudo podríamos querer determinar la dependencia temporal de las «constantes» orbitales —p. ej., excentricidad, o inclinación— directamente y no a través del sistema canónico intermedio (α, β) . Ello puede hacerse fácilmente mediante el formalismo de los corchetes de Poisson. Sea c_i un conjunto cualquiera de $2n$ funciones de las constantes (α, β) del sistema sin perturbar, funciones que son independientes entre sí:

$$c_i = c_i(\alpha, \beta). \quad (11-22)$$

Una o varias de las c_i pueden ser los parámetros orbitales buscados. Entonces, en el sistema perturbado la dependencia temporal de las c_i viene determinada por las ecuaciones de movimiento

$$\dot{c}_i = [c_i, K] = [c_i, \Delta H]. \quad (11-23)$$

Pero las inversas de las ecuaciones (11-22) nos permiten asimismo considerar $\Delta H(\alpha, \beta, t)$

* A menudo, las circunstancias pueden ser más complicadas que lo descrito en este párrafo. Por ejemplo, la variación periódica de parámetros orbitales puede presentar más de un periodo. Ocurrirá esto, evidentemente, cuando el potencial perturbador tenga su propia periodicidad intrínseca, p. ej., la perturbación variable de la gravedad solar sobre la órbita Tierra-Luna en el movimiento de traslación de la Tierra alrededor del Sol. El comportamiento de multiplicidad periódica puede también aparecer en interacciones entre perturbaciones. Así, la perturbación periódica de parámetros de satélites puede presentar periodos cortos y largos y es necesario promediar para los dos tipos de periodo para hallar los efectos de perturbación secular. A veces, la línea divisoria entre perturbaciones periódicas y seculares resulta un tanto vaga. Lo que en el primer orden puede aparecer como perturbación secular, un examen más minucioso puede hacer que resulte ser una perturbación periódica de periodo muy largo. Según cuál sea el fin que se persigue con los cálculos, puede aún ser aconsejable tratarla como término de perturbación secular. A pesar de todo, la distinción entre términos periódicos y seculares sigue siendo útil y normalmente inmediata, especialmente en la teoría de la perturbación de primer orden.

función de las c y de t , con lo cual

$$\begin{aligned} [c_i, \Delta H] &\equiv \frac{\partial c_i}{\partial \boldsymbol{\eta}} \mathbf{J} \frac{\partial \Delta H}{\partial \boldsymbol{\eta}} = \frac{\partial c_i}{\partial \boldsymbol{\eta}} \mathbf{J} \frac{\partial \Delta H}{\partial c_j} \frac{\partial c_j}{\partial \boldsymbol{\eta}} \\ &= [c_i, c_j] \frac{\partial \Delta H}{\partial c_j}. \end{aligned}$$

Luego,

$$\dot{c}_i = [c_i, c_j] \frac{\partial \Delta H}{\partial c_j}. \quad (11-24)$$

Al igual que las ecuaciones (11-3), las (11-24) son ecuaciones de movimiento rigurosas para las c_i . Se convierten en ecuaciones de perturbación de primer orden cuando se calculan los segundos miembros, incluidos los corchetes de Poisson, para el movimiento sin perturbar. En general, la perturbación de orden n -ésimo se obtiene cuando se calculan los segundos miembros en función de la perturbación de orden $(n - 1)$ -ésimo. Así pues, las ecuaciones (11-24) corresponden, en forma generalizada, a las ecuaciones (11-6).

En la literatura de Mecánica celeste aparece a menudo una versión de las ecuaciones (11-24) expresada en corchetes de Lagrange (cfr. ec. 9-77). Multipliquemos la ecuación correspondiente a c_i por el corchete de Lagrange $\{c_k, c_i\}$ y sumemos para los valores de i :

$$\{c_k, c_i\} \dot{c}_i = \{c_k, c_i\} [c_i, c_j] \frac{\partial \Delta H}{\partial c_j}.$$

Por el teorema expresado en la ecuación (9-83), esto se reduce a

$$-\frac{\partial \Delta H}{\partial c_j} = \{c_j, c_i\} \dot{c}_i. \quad (11-25)$$

Históricamente, las ecuaciones de perturbación de la Mecánica celeste se expresan en función de la *función perturbadora* R que, por definición, es $-\Delta H$ con lo que las ecuaciones (11-25) aparecen en la forma

$$\frac{\partial R}{\partial c_j} = \{c_j, c_i\} \dot{c}_i. \quad (11-25')$$

Las ecuaciones (11-24) u (11-25) se denominan frecuentemente *ecuaciones de*

perturbación de Lagrange. Otras características de la teoría de la perturbación dependiente del tiempo las veremos en el curso de la aplicación del método a algunos ejemplos clásicos en el apartado siguiente.

11-3 EJEMPLOS DE LA TEORÍA DE LA PERTURBACIÓN DEPENDIENTE DEL TIEMPO

A. Periodo del péndulo plano con amplitud finita. En el límite de las oscilaciones de pequeña amplitud, el péndulo plano se comporta como oscilador armónico y es isócrono, es decir, la frecuencia es independiente de la amplitud. Sin embargo, al aumentar la amplitud la energía potencial correcta se desvía respecto a la forma del oscilador armónico y la frecuencia presenta una pequeña dependencia de la amplitud. La pequeña diferencia entre la energía potencial y el límite del oscilador armónico podemos considerarla como hamiltoniana de la perturbación y podemos deducir el cambio de la frecuencia a partir de la variación con el tiempo del ángulo de fase perturbado. En § 11-4 encontraremos el mismo cambio de frecuencia en la versión independiente del tiempo de la teoría de la perturbación.

La hamiltoniana de un péndulo plano, consistente en un punto material m situado al extremo de una varilla sin peso de longitud l , es

$$H = \frac{p^2}{2ml^2} + mgl(1 - \cos \theta), \quad (11-26)$$

donde, por razón de sencillez, hemos representado por p la cantidad de movimiento conjugada de θ . Desarrollando en serie de Taylor el término en $\cos \theta$, podremos escribir la hamiltoniana en la forma

$$H = \frac{p^2}{2ml^2} + \frac{mgl\theta^2}{2} \left(1 - \frac{\theta^2}{12} + \frac{\theta^4}{360} - \dots \right). \quad (11-27)$$

El límite de las amplitudes pequeñas consiste en suprimir todos los términos interiores al paréntesis menos el primero. Podemos tener una idea de la magnitud de los términos correctivos introduciendo artificialmente un parámetro

$$\theta_1^2 = \frac{2E}{mgl} \quad (11-28)$$

y el parámetro relacionado con él

$$\lambda = \frac{\theta_1^2}{6} = \frac{E}{3mgl}.$$

La serie del paréntesis presenta entonces el aspecto

$$1 - \frac{\lambda}{2} \left(\frac{\theta}{\theta_1} \right)^2 + \frac{\lambda^2}{10} \left(\frac{\theta}{\theta_1} \right)^4 - \dots$$

Ahora bien, el cociente θ/θ_1 , se hace del orden de la unidad para la amplitud máxima. En verdad, θ_1 es la amplitud máxima de oscilación cuando E y por tanto la amplitud, es pequeña. Por tanto, la rapidez de convergencia del desarrollo está determinada por la magnitud de λ . Si sólo se conserva un término correctivo, la perturbación de primer orden introduce en el movimiento términos del orden de λ . La perturbación de segundo orden con la misma hamiltoniana de perturbación introduce términos en λ^2 . Así pues, para obtener modificaciones del movimiento coherentemente correctas para λ^2 habría que calcular una perturbación de segundo orden en el término en λ de la hamiltoniana y una perturbación de primer orden en el término en λ^2 de la hamiltoniana. Vamos a conformarnos con un tratamiento coherente con el orden de λ , es decir, sólo conservaremos el primer término correctivo de la hamiltoniana y llevaremos a cabo una solución de perturbación de primer orden.

La hamiltoniana no perturbada que se deduce de la ecuación (11-27) podemos ponerla en forma de oscilador armónico escribiéndola (cfr. ec. 10-14) así:

$$H = \frac{1}{2I}(p^2 + I^2\omega^2\theta^2), \quad (11-29)$$

donde $I = ml^2$ es el momento de inercia del péndulo y

$$\omega^2 = \frac{mgl}{I} = \frac{g}{l}. \quad (11-30)$$

Un sistema adecuado de variables canónicas correspondiente a una K nula para el sistema sin perturbar lo constituyen la variable de acción J y el ángulo de fase β en la variable ángulo:

$$w = vt + \beta, \quad v = \frac{\omega}{2\pi}. \quad (11-31)$$

El efecto de la perturbación es hacer que J y β varíen con el tiempo. Las ecuaciones de transformación que relacionan p y θ con J y β , respectivamente, ya las daban las ecuaciones (10-78) y (10-79), que ponemos aquí en la forma

$$\begin{aligned} \theta &= \sqrt{\frac{J}{\pi I \omega}} \operatorname{sen} 2\pi(vt + \beta), \\ p &= \sqrt{\frac{IJ\omega}{\pi}} \cos 2\pi(vt + \beta). \end{aligned} \quad (11-32)$$

En el sistema sin perturbar, J y β son constantes y las ecuaciones (11-32) constituyen las soluciones completas para el movimiento. Ahora bien, las ecuaciones seguirán siendo válidas para el caso perturbado y sólo J y β tienen dependencias del tiempo a determinar.

La hamiltoniana no perturbada es $H_0 = J\nu$, pero la hamiltoniana de perturbación toma la forma

$$\Delta H = -\frac{mgl}{24}\theta^4 = -\frac{J^2}{24\pi^2 m l^2} \text{sen}^4 2\pi(\nu t + \beta). \quad (11-33)$$

La dependencia del β y J de primer orden respecto al tiempo se obtendrá de

$$\dot{\beta} = \frac{\partial \Delta H}{\partial J}, \quad \dot{J} = -\frac{\partial \Delta H}{\partial \beta}, \quad (11-34)$$

donde en el segundo miembro de cada ecuación hay que utilizar la solución no perturbada, es decir, se consideran constantes J y β . Así pues

$$\dot{\beta} = -\frac{J}{12\pi^2 m l^2} \text{sen}^4 2\pi(\nu t + \beta). \quad (11-35)$$

La ecuación (11-35) dice que en primera aproximación, $\dot{\beta}$ varía a lo largo del ciclo de la oscilación sin perturbar. Pero existe un valor neto de $\dot{\beta}$ cuando se promedia para un ciclo completo, ya que el valor medio de sen^4 es $3/8$. Por tanto, β presenta una perturbación secular a una razón constante dada por

$$\bar{\dot{\beta}} = -\frac{J}{32\pi^2 m l^2}. \quad (11-36)$$

Contemplada durante tiempos largos frente al periodo no perturbado, β tiene una dependencia del tiempo

$$\beta = \bar{\dot{\beta}}t + \beta_0. \quad (11-37)$$

Al insertar esta variación en la ecuación (11-32) vemos que, por término medio, la solución de primer orden sigue siendo armónica simple con una frecuencia

$$\nu' = \nu + \bar{\dot{\beta}}.$$

Ahora bien, en el movimiento no perturbado

$$J = \frac{2\pi E}{\omega} = 2\pi\omega \frac{El}{g},$$

con lo que la ecuación (11-36) queda en la forma

$$\bar{\beta} = -\frac{\omega E}{16\pi mgl} = -\frac{v\theta_1^2}{16}. \quad (11-38)$$

La variación relativa de primer orden de la frecuencia para una amplitud finita θ_1 será, pues,

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{\bar{\beta}}{v} = -\frac{\theta_1^2}{16}, \quad (11-39)$$

resultado conocido que también puede obtenerse aproximando la representación del movimiento por función elíptica.*

De las ecuaciones (11-33) y (11-34) se desprende que, en primera aproximación, la variación de J con el tiempo es

$$\dot{J} = -\frac{J^2}{3\pi ml^2} \text{sen}^3 2\pi(vt + \beta) \cos 2\pi(vt + \beta).$$

El valor medio de $\text{sen}^3 \phi \cos \phi$ incluso para medio periodo es nulo; por tanto, J no presenta perturbación secular. Desde un punto de vista físico era de esperar este resultado, ya que J es una medida de la amplitud de las oscilaciones (cfr. ec. 11-32) y la perturbación no sería tal que hiciera aumentar o disminuir la amplitud con el tiempo.

B. Perturbación por fuerza central del problema de Kepler acotado. En el ejercicio 14 del capítulo 3, se demostró de manera rigurosa que si al potencial de Coulomb se suma un potencial de forma $1/r^2$, la órbita del problema acotado es una elipse en un sistema de coordenadas *en rotación*. Efectivamente, la elipse gira y su periápside está animado de precesión. Vamos a hallar la velocidad de precesión mediante la teoría de perturbación de primer orden, considerando una forma de potencial perturbador algo más general.

Supongamos que el potencial perturbador sea

$$V = -\frac{k}{r} - \frac{h}{r^n}, \quad (11-40)$$

* Véase por ejemplo, K. R. Symon, *Mechanics*, 3.^a ed., p. 215, especialmente Ec. (5.35).

donde n es un entero mayor o igual que $+2$. La constante h la supondremos tal que el **segundo término sea una pequeña perturbación del primero**. La hamiltoniana de perturbación será pues

$$\Delta H = -\frac{h}{r^n}, \quad n \geq 2. \quad (11-41)$$

En el problema sin perturbación, la posición angular del periápside en el plano de la órbita viene dada por la constante $\omega = 2\pi w_2$ (cfr. ec. 10-140). Con la perturbación, ω tiene una dependencia del tiempo determinada por

$$\dot{\omega} = 2\pi \frac{\partial \Delta H}{\partial J_2} = -\frac{\partial \Delta H}{\partial l}, \quad (11-42)$$

utilizando la relación $J_2 = 2\pi l$ (ec. 10-131). Los resultados de la perturbación de primer orden se obtienen calculando ΔH y la derivada en función del movimiento no perturbado. Además, rara vez interesa la variación instantánea de ω . En la mayoría de casos en que sea valioso el formalismo de la perturbación, $\dot{\omega}$ es tan pequeña que resulta difícil, si no imposible, percibir la variación de ω en un solo periodo orbital; y basta con medir solamente la variación secular de ω después de haberse recorrido muchas órbitas. Por tanto, lo que necesitamos conocer es el promedio de $\dot{\omega}$ para un intervalo de tiempo τ que es el periodo de la órbita no perturbada:

$$\overline{\dot{\omega}} \equiv \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \frac{\partial \Delta H}{\partial l} dt.$$

La derivada se puede sacar del signo integral ya que τ sólo es función de J_3 (ec. 10-119 combinada con ec. 10-123), mientras que la derivación es respecto a $l = J_2/2\pi$. Luego

$$\overline{\dot{\omega}} = \frac{\partial}{\partial l} \left(\frac{1}{\tau} \int_0^\tau \Delta H dt \right) = \frac{\partial \overline{\Delta H}}{\partial l}. \quad (11-43)$$

Pero el promedio temporal de la hamiltoniana de perturbación es, en este caso,

$$\Delta \overline{H} = -h \overline{\left(\frac{1}{r^n} \right)} = -\frac{h}{\tau} \int_0^\tau \frac{dt}{r^n}. \quad (11-44)$$

Utilizando la conservación del momento cinético en la forma $l dt = mr^2 d\psi$, la integral puede convertirse en otra referida a ψ :

$$\Delta \bar{H} = -\frac{mh}{l\tau} \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{r^{n-2}} \quad (11-45)$$

$$= -\frac{mh}{l\tau} \left(\frac{mk}{l^2}\right)^{n-2} \int_0^{2\pi} (1 + e \cos(\psi - \psi'))^{n-2} d\psi, \quad (11-45')$$

donde hemos expresado r en función de ψ utilizando la ecuación (3-51) de la órbita (escribiendo ψ en lugar de θ). En general, solamente los términos que contengan potencias pares de las excentricidad e darán contribuciones no nulas a la integral. La derivada respecto a l contiene también a e y sus potencias ya que en virtud de la ecuación (10-134) e sólo es función de J_2 y J_3 .

Dos casos particulares presentan un interés especial. Uno lo tenemos cuando $n = 2$, mencionado brevemente al principio de este ejemplo. La hamiltoniana de perturbación media es entonces, simplemente,

$$\overline{\Delta H} = -\frac{2\pi mh}{l\tau},$$

y la velocidad de precesión secular es

$$\overline{\dot{\omega}} = \frac{2\pi mh}{l^2\tau},$$

cosa que concuerda con el ejercicio 14 del capítulo 3.

El otro caso de interés corresponde a $n = 3$ (potencial de perturbación de forma $1/r^3$), en el cual la ecuación (11-45') se reduce a

$$\overline{\Delta H} = -\frac{2\pi m^2 h k}{l^3 \tau} \quad (11-46)$$

y

$$\overline{\dot{\omega}} = \frac{6\pi m^2 h k}{l^4 \tau}. \quad (11-47)$$

Lo que da una importancia especial a esta elección de n es que la teoría de la Relatividad generalizada predice una corrección del movimiento newtoniano que puede interpretarse mediante un potencial r^{-3} . La llamada solución esféricamente simétrica de Schwarzschild de las ecuaciones de campo de Einstein corresponde a una hamiltoniana adicional en el

problema de Kepler* de la forma dada en la ecuación (11-41), con $n = 3$ y

$$h = \frac{kl^2}{m^2c^2}, \quad (11-48)$$

con lo cual la ecuación (11-47) se convierte en

$$\dot{\omega} = \frac{6\pi k^2}{\tau l^2 c^2}. \quad (11-49)$$

Para aplicar la ecuación (11-49) a la velocidad de precesión secular de la precesión de un cuerpo que gira alrededor del Sol, k se hace igual a GMm y la ecuación (3-63), válida para la elipse no perturbada, se utiliza en la forma

$$l^2 = mka(1 - e^2). \quad (11-50)$$

La ecuación (11-49) se puede entonces poner en la forma

$$\dot{\omega} = \frac{6\pi}{\tau(1 - e^2)} \left(\frac{R}{a} \right), \quad (11-51)$$

donde R es el llamado radio gravitatorio del Sol: †

$$R = \frac{GM}{c^2} = 1,4766 \text{ km}. \quad (11-52)$$

* Véase W. M. Smart, *Celestial Mechanics* (New York, Wiley, 1953) p. 243, donde se atribuye a Eddington el reconocimiento del potencial de perturbación equivalente. Referencia más reciente la encontramos en la voluminosa monografía de Misner, Thorne y Wheeler, *Gravitation* (San Francisco, California: Freeman, 1973). El potencial correctivo r^{-3} se puede deducir de la ecuación unidimensional equivalente para la energía que se da en ella en la p. 668, ecuación (25.42), descifrando con cuidado la colección de elaborados símbolos y recordando la casi invisibilidad de c en la mayoría de las expresiones.

† El valor numérico se basa en el sistema 1968 JPL de constantes astronómicas. Véase W. G. Melbourne et al., JPL Technical Report 32-1306, Julio 15, 1968.

Para el planeta Mercurio $\tau = 0,2409$ años sidéreos, $G = 0,2056$ y $a = 5,790 \times 10^7$ km; la ecuación (11-51) predice entonces una precesión del perihelio de Mercurio que surge de la Relatividad generalizada con una velocidad media de

$$\overline{\dot{\omega}} = 42.98''/\text{siglo}$$

La precesión secular observada del perihelio de Mercurio es unas 100 veces mayor que este valor, pues vale $5599,74 \pm 0,41''/\text{siglo}$. La mayor parte de este valor se debe a la precesión de los equinoccios, es decir, al movimiento del punto de referencia de longitudes respecto a la galaxia (v. Capítulo 5, p. 239). Del resto, unos $531,54''/\text{siglo}$ sale de perturbaciones de la órbita de Mercurio a causa de otros planetas. Solamente cuando se sustraigan estos dos conjuntos de efectos de la precesión observada resultará visible el pequeño efecto de la Relatividad generalizada. Un cálculo efectuado en 1973* estimó este residuo en $41,4'' \pm 0,9''/\text{siglo}$; la desviación respecto a la predicción teórica no se considera significativa.

Queda un punto por tratar. En la aplicación a efectos relativistas, la constante h (ec. 11-48) es función del valor de l . Podríamos pues preguntarnos que, al hallar ω , ¿por qué no actúa también sobre h la derivada respecto a l ? La clave estriba en que h no depende funcionalmente de l como cantidad de movimiento canónica; la ecuación (11-48) sólo dice cómo se determina el valor de la constante h en función del valor del parámetro orbital l . Dicho de otro modo, el potencial de perturbación es función de las variables dinámicas tan sólo a través de r , no debe construirse dependiente de la velocidad.

C. Precesión de los equinoccios y de órbitas de satélites. La familia de problemas que vamos a considerar ahora se ha tratado ya en §5-8 que lleva el mismo título. Queremos describir el movimiento relativo de dos cuerpos que interactúan a través de su atracción gravitatoria, siendo uno de simetría esférica o punto material y el otro ligeramente achatado con un momento cuadrupolar gravitatorio resultante. El efecto de la forma ligeramente achatada que tiene la Tierra es, físicamente, que los momentos que ejercen el Sol y la Luna sobre el pandeo ecuatorial hacen que el eje de rotación de la Tierra tenga un movimiento de precesión muy lento. Recíprocamente, el efecto de un cuerpo en órbita alrededor de la Tierra, tal como la Luna o un satélite artificial, es dar una precesión al plano de la órbita en torno al eje de figura de la Tierra. La pequeñez de la magnitud del término cuadrupolar gravitatorio, manifestada por la muy lenta velocidad de precesión, sugiere que un tratamiento por perturbación podría constituir una aproximación extraordinariamente buena. Vamos a examinar solamente el caso de la perturbación de una órbita de satélite; el fenómeno recíproco de la precesión de los equinoccios se puede tratar de manera muy semejante (aunque con notación diferente) a partir de la misma hamiltoniana de perturbación y lo dejamos para los ejercicios.

Como vamos a hacer hincapié en un satélite puntiforme que se mueva en torno a una Tierra mucho más masiva, invertiremos aquí la notación de §(5-8) y denotaremos por m

* C. W. Misner, K. S. Thorne y J. A. Wheeler, *Gravitation* (1973) p. 1112.

la masa del satélite, llamando M a la masa de la Tierra. El potencial total que se ejerce sobre el satélite será, pues, en virtud de la ecuación (5-88),

$$V = -\frac{k}{r} + \frac{k}{M} \frac{(I_3 - I_1)}{r^3} P_2(\gamma), \quad (11\ 53)$$

donde $k = GMm$ y γ es el coseno del ángulo θ que forma el radio vector del satélite con el eje de figura de la Tierra. Tendremos, pues, para la hamiltoniana de perturbación

$$\Delta H = k \frac{I_3 - I_1}{2Mr^3} (3 \cos^2 \theta - 1). \quad (11\ 54)$$

El ángulo polar θ se puede expresar en función del ángulo i de inclinación de la órbita y del ángulo ψ del radio vector en el plano orbital relativo al periápside (la llamada anomalía verdadera) mediante la relación*

$$\cos \theta = \text{sen } i \text{ sen}(\psi + \omega), \quad (11\ 55)$$

donde ω es el argumento del periápside. Con algunas transformaciones podemos escribir la dependencia angular de ΔH en la forma

$$3 \cos^2 \theta - 1 = \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2} \cos^2 i\right) - \frac{3}{2} \text{sen}^2 i \cos 2(\psi + \omega). \quad (11-56)$$

Ahora bien, dada la pequeñez de la perturbación, nuestro principal interés se centra en los efectos acumulativos de la perturbación secular. Así pues, la precesión del plano orbital se presenta en forma de variación secular del ángulo Ω de la línea de nodos (o longitud del nodo ascendente, v. p. 582). Mediante el mismo razonamiento efectuado en el ejemplo anterior podemos obtener los efectos seculares promediando ΔH antes de derivar:

$$\begin{aligned} \overline{\Delta H} &\equiv \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \Delta H dt = \frac{m}{l\tau} \int_0^{2\pi} r^2 \Delta H d\psi \\ &= \frac{m^2 k^2 (I_3 - I_1)}{2Ml^3 \tau} \int_0^{2\pi} (1 + e \cos \psi)(3 \cos^2 \theta - 1) d\psi. \end{aligned} \quad (11\ 57)$$

* La ecuación (11-55) se puede obtener de muchas maneras, p. ej., por rotación matricial del plano de la órbita en el plano xy . Viene dada, tal vez de manera más sencilla, por un razonamiento trigonométrico un tanto anticuado que se basa en la figura (10-5). Como $OB = 1$, $BC = \cos \theta$, pero $AB = \text{sen}(\psi + \omega)$ y por tanto BC es también igual a $\text{sen } i \text{ sen}(\psi + \omega)$.

El término de la ecuación (11-56) que contiene a $\cos 2(\psi + \omega)$ da una contribución nula a la integral por ser ortogonal, en el intervalo de integración, tanto para 1 como para $\cos \psi$. Luego la hamiltoniana de perturbación promediada será

$$\overline{\Delta H} = \frac{\pi m^2 k^2 (I_3 - I_1)}{2 M l^3 \tau} (1 - 3 \cos^2 i). \quad (11-58)$$

En vista de las ecuaciones (10-132) y (10-139) que relacionan Ω e i con las variables acción-ángulo, el valor de $\overline{\Omega}$ para la perturbación de primer orden se halla de

$$\overline{\Omega} = 2\pi \overline{\dot{w}_1} = 2\pi \frac{\hat{\partial} \overline{\Delta H}}{\hat{\partial} J_1} = \frac{1}{l} \frac{\hat{\partial} \overline{\Delta H}}{\hat{\partial} \cos i}$$

o sea

$$\overline{\Omega} = -\frac{3\pi m^2 k^2 (I_3 - I_1) \cos i}{M l^4 \tau}.$$

Por último, utilizando la ecuación (11-50) la variación relativa media de Ω por revolución no perturbada es

$$\frac{\overline{\dot{\Omega}} \tau}{2\pi} = -\frac{3}{2} \frac{I_3 - I_1}{M a^2} \frac{\cos i}{(1 - e^2)^2}, \quad (11-59)$$

que constituye la generalización de la ecuación (5-96) apropiada para una órbita elíptica de satélite.

Una vez conocida la hamiltoniana de perturbación media, podemos hallar el efecto de la perturbación sobre otros parámetros medios de la órbita. Así, la precesión secular del periápside en el plano de la órbita viene dada de manera inmediata por

$$\overline{\dot{\omega}} = 2\pi \overline{\dot{w}_2} = 2\pi \frac{\hat{\partial} \overline{\Delta H}}{\hat{\partial} J_2} = \frac{\hat{\partial} \overline{\Delta H}}{\hat{\partial} l}.$$

La variable canónica J_2 figura en la ΔH dada por la ecuación (11-58) en dos formas: en el término P del denominador y en el término que contiene $\cos i = J_1/J_2$. Al derivar encontramos que

$$\overline{\dot{\omega}} \tau = \frac{3}{4} \frac{I_3 - I_1}{M a^2 (1 - e^2)} (5 \cos^2 i - 1). \quad (11-60)$$

El valor máximo de $\overline{\dot{\phi}}$ es, pues, casi igual al de $\overline{\dot{\Omega}}$, pero su dependencia de i es totalmente diferente. A inclinaciones críticas de $63^{\circ}26'$ y $116^{\circ}34'$, la precesión del periápside se anula (al menos en el primer orden) y cambia de signo por encima y por debajo de dichos puntos. Está claro que, en el primer orden, no hay variación secular ni de a ni de e , ya que ΔH no contiene las partes constantes de ninguna de las variables ángulo. Por tanto, la forma y tamaño de la elipse osculatrix, cuando se promedia para el periodo orbital, no varía con el tiempo.

En los dos últimos ejemplos podemos observar que la corrección de la Relatividad generalizada y el campo cuadrupolar gravitatorio originan una precesión del periápside de un cuerpo en órbita. Por esta razón, R. Dicke ha planteado la cuestión de si la precesión que se observa del perihelio de Mercurio no pudiera explicarse por un pequeño achatamiento del potencial gravitatorio del Sol. De los resultados de perturbación que hemos obtenido se desprende una contestación parcial. Recordemos que la ley de Kepler dice que el periodo del movimiento planetario es proporcional a la potencia tres medios del semieje mayor. La velocidad de precesión que predice la Relatividad generalizada para los diferentes planetas deberá variar, en virtud de la ecuación (11-51) de la misma manera que $a^{-5/2}$. Si la precesión se debiera al achatamiento del Sol, la ecuación (11-60) prevería una dependencia del tipo $a^{-7/2}$. Los datos correspondientes a planetas distintos de Mercurio son un tanto burdos, pero se aproximan a la predicción de la Relatividad generalizada. Tal vez sea un factor más importante la precesión del nodo ascendente de la órbita de Mercurio. Si el campo gravitatorio solar fuese suficientemente achatado para explicar la precesión observada del perihelio, según la ecuación (11-51) habría una precesión importante acompañando al nodo ascendente. En contraste con esto, la perturbación de la Relatividad generalizada es totalmente central; el vector momento cinético y por tanto la normal al plano de la órbita, no se ve afectado en absoluto. Las observaciones no sugieren ninguna precesión importante del nodo que no esté explicada por otras perturbaciones conocidas. Aun cuando los errores de observación son considerables, son mucho menores que las predicciones del efecto del achatamiento. Parece, pues, que la componente cuadrupolar del campo gravitatorio solar no puede explicar más que una pequeña fracción de la anomalía observada en la precesión del perihelio.

11-4 TEORÍA DE LA PERTURBACIÓN INDEPENDIENTE DEL TIEMPO EN PRIMER ORDEN CON UN GRADO DE LIBERTAD

La perturbación independiente del tiempo no se ocupa de la dependencia temporal de las en un principio constantes del sistema no perturbado; en vez de ello busca las cantidades que son constantes en el sistema perturbado. Solamente puede aplicarse a sistemas conservativos que sean separables y periódicos en el estado no perturbado y sigan siéndolo en el caso perturbado. Estas limitaciones dan aún entrada a gran número de problemas interesantes. Después de todo, a escala celeste, los movimientos planetarios siguen siendo periódicos en las tres coordenadas incluso considerando plenamente todas las perturbaciones conservativas del movimiento de Kepler. Y en un modelo clásico del átomo, un campo magnético perturbador, como el que origina el efecto Zeeman, no altera cualitativamente la naturaleza periódica del movimiento del electrón. En Mecánica celeste, a la teoría de la perturbación independiente del tiempo suele llamársele método de

von Zeipel:* vamos a dar la versión que de éste dio Born para atender las necesidades de la teoría cuántica antigua.

Por esta razón de sencillez, describiremos primeramente el formalismo para el caso de sistemas de un solo grado de libertad y además en primer orden de perturbación. En el apartado siguiente suprimiremos estas restricciones. Consideremos un sistema periódico sin perturbar descrito por variables acción-ángulo w_0, J_0 y una hamiltoniana $H_0(J_0)$. La frecuencia no perturbada viene dada por

$$v_0 = \frac{\partial H_0}{\partial J_0}, \quad \text{siendo } \omega_0 = v_0 t + \beta_0. \quad (11-61)$$

De la propiedad de que el sistema es periódico en w_0 con periodo 1 se deduce que se puede desarrollar q en serie de Fourier de la forma†

$$q = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k(J_0) e^{2\pi i k w_0} \quad (11-62)$$

(comparar con la ec. 10-91), habiendo una expresión análoga para p . Supongamos ahora que se añade una perturbación tal que la hamiltoniana presente el aspecto

$$H = H_0 + \epsilon H_1, \quad (11-63)$$

donde ϵ es un parámetro pequeño que podemos hacer variar con continuidad a partir de 0. Como el sistema perturbado sigue siendo periódico, deberá haber un nuevo sistema de variables acción-ángulo (w, J) apropiado para el sistema, siendo $H = H(J)$. La nueva J es constante y w es función lineal del tiempo:

$$w = vt + \beta, \quad (11-64)$$

debiéndose obtener la nueva frecuencia v a partir de $H(J)$. A pesar de todo, (w_0, J_0) siguen siendo variables canónicas para el sistema perturbado, ya que están relacionadas con el sistema original (q, p) mediante una transformación canónica. Hemos insistido repetidas veces que la propiedad de ser canónica una transformación y por tanto el sistema de variables, es independiente de la forma concreta de la hamiltoniana. Pero ahora J_0 no es

* También llamado método de Poincaré. El uso de von Zeipel como epónimo se reserva a veces para un procedimiento que trata los términos de perturbación de periodos cortos separadamente de los de periodos largos (comparar con lo tratado acerca de la degeneración en p. 637). Pero esto no lo hace todo el mundo. Véase la bibliografía al final del capítulo y también R. A. Howland Jr., *Celestial Mechanics* 15, 327 (1977), especialmente § 1.

† Será conveniente *no* utilizar el convenio de suma.

una constante y w_0 no es función lineal del tiempo. No obstante, q sigue siendo función periódica de w_0 ya que la ecuación (11-62) no es sino la ecuación canónica de transformación para q en función de w_0 y J_0 . Nos encontramos, pues, ante la situación de que w y w_0 avanzan *ambas* una unidad cuando q efectúa un periodo completo del movimiento.

Los dos sistemas de variables canónicas (w_0, J_0) y (w, J) deberán, por tanto, estar relacionadas por una transformación canónica cuyo generador $Y(w_0, J)$ puede hallarse a partir de la ecuación de Hamilton-Jacobi para la función característica de Hamilton. Como la hamiltoniana de perturbación es pequeña, la función generatriz sólo se apartará una pequeña cantidad de la función identidad. Para un primer orden en ϵ podremos, pues, escribir

$$Y(w_0, J) = w_0 J + \epsilon Y_1(w_0, J). \quad (11-65)$$

Lo que queremos hacer es hallar cómo depende H funcionalmente de J con lo que se podrá encontrar la frecuencia perturbada ν . Desde luego, H también es función del parámetro ϵ . Si por ser H función de J y ϵ la representamos por $\alpha(J, \epsilon)$, para un primer orden será

$$\alpha(J, \epsilon) = \alpha_0(J) + \epsilon \alpha_1(J). \quad (11-66)$$

Luego la ecuación de Hamilton-Jacobi para

$$H(w_0, J_0) = H\left(w_0, \frac{\partial Y}{\partial w_0}\right) = \alpha$$

podrá escribirse, para el primer orden en ϵ , en la forma

$$H_0\left(\frac{\partial Y}{\partial w_0}\right) + \epsilon H_1\left(w_0, \frac{\partial Y}{\partial w_0}\right) = \alpha_0(J) + \epsilon \alpha_1(J). \quad (11-67)$$

Aquí, H_0 y H_1 siguen siendo funciones de ϵ a través de Y . Está claro que para obtener un segundo miembro de la ecuación (11-67) que sea coherente con el primer orden de ϵ solamente, deberemos sustituir la Y de H_1 por su aproximación de orden cero, la cual es $w_0 J$. Además, la J_0 de H_0 se puede expresar en función de J mediante la ecuación de transformación

$$J_0 = \frac{\partial Y}{\partial w_0} = J + \epsilon \frac{\partial Y_1}{\partial w_0}.$$

Para expresar H_0 en función de J para el primer orden de ϵ , desarrollamos $H_0(J_0)$ en serie

de Taylor en torno al punto $J_0 = J$ y nos quedamos solamente con el primer término en ϵ . Las derivadas del desarrollo de Taylor son, hablando con propiedad, derivadas respecto a J_0 calculadas en $J_0 = J$, si bien podemos escribirlas, sin pérdida de rigor, en la forma de derivadas respecto a J , una vez sustituida J_0 por J en $H_0(J_0)$. Por tanto, el término H_0 de la ecuación (11-67) podrá escribirse así:

$$H_0\left(J + \epsilon \frac{\hat{c}Y_1}{\hat{c}w_0}\right) = H_0(J) + \epsilon \frac{\hat{c}Y_1}{\hat{c}w_0} \frac{\hat{c}H_0(J)}{\hat{c}J}. \quad (11-68)$$

En vista de la ecuación (11-61), la ecuación de Hamilton-Jacobi se convierte ahora en

$$H_0(J) + \epsilon \left[H_1(w_0, J) + v_0 \frac{\hat{c}Y_1}{\hat{c}w_0} \right] = \alpha_0(J) + \epsilon \alpha_1(J). \quad (11-69)$$

Igualando los términos de igual orden de ϵ tenemos

$$\alpha_0(J) = H_0(J), \quad (11-70)$$

tal como era de esperar a partir de situaciones límite cuando $\epsilon \rightarrow 0$ y

$$\alpha_1(J) = H_1(w_0, J) + v_0 \frac{\hat{c}Y_1}{\hat{c}w_0}. \quad (11-71)$$

La ecuación (11-71) parece un tanto rara a primera vista, ya que el primer miembro es función sólo de J mientras que el segundo es nominalmente función de J y de w_0 . Sólo podemos sacar la conclusión de que se destruyen los términos del segundo miembro dependientes de w_0 , quedando sólo los términos constantes independientes de w_0 . Pero es fácil ver que la derivada de Y_1 no tiene ningún término constante. La ecuación de transformación que determina a w es

$$w = \frac{\hat{c}Y}{\hat{c}J} = w_0 + \epsilon \frac{\hat{c}Y_1}{\hat{c}J}. \quad (11-72)$$

Por tanto, para que tanto w como w_0 avancen en 1 cuando el sistema efectúe un periodo deberemos exigir que Y_1 sea función periódica de w_0 :

$$Y_1(w_0, J) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} Y_k(J) e^{2\pi i k w_0}. \quad (11-73)$$

Verdaderamente, es la condición de que Y_1 tenga la forma de la ecuación (11-73) la que garantiza que sean variables acción-ángulo (w, J) . Luego, de la ecuación (11-73) se deduce que el término de la derivada de Y_1 respecto a w_0 para $k = 0$, es decir, el término constante, es idénticamente nulo. Así pues, la ecuación (11-71) puede escribirse en la forma

$$\alpha_1(J) = \overline{H_1(w_0, J)} - \left[(\bar{H}_1 - H_1) - v_0 \frac{\partial Y_1}{\partial w_0} \right], \quad (11-74)$$

donde la raya encima indica valor medio para un periodo completo de w_0 . La cantidad entre corchetes debe anularse si α_1 ha de ser función de J solamente, con lo que tendremos dos condiciones:

$$\alpha_1(J) = \overline{H_1(w_0, J)}, \quad (11-75)$$

y

$$\frac{\partial Y_1}{\partial w_0} = \frac{\bar{H}_1 - H_1}{v_0}. \quad (11-76)$$

La primera de estas ecuaciones nos dice cómo completar la dependencia funcional de H respecto a J (hasta el primer orden). La hamiltoniana de perturbación la expresamos en función del movimiento sin perturbar a través de (w_0, J_0) y la promediamos para un periodo completo de movimiento. La restante dependencia de J_0 es la misma (hasta este orden) que la dependencia de J correspondiente a α_1 . En función de α , la nueva frecuencia viene dada por

$$v = \frac{\partial \alpha(J)}{\partial J} = v_0 + \epsilon \frac{\partial \alpha_1}{\partial J}. \quad (11-77)$$

La ecuación (11-76) es ahora una ecuación diferencial que nos da $Y_1(w_0, J)$ en función del comportamiento de H_1 . Una vez hallada Y_1 , se determinan hasta el primer orden las relaciones entre (w_0, J_0) y (w, J) y luego, mediante las ecuaciones (11-62) y (11-64), se hallan las soluciones de (q, p) en función del tiempo. Sin embargo, notemos que si sólo queremos conocer la nueva frecuencia no hay necesidad, en absoluto, de hallar Y_1 ; para este orden es suficiente la ecuación (11-75).

Este formalismo clásico presenta un aspecto que es familiar para los conocedores de la teoría de perturbación independiente del tiempo en Mecánica cuántica. En ella, en primer orden, el cambio del valor propio de la energía (Hamiltoniana) viene dado por el elemento matricial de la hamiltoniana de perturbación (promedio para el movimiento no perturbado). El conocimiento de las funciones de onda no perturbadas no es necesario para obtener el cambio de energía, al igual que ahora no hemos necesitado conocer Y_1 .

Vamos a ilustrar el procedimiento con un ejemplo breve. Consideremos el problema, tratado en § 11-3, del péndulo plano con amplitud de oscilación finita. Según la ecuación (11-33), la hamiltoniana de perturbación puede escribirse en función de J_0 y w_0 en la forma

$$\epsilon H_1 = -\frac{J_0^2}{24\pi^2 ml^2} \text{sen}^4 2\pi w_0 \quad (11-78)$$

(donde l , recordémoslo, aquí sólo es la longitud del péndulo). Convendrá tomar para el parámetro ϵ la pequeña cantidad θ_1^2 (ec. 11-28), que es el cuadrado de la amplitud de oscilación en el caso no perturbado. Como el valor medio de sen^4 para un periodo es $3/8$, la forma funcional de α_1 será

$$\alpha_1(J) = \bar{H}_1 = \frac{-J^2}{64\pi^2 ml^2 \theta_1^2},$$

y

$$\frac{v - v_0}{\epsilon} = \frac{\partial \alpha_1}{\partial J} = -\frac{J}{32\pi^2 ml^2 \theta_1^2}. \quad (11-79)$$

Para calcular $v - v_0$ hasta un primer orden de ϵ , podemos sustituir J por J_0 . Además, de las ecuaciones (10-76) y (11-28) se deduce que

$$J_0 = \frac{2\pi E}{\omega_0} = \frac{\pi mgl\theta_1^2}{\omega_0} = 2\pi^2 ml^2 \theta_1^2 v_0. \quad (11-80)$$

Luego la ecuación (11-79) se reduce simplemente a

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial J} = -\frac{v_0}{16},$$

y la variación relativa de v es

$$\frac{\Delta v}{v_0} \equiv \frac{v - v_0}{v_0} = -\frac{\theta_1^2}{16},$$

resultado concordante con la ecuación (11-39).

Hay ejemplos en los cuales se anula H_1 y la perturbación de primer orden no da un resultado útil. Así, en el llamado oscilador anarmónico, el término de primer orden de la hamiltoniana de perturbación es de la forma ϵq^3 . Pero como $\text{sen}^3 2\pi w_0$ tiene un valor

medio nulo, la frecuencia no presenta ningún cambio en el primer orden y hay que buscar aproximaciones superiores. En el apartado siguiente trataremos el tema de las perturbaciones de segundo orden y de órdenes superiores, así como la generalización a sistemas de muchos grados de libertad.

11-5 TEORÍA DE LA PERTURBACIÓN INDEPENDIENTE DEL TIEMPO PARA UN ORDEN SUPERIOR AL PRIMERO

Sigamos de nuevo los razonamientos del apartado anterior en el caso de sistemas separables periódicos conservativos de un número cualquiera de grados de libertad y para un orden superior del parámetro de perturbación ϵ . Para el problema no perturbado suponemos un sistema de variables acción-ángulo (w_{0i}, J_{0i}) tal que la hamiltoniana no perturbada H_0 sea sólo función de las variables de acción y correspondientemente, las w_{0i} sean entonces funciones lineales del tiempo. Con la notación de la ecuación (10-91') la relación entre, digamos, q_k y las w_{0i} puede escribirse de manera compacta en la forma

$$q_k = \sum_{\mathbf{j}} A_{\mathbf{j}}^{(k)}(\mathbf{J}_0) e^{2\pi i \mathbf{j} \cdot \mathbf{w}_0}, \quad (11-81)$$

donde \mathbf{j} , \mathbf{w}_0 y \mathbf{J}_0 son vectores n -dimensionales de los índices enteros, variables ángulo y variables acción, respectivamente.

En el sistema perturbado $(\mathbf{w}_0, \mathbf{J}_0)$ sigue siendo un sistema canónico de variables válido. Cuando se expresa la hamiltoniana en función del sistema $(\mathbf{w}_0, \mathbf{J}_0)$ la podremos desarrollar en serie de potencias de un pequeño parámetro de perturbación ϵ :

$$H(\mathbf{w}_0, \mathbf{J}_0, \epsilon) = H_0(\mathbf{J}_0) + \epsilon H_1(\mathbf{w}_0, \mathbf{J}_0) + \epsilon^2 H_2(\mathbf{w}_0, \mathbf{J}_0) + \dots \quad (11-82)$$

Estamos buscando una transformación canónica que lleve del sistema $(\mathbf{w}_0, \mathbf{J}_0)$ a un nuevo sistema (\mathbf{w}, \mathbf{J}) tal que las \mathbf{J} sean todas constantes y las \mathbf{w} , en consecuencia, funciones lineales del tiempo. En este sistema H sólo será función de \mathbf{J} (y de ϵ) y en su forma funcional respecto a \mathbf{J} se escribirá de la manera siguiente

$$\alpha(\mathbf{J}, \epsilon) = \alpha_0(\mathbf{J}) + \epsilon \alpha_1(\mathbf{J}) + \epsilon^2 \alpha_2(\mathbf{J}) + \dots \quad (11-83)$$

Para obtener las frecuencias perturbadas hasta un orden de ϵ dado, basta hallar las funciones apropiadas $\alpha_0, \alpha_1, \dots$ ya que entonces el vector representativo de las frecuencias será

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \epsilon \frac{\partial \alpha_1}{\partial \mathbf{J}} + \epsilon^2 \frac{\partial \alpha_2}{\partial \mathbf{J}} + \dots \quad (11-84)$$

El generador de la transformación canónica que lleva de $(\mathbf{w}_0, \mathbf{J}_0)$ a (\mathbf{w}, \mathbf{J}) es $Y(\mathbf{w}_0, \mathbf{J}, \epsilon)$ y su correspondiente desarrollo en serie de potencias de ϵ es:

$$Y(\mathbf{w}_0, \mathbf{J}, \epsilon) = \mathbf{w}_0 \cdot \mathbf{J} + \epsilon Y_1(\mathbf{w}_0, \mathbf{J}) + \epsilon^2 Y_2(\mathbf{w}_0, \mathbf{J}) + \dots \quad (11-85)$$

Intentamos hallar una Y que sea solución de la ecuación de Hamilton-Jacobi apropiada:

$$H\left(\mathbf{w}_0, \frac{\partial Y}{\partial \mathbf{w}_0}, \epsilon\right) = \alpha(\mathbf{J}, \epsilon). \quad (11-86)$$

Como antes, los términos en α hasta un orden dado en ϵ se hallan desarrollando ambos miembros en serie de potencias de ϵ y agrupando los términos de igual orden en ambos miembros. Vamos a ilustrar el proceso para un cálculo de segundo orden en el cual la ecuación de Hamilton-Jacobi se reduce a

$$\begin{aligned} H_0\left(\frac{\partial Y}{\partial \mathbf{w}_0}\right) + \epsilon H_1\left(\mathbf{w}_0, \frac{\partial Y}{\partial \mathbf{w}_0}\right) + \epsilon^2 H_2\left(\mathbf{w}_0, \frac{\partial Y}{\partial \mathbf{w}_0}\right) \\ = \alpha_0(\mathbf{J}) + \epsilon \alpha_1(\mathbf{J}) + \epsilon^2 \alpha_2(\mathbf{J}). \end{aligned} \quad (11-87)$$

Cada uno de los términos del primer miembro depende de ϵ a través de la derivada de Y :

$$\mathbf{J}_0 = \frac{\partial Y}{\partial \mathbf{w}_0} = \mathbf{J} + \epsilon \frac{\partial Y_1}{\partial \mathbf{w}_0} + \epsilon^2 \frac{\partial Y_2}{\partial \mathbf{w}_0}. \quad (11-88)$$

Desarrollemos de nuevo los términos H_i en serie de Taylor en torno a $\mathbf{J}_0 = \mathbf{J}$, conservando en H_0 los términos de orden ϵ^2 y en H_1 los de orden ϵ , sustituyendo \mathbf{J}_0 directamente por \mathbf{J} en H_2 . Los desarrollos de H_0 y H_1 en notación matricial serán entonces

$$H_0\left(\frac{\partial Y}{\partial \mathbf{w}_0}\right) = H_0(\mathbf{J}) + \left(\epsilon \frac{\partial Y_1}{\partial \mathbf{w}_0} + \epsilon^2 \frac{\partial Y_2}{\partial \mathbf{w}_0}\right) \frac{\partial H_0}{\partial \mathbf{J}} + \frac{1}{2} \left(\epsilon \frac{\partial Y_1}{\partial \mathbf{w}_0}\right) \frac{\partial^2 H_0}{\partial \mathbf{J} \partial \mathbf{J}} \left(\epsilon \frac{\partial Y_1}{\partial \mathbf{w}_0}\right), \quad (11-89)$$

$$H_1\left(\mathbf{w}_0, \frac{\partial Y}{\partial \mathbf{w}_0}\right) = H_1(\mathbf{w}_0, \mathbf{J}) + \epsilon \frac{\partial Y_1}{\partial \mathbf{w}_0} \frac{\partial H_1}{\partial \mathbf{J}}. \quad (11-90)$$

Al agrupar potencias de ϵ en la ecuación (11-87) se llega a las siguientes expresiones para

los tres primeros términos de α :

$$\alpha_0 = H_0(\mathbf{J}), \quad (11-91a)$$

$$\alpha_1 = \mathbf{v}_0 \frac{\partial Y_1}{\partial \mathbf{w}_0} + H_1(\mathbf{w}_0, \mathbf{J}), \quad (11-91b)$$

$$\alpha_2 = \mathbf{v}_0 \frac{\partial Y_2}{\partial \mathbf{w}_0} + \Phi_2(\mathbf{w}_0, \mathbf{J}), \quad (11-91c)$$

donde

$$\Phi_2(\mathbf{w}_0, \mathbf{J}) = H_2(\mathbf{w}_0, \mathbf{J}) + \frac{\partial Y_1}{\partial \mathbf{w}_0} \frac{\partial H_1}{\partial \mathbf{J}} + \frac{1}{2} \frac{\partial Y_1}{\partial \mathbf{w}_0} \frac{\partial^2 H_0}{\partial \mathbf{J} \partial \mathbf{J}} \frac{\partial Y_1}{\partial \mathbf{w}_0}.$$

De nuevo, la ecuación de transformación que relaciona \mathbf{w} con \mathbf{w}_0 viene dada por

$$\mathbf{w} = \frac{\partial Y}{\partial \mathbf{J}} = \mathbf{w}_0 + \epsilon \frac{\partial Y_1}{\partial \mathbf{J}} + \epsilon^2 \frac{\partial Y_2}{\partial \mathbf{J}} + \dots \quad (11-93)$$

Para que el sistema (q, p) sea periódico tanto en \mathbf{w}_0 como en \mathbf{w} con periodo 1, todos los términos Y_k deberán ser funciones periódicas de \mathbf{w}_0 , es decir, deberán ser de la forma

$$Y_k(\mathbf{w}_0, \mathbf{J}) = \sum_{\mathbf{j}} B_{\mathbf{j}}^{(k)}(\mathbf{J}) e^{2\pi i \mathbf{j} \cdot \mathbf{w}_0}. \quad (11-94)$$

Luego todas las derivadas de Y_k respecto a \mathbf{w}_0 carecerán de término constante y los primeros términos de los segundos miembros de las ecuaciones (11-91b, c) no contribuirán a la dependencia respecto a \mathbf{J} . Las ecuaciones (11-91) se podrán, pues, escribir también en la forma

$$\alpha_0(\mathbf{J}) = H_0(\mathbf{J}), \quad (11-95a)$$

$$\alpha_1(\mathbf{J}) = \overline{H_1(\mathbf{w}_0, \mathbf{J})}, \quad (11-95b)$$

$$\alpha_2(\mathbf{J}) = \overline{\Phi_2(\mathbf{w}_0, \mathbf{J})}, \quad (11-95c)$$

donde la raya encima indica valor medio para los periodos de todas las \mathbf{w}_0 . Podemos expresar convenientemente todas las ecuaciones (11-95) mediante un formato común de la forma

$$\alpha_i(\mathbf{J}) = \overline{\Phi_i(\mathbf{w}_0, \mathbf{J})}, \quad (11-95')$$

donde $\Phi_0 = H_0$ y $\Phi_1 = H_1$. Además, las ecuaciones (11-91) tienen contrapartidas periódicas en \mathbf{w}_0 con media nula:

$$\mathbf{v}_0 \frac{\hat{c} Y_i}{\hat{c} \mathbf{w}_0} = \bar{\Phi}_i - \Phi_i. \quad (11-96)$$

Para $i = 0$ y 1 , las ecuaciones (11-91a), (11-95) y (11-96) se reducen a la misma forma hallada en el apartado anterior, con la diferencia de que ahora contienen todas las frecuencias del movimiento no perturbado. Notemos que en la perturbación de segundo orden los términos en Y_1 no se anulan necesariamente en la media. Es cierto que las **propias derivadas de Y_1 tienen media nula, pero están multiplicadas por otras funciones que serán periódicas en \mathbf{w}_0 y no hay seguridad de que se anule el valor medio del producto.** Luego para hallar la corrección de segundo orden de las frecuencias, habrá que conocer la transformación canónica de primer orden. (Análogamente, en Mecánica cuántica un valor propio de segundo orden lleva consigo correcciones de primer orden de la función de onda.) En principio, los coeficientes $B_j^{(1)}$ que definen Y_1 a través de la ecuación (11-94) se pueden hallar directamente a partir de la ecuación (11-96) en la que se haga $i = 1$. La sustracción de la media significa que $H_1 - \bar{H}_1$ se puede desarrollar en serie de Fourier análoga a la ecuación (11-81) o (11-94) pero sin término constante:

$$H_1 - \bar{H}_1 = \sum_{\mathbf{j} \neq 0} C_{\mathbf{j}}(\mathbf{J}) e^{2\pi i \mathbf{j} \cdot \mathbf{w}_0}. \quad (11-97)$$

Al derivar Y_1 en la ecuación (11-96) respecto a una de las \mathbf{w}_0 , por ejemplo w_{0k} , bajará un factor $2\pi i j_k$. Luego, el producto de matrices del primer miembro de la ecuación (11-96) se podrá escribir en la forma

$$\mathbf{v}_0 \frac{\hat{c} Y_1}{\hat{c} \mathbf{w}_0} = \sum_{\mathbf{j} \neq 0} B_{\mathbf{j}}^{(1)}(\mathbf{J}) 2\pi i (\mathbf{j} \cdot \mathbf{v}_0) e^{2\pi i \mathbf{j} \cdot \mathbf{w}_0}. \quad (11-98)$$

Según las ecuaciones (11-96) y (11-97), los coeficientes de la serie de Y_1 se podrán obtener en la forma

$$B_{\mathbf{j}}^{(1)}(\mathbf{J}) = \frac{C_{\mathbf{j}}(\mathbf{J})}{2\pi i (\mathbf{j} \cdot \mathbf{v}_0)}, \quad \mathbf{j} \neq 0. \quad (11-99)$$

Verdad es que de esta manera no se determinan los términos constantes de Y_1 , pero en las expresiones de las α_i sólo intervienen las derivadas de Y_1 y aquéllas no contendrán términos constantes.

Aun cuando hemos desarrollado en detalle el procedimiento para la perturbación de segundo orden solamente, es fácil ver que la forma general de los cálculos de orden

superior debe ser análoga; tan sólo serán más complicados los detalles de las transformaciones algebraicas. Para la perturbación de orden i -ésimo podremos de nuevo escribir α_i en la forma

$$\alpha_i(\mathbf{J}) = \mathbf{v}_0 \frac{\partial Y_i}{\partial \mathbf{w}_0} + \Phi_i(\mathbf{w}_0, \mathbf{J}). \quad (11-91d)$$

El primer término del segundo miembro proviene del término de primera derivada del desarrollo de Taylor de $H(\mathbf{J}_0)$ en torno a $\mathbf{J}_0 = \mathbf{J}$, donde todos los términos de la diferencia $\mathbf{J}_0 - \mathbf{J}$ se conservan hasta el orden ϵ^i . Y_i sólo aparecerá en este término; por tanto, Φ_i sólo podrá contener los generadores Y_k para órdenes inferiores a i . En virtud de los razonamientos ya utilizados para perturbaciones de primero y segundo orden, el primer término del segundo miembro de la ecuación (11-91d) tiene media nula cuando se promedia para ciclos completos de \mathbf{w}_0 y por tanto, las ecuaciones (11-95) y (11-96) serán válidas en todos los órdenes. Desde luego, para $i > 2$, Φ_i se hace cada vez más complicado que la ecuación (11-92) pero siempre contendrá solamente las funciones ya encontradas en los cálculos para órdenes inferiores. Así pues, paso a paso, podríamos en principio llegar a perturbaciones de cualquier orden.

Desde luego, en tales series de cálculos existen problemas de indole práctica, pero la dificultad conceptual más seria y evidente aparece cuando el sistema no perturbado es degenerado, es decir, cuando el sistema de frecuencias \mathbf{v}_0 presenta conmensurabilidades. Según vemos en la ecuación (10-101), la existencia de degeneración significa que habrá al menos un vector \mathbf{j} de índices tal que $\mathbf{j} \cdot \mathbf{v}_0 = 0$. El coeficiente $B_j^{(i)}$ correspondiente de la serie de Fourier para Y_i estallará, pues, según la ecuación (11-99). Algo parecido sucede incluso cuando el sistema sin perturbar *no* sea degenerado. Incluso si las frecuencias no son exactamente conmensurables, al pasar a valores cada vez más elevados de los índices enteros de \mathbf{j} se llegará a encontrar un vector \mathbf{j} para el cual $\mathbf{j} \cdot \mathbf{v}_0$ sea muy pequeño si no nulo y los coeficientes B correspondientes se harán muy grandes (el llamado problema de los «divisores pequeños»).* Esta burda observación cualitativa constituye la base de la elegante demostración que dio Poincaré a finales de siglo de que la serie de Fourier de Y_1 y por tanto el movimiento, sólo son semiconvergentes. A pesar de todo, podemos truncar la serie para valores razonables de los índices y seguirá dando resultados muy precisos, al menos para tiempos no demasiado largos.

Más adelante estudiaremos qué puede hacerse en presencia de degeneración, pero por ahora puede convenir que ilustremos un cálculo de segundo orden con un ejemplo concreto de un sistema con un grado de libertad.

Consideremos un *oscilador anarmónico* unidimensional, es decir, uno que tenga un

* Recordemos que encontramos fenómenos semejantes en Mecánica cuántica, en donde degeneración significa existencia de varios estados de igual energía E . Los denominadores de la forma $E_i - E_j$ se anulan entonces, o se hacen muy pequeños aun cuando no haya degeneración exacta.

término en q^3 en la energía potencial. La hamiltoniana se podrá escribir en la forma

$$H = \frac{1}{2m} [p^2 + m^2 \omega_0^2 q^2 \left(1 + \epsilon \frac{q}{q_0} \right)], \quad (11-100)$$

donde ω_0 es la pulsación no perturbada:

$$\omega_0 = 2\pi\nu_0 = 2\pi \sqrt{\frac{k}{m}}$$

q_0 es una amplitud de referencia que puede dejarse sin concretar de momento y ϵ es un parámetro adimensional pequeño. Desarrollando H en serie de potencias de ϵ , constará de los términos

$$H_0 = \frac{1}{2m} [p^2 + m^2 \omega_0^2 q^2], \quad (11-101a)$$

$$H_1 = \frac{m\omega_0^2 q^3}{2q_0}, \quad (11-101b)$$

y

$$H_i = 0, \quad i \geq 2. \quad (11-101c)$$

Utilizando como variables canónicas las variables acción-ángulo sin perturbar (J_0, w_0), las partes no nulas de H se podrán escribir, en virtud de las ecuaciones (10-78) y (10-79), en la forma

$$H_0 = J_0 \nu_0 \quad (11-102a)$$

y

$$H_1 = \frac{m\omega_0^2}{2q_0} \left(\frac{J_0}{\pi m \omega_0} \right)^{3/2} \text{sen}^3 2\pi w_0. \quad (11-102b)$$

Las ecuaciones (11-95a, b) dan entonces para los dos términos inferiores de $\alpha(J)$

$$\alpha_0(J) = J \nu_0; \quad \alpha_1(J) = 0.$$

Para obtener el término de segundo orden $\alpha_2(J)$, tendremos en cuenta que como H_0 es lineal en J y H_2 se anula, Φ_2 se reducirá a

$$\Phi_2 = \frac{\partial Y_1}{\partial w_0} \frac{\partial H_1}{\partial J}$$

Pero la anulación de $\overline{H_1}$ significa que la ecuación (11-96) tiene, para $i = 1$, la forma sencilla

$$\frac{\partial Y_1}{\partial w_0} = -\frac{H_1}{v_0}.$$

Combinando estos dos resultados llegamos a

$$\Phi_2 = -\frac{1}{2v_0} \frac{\partial H_1^2}{\partial J}. \quad (11-103)$$

Ahora bien, según la ecuación (11-102b),

$$H_1^2(w_0, J) = \frac{v_0 J^3}{2\pi^2 m q_0^2} \text{sen}^6 2\pi w_0,$$

que lleva a

$$\Phi_2(w_0, J) = -\frac{3J^2}{4\pi^2 m q_0^2} \text{sen}^6 2\pi w_0. \quad (11-104)$$

Como el valor medio de sen^6 para un periodo es 15/48, $\alpha_2(J)$ es simplemente

$$\alpha_2(J) = -\frac{15J^2}{64\pi^2 m q_0^2}, \quad (11-105)$$

y hasta el segundo orden de ϵ , la frecuencia perturbada será

$$v = \frac{\partial \alpha}{\partial J} = v_0 - \epsilon^2 \frac{15J}{32\pi^2 m q_0^2}. \quad (11-106)$$

Conviene tomar para q_0 la amplitud máxima que tendría el oscilador para la energía dada en su forma sin perturbar, con lo cual

$$\frac{m\omega_0^2 q_0^2}{2} = E,$$

o sea, para el orden más bajo,

$$m d_0^2 = \frac{J}{\pi \omega_0}. \quad (11-107)$$

En función de esta amplitud de referencia, la ecuación (11-106) equivale a decir que la variación relativa de segundo orden de la frecuencia es, simplemente,

$$\frac{\Delta \nu}{\nu_0} = -\frac{15}{16} \epsilon^2. \quad (11-108)$$

En los ejercicios se dan otros ejemplos de la teoría de perturbación en segundo orden o para sistemas de múltiples grados de libertad.

Ya hemos hecho mención de las dificultades que aparecen en la teoría de perturbación a causa de la existencia de degeneraciones, p. ej., la anulación (o casi anulación) de $\mathbf{j} \cdot \mathbf{v}_0$ en los denominadores de la ecuación (11-99). El tratamiento de las degeneraciones en la teoría de perturbación clásica es mucho más complicado que en la Mecánica cuántica. En ciertos aspectos, especialmente en lo referente al tratamiento de casi-degeneraciones, sigue siendo tema de investigación. La matemática puesta a contribución en el problema es sutil y complicada y la exposición completa de los desarrollos corrientes queda fuera de lugar en este libro. En relación con esto sólo podemos hacer algunas indicaciones introductorias breves.

Hablamos de degeneración exacta (o propia), como anteriormente en § 10-6, cuando las frecuencias sin perturbar ν_0 son tales que existan uno o más conjuntos \mathbf{j} de enteros para los cuales $\mathbf{j} \cdot \mathbf{v}_0 = 0$. Tal como señalábamos en § 10-6, podemos entonces pasar a un nuevo sistema de variables (w_0, J_0) para el cual las degeneraciones aparezcan en forma de frecuencias nulas y las restantes frecuencias sin perturbar no nulas no sean degeneradas. El efecto de la perturbación es quitar la degeneración de manera que las frecuencias correspondientes no sean exactamente nulas sino que tengan valores pequeños, es decir, periodos grandes. Las variables ángulo correspondientes se denominan variables «lentas», en contraste con las variables ángulo con frecuencias no degeneradas que, en consecuencia, se llamarán variables «rápidas». Los términos de periodo largo pueden aparecer en forma de términos seculares sobre intervalos de tiempo restringidos; p. ej., $\text{sen } 2\pi \nu t$ puede considerarse función lineal de t mientras $\nu t \ll 1$.

Cuando haya degeneración exacta, pasaremos primero al sistema (w_0, J_0) . La hamiltoniana no perturbada será función solamente de las variables J_0 no degeneradas; en los demás aspectos, la ecuación (11-82) seguirá representando a la hamiltoniana completa. Realizamos ahora la transformación canónica del cálculo de la perturbación, pero sólo para las variables sin perturbar, dejando inalteradas las variables degeneradas. Lo que es en realidad la nueva hamiltoniana (ec. 11-83) tiene ahora la forma

$$\alpha(\mathbf{J}, \mathbf{J}'_0, \mathbf{w}'_0, \epsilon) = \alpha_0(\mathbf{J}) + \epsilon \alpha_1(\mathbf{J}, \mathbf{J}'_0, \mathbf{w}'_0) + \epsilon^2 \alpha_2(\mathbf{J}, \mathbf{J}'_0, \mathbf{w}'_0) + \dots$$

Aquí, w_0 representa las m variables (degeneradas) que en el problema sin perturbar tienen valor cero y J_0 representa sus cantidades de movimiento conjugadas. Las cantidades de movimiento no degeneradas transformadas están representadas por J . El resultado de la transformación canónica es, pues, eliminar las variables «rápidas», pero que quede todo en función de las variables «lentas». Notemos que como α es cíclica en w , las cantidades de movimiento J transformadas son verdaderas constantes del movimiento y podremos considerar que $\alpha(J, J_0, w_0, \epsilon)$ es una hamiltoniana de un sistema con m grados de libertad. Además, como $\alpha_0(J)$ es una constante, independiente de las demás variables, no nos hacen falta las ecuaciones de movimiento de (J_0, w_0) y las podremos suprimir en α . Así, la nueva Hamiltoniana efectiva es ahora de orden ϵ ; de hecho, la «hamiltoniana no perturbada» es $\epsilon\alpha_1(J, J_0, w_0)$ y en este problema no perturbado w_0 ya no consiste en valores nulos. Si sólo hay una condición de degeneración, el problema efectivo es de un solo grado de libertad y en principio, será inmediatamente integrable. Si hay más condiciones de degeneración, podemos buscar una segunda transformación canónica para eliminar los términos de variables «lentas» de igual manera que se hizo con las variables «rápidas». En la práctica, el procedimiento se complica bastante.

Ya hemos indicado, en relación con la ecuación (11-99), que, incluso en el caso de frecuencias no degeneradas, cuando los índices j se hagan más y más grandes aparecerán inevitablemente valores pequeños del divisor $j \cdot v_0$. A este fenómeno se le da el nombre de *resonancia*, e implica que la amplitud de un cierto término particular de los desarrollos de Fourier se haga muy grande. Podría parecer, pues, que los problemas de degeneración tengan que afectarnos siempre, independientemente de cuáles sean las frecuencias no perturbadas. La situación no es tan mala, en parte a causa de la naturaleza de las hamiltonianas de perturbación que encontramos en la práctica. En la ecuación (11-99) podemos observar que lo que cuenta no es tanto el valor de $j \cdot v_0$ como el del cociente

$$\frac{C_j}{j \cdot v_0},$$

donde C_j es el desarrollo en serie de Fourier de la hamiltoniana de perturbación H_1 (cfr. ec. 11-97). Resulta que, al menos en Mecánica celeste, la mayoría de hamiltonianas de perturbación tienen la llamada *característica de D'Alembert*. Aun cuando entraña la definición matemática formal de la propiedad,* lo que dice, en líneas generales, es que cuando los valores de los enteros de los índices j son mayores que el exponente ϵ en la hamiltoniana, las magnitudes de C_j caen rápidamente, generalmente en forma exponencial, al aumentar los valores de los índices. Los cocientes de la ecuación (11-99) no se hacen entonces demasiado grandes y el proceso del desarrollo puede demostrarse que converge cuando las frecuencias v_0 satisfacen una condición de irracionalidad.

El comportamiento resonante en presencia de la característica de D'Alembert o, en general, cuando $C_j/(j \cdot v_0) < O(\epsilon^{1/2})$, se describe con el nombre de *resonancia superficial*. Al menos en principio, las resonancias superficiales no trastornan el proceso de desarrollo

*Véase G. E. O. Giacaglia, *Perturbation Methods in Non-Linear Systems* (New York: Springer-Verlag, 1972), pp. 279-280.

de la perturbación y se pueden tolerar sin introducir nuevos métodos. Existen casos en los que el cociente $C_j/(\dot{j} \cdot v_0)$ se hace grande, al menos mayor que el orden $\varepsilon^{1/2}$ y en tal caso se habla de *resonancias profundas*. Para tratar éstas hay que idear métodos especiales, particularmente el llamado desarrollo de Bohlin en potencias de $\varepsilon^{1/2}$ en vez de en potencias de ε . Seguir adelante en esto sería penetrar en el campo extenso y de rápido desarrollo que constituyen los fenómenos de resonancia en oscilaciones alineales, cuyo tratamiento adecuado exige una monografía aparte.

11-6 TÉCNICAS DE PERTURBACIÓN ESPECIALIZADAS PARA MECÁNICA CELESTE Y MECÁNICA ESPACIAL

Ya hemos mencionado que la teoría de la perturbación y la Mecánica celeste han evolucionado juntas desde los tiempos de Newton. Se han desarrollado muchos métodos especializados para cubrir las necesidades de la Mecánica celeste. El nacimiento y el rápido crecimiento de la exploración espacial y del moderno ordenador digital (son casi simultáneos) ha vuelto a la vida un tema que se hallaba casi en hibernación al crear nuevos métodos y maneras de contemplar la teoría de la perturbación. No pretendemos estudiar esta larga historia, reciente y antigua, en detalle. Lo que pretendemos es describir tendencias e introducir al lector a la terminología a menudo peculiar que se utiliza en la literatura.

Frecuentemente se distingue entre teorías de perturbación *generales*, que llevan a fórmulas analíticas, y métodos de perturbación *especiales*, que comportan soluciones numéricas de las ecuaciones correspondientes al sistema perturbado. (También existen **métodos mixtos**, por lo que la distinción sólo es aproximada.) Los esquemas de perturbación tratados anteriormente son todos ejemplos de teorías de perturbación **generales**. Todos los intentos primitivos a métodos de perturbación en Mecánica celeste pueden clasificarse como «generales». La primera técnica fue la de la «variación de constantes» que se desarrolló, a la pata coja y con puntos de partida falsos, en el siglo XVIII. Finalmente, Lagrange consiguió dar al método una base firme en 1782 (desde luego, no en la versión canónica que hemos descrito **anteriormente**).

La construcción de métodos de perturbación en Mecánica celeste se vio muy influida por la naturaleza especial de los problemas que había que tratar. Hasta hace poco, todas las fuerzas que se consideraba eran gravitatorias, la mayor parte de las veces entre puntos materiales. El problema lunar, es decir, el movimiento de la Luna alrededor de la Tierra, parecía siempre grande porque las perturbaciones solares son considerablemente mayores que casi toda otra situación astronómica. A lo largo de los siglos, a partir de Newton, se repitieron los ataques al «problema principal» de la teoría lunar. En él, la Tierra y la Luna se tratan como puntos materiales cuyo centro de masa se mueve en torno al Sol siguiendo una elipse de Kepler fija. Incluso con este modelo simplificado, podemos vislumbrar una cierta idea acerca de la complejidad de la situación al considerar la forma de la hamiltoniana de perturbación. Todo lo que entra en ΔH son las componentes de las distancias entre los tres cuerpos. Ahora bien, estas distancias son funciones complicadas de los radios vectores y de los ángulos que forman entre sí, especialmente cuando el movimiento no está confinado en un plano. Usualmente, los términos de ΔH se expresan

en forma de series de Fourier de los ángulos que intervienen. A su vez, las expresiones de los **ángulos son series complicadas en función de las diversas anomalías keplerianas** y finalmente del tiempo. A consecuencia de ello, la hamiltoniana de perturbación deberá representarse mediante series trigonométricas compactadas aun cuando se exprese en función del movimiento no perturbado. Gran parte del esfuerzo matemático empleado en la teoría de perturbación general lo ha sido para hallar el desarrollo propio de ΔH , usualmente en forma de la función perturbadora $R = -\Delta H$.

Otra teoría general de la perturbación desarrollada a principios del siglo XIX se denomina a veces «variación de coordenadas». En su forma más sencilla, las ecuaciones de movimiento de un problema perturbado de dos cuerpos se escriben en coordenadas cartesianas, con una hamiltoniana de perturbación $\Delta H = \epsilon V_1$. Las ecuaciones presentan, entonces, el aspecto

$$\mu \ddot{x}_i = -\frac{kx_i}{r^3} - \epsilon \frac{\partial V_1}{\partial x_i},$$

donde μ es la masa reducida del problema de los dos cuerpos. Se buscan entonces soluciones en forma de desarrollos en **potencias de ϵ** :

$$x_i = x_i^{(0)} + \epsilon x_i^{(1)} + \epsilon^2 x_i^{(2)} + \dots,$$

agrupando potencias de ϵ cuando se sustituye el desarrollo en las ecuaciones de movimiento. **El método tiene la ventaja de dar directamente las coordenadas perturbadas** que se buscan, pero no da una imagen de cómo deforma la perturbación a la órbita y a los parámetros que la describen.

En la década de los 1860 se alcanzó un máximo local en la elaboración de un método general de perturbación con la solución analítica de Delaunay del «problema principal» de la teoría lunar. Su procedimiento podría describirse como una primera versión del método de von Zeipel. De hecho, mediante una transformación canónica aparte sacó cada término periódico de la función perturbadora dependiente de una variable ángulo. Tras 20 años de esfuerzo, Delaunay publicó sus resultados en dos gruesos volúmenes que contenían poco más que fórmulas algebraicas para el movimiento perturbado de **elementos osciladores, como desarrollos en serie de potencias de cantidades pequeñas** tales como las excentricidades de las órbitas terrestre y lunar y el cociente entre las velocidades angulares medias de la Luna y la Tierra. Se conservaban las potencias combinadas de dichas cantidades hasta el orden 7 y en algunos casos hasta el orden 9. La estadística de las manipulaciones algebraicas realizadas nos dejan estupefactos —más de 500 transformaciones canónicas distintas que contienen en total más de 10 000 términos individuales— todas hechas a mano, sin ayuda alguna.

A finales del siglo XIX se idearon métodos más sofisticados, algunos seminuméricos. Entrañan órbitas de referencia más complicadas, las llamadas intermediarias, a partir de las cuales se miden los movimientos perturbados. Incluso una descripción de los modelos subyacentes nos ocuparía demasiado espacio; sólo podemos mencionar los nombres de

algunos de ellos —p. ej., el método de Hansen o el método de Hill.

Los satélites artificiales precisaban de una puesta al día de los métodos de perturbación, cosa que ha sido posible gracias a los ordenadores. Las observaciones con radar y con laser han incrementado en varios órdenes de magnitud la precisión con la que se pueden medir las coordenadas de los cuerpos celestes y ello ha hecho inadecuadas las tablas de la Luna y los planetas inferiores. En la década de los 1960, Hori y Deprit, independientemente, mejoraron y formularon de nuevo el método de von Zeipel, simplificando en gran manera los cálculos, al menos conceptualmente. En el método de von Zeipel, para obtener el movimiento en función del tiempo hay que invertir las ecuaciones de transformación (ec. 11-93) para hallar w_0 en función de w . La inversión suele ser difícil de efectuar analíticamente de manera sistemática. Lo que propuso Deprit fue construir las ecuaciones de transformación para valores finitos de ϵ a partir de los correspondientes a la transformación canónica infinitesimal en el límite de los valores muy pequeños de ϵ . En principio, se utiliza la solución de corchetes de Poisson para la ecuación diferencial que rige la variación de una función ante una transformación canónica infinitesimal (cfr. ecs. 9-114 y 9-115). El método iterativo para la construcción de esta solución y los pasos repetitivos necesarios para desarrollar la serie contenida de la función perturbadora, conducen por sí mismos a manipulaciones algebraicas en un ordenador. De esta manera, Deprit y sus colaboradores repitieron el programa de Delaunay aumentándolo al menos en un orden para las cantidades pequeñas. La comparación de los resultados de ordenador obtenidos en 1970 con las tablas dadas por Delaunay en 1869 hechas a mano han mostrado que a pesar de la enormidad de cálculos que hubo de efectuar, sólo cometió errores en siete coeficientes.

Las técnicas de perturbación especiales no se introdujeron mucho antes de mediados del siglo XIX y difícilmente se podían utilizar antes del advenimiento de las calculadoras manuales de pupitre. La más sencilla (aunque no la más antigua) es la denominada *método de Crowell*; lleva consigo la integración numérica directa de las ecuaciones de movimiento de Newton para los n cuerpos en interacción. Casi siempre se utilizan coordenadas cartesianas, si bien las ecuaciones también pueden expresarse en coordenadas polares. Notemos que no se aprovecha el conocimiento previo del movimiento sin perturbar. En cambio, en el *método de Encke* se expresan las ecuaciones de movimiento en función de la diferencia de las coordenadas respecto a sus valores en el movimiento sin perturbar. Como, al menos en principio, dichas diferencias son pequeñas, pueden utilizarse etapas temporales más largas en la integración numérica. No obstante, al cabo de un tiempo las diferencias se hacen grandes, especialmente si hay efectos de perturbación secular. Al cabo de un intervalo se *rectifica* la órbita de referencia pasando a, digamos, una nueva órbita osculatriz, efectuándose rectificaciones adicionales adecuadas en el transcurso del tiempo. El método de Crowell, por ser más inmediato, se presta mejor que el de Encke al cálculo por ordenador. En los problemas en los que sólo intervengan unos pocos periodos orbitales como, por ejemplo, en el paso de una nave espacial entre los planetas, es el método que se utiliza. En la actualidad, están muy desarrolladas las técnicas de integración numérica y suele ser posible acotar los errores de los resultados, cosa que resulta muy difícil en las teorías de perturbación generales.

Por otra parte, las soluciones numéricas de las ecuaciones de movimiento no pueden resolver las cuestiones referentes a la estabilidad del movimiento a largo plazo. Ya desde principios del siglo XVIII los astrónomos han debatido la cuestión de la estabilidad del

sistema solar. El movimiento planetario acotado debido a la influencia de fuerzas gravitatorias, ¿proseguirá indefinidamente o llevarán las perturbaciones a choques planetarios o bien harán que alguno de los planetas abandone el sistema solar? Probablemente fue esta cuestión la que condujo a un interés casi obsesivo en los términos seculares por parte de los primeros inventores de métodos de perturbación. Se hizo todo lo posible por identificarlos y eliminarlos. Por ejemplo, si pudiera ponerse de manifiesto un término de perturbación secular para el semieje mayor, la conclusión sería que un planeta o abandonaría el sistema solar o caería en el Sol. Al principio se demostró que no existían términos de ese tipo en la perturbación de primer orden y todos respiraron. No obstante, los cálculos de perturbaciones de orden superior volvieron a plantear la cuestión. La demostración por Poincaré de que las series de Fourier multiperiodicas utilizadas en los desarrollos sólo eran semiconvergentes condujo lamentablemente a un veredicto de «no demostrado».

Tan solo en las dos últimas décadas se ha aclarado la cuestión de la estabilidad mediante la aplicación de las nuevas (y muy abstractas) técnicas matemáticas. Se han utilizado los métodos de la Topología diferencial para examinar el comportamiento global de las posibles órbitas en el espacio fásico. Una serie de investigaciones, asociadas a los nombres de C. L. Siegel, A. N. Kolmogorov, V. I. Arnol y J. Moser, ha demostrado que es posible el movimiento acotado estable para un sistema de n cuerpos en interacción por medio de fuerzas gravitatorias solamente. Es decir, una fracción no despreciable del número de órbitas (es decir, un grupo de medida finita) están confinadas a regiones concretas del espacio fásico y permanecen así indefinidamente en movimiento cuasi-periódico.* La brillantez del logro y la potencia de los nuevos métodos tienen probablemente más importancia que el resultado concreto, ya que el destino final del sistema solar estará seguramente determinado por las fuerzas disipativas y otras fuerzas no gravitatorias.

11-7 INVARIANTES ADIABÁTICOS

En la primera Conferencia Solvay, en 1911, donde se abordaban los problemas de introducción de nociones cuánticas en la Física, se planteó un problema de Mecánica clásica decepcionantemente sencillo. Consideremos una lenteja en una cuerda que oscilen en forma de péndulo plano, pasando la cuerda por un orificio pequeño practicado en el techo. Imaginemos que, lentamente, se tira hacia arriba o se baja la cuerda, tan lentamente que durante un periodo de oscilación varíe poco la longitud del péndulo. ¿Qué le sucede a

* Es curioso que para la validez de la mecánica estadística quisiéramos casi el resultado contrario. Para que sea correcta la noción de colectividad como representativa del comportamiento estadístico de un solo sistema, preferiríamos demostrar que un punto representativo del sistema llegara a viajar por todas las regiones del espacio fásico compatibles con sus propiedades macroscópicas iniciales, por ejemplo, la energía. La órbita en el espacio fásico rellenaría ergódicamente toda la parte de éste accesible a ella. Es notable que el análisis topológico de los movimientos posibles acaba por satisfacer a todo el mundo. Tal como hemos dicho, algunas órbitas, un conjunto de medida finita, mantienen indefinidamente un movimiento cuasi-periódico. Pero la inmensa mayoría de condiciones iniciales conduce a movimientos que son ergódicos, errando por todo el espacio fásico disponible y llegando a acercarse tanto como queramos a cualquier punto dado.

la frecuencia de oscilación durante este proceso? Observemos que la energía del péndulo no se conserva ya que al alterar la longitud de la cuerda se realiza trabajo sobre el sistema (o se extrae de él). Por medios elementales se puso de manifiesto que, si era muy lenta la variación de longitud, E/ν sería constante.* Démonos cuenta de que este cociente es, precisamente, la variable de acción J . La *invarianza adiabática* de las variables de acción ante una variación lenta de los parámetros fue una propiedad muy satisfactoria para los físicos que desarrollaban la Mecánica cuántica. Ya hemos indicado (p. 586) que las primeras fórmulas entrañaban la cuantización de las variables de acción para describir **estados específicos de sistemas atómicos**. Como ya se sabía que las variaciones lentas del ambiente atómico, p. ej., de los campos electromagnéticos que lo rodeaban, no inducían transiciones entre estados, la invarianza adiabática de las J resultaba reconfortante.

La motivación original para examinar la invarianza adiabática ya pasó, si bien recientemente ha revivido el interés acerca del tema. Las aplicaciones prácticas se centran en la Física del plasma, la tecnología de la fusión, los aceleradores de partículas cargadas e incluso en la Astronomía galáctica. El desarrollo de dicho campo sigue adelante y aún no se ha dicho la última palabra. Lo único que podemos hacer aquí es presentar algunas consideraciones básicas y describir brevemente las tendencias de investigación actual. Por razón de sencillez sólo vamos a examinar sistemas periódicos de un grado de libertad, si bien no suele ser difícil (p. ej., en ausencia de degeneración) la ampliación a muchos grados de libertad. En líneas generales, el tratamiento es el que dio Burgers en 1917.

Consideremos un sistema de un grado de libertad que contenga un parámetro a . Implícita en el método está una imagen del sistema como inicialmente conservativo con a constante. Entonces, «conectamos» la dependencia de a respecto al tiempo y varía a lentamente durante mucho tiempo y llegará a volver a tener un valor constante. Cuando a sea constante, el movimiento será periódico y la variación lenta del parámetro no alterará la naturaleza periódica del movimiento. Aun cuando las variaciones de éste sean pequeñas en un periodo cualquiera, al cabo de un tiempo suficientemente largo las **propiedades del movimiento pueden experimentar cambios cuantitativos grandes**. La puesta en marcha de la dependencia del tiempo está, pues, en la naturaleza de una perturbación pequeña y lo que buscamos son variaciones seculares del movimiento.

Cuando el parámetro a sea constante, el sistema vendrá descrito por variables acción-ángulo (w_0, J_0) tales que la hamiltoniana será $H = H(J_0, a)$. Será útil considerar que estas variables derivan de un sistema canónico original (q, p) a través de una función generatriz $W^*(q, w_0, a)$. La ecuación de Hamilton-Jacobi usual conduce, desde luego, a una función generatriz de la forma $W(q, J_0, a)$, pero las dos funciones generatrices suelen estar relacionadas por una transformación de Legendre (cfr. ec. 9-24):

$$W^*(q, w_0, a) = W(q, J_0, a) - J_0 w_0. \quad (11-109)$$

* De acuerdo con al menos una acta de la Conferencia Solvay de 1911 (Abhandlungen der Deutschen Bunsen-Gesellschaft, N.º 7, 1914, p. 364) Lorentz indicó en la discusión que había propuesto el problema a Einstein con anterioridad. Einstein replicó que había demostrado que la energía del péndulo permanecería proporcional a ν si se alterara la longitud de manera continua e infinitamente lenta.

Cuando se deja variar a con el tiempo, (w_0, J_0) siguen siendo, desde luego, variables canónicas válidas, pero la función generatriz será ahora función explícita del tiempo a través de la dependencia temporal de a . Luego, la hamiltoniana apropiada para el sistema (w_0, J) será

$$\begin{aligned} K(w_0, J_0, a) &= H(J_0, a) + \frac{\partial W^*}{\partial t} \\ &= H(J_0, a) + \dot{a} \frac{\partial W^*}{\partial a}. \end{aligned} \quad (11-110)$$

Ahora, J_0 ya no es constante y w_0 no variará linealmente con el tiempo. De hecho, el segundo término de la hamiltoniana es una hamiltoniana de perturbación y al igual que en el método de la variación de constantes, la dependencia temporal de J_0 viene regida por la ecuación de movimiento

$$\dot{J}_0 = -\frac{\partial K}{\partial w_0} = -\dot{a} \frac{\partial}{\partial w_0} \left(\frac{\partial W^*}{\partial a} \right), \quad (11-111)$$

donde, desde luego, la derivada entre paréntesis se expresa, al igual que K , en función de J_0 , w_0 y a . En el espíritu de una teoría de perturbación de primer orden, buscamos un término secular, el valor medio de J_0 a lo largo del periodo del movimiento no perturbado *para la a apropiada*. Como a varía lentamente, podemos considerarla constante durante este intervalo de tiempo y podremos escribir el valor medio en la forma

$$\dot{J}_0 = -\frac{1}{\tau} \int \dot{a} \frac{\partial}{\partial w_0} \left(\frac{\partial W^*}{\partial a} \right) dt = -\frac{\dot{a}}{\tau} \int \frac{\partial}{\partial w_0} \left(\frac{\partial W^*}{\partial a} \right) dt + O(\dot{a}^2, \ddot{a}). \quad (11-112)$$

De la ecuación (10-13') debemos recordar que W está dada por la integral indefinida

$$W = \int p dq.$$

Por tanto, en un periodo de w_0 la función generatriz W aumentará en J_0 . Al propio tiempo, $J_0 w_0$ también aumenta en J_0 , ya que w_0 aumenta en la unidad. Por tanto, según la ecuación (11-109), W^* es función periódica de w_0 y tanto ella como su derivada respecto de a podrán expresarse mediante una serie de Fourier:

$$\frac{\partial W^*}{\partial a} = \sum_k A_k(J_0, a) e^{2\pi i k w_0}. \quad (11-113)$$

Por tanto, el valor medio $\overline{J_0}$ tendrá la forma

$$\overline{J_0} = -\frac{\dot{a}}{\tau} \int_{\tau} \sum_{k \neq 0} 2\pi i k A_k(J_0, a) e^{2\pi i k w_0} dt + O(\dot{a}^2, \ddot{a}).$$

Como el integrando no tiene ningún término constante, la integral se anula,

$$\overline{J_0} = 0 + O(\dot{a}^2, \ddot{a}), \quad (11-114)$$

y $\overline{J_0}$ no tendrá variación secular de primer orden en \dot{a} , lo que demuestra la propiedad deseada de invarianza adiabática.

Veamos detalladamente esta deducción en el caso del problema del oscilador armónico:

$$H = \frac{1}{2m}(p^2 + m^2\omega^2 q^2)$$

donde ω puede ser función explícita del tiempo. Las ecuaciones de la transformación canónica que lleva del sistema (q, p) al sistema (w_0, J_0) vienen dadas por las ecuaciones (10-18) y (10-79) que podemos escribir de manera que faciliten el cálculo de W^* :

$$\begin{aligned} J_0 &= \pi m \omega q^2 \csc^2 2\pi w_0 = -\frac{\partial W^*}{\partial w_0}, \\ p &= m\omega q \cot 2\pi w_0 = \frac{\partial W^*}{\partial q}. \end{aligned} \quad (11-115)$$

Salvo términos constantes (y por tanto irrelevantes), podemos hallar W^* por integración de las ecuaciones (11-115) dando

$$W^*(q, w_0, \omega) = \frac{m\omega q^2}{2} \cot 2\pi w_0. \quad (11-116)$$

La derivada respecto a ω es

$$\frac{\partial W^*}{\partial \omega} = \frac{mq^2}{2} \cot 2\pi w_0,$$

o bien, utilizando la ecuación (10-78), en función de w_0 , J_0 y ω ,

$$\frac{\partial W^*}{\partial \omega} = \frac{J_0}{4\pi\omega} \text{sen } 4\pi w_0. \quad (11-117)$$

Por tanto, \dot{J}_0 viene dada por el desarrollo de Fourier de un solo término

$$\dot{J}_0 = -\frac{\dot{\omega}}{\omega} J_0 \cos 4\pi w_0, \quad (11-118)$$

que, tal como predecíamos, no tiene ningún término constante. Hasta ahora, la ecuación (11-118) es rigurosa. Análogamente, la relación rigurosa entre w_0 y el tiempo está determinada por la ecuación de movimiento de w_0

$$\begin{aligned} \dot{w}_0 &= \frac{\partial K}{\partial J_0} = \frac{\partial H}{\partial J_0} + \dot{\omega} \frac{\partial}{\partial J_0} \left(\frac{\partial W^*}{\partial \omega} \right) \\ &= \frac{\omega}{2\pi} + \frac{\dot{\omega}}{4\pi\omega} \text{sen } 4\pi w_0. \end{aligned} \quad (11-119)$$

Para calcular un valor medio de \dot{J}_0 a lo largo de un periodo que incluya al menos el primer término correctivo, comenzaremos a hacer aproximaciones. Primeramente, supondremos que para un periodo particular del movimiento perturbado es constante el cociente

$$\frac{\dot{\omega}}{\omega} \equiv \epsilon \quad (11-120)$$

y cumple $\epsilon t \ll 1$. La ecuación (11-120) corresponde a una variación

$$\omega = \omega_0 e^{\epsilon t} \approx \omega_0 (1 + \epsilon t), \quad (11-121)$$

donde t se mide a partir del inicio del intervalo del periodo, en cuyo instante $\omega(0) = \omega_0$. La ecuación (11-119) presenta ahora el aspecto

$$\dot{w}_0 = \frac{\omega}{2\pi} + \frac{\epsilon}{4\pi} \text{sen } 4\pi w_0. \quad (11-119')$$

La solución de orden cero es

$$2\pi w_0^{(0)} = \omega_0 t,$$

donde se ha hecho igual a cero el término constante mediante una elección adecuada de la fase inicial. Hasta un primer orden en ϵ , la ecuación (11-119) se convierte en

$$\dot{w}_0^{(1)} = \frac{\omega_0(1 + \epsilon t)}{2\pi} + \frac{\epsilon}{4\pi} \text{sen } 2\omega_0 t, \quad (11-122)$$

con la solución

$$2\pi w_0^{(1)} = \omega_0 t + \frac{\epsilon}{2} \left[\omega_0 t^2 + \frac{1 - \cos 2\omega_0 t}{2\omega_0} \right]. \quad (11-123)$$

Correspondientemente, la ecuación para J_0 correcta hasta el segundo orden en ϵ se podrá escribir en la forma

$$\frac{d \ln J_0}{dt} = -\epsilon \cos \left(2\omega_0 t + \left\{ \omega_0 t^2 + \frac{1 - \cos 2\omega_0 t}{2\omega_0} \right\} \right).$$

Desarrollando en serie el coseno, tratando el término ϵ como cantidad pequeña de primer orden, la derivada se reduce a

$$\frac{d \ln J_0}{dt} = -\epsilon \cos 2\omega_0 t + \epsilon^2 \left\{ \omega_0 t^2 + \frac{1 - \cos 2\omega_0 t}{2\omega_0} \right\} \text{sen } 2\omega_0 t.$$

Para hallar el comportamiento secular, podemos promediar esta ecuación para el periodo del movimiento tal cual es en $t = 0$, es decir, para un intervalo $\tau = 2\pi/\omega_0$. En el promediado desaparecen casi todos los términos del segundo miembro, quedando el primer término entre llaves el cual contiene t^2 . El resultado final es

$$\overline{\frac{d \ln J}{dt}} = \frac{\pi \epsilon^2}{\omega_0} = \frac{\omega_0 \delta^2}{4\pi}, \quad (11-124)$$

donde $\delta = \epsilon \tau$, es decir, es la variación relativa de ω a lo largo del periodo τ .

Correspondientemente, la variación secular relativa de J a lo largo del periodo es

$$\frac{\Delta J}{J} = \frac{\delta^2}{2}. \quad (11-125)$$

Como era de esperar de las consideraciones más generales, la variación secular de la variable de acción no presenta ningún término de primer orden en ϵ . Tan sólo conservando cantidades del orden $\epsilon^2 = (\dot{\omega}/\omega)^2$ encontramos alguna variación de J que no se anule a largo plazo.

La invarianza adiabática de las variables de acción ha resultado ser particularmente útil en aplicaciones que entrañen el movimiento de partículas cargadas en campos electromagnéticos. Uno de los ejemplos más sencillos y que tiene consecuencias prácticas importantes, se refiere al movimiento de electrones en un campo magnético uniforme (o casi uniforme) constante. Según sabemos, la partícula cargada describe en tal caso una trayectoria circular en torno a las líneas de campo magnético. Al nivel más básico, esto se puede demostrar a partir de las ecuaciones de movimiento de Newton. La fuerza de Lorentz en un campo magnético constante \mathbf{B} es $(\mathbf{v} \times q\mathbf{B}/c)$; por tanto, la ecuación de movimiento (1-4) será

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{v} \times \frac{q\mathbf{B}}{mc}. \quad (11-126)$$

La ecuación (11-126) nos dice que el vector velocidad \mathbf{v} gira, sin variar su módulo, alrededor de la dirección del campo magnético, con una velocidad angular

$$\omega_c = -\frac{qB}{mc}. \quad (11-127)$$

Podemos formular una deducción equivalente mediante la Mecánica de Lagrange. En §5-9 vimos que, en este caso, la lagrangiana se puede escribir en la forma

$$L = \frac{mv^2}{2} + \mathbf{M} \cdot \mathbf{B}, \quad (11-128)$$

donde \mathbf{M} es el momento magnético del movimiento de la partícula definido en función de su momento cinético \mathbf{L} por la expresión

$$\mathbf{M} = \frac{q\mathbf{L}}{2mc}. \quad (11-129)$$

(cfr. ec. 5-108). En coordenadas cilíndricas con el eje z dirigido según \mathbf{B} , la componente de \mathbf{M} paralela a \mathbf{B} es

$$M_z = \frac{qr^2\dot{\theta}}{2c}, \quad (11-130)$$

y la lagrangiana es

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) + \frac{q}{2c}Br^2\dot{\theta}. \quad (11-131)$$

Como en la lagrangiana θ es cíclica, la cantidad de movimiento canónica correspondiente

$$p_\theta = mr^2\dot{\theta} + \frac{qBr^2}{2c}, \quad (11-132)$$

será una constante del movimiento. Además, la ecuación de movimiento radial es

$$m\ddot{r} - r\dot{\theta}\left(m\dot{\theta} + \frac{qB}{c}\right) = 0. \quad (11-133)$$

Una solución de movimiento estacionario para las ecuaciones (11-132) y (11-133) corresponde a r y $\dot{\theta}$ constante, teniendo $\dot{\theta}$ el valor

$$\dot{\theta} = \omega_c \equiv -\frac{qB}{mc}, \quad (11-134)$$

Lo que concuerda con la ecuación (11-127).* En tal caso, $p_\theta = -(qBr^2/2c)$ y la variable de acción correspondiente a θ es

$$J_\theta = \oint p_\theta d\theta = -\frac{\pi qBr^2}{c}. \quad (11-135)$$

* A la velocidad angular ω_c se le llama a veces pulsación ciclotrónica o frecuencia de giro y es el doble de la frecuencia de Larmor (ec. 5-104). Desde luego, aquí no es aplicable el teorema de Larmor porque la energía cinética de la rotación en torno a las líneas de fuerza es al menos de igual magnitud que el resto de la energía cinética y no se pueden desprestigiar los términos cuadráticos en B .

Por (11-130) podemos escribir

$$\frac{qr^2}{c} = \frac{2M}{\omega_c}$$

(ya que M_z es igual a M en el caso de este movimiento) y por tanto, J_θ puede también escribirse en la forma

$$J_\theta = -\frac{2\pi MB}{\omega_c} = \frac{2\pi mc}{q} M. \quad (11-135')$$

El teorema de la invarianza adiabática implica que ante una variación suficientemente lenta del campo magnético, J_θ permanece constante. La ecuación (11-135') dice que el momento magnético es asimismo adiabáticamente invariante. Otra manera de enunciarlo, basada en la ecuación (11-135), es decir que el producto de B por el área encerrada por la órbita (es decir, el número de líneas de fuerza que abrazan a la órbita) se mantiene constante.

Podría aparecer una variación adiabática de B si permaneciera estática la configuración del campo magnético pero éste fuese ligeramente no uniforme. Si en tal caso la partícula tuviera una pequeña componente z de la velocidad, el arrastre resultante de ello llevaría a la partícula lentamente a regiones de valores de B diferentes. De las ecuaciones (11-134), (11-135) y (11-135') se deduce simplemente que la energía cinética del movimiento alrededor de las líneas de \mathbf{B} es

$$T_{(\theta)} = \frac{mr^2\dot{\theta}^2}{2} = MB. \quad (11-137)$$

Supongamos que una partícula cargada está arrastrada hacia las B crecientes; según la ecuación (11-137), la energía cinética de rotación aumenta. Como se conserva la energía cinética total, la energía cinética del arrastre longitudinal a lo largo de las líneas de fuerza deberá disminuir. La velocidad del arrastre se llegará a anular y se invertirá el sentido del movimiento. Si podemos conseguir que B llegue a crecer en sentido contrario, la partícula cargada quedará confinada, moviéndose en uno y otro sentido entre los dos extremos —principio del llamado confinamiento especular. Desde luego, la historia completa es más complicada, pero queda bien patente el significado de la invarianza adiabática de M .

Recordemos que casi todos los fenómenos de oscilaciones pequeñas en torno a un estado estacionario o a un movimiento estacionario se pueden describir mediante osciladores armónicos. En consecuencia, existe un gran interés práctico en las cuestiones referentes a la invarianza de J para un oscilador armónico ante variaciones lentas y no tan lentas, de un parámetro. Por ejemplo, el estudio de oscilaciones en los aceleradores de partículas cargadas ha proporcionado gran cantidad de nuevas visiones. Además, los mate-

máticos han utilizado el problema para incrementar nuestros conocimientos referentes a las soluciones de ecuaciones diferenciales con coeficientes dependientes del tiempo. Los resultados de estos estudios recientes son demasiado numerosos para que los indiquemos detalladamente y mucho menos para que los deduzcamos. Sin embargo, merece la pena que mencionemos dos propiedades del problema del oscilador armónico que revisten particular interés.

Es costumbre introducir una variable tiempo $t' = \epsilon t$, donde ϵ es un parámetro pequeño. La derivada de ω respecto al tiempo que figura en la hamiltoniana de «perturbación» aparece entonces en la forma

$$\dot{\omega} = \epsilon \frac{d\omega}{dt'}$$

Se trata entonces la derivada de ω respecto a t' mediante un «programa» fijo de la variación de $\omega(t')$, cambiando la escala de tiempo sobre la que se lleva a cabo dicho programa de acuerdo con el valor de ϵ . Por tanto, un solo parámetro mide si ω varía lenta o rápidamente. Supongamos que el programa comporte su inicio (en $t' = -\infty$) a un valor constante inicialmente y su finalización (en $t' = +\infty$) a otro valor constante. No consideramos entonces el cambio de J a lo largo de un ciclo del movimiento, pero sí lo que varía J desde su valor inicial a su valor final. El sorprendente resultado al que se llega es que si $\omega(t')$ se comporta suficientemente bien, esta variación es muy inferior que lo que podía esperarse según la ecuación (11-125). Se ha demostrado* que si $\omega(t')$ es real, acotada y analítica sobre y en torno al eje real, la variación de J es exponencialmente pequeña, es decir,

$$\frac{J(+\infty) - J(-\infty)}{J(+\infty)} = \infty O(e^{-d\epsilon}), \quad (11-138)$$

donde d es un número real positivo relacionado con la anchura de la franja de analiticidad de ω en el plano t' complejo.

Resultado aún más interesante es que el oscilador armónico con frecuencia dependiente del tiempo tiene un invariante *exacto* el cual se reduce, en el límite de variación lenta, a la variable de acción J . En el caso de un oscilador armónico lineal con lagrangiana y hamiltoniana dadas por

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 - \omega^2(t)x^2); \quad H = \frac{1}{2m}(p^2 + m^2\omega^2(t)x^2), \quad (11-139)$$

* Podríamos dar varias referencias, pero la más fácil de seguir es, probablemente, R. E. Meyer, *Jour. Applied Math. and Phys. (ZAMP)* 24, 293 (1973).

el invariante suele darse en la forma

$$I = \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{r^2} + (r\dot{x} - x\dot{r})^2 \right], \quad (11-140)$$

donde $r(t)$ es una función que satisface a la ecuación diferencial

$$\ddot{r} + \omega^2(t)r - r^{-3} = 0. \quad (11-141)$$

La deducción matemática formal de la invarianza de I es un tanto engorrosa, pero podemos iluminar su significado físico —y por qué es constante— con algunas consideraciones sencillas. Podemos considerar que el movimiento de un oscilador armónico lineal con ω constante es, por ejemplo, la componente x de un oscilador armónico isótropo plano. Esta relación no se ve alterada en absoluto cuando ω depende del tiempo. Así pues, consideremos un potencial de fuerza central dependiente del tiempo

$$V = \frac{m}{2} \omega^2(t) r^2,$$

con lagrangiana

$$L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 - \omega^2(t) r^2) = \frac{m}{2} [(\dot{x}^2 - \omega^2 x^2) + (\dot{y}^2 - \omega^2 y^2)]. \quad (11-142)$$

En coordenadas cartesianas, el problema se desdobra en dos osciladores armónicos lineales independientes de la forma dada por la ecuación (11-139). En función de coordenadas polares planas vemos que L es cíclica en θ y por tanto sigue conservándose el momento cinético, por lo que una de las ecuaciones de movimiento se reduce a

$$r^2 \dot{\theta} = \frac{l}{m} \equiv h, \quad (11-143)$$

introduciéndose una nueva constante h . Por tanto, podemos seguir considerando que el oscilador armónico lineal es la proyección x de un oscilador armónico isótropo plano con un momento cinético por unidad de masa constante, medido por h . La ecuación de movimiento radial es, según la ecuación (11-142),

$$m\ddot{r} + m\omega^2 r - m r \dot{\theta}^2 = 0,$$

o bien, en vista de la ecuación (11-143),

$$\ddot{r} + \omega^2 r - \frac{h^2}{r^3} = 0. \quad (11-144)$$

Utilizando la conservación de h podemos construir una constante del movimiento definida en la forma

$$I' = \frac{1}{2} \left[\frac{h^2 \dot{x}^2}{r^2} + (r\dot{x} - x\dot{r})^2 \right]. \quad (11-145)$$

Para hallar el valor constante de I' , observemos que haciendo $x = r \cos \theta$ tenemos

$$r\dot{x} - x\dot{r} = -h \sin \theta,$$

y por tanto

$$I' = \frac{h^2}{2}.$$

Ahora bien, siempre es posible tomar arbitrariamente la amplitud inicial de y , así como la fase inicial entre los movimientos x e y , de manera que h tenga por valor numérico la unidad. Así pues, supongamos que para un periodo de tiempo inicial ω sea constante e igual a ω_0 , de manera que x e y dependerán del tiempo en la forma $x = x_0 \sin \omega_0 t$, $y = y_0 \cos(\omega_0 t + \alpha)$. Entonces, por la definición de h ,

$$h = x\dot{y} - y\dot{x} = \omega_0 x_0 y_0 \cos \alpha.$$

Si después varía ω con el tiempo, h conservará su valor inicial que, eligiendo adecuadamente y_0 o α , se puede hacer igual a la unidad independientemente de cuál sea el valor de x_0 . Luego, siempre será posible asociar a cualquier oscilador lineal dependiente del tiempo un oscilador isótropo plano para el cual $h = 1$. Para este problema asociado, la ecuación de movimiento radial (11-144) se reduce a la ecuación (11-141) e I' con $h = 1$ será precisamente el invariante (ec. 11-140). En términos físicos, la invarianza exacta de I' (ec. 11-140) no es más que una manera de expresar la conservación del momento cinético en el problema del oscilador isótropo plano asociado.* Sólo nos queda por considerar la

* La invarianza exacta de I' para el oscilador armónico dependiente del tiempo la enunciaron explícitamente H. R. Lewis, Jr., *ctr. Jour. Math. Phys.*, **9**, 1976 (1973), si bien la constancia de las cantidades relacionadas con ello se había ya observado en la teoría de aceleradores. La relación con el oscilador plano asociado parece haber sido observada por primera vez por Eliezer y Gray, *SIAM J. Appl. Math.* **30**, 463 (1976).

relación de I con J . Si es constante ω , una posible solución de la ecuación radial es r constante de valor igual a $\omega^{-1/2}$. (El movimiento del problema plano asociado es circular.) Como entonces \dot{r} vale cero, la ecuación (11-140) nos da

$$I = \frac{1}{2\omega} (\dot{x}^2 + \omega^2 x^2) = \frac{E}{m\omega} = \frac{J}{2\pi m}.$$

Luego, como era de esperar, en la aproximación de orden cero el invariante exacto es proporcional a la variable de acción J .

Aquí sólo hemos podido esbozar los aspectos más sobresalientes del tema de invariantes adiabáticos. Las ramificaciones del campo se adentran en muchas áreas de la Física clásica y cuántica, así como de la Matemática moderna; los detalles se pueden ver en las referencias de este capítulo. Ulteriores desarrollos, tanto en la teoría que le da fundamento como de la aplicación de los invariantes adiabáticos, podemos confiar que tengan lugar en el futuro.

REFERENCIAS SUGERIDAS

M. BORN, *Mechanics of the Atom*. La teoría de la perturbación para Mecánica clásica presenta aspectos un tanto diferentes que dependen de si nuestro interés se centra en la Física, la Mecánica celeste, el vuelo de vehículos espaciales o la Matemática moderna. Hasta hace poco, los textos de Física tendían a seguir estrechamente el tratamiento del Born, el cual es producto del desarrollo de la «vieja» Mecánica cuántica. El estudio de Born, principalmente de la teoría de perturbación independiente del tiempo, se encuentra fundamentalmente en el capítulo 4 de su libro, si bien hay diversos fragmentos dispersos por todo él.

E. J. SALETAN y A. H. CROMER, *Theoretical Mechanics*. Se cita esta referencia por ser uno de los mejores tratados que siguen la línea de Born. Sólo se describe la teoría de la perturbación independiente del tiempo. Se consideran en detalle algunos ejemplos, referidos principalmente al oscilador armónico. También hay un apartado corto que se ocupa de invariantes adiabáticos.

J. M. A. DANBY, *Fundamentals of Celestial Mechanics*. Una vez superada la contribución de Kepler y la mayor parte de la de Newton, la Mecánica celeste consiste casi totalmente en teoría de perturbaciones y el problema de los tres cuerpos. La literatura acerca de la teoría de perturbaciones en Mecánica celeste coincide prácticamente en extensión, pues, con la propia Mecánica celeste y cualquier cita deberá ser muy selectiva. El texto de Danby constituye una exposición relativamente reciente (1962) de lo que podríamos llamar versión clásica de la teoría de perturbaciones, con aplicaciones puestas al día. Es extraordinariamente lúcido para un campo que, por lo general, comporta páginas repletas de fórmulas y presenta una extensa bibliografía. No se menciona el método de von Zeipel ni hay desarrollos más modernos tales como el empleo de la serie de Lie.

B. GARFINKEL, *Lagrange-Hamilton-Jacobi Mechanics*, en *Space Mechanics, Part 1*, ed. por J. B. Rosser. Diez páginas concisas y condensadas de este artículo describen la teoría de perturbaciones desde el punto de vista de un especialista en Mecánica celeste. Suponiendo al lector con una base de teoría de las transformaciones canónicas y de la ecuación de Hamilton-Jacobi, barre sin resuello desde la variación de constantes hasta el método de von Zeipel. Puede ser cuanto necesite el lector de este libro.

Y. HAGIHARA, *Celestial Mechanics, Vol. 2: Perturbation Theory* (en dos partes). Por el contrario, esta referencia cubre las aplicaciones de la teoría de perturbaciones a la Mecánica celeste con un detalle exhaustivo, necesitando para ello 900 páginas. Las referencias que hace a la literatura corriente e histórica parecen ser casi completas. Si queremos encontrar qué se ha hecho en realidad utilizando técnicas de perturbación para resolver los problemas de la Mecánica celeste, éste parece ser el sitio adecuado para buscarlo, si bien la redacción resulta a veces difícil de seguir. Aquí se encuentra la reformulación por serie de Lie del método de von Zeipel, pero el enfoque moderno de la teoría de la Estabilidad se reserva para otro volumen.

R. DEUTSCH, *Orbital Dynamics of Space Vehicles*. Puede ponerse en tela de juicio que la Tecnología espacial constituye un área de la Mecánica clásica distinta de la Mecánica celeste. Tal vez la separación estriba en la observación de que la «Mecánica espacial» nació con un ordenador en la boca. Esta referencia, en su mayor parte, constituye un texto de Mecánica celeste y además muy bueno. Se describen en detalle varios métodos de la teoría de perturbaciones, incluidos los especializados tales como el método de Hansen. Sin embargo, las aplicaciones corresponden principalmente a la Tecnología espacial como, por ejemplo, la perturbación de órbitas de satélites artificiales.

G. E. O. GIACAGLIA, *Perturbation Methods in Non-Linear Systems*. Probablemente, ésta sea la mejor referencia para una visión general de desarrollos modernos de la teoría de perturbaciones —desde Poincaré y Lindstedt hasta Arnold y Moser— es forma fácilmente comprensible. El punto de vista parece ser el de un matemático de aplicación. El texto, reproducción grisácea de la mecanografía, no es fácilmente legible físicamente.

R. ABRAHAM y E. MARSDEN, *Foundations of Mechanics*. Hay un nuevo lenguaje para el desarrollo y exposición de la Mecánica: el de la Topología diferencial. El físico que se encuentra con él por primera vez, necesita un curso intensivo de dicho lenguaje antes de que puedan resultarles inteligibles sus pronunciamientos. Parece probable que, en lo que se refiere a estabilidad global del movimiento perturbado, el nuevo lenguaje consiga éxitos notables no alcanzables por otros medios. En cambio, las ventajas de exposición correspondientes a las áreas más convencionales de la Mecánica son muy dudosas. Para aquellos que quieran nadar en estas nuevas aguas, este texto revisado proporciona una cobertura casi enciclopédica. Unas 156 páginas se dedican a preliminares de la Topología diferencial y Cálculo de variedades, si bien requieren una orientación hacia los métodos de la Matemática abstracta. Las aplicaciones a la Mecánica celeste constituyen la Parte IV (pp. 619-740).

J. MOSER, *Stable and Random Motions in Dynamical Systems*. Este librito reproduce los textos de cinco conferencias pronunciadas en 1972. Al propio Moser se deben muchos de los adelantos en el tratamiento moderno de los problemas de Estabilidad. En esta obra da una visión de los desarrollos correspondientes a este siglo, haciendo hincapié en la Mecánica celeste. A menudo enuncia teoremas sin demostrarlos y se espera del lector una gran sofisticación matemática. A pesar de todo, consigne transmitir mejor que Abraham y Marsden el gusto y los éxitos de las técnicas modernas.

T. G. NORTHROP, *The Adiabatic Motion of Charged Particles*. Aun cuando aquí no se encuentren desarrollos anteriores a la década de 1960, esta breve monografía proporciona una buena introducción a las complejidades de los cálculos basados en los invariantes adiabáticos. Las aplicaciones son a «dispositivos» de plasma, p.e., a máquinas especulares.

B. LEHNERT, *Dynamics of Charged Particles*. Esta referencia es casi contemporánea de la anterior y proporciona un estudio algo más voluminoso de la misma área. Se estudian algunos problemas asociados a dispositivos de plasma que no tienen nada que ver con los invariantes adiabáticos, p. ej., la radiación emitida por partículas cargadas.

EJERCICIOS

1. Mediante el método de la teoría de la perturbación dependiente del tiempo, obtener la solución para el oscilador armónico lineal (en el cual se considera que el potencial es una perturbación del movimiento de la partícula libre) con términos de hasta el *tercer* orden, suponiendo la condición inicial $\beta_0 = 0$. Hallar expresiones de x y p en función del tiempo y demostrar que concuerdan con los términos correspondientes del desarrollo de las soluciones armónicas habituales.

2. Un punto material de masa m pende de un extremo de un resorte vertical que satisface la ley de Hooke con una constante de rigidez k . El otro extremo del resorte se hace oscilar arriba y abajo de acuerdo con la ley $z_1 = a \cos \omega_1 t$. Tratando a como cantidad pequeña, obtener una solución de primer orden para el movimiento de m en el tiempo, utilizando el método de variación de las constantes. ¿Qué sucede cuando ω_1 tiende a la frecuencia no perturbada ω_0 ?

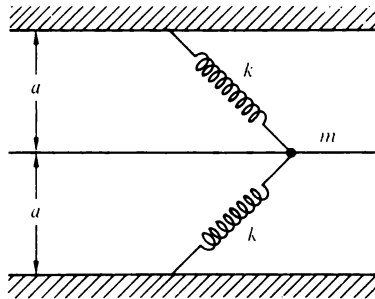
3. a) La masa de un oscilador armónico lineal de constante de rigidez k se aumenta bruscamente en una fracción ϵ . Mediante la teoría de perturbación independiente del tiempo, de primer orden, hallar el cambio de frecuencia resultante del oscilador para un primer orden en ϵ . Demostrar que, para el mismo orden en ϵ , el resultado concuerda con la predicción rigurosa del cambio mencionado.

b) Repetir el apartado a) para el efecto de aumentar k en una fracción ϵ .

4. En § 11-3 se utiliza la perturbación de primer orden en su formato independiente del tiempo para hallar el efecto de la amplitud finita sobre el periodo de un péndulo plano. Con la misma formulación, utilizar la ecuación (11-72) para hallar correcciones de primer orden a la dependencia temporal de θ . (Recuérdese que ahora J_0 es función del tiempo.)

5. Realizar un cálculo coherente de perturbación de segundo orden (utilizando el método que se quiera) de la corrección de la frecuencia de un péndulo plano a consecuencia de una amplitud finita de oscilación. En la hamiltoniana y en el tratamiento de la perturbación deberán conservarse todos los términos de orden λ^2 .

6. Un punto material está obligado a moverse sobre una recta y está fijo a los extremos de dos resortes ideales de constantes de rigidez iguales, tal como se indica en el esquema. La longitud natural de



cada resorte es $b \leq a$. Mediante la teoría de perturbación de primer orden hallar la corrección de orden menor a la frecuencia de oscilación en el caso de amplitud finita. ¿Qué sucede cuando a tiende en magnitud a b ?

7. a) Demostrar que para el menor orden de los términos de corrección la hamiltoniana relativista (pero no covariante) de un oscilador armónico unidimensional tiene la forma

$$H = \frac{1}{2m} (p^2 + m^2 \omega^2 q^2) - \frac{1}{8} \frac{p^4}{m^3 c^2}.$$

b) Mediante la teoría de perturbación de primer orden, calcular la corrección relativista de menor orden para la frecuencia del oscilador armónico. Expresar el resultado como variación relativa de la frecuencia.

8. Un oscilador armónico isótropo plano esta perturbado por un cambio de la hamiltoniana de la forma

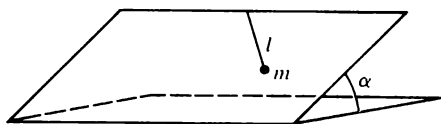
$$\epsilon H_1 = p_x^2 p_y^2.$$

Utilizando la teoría de perturbación de primer orden independiente del tiempo, hallar los cambios de las frecuencias.

9. Podemos tener un modelo del efecto Stark atómico tomando la órbita elíptica de Kepler en un plano y perturbándola mediante un potencial $\Delta V = -Kx$. Según la teoría de la perturbación de primer orden, ¿qué le sucede a las frecuencias de movimiento? Este modelo se puede también utilizar como primera aproximación al efecto de la presión de la radiación solar sobre la órbita de un satélite terrestre.

10. Considerando el trabajo efectuado para alterar adiabáticamente la longitud l de un péndulo plano, demostrar por medios elementales la invarianza adiabática de J para el péndulo plano en el límite de amplitud que tiende a cero.

11. Un péndulo plano de pequeña amplitud está obligado a moverse en un plano inclinado, tal como se indica en la figura adjunta. ¿Cómo cambia su amplitud al variar lentamente la inclinación α del plano?



12. Consideremos el sistema descrito en el ejercicio 13 del capítulo 10. Supongamos que se varía lentamente el parámetro F a partir de un valor inicial. ¿Qué le sucede a la energía de la partícula? ¿Y a la amplitud de oscilación? ¿Y al periodo?

13. a) Demostrar que es canónica la transformación siguiente:

$$Q = -\arcsin \left[\frac{r}{X} \phi(p, X) \right],$$

$$P = \frac{m}{2} \left[\frac{X^2}{r^2} + \phi^2(p, X) \right] = \frac{mI}{2}.$$

donde r es (hasta ahora) una función cualquiera de t y

$$\phi(p, x) = \frac{rp}{m} - x\dot{r}.$$

- b) Hallar una función generatriz del tipo $F_1(q, Q, t)$.
- c) Demostrar que si se aplica esta transformación canónica al oscilador armónico dependiente del tiempo de la ecuación (11-139) y $r(t)$ satisface a la ecuación (11-141), la hamiltoniana transformada será cíclica en Q con lo que P será una constante del movimiento. Esto constituye una demostración independiente de la invarianza exacta de I definida por la ecuación (11-140).

Capítulo 12

Introducción a las formulaciones de Lagrange y Hamilton para sistemas continuos y campos

Todas las formulaciones de la Mecánica tratadas hasta ahora han estado dirigidas al tratamiento de sistemas que tengan un número de grados de libertad finito o, como máximo, numerablemente infinito. Sin embargo, existen ciertos problemas mecánicos que entrañan sistemas continuos, como, por ejemplo, el problema de un sólido elástico en vibración. En él, cada punto del sólido continuo participa en las oscilaciones y el movimiento total sólo puede describirse especificando las coordenadas de posición de *todos* los puntos. No resulta difícil modificar las formulaciones anteriores de la Mecánica para poder tratar dichos problemas. El método más directo consiste en aproximar el sistema continuo a uno que contenga partículas discretas y luego examinar cómo cambian las ecuaciones que describen el movimiento, cuando nos aproximamos al límite continuo.

12-1 TRANSICIÓN DE UN SISTEMA DISCRETO A UN SISTEMA CONTINUO

Vamos a aplicar este método al caso de una varilla elástica infinitamente larga que pueda efectuar pequeñas vibraciones longitudinales, es decir, desplazamientos oscilantes de las partículas de la varilla paralelos a su eje. Un sistema compuesto por partículas discretas que se aproxime a la varilla continua es una cadena infinita de puntos materiales iguales separados por distancias a y unidos por resortes uniformes sin masa de constante de rigidez k (cfr. fig. 12-1).* Supondremos que los puntos materiales sólo pueden moverse a lo largo de la dirección de la cadena. Podemos ver que el sistema discreto es una extensión de la molécula poliatómica lineal tratada en el capítulo 6. Podremos, pues, obtener las ecuaciones que describen el movimiento mediante las técnicas habituales para

* Utilizamos una cadena infinita en vez de una finita para evitar los puntos materiales extremos excepcionales (en el caso discreto) o las condiciones de contorno (en el caso continuo).

oscilaciones pequeñas. Representando por η_i el desplazamiento de la partícula i -ésima respecto a su posición de equilibrio, la energía cinética es

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m \dot{\eta}_i^2, \quad (12-1)$$

donde m es la masa de cada partícula. La energía potencial correspondiente es la suma de las energías potenciales de cada resorte a consecuencia de hallarse estirado o comprimido respecto a su longitud natural (cfr. § 6-4):

$$V = \frac{1}{2} \sum_i k(\eta_{i+1} - \eta_i)^2. \quad (12-2)$$

Combinando las ecuaciones (12-1) y (12-2), la lagrangiana del sistema es

$$L = T - V = \frac{1}{2} \sum_i (m \dot{\eta}_i^2 - k(\eta_{i+1} - \eta_i)^2), \quad (12-3)$$

que también puede escribirse en la forma

$$L = \frac{1}{2} \sum_i a \left[\frac{m}{a} \dot{\eta}_i^2 - ka \left(\frac{\eta_{i+1} - \eta_i}{a} \right)^2 \right] = \sum_i a L_i, \quad (12-4)$$

donde a es la separación de equilibrio entre puntos (cfr. fig. 12-1). Las ecuaciones de movimiento de Lagrange para las coordenadas η_i resultan ser

$$\frac{m}{a} \ddot{\eta}_i - ka \left(\frac{\eta_{i+1} - \eta_i}{a^2} \right) + ka \left(\frac{\eta_i - \eta_{i-1}}{a^2} \right) = 0. \quad (12-5)$$

La forma particular de L de la ecuación (12-4) y las ecuaciones de movimiento correspondientes las hemos elegido por ser convenientes para efectuar el paso al límite a una varilla continua al tender a cero a . Está claro que m/a se reduce a la masa por unidad de longitud μ del sistema continuo, pero el valor límite de ka no resulta tan evidente. Recordemos que en el caso de una varilla elástica que cumpla la ley de Hooke, el alargamiento de la varilla *por unidad de longitud* es directamente proporcional a la fuerza o tensión ejercida sobre ella, relación que podemos escribir en la forma

$$F = Y \zeta,$$

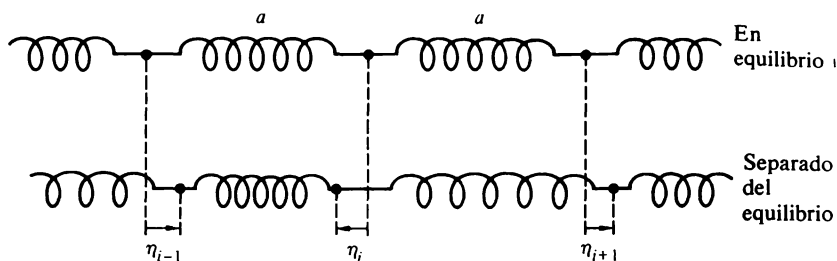


FIGURA 12-1

Sistema discreto de puntos materiales iguales unidos por resortes, como aproximación a una varilla elástica continua.

donde ξ es el alargamiento por unidad de longitud e Y es el módulo de Young. Ahora bien, el alargamiento de una longitud a de un sistema discreto, por unidad de longitud, será $\xi = (\eta_{i+1} - \eta_i)/a$. La fuerza necesaria para estirar el resorte esta cantidad es

$$F = k(\eta_{i+1} - \eta_i) = ka \left(\frac{\eta_{i+1} - \eta_i}{a} \right),$$

por lo que ka debe corresponder al módulo de Young de la varilla continua. Al pasar del caso discreto al continuo, el índice entero i que identifica al punto material particular se convierte en la coordenada de posición continua x ; en vez de la variable η_i tenemos $\eta(x)$. Además, la cantidad

$$\frac{\eta_{i+1} - \eta_i}{a} = \frac{\eta(x+a) - \eta(x)}{a}$$

que figura en L_i tiende evidentemente al límite

$$\frac{d\eta}{dx},$$

cuando a , que desempeña el papel de dx , tiende a cero. Por último, la suma extendida a un número discreto de partículas se convierte en una integral extendida a x , la longitud de la varilla, y la lagrangiana (12-4) queda en la forma

$$L = \frac{1}{2} \int \left(\mu \dot{\eta}^2 - Y \left(\frac{d\eta}{dx} \right)^2 \right) dx. \tag{12-6}$$

En el límite, cuando a tiende a cero, los dos últimos términos de la ecuación de movimiento (12-5) resultan ser

$$\lim_{a \rightarrow 0} -\frac{Y}{a} \left\{ \left(\frac{d\eta}{dx} \right)_x - \left(\frac{d\eta}{dx} \right)_{x-a} \right\},$$

definiendo claramente una segunda derivada de η . Por tanto, la ecuación de movimiento para la varilla elástica será

$$\mu \frac{d^2\eta}{dt^2} - Y \frac{d^2\eta}{dx^2} = 0, \quad (12-7)$$

que es la conocida ecuación de onda en una dimensión con velocidad de propagación

$$v = \sqrt{\frac{Y}{\mu}}. \quad (12-8)$$

La ecuación (12-8) es la conocida fórmula de la velocidad de propagación de las ondas elásticas longitudinales.

Este sencillo ejemplo es suficiente para ilustrar las características principales de la transición de un sistema discreto a uno continuo. El hecho más importante que hemos de comprender es el papel que desempeña la coordenada de posición x . No se trata de una coordenada generalizada; sólo hace las veces de índice continuo que sustituye al índice discreto i . Al igual que cada valor de i corresponde a una coordenada generalizada distinta η_i del sistema, a cada valor de x corresponde una coordenada generalizada $\eta(x)$. Como η depende también de la variable continua t , deberemos tal vez escribir con mayor precisión $\eta(x, t)$ indicando que x , al igual que t , puede considerarse como parámetro que entra en la lagrangiana. Si el sistema continuo fuese tridimensional y no unidimensional, como en este caso, las coordenadas generalizadas se distinguirían mediante tres índices continuos x, y, z y se escribirían en la forma $\eta(x, y, z, t)$. Notemos que las cantidades x, y, z, t son totalmente independientes unas de otras y sólo aparecen en η como variables explícitas. Las derivadas de η respecto a cualquiera de ellas podrán, pues, escribirse siempre en forma de derivadas totales sin ninguna ambigüedad. La ecuación (12-6) indica también que la lagrangiana aparece como integral para el índice continuo x ; en el caso tridimensional, la lagrangiana tendría la forma

$$L = \iiint \mathcal{L} dx dy dz, \quad (12-9)$$

donde \mathcal{L} se denomina *densidad de lagrangiana*. En el caso de las vibraciones longitudinales de la varilla continua, la densidad de lagrangiana es

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left\{ \mu \left(\frac{d\eta}{dt} \right)^2 - Y \left(\frac{d\eta}{dx} \right)^2 \right\}, \quad (12-10)$$

y corresponde al límite continuo de la cantidad L_i que aparece en la ecuación (12-4). Es la densidad de lagrangiana, más que la propia lagrangiana, la que utilizaremos para describir el movimiento del sistema.

12-2 FORMULACIÓN DE LAGRANGE PARA SISTEMAS CONTINUOS

Notemos en la ecuación (12-9) que la \mathcal{L} para la varilla elástica, además de ser función de $\dot{\eta} \equiv \partial\eta/\partial t$, contiene también una derivada espacial de η , cual es $\partial\eta/\partial x$; x y t desempeñan, pues, un papel similar como parámetros de la densidad de lagrangiana. Si además de las interacciones entre vecinos más próximos hubiesen fuerzas locales, \mathcal{L} sería función de la propia η y también del gradiente espacial de η . Desde luego, en el caso general \mathcal{L} podría muy bien ser también función explícita de x y de t . Por tanto, la densidad de lagrangiana para todo sistema continuo unidimensional aparecería como función de la forma

$$\mathcal{L} = \mathcal{L} \left(\eta, \frac{d\eta}{dx}, \frac{d\eta}{dt}, x, t \right). \quad (12-11)$$

La lagrangiana total, siguiendo la ecuación (12-10), será entonces la integral de \mathcal{L} extendida al dominio de x que define al sistema y el principio de Hamilton en el límite del sistema continuo adopta la forma

$$\delta I = \delta \int_1^2 \int \mathcal{L} dx dt = 0. \quad (12-12)$$

Si ha de tener alguna utilidad el principio de Hamilton para el sistema continuo, deberá ser posible deducir el límite continuo de la ecuación de movimiento, p. ej., la (12-7), directamente por variación de la integral doble de \mathcal{L} dada en la ecuación (12-12). Podemos efectuar dicha variación por métodos que difieran poco de los utilizados en el capítulo 2 para un sistema discreto. La variación sólo tiene lugar sobre η y sus derivadas; los parámetros x y t no se ven afectados por la variación ni directamente ni en los dominios de integración. Al igual que la variación de η ha de tomarse nula en los puntos extremos t_1 y t_2 , también debe tomarse nula la variación de η en los límites x_1 y x_2 de la integración en x . Como en

§2-2, podemos obtener en el espacio η un camino variado de integración conveniente, eligiendo η entre una familia de funciones de η dependiente de un parámetro:

$$\eta(x, t; \alpha) = \eta(x, t; 0) + \alpha \zeta(x, t). \tag{12-13}$$

Aquí $\eta(x, t, 0)$ es la función correcta que satisfará al principio de Hamilton y ζ es una función cualquiera de buen comportamiento que se anule en los puntos extremos en t y en x . Si consideramos I función de α , para que sea un extremo para $\eta(x, t, 0)$ la derivada de I respecto de α se anulará en $\alpha = 0$. Por derivación directa,

$$\frac{dI}{d\alpha} = \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} dx dt \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{d\eta}{dt} \right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{d\eta}{dx} \right) \right\}. \tag{12-14}$$

Como la variación de η , es decir $\alpha \zeta$, se anula en los puntos extremos, integrando por partes según x y según t tendremos las relaciones

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{d\eta}{dt} \right) dt = - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}} \right) \frac{\partial \eta}{\partial \alpha} dt,$$

y

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{d\eta}{dx} \right) dx = - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) \frac{\partial \eta}{\partial \alpha} dx.$$

Por tanto, el principio de Hamilton se podrá escribir en la forma

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} dx dt \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}} \right) - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) \right\} \left(\frac{\partial \eta}{\partial \alpha} \right)_0 = 0, \tag{12-15}$$

y por las mismas razones que en §2-2, la naturaleza arbitraria del camino variado implica la anulación de la expresión entre llaves:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}} \right) + \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} = 0. \tag{12-16}$$

La ecuación (12-16) constituye la forma apropiada de la ecuación de movimiento deducida del principio de Hamilton (ec. 12-12).

Un sistema de n grados discretos de libertad tendrá n ecuaciones de movimiento de Lagrange; en el caso del sistema continuo con un número infinito de grados de libertad parece que sólo obtenemos una ecuación de Lagrange. Sin embargo, recordemos que la ecuación de movimiento para η es una ecuación diferencial que sólo contiene el tiempo y en ese sentido la ecuación (12-15) proporciona una ecuación de movimiento para cada valor de x . La naturaleza continua de los índices x aparece en el hecho de que la ecuación (12-15) es una ecuación en derivadas parciales en las dos variables x y t , que da η en la forma $\eta(x, t)$.

En el caso concreto de las vibraciones longitudinales en una varilla elástica, la forma de la densidad de lagrangiana (ec. 12-10) nos indica que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{d\eta}{dt}} = \mu \frac{d\eta}{dt}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{d\eta}{dx}} = -Y \frac{d\eta}{dx}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} = 0.$$

Así pues, tal como queríamos, la ecuación de Euler-Lagrange (12-16) se reduce a la ecuación de movimiento (12-7).

La formulación de Lagrange que acabamos de desarrollar para sistemas continuos unidimensionales precisa, evidentemente, de extensión a situaciones bi- y tridimensionales, p. ej., al caso del sólido elástico en general. Además, en vez de una cantidad campo η pueden haber varias, p. ej., el desplazamiento respecto de una posición de equilibrio podría describirse mediante un vector espacial $\boldsymbol{\eta}$ con tres componentes. No hay dificultad alguna para seguir los pasos matemáticos correspondientes al caso más general en estrecho paralelismo con el caso unidimensional de una componente. No obstante, las fórmulas resultan muy engorrosas cuando se escriben de igual manera, especialmente en vista de las dos tandas de derivadas. Se simplifica mucho la notación si tenemos en cuenta que el tiempo t y las coordenadas espaciales x, y, z desempeñan el mismo papel matemático en el principio de Hamilton. Las cantidades campo son funciones de las coordenadas tanto del tiempo como del espacio que hay que tratar como variables independientes. No hay variación de las cantidades campo en los límites de integración en el principio de Hamilton ni para el tiempo ni para el espacio.

Matemáticamente, conviene pensar en un espacio cuadridimensional de coordenadas $x_0 = t, x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$. Este espacio no implica ningún significado físico. Al igual que en el capítulo 7, un subíndice de letra latina se refiere solamente a las tres coordenadas del espacio físico, mientras que un subíndice de letra griega se refiere a las cuatro coordenadas. En el resto del capítulo adoptamos el convenio de suma respecto a índices repetidos. Las distintas componentes de las cantidades campo las simbolizaremos mediante un subíndice ρ . Queremos recalcar que el subíndice puede cubrir multitud de formas. En ocasiones representará un solo índice que tenga dos, tres, cuatro o más valores. O bien puede representar varios índices. Así, si la cantidad campo es un tensor espacial de segundo orden, ρ se referirá a dos subíndices. Por último, una derivada de las cantidades campo respecto a una cualquiera de las cuatro coordenadas x_i se representará por el subíndice ν

separado de ρ por una coma. Cuando sólo haya una cantidad campo, la coma irá precedida de un espacio en blanco. Por ejemplo

$$\eta_{\rho,v} \equiv \frac{d\eta_\rho}{dx_v}; \quad \eta_{,j} \equiv \frac{d\eta}{dx_j}; \quad \eta_{i,\mu\nu} = \frac{d^2\eta_i}{dx_\mu dx_\nu}. \quad (12-17)$$

De esta manera se simbolizarán solamente las derivadas de las cantidades campo.

Con esta notación, la forma más general de la densidad de lagrangiana que habremos de considerar se escribirá en la forma

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\eta_\rho, \eta_{\rho,v}, x_\nu). \quad (12-18)$$

La lagrangiana total es entonces una integral extendida al espacio de tres dimensiones:

$$L = \int \mathcal{L}(dx_i), \quad (12-19)$$

pero rara vez ocurre explícitamente. El principio de Hamilton comporta una integral extendida a una región de un espacio de cuatro dimensiones:

$$\delta I = \delta \int \mathcal{L}(dx_\mu) = 0, \quad (12-20)$$

donde la variación de las η_ρ se anula en la superficie S de contorno de la región de integración. La deducción de las correspondientes ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange tiene lugar simbólicamente como antes. Consideremos un sistema de funciones variadas de un solo parámetro que se reducen a $\eta_\rho(x_\nu)$ cuando el parámetro α tiende a cero. Como antes, podemos construir un posible sistema adecuado, por ejemplo, sumando a η_ρ el producto $\alpha\zeta_\rho$, donde $\zeta_\rho(x_\nu)$ son funciones arbitrarias convenientes que se anulan en la superficie de contorno. La anulación de la variación de I equivale a hacer igual a cero la derivada de I respecto de α .*

$$\frac{dI}{d\alpha} = \int \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_\rho} \frac{\partial \eta_\rho}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{\rho,v}} \frac{\partial \eta_{\rho,v}}{\partial \alpha} \right) (dx_\mu).$$

* A menos que se especifique otra cosa, en el resto del capítulo utilizaremos el convenio de la suma para todos los tipos de subíndices.

Integrando por partes, tenemos

$$\frac{dI}{d\alpha} = \int \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_\rho} - \frac{d}{dx_\nu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}_{\rho,\nu}} \right) \right] \frac{\partial \eta_\rho}{\partial \alpha} (dx_\mu) + \int (dx_\mu) \frac{d}{dx_\nu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}_{\rho,\nu}} \frac{\partial \eta_\rho}{\partial \alpha} \right). \quad (12-21)$$

La segunda integral se anula en el límite cuando α tiende a cero, según podemos ver de diversas maneras. Podemos examinarla término a término: efectuando la integración para la x_ν , particular de cada término derivada, que se anula entonces porque la derivada respecto α es nula en los puntos extremos. O bien, mediante un teorema de la divergencia **cuadridimensional podemos transformar la integral en otra extendida a la superficie de contorno** de la región de integración en el espacio de cuatro dimensiones. La integral de superficie se anula porque la variación de η_ρ en la proximidad de las funciones campo correctas es nula sobre la superficie. Por tanto, la ecuación (12-21), en el límite cuando α tiende a cero, se reducirá a

$$\left(\frac{dI}{d\alpha} \right)_0 = \int (dx_\mu) \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_\rho} - \frac{d}{dx_\nu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}_{\rho,\nu}} \right) \right] \left(\frac{\partial \eta_\rho}{\partial \alpha} \right)_0. \quad (12-22)$$

De nuevo, la naturaleza arbitraria de la variación de cada tipo η_ρ significa que la ecuación (12-22) sólo se satisface cuando sea nulo cada uno de los corchetes por separado.

$$\frac{d}{dx_\nu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}_{\rho,\nu}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_\rho} = 0. \quad (12-23)$$

Las ecuaciones (12-23) representan un sistema de ecuaciones en derivadas parciales para las cantidades campo, que tiene tantas ecuaciones cuantos valores diferentes de ρ haya. Vale la pena repetir que como las coordenadas espaciales x_i son de hecho índices para las **cantidades campo**, cada una de las ecuaciones (12-23) corresponde, en realidad, a todo un sistema de ecuaciones diferenciales de movimiento de Lagrange en el caso discreto.

Para un sistema continuo unidimensional, en el cual ν sólo toma los valores 0 y 1, la ecuación (12-23) se desarrolla a la misma forma de la ecuación (12-16). La compacidad de la notación queda evidente incluso en un ejemplo tan sencillo. Desde luego, el empleo de un espacio de cuatro dimensiones por conveniencia simbólica no exige en modo alguno un comportamiento covariante (en el sentido que dan a esta palabra los físicos) de ninguna de las cantidades de dicho espacio. Tenemos un buen ejemplo de ello en el caso del campo acústico en un gas perfecto. Las cantidades campo son ahora las componentes del vector η que representa el pequeño desplazamiento de las partículas del gas respecto de sus posiciones en ausencia de vibraciones sonoras. Lo que buscamos son las ecuaciones de movimiento para las vibraciones longitudinales en el gas, es decir, la ecuación de onda vectorial de la propagación del sonido. En el apéndice E se deduce la densidad de

lagrangiana apropiada para un campo acústico, la cual podemos escribir en la forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\mu_0 \dot{\boldsymbol{\eta}}^2 + 2P_0 \nabla \cdot \boldsymbol{\eta} - \gamma P_0 (\nabla \cdot \boldsymbol{\eta})^2). \quad (12-24)$$

Aquí, μ_0 es la densidad másica de equilibrio y P_0 la presión de equilibrio, del gas. El primer término de \mathcal{L} está claro que es una densidad de energía cinética, mientras que los términos restantes representan el cambio que sufre la energía potencial del gas por unidad de volumen a consecuencia del trabajo efectuado sobre el gas o por él en el curso de las contracciones y expansiones que son la marca de las vibraciones acústicas. En la energía potencial nos aparece la constante γ , cociente entre los calores molares a presión y a volumen constantes, la cual entra en juego porque las compresiones y enrarecimientos del gas por las ondas sonoras tienen lugar adiabáticamente y no a temperatura constante. Con la notación cuadridimensional, la densidad de lagrangiana queda en la forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\mu_0 \eta_{i,0} \eta_{i,0} + 2P_0 \eta_{i,i} - \gamma P_0 \eta_{i,i} \eta_{j,j}). \quad (12-25)$$

El término central de \mathcal{L} es evidente que no contribuye a la ecuación de movimiento porque su derivada parcial respecto a $\eta_{i,j}$ es nula o constante. Por tanto, las ecuaciones de movimiento (ec. 12-23) toman la forma

$$\mu_0 \eta_{j,00} - \gamma P_0 \eta_{i,ij} = 0, \quad j = 1, 2, 3. \quad (12-26)$$

Volviendo a la notación vectorial, las ecuaciones (12-26) se condensan en la ecuación vectorial única

$$\mu_0 \frac{d^2 \boldsymbol{\eta}}{dt^2} - \gamma P_0 \nabla \nabla \cdot \boldsymbol{\eta} = 0. \quad (12-27)$$

Podemos decir dos cosas acerca de la ecuación de movimiento (ec. 12-26 ó 12-27) y de la densidad de lagrangiana de la cual se ha deducido. Una es que la ecuación (12-27) se puede poner en forma más reconocible utilizando el hecho de que en el caso de vibraciones de pequeña amplitud la variación relativa de la densidad del gas σ está relacionada con $\boldsymbol{\eta}$ mediante la ecuación

$$\sigma = -\nabla \cdot \boldsymbol{\eta}$$

(cfr. Apéndice E). Aplicando el operador divergencia a la ecuación (12-27) obtenemos la ecuación escalar

$$\nabla^2 \sigma - \frac{\mu_0}{\gamma P_0} \frac{d^2 \sigma}{dt^2} = 0, \tag{12-28}$$

la cual vemos es la ecuación de onda tridimensional, siendo

$$v = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\mu_0}} \tag{12-29}$$

la conocida expresión de la velocidad del sonido en los gases. Si, como sucede en la Mecánica del punto, la principal meta de la formulación de Lagrange es deducir las ecuaciones de movimiento a partir de una lagrangiana, será una densidad de lagrangiana adecuada correspondiente a la ecuación (12-28) la siguiente:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\mu_0 \sigma_{,0}^2 - \gamma P_0 \sigma_{,i} \sigma_{,i}). \tag{12-30}$$

La ecuación (12-30) no tiene, desde luego, el mismo contenido físico que la densidad de lagrangiana (12-25) y no puede deducirse directamente una de otra, si bien (12-30) sí implica la ecuación de onda escalar (12-28).

La otra cosa que podemos decir proviene de la observación de que el término $\nabla \cdot \eta$ de la ecuación (12-24) no contribuye a las ecuaciones de movimiento. Esto corresponde a la propiedad de los sistemas discretos de que la lagrangiana está definida salvo una derivada total respecto al tiempo de una función arbitraria de las coordenadas generalizadas y el tiempo. En el caso de sistemas continuos, la afirmación correspondiente es que \mathcal{L} está definida salvo una «cuadridivergencia», es decir, salvo un término de la forma

$$\frac{dF_v(\eta_\rho, x_\mu)}{dx_v}$$

donde las F_v son cuatro funciones (derivables) cualesquiera de las cantidades campo η_ρ y las coordenadas x_μ . Es evidente que tal término no contribuye a la variación de la integral de acción. La aplicación del teorema de la divergencia en el espacio de cuatro dimensiones convierte la integral de volumen en una integral extendida a la superficie de contorno en la cual la variación de F_v es nula. En símbolos, la variación importante se puede escribir en la forma

$$\delta \int (dx_\mu) \frac{dF_v(\eta_\rho, x_\mu)}{dx_v} = \delta \int F_v(\eta_\rho, x_\mu) d\sigma_v = 0, \tag{12-31}$$

donde $d\sigma_\nu$ representa las componentes de un elemento de superficie (en el espacio de cuatro dimensiones) orientado en la dirección de la normal hacia afuera.* El término central de la ecuación (12-24) cae en esta categoría con las funciones F_ν dadas

$$F_0 = 0, \quad F_i = 2P_0\eta_i.$$

La formulación de Lagrange para un sistema continuo de coordenadas generalizadas la hemos desarrollado para tratar sistemas mecánicos continuos tales como un sólido elástico en oscilación longitudinal o un gas que vibre de manera tal que origine ondas acústicas. Se sobreentiende que la formulación puede también utilizarse, incluso en ausencia de sistema mecánico, para describir las ecuaciones que rijan un *campo*. Desde un punto de vista matemático, un campo no es más que un sistema de una o más funciones del espacio y del tiempo independientes entre sí y las coordenadas generalizadas encajan perfectamente en esta definición. No hay ninguna condición necesaria de que el campo esté relacionado con un sistema mecánico subyacente. Al romper así la relación entre la descripción lagrangiana del campo y el movimiento puramente mecánico no hacemos más que recapitular la historia de la Física. Por ejemplo, durante mucho tiempo se pensó que el campo electromagnético estaba constituido por vibraciones elásticas de un éter misterioso. Hasta hace poco no se dieron cuenta de que el éter no tenía otro papel que el de sujeto del verbo «ondular».† Igualmente nos damos cuenta de que los métodos variationales que hemos desarrollado sean también válidos independientemente de la noción de sistema mecánico continuo y que sirvan para proporcionar las ecuaciones que describan cualquier campo espacio-temporal. Entonces, el principio de Hamilton se convertiría de hecho en una descripción conveniente y compacta del campo, la cual al ser desarrollada nos conduciría a las ecuaciones del campo.

En este contexto más amplio, la densidad de lagrangiana no tiene por qué darse en forma de diferencia entre las energías cinética y potencial. En vez de ello, podemos utilizar cualquier expresión de \mathcal{L} que conduzca a las ecuaciones de campo buscadas. Así hemos visto que una densidad de lagrangiana para el campo de sonido (ec. 12-24) viene dada de manera natural en función del vector desplazamiento η . Pero también hemos visto que el campo puede describirse en función de un escalar σ que es la variación relativa de la densidad del gas. La ecuación de onda en función de σ se puede deducir de una densidad de lagrangiana dada por la ecuación (12-30), que no es la misma que la ecuación (12-24), la cual no puede deducirse por referencia a ningún sistema mecánico subyacente. Lleva a la ecuación de campo correcta y eso es cuanto deseamos.

Pero además de implicar las ecuaciones de campo, la densidad de lagrangiana tiene

* Por ejemplo, si la superficie en el espacio de cuatro dimensiones es una superficie de tiempo constante, la única componente no nula de $d\sigma_\nu$ será $d\sigma_0 = dV \equiv dx dy dz$. El sentido de la normal hacia afuera es, pues, el del eje de tiempos.

† En su 1894 Presidential Address to the British Association for the Advancement of Science, el Conde de Salisbury dijo que «la principal, sino la única, función de la palabra éter ha sido proporcionar un caso nominativo al verbo “ondular”». (véase p. 8 del 1894 Report of the BAAS). Es posible que ese mismo pensamiento se hubiera expresado anteriormente.

algo más que decir acerca de la naturaleza física del campo. Al igual que en los sistemas de un número discreto de grados de libertad, la estructura de la lagrangiana contiene también información referente a las propiedades del sistema que se conservan. En el apartado siguiente vamos a estudiar algunos teoremas de conservación.*

12-3 TENSOR ESFUERZO-ENERGÍA Y TEOREMAS DE CONSERVACIÓN

Podemos deducir algo análogo a la conservación de la integral de Jacobi de la Mecánica del punto (§ 2-6) y de manera muy semejante. Todo lo que hemos de recordar es que debemos extender el tratamiento del tiempo en forma paralela al de las x_i ya que todas estas variables son parámetros independientes en \mathcal{L} . Así, en vez de la derivada respecto al tiempo de L , intentaremos calcular la derivada total de \mathcal{L} respecto a x_μ :

$$\frac{d\mathcal{L}}{dx_\mu} = \frac{\hat{\partial}\mathcal{L}}{\hat{\partial}\eta_\rho} \eta_{\rho,\mu} + \frac{\hat{\partial}\mathcal{L}}{\hat{\partial}\eta_{\rho,\nu}} \eta_{\rho,\nu\nu} + \frac{\hat{\partial}\mathcal{L}}{\hat{\partial}x_\mu}$$

En virtud de las ecuaciones de movimiento (12-23) estos se convierte (con un ligero cambio de notación) en

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{L}}{dx_\mu} &= \frac{d}{dx_\nu} \left(\frac{\hat{\partial}\mathcal{L}}{\hat{\partial}\eta_{\rho,\nu}} \right) \eta_{\rho,\mu} + \frac{\hat{\partial}\mathcal{L}}{\hat{\partial}\eta_{\rho,\nu}} \frac{d\eta_{\rho,\mu}}{dx_\nu} + \frac{\hat{\partial}\mathcal{L}}{\hat{\partial}x_\mu} \\ &= \frac{d}{dx_\nu} \left(\frac{\hat{\partial}\mathcal{L}}{\hat{\partial}\eta_{\rho,\nu}} \eta_{\rho,\mu} \right) + \frac{\hat{\partial}\mathcal{L}}{\hat{\partial}x_\mu} \end{aligned}$$

Combinando las derivadas totales, podemos escribir esto en la forma

$$\frac{d}{dx_\nu} \left\{ \frac{\hat{\partial}\mathcal{L}}{\hat{\partial}\eta_{\rho,\nu}} \eta_{\rho,\mu} - \mathcal{L} \delta_{\mu\nu} \right\} = - \frac{\hat{\partial}\mathcal{L}}{\hat{\partial}x_\mu} \tag{12-32}$$

Vamos a suponer que \mathcal{L} no dependa explícitamente de x_μ . Esto suele significar que \mathcal{L} representa un campo libre, es decir, que no contiene fuentes ni sumideros exteriores que interactúen con el campo en puntos explícitos del espacio ni con una dependencia tem-

* Al tratar el teorema de Noether en § 12-7, vemos un método de ataque más general a las propiedades de conservación inherentes en la lagrangiana.

poral dada. De hecho, esto significa que no hay interacción entre el campo y las partículas puntiformes que por él se mueven en el espacio y el tiempo. Con esta condición, la ecuación (12-32) adopta la forma de un sistema de condiciones de divergencia,

$$\frac{dT_{\mu\nu}}{dx_\nu} = 0, \quad (12-33)$$

aplicadas a una cantidad que tiene la forma de tensor de segundo orden de cuatro dimensiones:

$$T_{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{\rho,\nu}} \eta_{\rho,\mu} - \mathcal{L} \delta_{\mu\nu}. \quad (12-34)$$

Recalquemos que estas ecuaciones sólo tienen *forma* de ecuaciones tensoriales en un espacio de cuatro dimensiones, pues hasta ahora el cuadriespacio no tiene propiedades de transformación —espacio y tiempo siguen siendo distintos— y no se ha formulado ningún requisito de transformación aplicado a $T_{\mu\nu}$. No obstante, las partes espaciales de estas cantidades se comportan como vectores y tensores en el espacio ordinario, es decir, T_{ij} son las componentes de un tensor tridimensional de segundo orden.

La semejanza entre $T_{\mu\nu}$ y la integral de Jacobi (ec. 2-53) es evidente. Queda especialmente clara para la componente T_{00} :

$$T_{00} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}_\rho} \dot{\eta}_\rho - \mathcal{L}. \quad (12-34')$$

En sistemas mecánicos, la densidad de lagrangiana tiene a menudo la forma de diferencia entre una densidad de energía cinética y una densidad de energía potencial: $\mathcal{L} = \mathcal{F} - \mathcal{V}$. Así sucede, por ejemplo, en el caso de las densidades de lagrangiana para la varilla elástica (ec. 12-10) y para las vibraciones sonoras (ec. 12-24) en donde la densidad de energía cinética tiene la forma de un medio de la densidad másica multiplicado por el cuadrado de la velocidad de vibración:

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \mu \dot{\eta}_\rho \dot{\eta}_\rho.$$

Mediante iguales razonamientos que los utilizados en Mecánica del punto, podemos entonces identificar T_{00} con una densidad de energía total.

Las correspondientes marcas de identificación con que se señalen los demás elementos de $T_{\mu\nu}$ podemos imaginarlas escribiendo el sistema de ecuaciones (12-33) de la manera siguiente:

$$\frac{dT_{\mu 0}}{dt} + \frac{dT_{\mu j}}{dx_j} = 0, \quad (12-35)$$

o sea

$$\frac{dT_{\mu 0}}{dt} + \nabla \cdot \mathbf{T}_\mu = 0, \tag{12-35'}$$

donde \mathbf{T}_μ es un sistema de cuatro vectores espaciales. En una u otra forma, las ecuaciones (12-35) y (12-35') presentan el aspecto de ecuaciones de continuidad que nos dicen que la velocidad de variación de una cierta densidad más la divergencia de un correspondiente flujo o densidad de corriente da cero (cfr. ec. 7-76). Por su parte, las ecuaciones de continuidad implican la conservación de ciertas cantidades integrales con tal que el volumen del campo sea finito, es decir, que el campo pueda contenerse dentro de un volumen, más allá del cual las cantidades campo sean nulas. Definamos, en tal caso, cantidades integrales R_μ en la forma

$$R_\mu = \int T_{\mu 0} dV, \tag{12-36}$$

donde la integral de volumen se extiende más allá de la región que contiene al campo. Entonces, por las ecuaciones (12-35'),

$$\frac{dR_\mu}{dt} = \int \nabla \cdot \mathbf{T}_\mu dV = \int \mathbf{T}_\mu \cdot d\mathbf{A} = 0. \tag{12-37}$$

Es por estos teoremas de conservación, deducidos de la ecuación (12-33), que en el léxico de la Física moderna se llama a estas ordenaciones $T_{\mu\nu}$, $\mu = 1, 2, 3, 4$, *corrientes conservativas*.

Podríamos, pues, esperar que T_{0i} desempeñara el papel de las componentes de una densidad de corriente de energía. También podemos ver que esto es razonable a partir de considerar el campo de vibraciones longitudinales en una varilla elástica. Imaginemos ésta dividida por un corte en un punto x (cfr. fig. 12-2). Según las consideraciones que condujeron a la lagrangiana (ec. 12-6), la fuerza que ejerce la parte de varilla a la derecha para estirar la parte a la izquierda del corte es

$$Y \frac{d\eta}{dx}.$$

Luego, en x y a su izquierda habrá una tensión de igual magnitud pero de sentido contrario. Además, la parte izquierda se estira en una cuantía que en x vale η y la velocidad de variación en el tiempo de este estiramiento es $\dot{\eta}$. Por tanto, el trabajo que por unidad de tiempo efectúa el estiramiento en el corte será

$$-\dot{\eta} Y \frac{d\eta}{dx}, \tag{12-38}$$

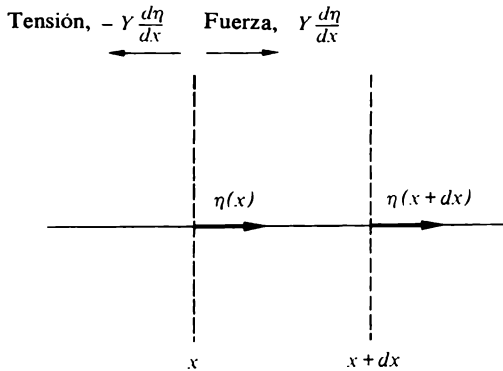


FIGURA 12-2

Esquema ilustrativo del cálculo de la densidad de corriente de energía en una varilla elástica.

que es, pues, la energía que por unidad de tiempo se cede a la parte derecha. La comparación muestra que esto es exactamente T_{01} para la densidad de lagrangiana apropiada de la ecuación (12-10). Si T_{00} fuese una densidad de energía, la cantidad R_0 de la ecuación (12-36) se podría identificar con la energía total en el campo. La cuarta componente de la ecuación de conservación (12-37) dice, pues, que la energía total del campo se conservará si se anula T_{0r} sobre la superficie de contorno, es decir, si el sistema no radia energía al exterior.

Podemos sugerir de manera análoga el significado físico de las componentes T_{i0} volviendo una vez más a las vibraciones de la varilla elástica. Si las partículas de ésta se desplazaran la misma cantidad a lo largo de toda la varilla, el movimiento sería el de un cuerpo rígido, es decir, no habría perturbaciones oscilatorias. La variación neta de masa en una longitud dx de la varilla a causa del movimiento sería, evidentemente, nula: tanta masa pasaría por $x + dx$ como por x . En este caso de movimiento rígido habría aún una densidad de cantidad de movimiento neta $\mu\dot{\eta}$. Cuando tiene lugar un movimiento ondulatorio, en la longitud dx hay una variación neta de masa que, en un instante cualquiera, vale (cfr. fig. 12-2)

$$\mu(\eta(x) - \eta(x + dx)) = -\mu \frac{d\eta}{dx} dx.$$

La cantidad de movimiento adicional en el intervalo resultante del movimiento ondulatorio será, pues,

$$-\mu\dot{\eta} \frac{d\eta}{dx} dx.$$

Así pues, existe una densidad de cantidad de movimiento adicional, por encima y más allá de la del movimiento del estado estacionario, que puede identificarse con la densidad de cantidad de movimiento del campo u onda:

$$-\mu \dot{\eta} \frac{d\eta}{dx} \tag{12-39}$$

Esta cantidad es precisamente $-T_{10}$ para la densidad de lagrangiana dada por la ecuación (12-10). Así pues, nos vemos conducidos a identificar $-T_{10}$ con las componentes de la densidad de cantidad de movimiento del campo y a $-R_i$ con la cantidad de movimiento total del campo, al menos con este convenio cuatridimensional.

Las ecuaciones de continuidad (12-35') sugieren, pues, que $-T_i$ debe representar el vector densidad de flujo para la componente i -ésima de la densidad de cantidad de movimiento del campo. Adscribimos a T_i una propiedad vectorial porque puede haber, por ejemplo, un movimiento en la dirección y de la componente x de la densidad de cantidad de movimiento, medida por $-T_{12}$. Otra interpretación de T_{ij} proviene de considerar el campo de desplazamientos de un sólido elástico. Sabemos que en un tal sólido hay, además de las fuerzas de compresión normales a una superficie, fuerzas de cizalladura tangentes a los elementos de superficie. Podemos describir el conjunto de fuerzas diciendo que la fuerza $d\mathbf{F}$ que se ejerce sobre un elemento de área dA se expresa en función de un *tensor de esfuerzos* \mathbf{T} tal que*

$$d\mathbf{F} = \mathbf{T} \cdot dA.$$

Luego la fuerza resultante, por ejemplo según la dirección x , que actúa sobre un elemento de volumen paralelepípedo $dx dy dz$ tiene una contribución por parte de las fuerzas sobre las superficies paralelas al plano yz dadas por (cfr. fig. 12-3)

$$[T_{11}(x + dx) - T_{11}(x)] dy dz = \frac{dT_{11}}{dx} dx dy dz,$$

pero también hay una contribución de las superficies paralelas al plano xz ;

$$[T_{12}(y + dy) - T_{12}(y)] dx dz = \frac{dT_{12}}{dy} dy dx dz,$$

* Véase, p. ej., K. R. Symon, *Mechanics*, 3.ª ed., pp. 431-439.

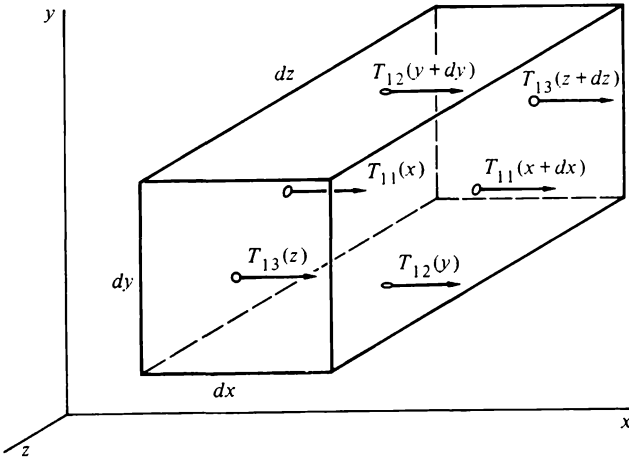


FIGURA 12-3

Fuerza según la dirección x que se ejerce sobre un elemento de volumen $dx dy dz$ de un sólido elástico.

y análogamente de las paralelas al plano xy . Las ecuaciones de movimiento de Newton corresponden aquí a decir que la velocidad de variación con el tiempo de la densidad de cantidad de movimiento, $-T_{i0}$, es igual a la componente x de la fuerza que se ejerce por unidad de volumen:

$$-\frac{dT_{i0}}{dt} = \frac{dT_{i1}}{dx} + \frac{dT_{i2}}{dy} + \frac{dT_{i3}}{dz},$$

que es, precisamente, la componente x de la ecuación (12-35'). Para este campo particular, podemos identificar T_{ij} con los elementos del tensor de esfuerzos tridimensional; de aquí el nombre de «tensor esfuerzo-energía» que se da a $T_{\mu\nu}$.

Así pues, considerando un sistema mecánico continuo hemos podido asignar identificaciones, o asociaciones, físicas a cada una de las componentes del tensor esfuerzo-energía. En forma resumida, dichas asignaciones son

- | | |
|--------------------------------------|---|
| T_{00} | densidad de energía del campo, |
| T_{0i} , con componentes T_{0j} | densidad de corriente de energía del campo, |
| $-T_{i0}$ | densidad de cantidad de movimiento del campo, componente i -ésima, |
| $-T_{ij}$, con componentes T_{ij} | densidad de corriente para la componente i -ésima de la densidad de cantidad de movimiento del campo, |
| T_{ij} | tensor de esfuerzos tridimensional. |

Recordemos que aun cuando el ejemplo de sistemas mecánicos dio origen a los procedimientos y la nomenclatura, el formalismo puede aplicarse a todo campo, independientemente de cuál sea su naturaleza u origen. Se puede construir una teoría clásica de campos no sólo para las vibraciones de un sólido elástico, sino para el campo electromagnético, para el «campo» de la ecuación de onda de Schrödinger o para el campo relativista que describe un mesón «escalar» entre otros. Más adelante examinaremos con más detalle algunos de estos ejemplos. A los efectos de ilustración presentes, consideraremos un campo de dos componentes, η_1 y η_2 , cuyas propiedades se eligen deliberadamente de manera que no correspondan a ninguna teoría existente. Supongamos que las ecuaciones del campo fuesen

$$\begin{aligned}
 a\nabla^2\eta_1 + b\frac{d\eta_1}{dt} - c\frac{d^2\eta_1}{dt^2} &= f\eta_2, \\
 a\nabla^2\eta_2 - b\frac{d\eta_2}{dt} - c\frac{d^2\eta_2}{dt^2} &= g\eta_1.
 \end{aligned}
 \tag{y-40}$$

Fácil es ver que estas ecuaciones de campo se pueden deducir de una densidad de lagrangiana

$$\mathcal{L} = c\dot{\eta}_1\dot{\eta}_2 + \frac{b}{2}(\dot{\eta}_1\eta_2 - \eta_1\dot{\eta}_2) - a\nabla\eta_1 \cdot \nabla\eta_2 - \frac{1}{2}(f\eta_2^2 + g\eta_1^2).
 \tag{12-41}$$

Para esta densidad de lagrangiana, las componentes del tensor esfuerzo-energía son

$$T_{00} = c\dot{\eta}_1\dot{\eta}_2 + a\nabla\eta_1 \cdot \nabla\eta_2 + \frac{1}{2}(f\eta_2^2 + g\eta_1^2),
 \tag{12-42}$$

(al igual que en el caso de ser discreta la energía del sistema, los términos lineales en la velocidad desaparecen)

$$T_{0i} = -a\left(\dot{\eta}_1\frac{d\eta_2}{dx_i} + \dot{\eta}_2\frac{d\eta_1}{dx_i}\right),
 \tag{12-43}$$

$$T_{i0} = c\left(\dot{\eta}_1\frac{d\eta_2}{dx_i} + \dot{\eta}_2\frac{d\eta_1}{dx_i}\right) + \frac{b}{2}\left(\eta_2\frac{d\eta_1}{dx_i} - \eta_1\frac{d\eta_2}{dx_i}\right),
 \tag{12-44}$$

$$T_{ij} = -a\left(\frac{d\eta_1}{dx_i}\frac{d\eta_2}{dx_j} + \frac{d\eta_1}{dx_j}\frac{d\eta_2}{dx_i}\right) - \mathcal{L}\delta_{ij}.
 \tag{12-45}$$

Obsérvese que en este ejemplo el tensor tridimensional \mathbf{T} es simétrico. Es esta una característica físicamente deseable, casi podríamos decir que necesaria, para la parte espacial del tensor esfuerzo-energía. Recordando la identificación de R_{ij} , las ecuaciones de conservación (12-37) dicen que en el caso de un sistema cerrado sin interacciones se conserva la cantidad de movimiento total del campo. No podríamos esperar menos. Pero debe existir un teorema de conservación correspondiente para el momento cinético del campo. Es sencillo construir una cantidad que haga las veces de densidad del momento cinético. Como el momento cinético es un vector axial, podemos esperar que las componentes de la densidad de momento cinético sean elementos de un tensor antisimétrico de segundo orden. Una forma adecuada de este tensor densidad de momento cinético (es decir, «momento de la cantidad de movimiento») lo es

$$.M_{ij} = -(x_i T_{j0} - x_j T_{i0}), \quad (12\ 46)$$

viniendo dado el momento cinético total del campo por

$$M_{ij} = \int .M_{ij} dV.$$

Por ser t y x_i variables totalmente independientes, la velocidad de variación de M_{ij} es

$$\frac{dM_{ij}}{dt} = - \int \left(x_i \frac{dT_{j0}}{dt} - x_j \frac{dT_{i0}}{dt} \right) dV,$$

o, por las condiciones de continuidad (ec. 12-35),

$$\frac{dM_{ij}}{dt} = - \int \left(x_i \frac{dT_{jk}}{dx_k} - x_j \frac{dT_{ik}}{dx_k} \right) dV.$$

Integrando por partes, convertimos esta expresión en

$$\frac{dM_{ij}}{dt} = - \int \frac{d}{dx_k} (x_i T_{jk} - x_j T_{ik}) dV + \int (T_{ji} - T_{ij}) dV. \quad (12\ 47)$$

La primera integral del segundo miembro tiene la forma de integral de volumen de una divergencia. Por tanto, será igual a una integral extendida a la superficie de contorno que se anula en el caso de tratarse de un sistema cerrado no radiante. Por último, si $T_{ij} = T_{ji}$, también es nula la segunda integral. Así pues, el momento cinético total del campo se

conserva si \mathbf{T} es simétrico.

En el ejemplo elegido, el tensor de esfuerzos es simétrico. No hay garantía de que ello sea siempre así y hay campos conocidos para los cuales el tensor de esfuerzos obtenido directamente no es simétrico. No obstante, la propiedad de conservación buscada se puede a menudo recobrar notando que al igual que sucede con \mathcal{L} , el tensor esfuerzo-energía $T_{\mu\nu}$ no está definido unívocamente.* La forma de $T_{\mu\nu}$ (ec. 12-34) se eligió originalmente porque cumplía las condiciones de divergencia dadas por la ecuación (12-33). Por tanto, $T_{\mu\nu}$ sólo está determinada salvo una función cualquiera cuya cuatridivergencia se anule. Con toda generalidad, podríamos considerar candidato una cantidad de la forma

$$\frac{d\psi_{\mu\nu\lambda}}{dX_\lambda},$$

donde $\psi_{\mu\nu\lambda}$ es un conjunto arbitrario de funciones de las variables campo, pero que ha de cumplir la condición de asimetría

$$\psi_{\mu\nu\lambda} = -\psi_{\mu\lambda\nu}.$$

Al calcular la cuatridivergencia, ν y λ serán índices mudos y la cuatridivergencia consistirá en pares tales que (no hay convenio de suma)

$$\frac{d^2\psi_{\mu\nu\lambda}}{dX_\nu dX_\lambda} + \frac{d^2\psi_{\mu\lambda\nu}}{dX_\lambda dX_\nu},$$

que se anulan idénticamente a causa de la condición de antisimetría. Esta ambigüedad de $T_{\mu\nu}$ hace a menudo posible «simetrizar» el tensor esfuerzo-energía, proceso que se lleva a cabo casi siempre al construir campos clásicos. Más adelante daremos ejemplos.

12-4 FORMULACIÓN DE HAMILTON, CORCHETES DE POISSON Y REPRESENTACIÓN POR CANTIDAD DE MOVIMIENTO

Es posible obtener una formulación de Hamilton para sistemas con un sistema continuo de coordenadas en forma parecida a como se hizo en el capítulo 8 para el caso de sistemas

* Era de esperar. En teoría electromagnética, por ejemplo, hace tiempo que se sabe (y ha sido fuente de controversias) que las expresiones de las densidades de energía y de corriente de energía (vector de Poynting) están definidas salvo cantidades que son divergencias espaciales. La adición de cantidades de esta naturaleza no contribuye en nada a las integrales observables tales como la energía total o la corriente total de energía.

discretos. Para indicar el método a seguir, volvamos por un momento a la cadena lineal de puntos materiales tratada en § 12-1. Conjugada a cada η_i hay una cantidad de movimiento canónica

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_i} = a \frac{\partial L_i}{\partial \dot{\eta}_i}. \quad (12-48)$$

La hamiltoniana del sistema será, pues,

$$H \equiv p_i \dot{\eta}_i - L = a \frac{\partial L_i}{\partial \dot{\eta}_i} \dot{\eta}_i - L,$$

o sea

$$H = a \left(\frac{\partial L_i}{\partial \dot{\eta}_i} \dot{\eta}_i - L_i \right). \quad (12-49)$$

Recordemos que en el límite representado por la varilla continua, cuando a tiende a cero, $L_i \rightarrow \mathcal{L}$ y la suma de la ecuación (12-49) se convierte en una integral:

$$H = \int dx \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}} \dot{\eta} - \mathcal{L} \right). \quad (12-50)$$

Las cantidades de movimiento canónicas individuales p_i , dadas por la ecuación (12-48), se anulan en el límite de la continuidad, pero podemos definir una *densidad de cantidad de movimiento* π que permanezca finita:

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{p_i}{a} \equiv \pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}}. \quad (12-51)$$

La ecuación (12-50) tiene la forma de integral espacial de una *densidad de hamiltoniana* \mathcal{H} definida por

$$\mathcal{H} = \pi \dot{\eta} - \mathcal{L}. \quad (12-52)$$

Aun cuando se pueda introducir así una formulación de Hamilton de manera directa para campos clásicos, démonos cuenta de que el procedimiento singulariza la variable tiempo a la que habrá que darle un tratamiento especial. Contrasta, pues, con el desarrollo que hemos dado a la formulación de Lagrange en el cual se trataban simétricamente las variables independientes tiempo y espaciales. Por esta razón, el método de Hamilton, al

menos tal como lo hemos introducido, se presta menos a ser incorporado a una descripción relativísticamente covariante de los campos. Por tanto, la manera hamiltoniana de contemplar los campos no resulta tan útil como el método de Lagrange, por lo que sólo daremos una breve descripción de ella.

La vía evidente para la generalización a un campo tridimensional descrito por cantidades campo η_ρ es definir, análogamente a como se hace en la ecuación (12-51), las densidades de cantidad de movimiento canónica

$$\pi_\rho(x_\mu) = \frac{\hat{\partial} \mathcal{L}}{\hat{\partial} \dot{\eta}_\rho} \tag{12-53}$$

Las cantidades $\eta_\rho(x_i, t)$, $\pi_\rho(x_i, t)$ juntas, definen el *espacio físico* de infinitas dimensiones que describe el campo clásico y su desarrollo en el tiempo. Podemos hallar para π_ρ un **teorema de conservación que sea algo parecido al correspondiente a la cantidad de movimiento canónica en sistemas discretos**. Si una cantidad campo dada η_ρ es cíclica en el sentido de que \mathcal{L} no contenga explícitamente a η_ρ (como en el caso de la ecuación 12-10), la ecuación de campo de Lagrange presenta el aspecto de enunciado de la existencia de una corriente conservativa:

$$\frac{d}{dx_\mu} \frac{\hat{\partial} \mathcal{L}}{\hat{\partial} \eta_{\rho,\mu}} = 0,$$

o sea

$$\frac{d\pi_\rho}{dt} + \frac{d}{dx_i} \frac{\hat{\partial} \mathcal{L}}{\hat{\partial} \eta_{\rho,i}} = 0. \tag{12-54}$$

Se sigue que si es cíclica η_ρ , existe una cantidad integral conservativa

$$\Pi_\rho = \int dV \pi_\rho(x_i, t).$$

La generalización evidente de la ecuación (12-52) para una densidad de hamiltoniana es

$$\mathcal{H}(\eta_\rho, \eta_{\rho,i}, \pi_\rho, x_\mu) = \pi_\rho \dot{\eta}_\rho - \mathcal{L}, \tag{12-55}$$

donde se supone que se puede eliminar la dependencia funcional de $\dot{\eta}_\rho$ por inversión de las ecuaciones de definición (12-53). De esta definición se deduce que

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_\rho} = \dot{\eta}_\rho + \pi_\lambda \frac{\partial \dot{\eta}_\lambda}{\partial \pi_\rho} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}_\lambda} \frac{\partial \dot{\eta}_\lambda}{\partial \pi_\rho} = \dot{\eta}_\rho \quad (12-56)$$

en virtud de la ecuación (12-53). La otra mitad de la ecuación de campo canónica es más engorrosa. Cuando se expresa en función de las variables canónicas, \mathcal{H} es función de η_ρ a través de la dependencia explícita de \mathcal{L} y a través de $\dot{\eta}_\rho$. Luego

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta_\rho} = \pi_\lambda \frac{\partial \dot{\eta}_\lambda}{\partial \eta_\rho} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}_\lambda} \frac{\partial \dot{\eta}_\lambda}{\partial \eta_\rho} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_\rho} = - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_\rho}. \quad (12-57)$$

que utilizando las ecuaciones de Lagrange podemos escribir

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta_\rho} = - \frac{d}{dx_\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{\rho,\mu}} \right) = - \dot{\pi}_\rho - \frac{d}{dx_i} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{\rho,i}} \right). \quad (12-58)$$

A causa de la aparición de \mathcal{L} no tenemos aún una forma útil. Sin embargo, mediante una deducción exactamente igual hallamos que

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta_{\rho,i}} = \pi_\lambda \frac{\partial \dot{\eta}_\lambda}{\partial \eta_{\rho,i}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}_\lambda} \frac{\partial \dot{\eta}_\lambda}{\partial \eta_{\rho,i}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{\rho,i}} = - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{\rho,i}}. \quad (12-59)$$

Por tanto, como segunda parte de las ecuaciones canónicas podemos escribir

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta_\rho} - \frac{d}{dx_i} \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta_{\rho,i}} \right) = - \dot{\pi}_\rho. \quad (12-60)$$

Las ecuaciones (12-56) y (12-60) las podemos expresar con una notación más próxima a la de las ecuaciones de Hamilton para un sistema discreto introduciendo la noción de *derivada funcional* definida en la forma

$$\frac{\delta}{\delta \psi} = \frac{\partial}{\partial \psi} - \frac{d}{dx_i} \frac{\partial}{\partial \psi_{,i}}. \quad (12-61)$$

Como \mathcal{H} no es función de $\pi_{\rho,i}$, las ecuaciones (12-56) y (12-60) se pueden escribir en la forma

$$\dot{\eta}_\rho = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \pi_\rho}, \quad \dot{\pi}_\rho = -\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \eta_\rho}. \quad (12-62)$$

Notemos que con el mismo simbolismo las ecuaciones de Lagrange (12-23) adoptan la forma

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}_\rho} \right) - \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \eta_\rho} = 0. \quad (12-63)$$

Sin embargo, la ventaja casi única de la derivada funcional estriba en la semejanza resultante con un sistema discreto. Por otra parte, sorprende el tratamiento paralelo de las variables temporal y espaciales.

Podemos obtener otras propiedades de \mathcal{H} desarrollando la derivada total respecto al tiempo de la ecuación (12-55), recordando que hay que considerar que $\dot{\eta}_\rho$ es función de η_ρ , $\eta_{\rho,i}$, π_ρ y x_μ . Tenemos, pues, que

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \dot{\pi}_\rho \dot{\eta}_\rho + \pi_\rho \frac{d\dot{\eta}_\rho}{dt} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_\rho} \dot{\eta}_\rho - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}_\rho} \frac{d\dot{\eta}_\rho}{dt} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{\rho,i}} \frac{d\eta_{\rho,i}}{dt} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}.$$

Los términos segundo y cuarto del segundo miembro se destruyen en virtud de las ecuaciones de definición (12-53), por lo que la derivada se simplifica quedando

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \dot{\pi}_\rho \dot{\eta}_\rho - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_\rho} \dot{\eta}_\rho - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{\rho,i}} \frac{d\eta_{\rho,i}}{dt} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}. \quad (12-64)$$

Por otra parte, considerando \mathcal{H} función de η_ρ , $\eta_{\rho,i}$, π_ρ y x_μ , la derivada total respecto al tiempo es

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \dot{\pi}_\rho \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_\rho} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \dot{\eta}_\rho} \dot{\eta}_\rho + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta_{\rho,i}} \frac{d\eta_{\rho,i}}{dt} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}. \quad (12-65)$$

La expresión del segundo miembro se ha escrito de manera que facilite la comparación

con el segundo miembro de la ecuación (12-64). Así, los primeros términos de ambas expresiones son iguales en virtud de la ecuación (12-56). Los segundo términos también son iguales en virtud de la ecuación (12-57) y la ecuación (12-59) muestra la equivalencia de los terceros. Por tanto, deberán ser iguales los últimos términos:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}, \quad (12-66)$$

lo cual se corresponde con la ecuación (8-13) para sistemas discretos.

En cambio, *no* se cumple la análoga de la ecuación (8-35), es decir, las derivadas total y parcial de \mathcal{H} respecto al tiempo no son, en general, iguales. Utilizando las ecuaciones de movimiento de Hamilton (ec. 12-56 y 12-60) e intercambiando los órdenes de derivación, la ecuación (12-65) se puede escribir

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_\rho} \frac{d}{dx_i} \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta_{\rho,i}} \right) + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta_{\rho,i}} \frac{d\dot{\eta}_\rho}{dx_i} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}.$$

Utilizando la ecuación (12-56) y combinando términos tenemos finalmente

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \frac{d}{dx_i} \left(\dot{\eta}_\rho \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta_{\rho,i}} \right) + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}, \quad (12-67)$$

que es lo más que podemos aproximarnos a la ecuación (8-35).

Sin embargo, la ecuación (12-67) es, en realidad, un viejo amigo algo disfrazado. Seguramente no va a sorprendernos que \mathcal{H} (ec. 12-55) coincida con T_{00} (ec. 12-35) que ha sido ya identificada con la densidad de energía. Además, por la ecuación (12-59) deducimos que

$$\dot{\eta}_\rho \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta_{\rho,i}} = -\dot{\eta}_\rho \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{\rho,i}} = -T_{0i}.$$

Cuando \mathcal{L} no contenga a t explícitamente, tampoco la contendrá \mathcal{H} en virtud de la ecuación (12-66) y en tal caso, la ecuación (12-67) se reduce a

$$\frac{dT_{00}}{dt} + \frac{dT_{0i}}{dx_i} = 0,$$

que es la primera de las ecuaciones de conservación (12-35). Hemos visto que la existencia de una corriente conservativa implica la conservación de una cantidad integral, en este caso

$$P_0 \equiv H = \int \mathcal{H} dV. \tag{12-68}$$

Así pues, si \mathcal{H} no es función explícita del tiempo, la cantidad que se conserva no es \mathcal{H} , sino la cantidad integral H .

La hamiltoniana total H no es más que un ejemplo de funciones que son integrales de volumen de densidades. Podemos formular directamente un formalismo general para la derivada respecto al tiempo de dichas cantidades integrales. Consideremos una cierta densidad \mathcal{U} que sea función de las coordenadas del espacio fásico (η_ρ, π_ρ) , de sus gradientes espaciales y posiblemente de x_μ :

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}(\eta_\rho, \pi_\rho, \eta_{\rho,i}, \pi_{\rho,i}, x_\mu). \tag{12-69}$$

La cantidad integral correspondiente es

$$U(t) = \int \mathcal{U} dV, \tag{12-70}$$

donde la integral de volumen se extiende a todo el espacio limitado por la superficie de contorno sobre la cual se anulan η_ρ y π_ρ . Derivando U respecto al tiempo tenemos, en general,

$$\frac{dU}{dt} = \int dV \left\{ \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \eta_\rho} \dot{\eta}_\rho + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \eta_{\rho,i}} \dot{\eta}_{\rho,i} + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \pi_\rho} \dot{\pi}_\rho + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \pi_{\rho,i}} \dot{\pi}_{\rho,i} + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} \right\}. \tag{12-71}$$

Consideremos un término tal como

$$\int dV \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \eta_{\rho,i}} \dot{\eta}_{\rho,i} = \int dV \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \eta_{\rho,i}} \frac{d\dot{\eta}_\rho}{dx_i}.$$

Integrando por partes, recordando que η_ρ y las derivadas se anulan en las superficies de contorno, tenemos

$$\int dV \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \eta_{\rho,i}} \dot{\eta}_{\rho,i} = - \int dV \dot{\eta}_\rho \frac{d}{dx_i} \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \eta_{\rho,i}} \right).$$

Para el término en $\dot{\pi}_{\rho j}$ vale una reducción similar. Agrupando coeficientes de $\dot{\eta}_\rho$ y de $\dot{\pi}_\rho$ respectivamente, vemos que mediante la notación δ (ec. 12-61), la ecuación (12-71) se reduce a

$$\frac{dU}{dt} = \int dV \left\{ \frac{\delta \mathcal{U}}{\delta \eta_\rho} \dot{\eta}_\rho + \frac{\delta \mathcal{U}}{\delta \pi_\rho} \dot{\pi}_\rho + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} \right\}. \quad (12-72)$$

Por último, **introduciendo** las ecuaciones de movimiento canónicas (12-62), tenemos

$$\frac{dU}{dt} = \int dV \left\{ \frac{\delta \mathcal{U}}{\delta \eta_\rho} \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \pi_\rho} - \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \eta_\rho} \frac{\delta \mathcal{U}}{\delta \pi_\rho} \right\} + \int dV \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t}. \quad (12-73)$$

La primera integral del segundo miembro corresponde claramente a la forma de corchete de Poisson. Su \mathcal{U} y \mathcal{H} son dos funciones densidad, estas consideraciones nos sugieren la definición del corchete de Poisson de las cantidades integrales

$$[U, W] = \int dV \left\{ \frac{\delta \mathcal{U}}{\delta \eta_\rho} \frac{\delta \mathcal{W}}{\delta \pi_\rho} - \frac{\delta \mathcal{W}}{\delta \eta_\rho} \frac{\delta \mathcal{U}}{\delta \pi_\rho} \right\}. \quad (12-74)$$

Definamos también qué queremos significar por derivada parcial de U respecto a t , mediante la expresión evidente

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \int dV \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t}. \quad (12-75)$$

La ecuación (12-73) podrá entonces escribirse en la forma

$$\frac{dU}{dt} = [U, H] + \frac{\partial U}{\partial t}, \quad (12-76)$$

que corresponde precisamente, en esta notación, a la ecuación (9-94) para sistemas discretos. Como, por definición, el corchete de Poisson de H consigo misma es nulo, la ecuación (12-76) se concretará en

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}, \quad (12-77)$$

que es la forma integral de la ecuación (12-67) y la versión en teoría de campos de la ecuación (8-35).

Así pues, el formalismo de corchetes de Poisson aparece como consecuencia de la formulación de Hamilton. Pero no podemos llevar a cabo una descripción por corchetes de Poisson de la teoría de campos en correspondencia paso a paso con la de los sistemas discretos. Notemos, por ejemplo, que aquí definimos los corchetes de Poisson sólo en función de un par de densidades. No podemos, pues, plantear fácilmente corchetes de Poisson correspondientes a los corchetes de Poisson fundamentales de la Mecánica de sistemas discretos. Es verdad que π_p es una densidad, pero η_p no lo es. Además, si x_i desempeña el papel de índices continuos de las variables mecánicas, los corchetes de Poisson fundamentales contendrían funciones para diferentes valores de x_i , lo cual no se introduce fácilmente en la presente formulación. Por esta razón se han utilizado poco las transformaciones canónicas en los campos clásicos, tema que ha resultado tan fructífero para los sistemas discretos. También resulta difícil seguir los pasos para la cuantización, los cuales llevarían consigo la sustitución de los corchetes de Poisson por conmutadores cuánticos.

Sin embargo, hay una manera de tratar los campos clásicos que provee casi todo lo de la formulación de Hamilton y de corchetes de Poisson de la Mecánica de sistemas discretos. La idea fundamental de este tratamiento es sustituir la variable espacial continua o el índice continuo por un índice discreto numerable. Podemos ver cómo se hace esto volviendo a referirnos a las oscilaciones longitudinales de la varilla elástica. Supongamos que ésta tiene una longitud finita $L = x_2 - x_1$. El requisito de que η se anule en los extremos es una condición de contorno que se podría realizar físicamente colocando la varilla entre dos paredes perfectamente rígidas. Entonces, la amplitud de oscilación se puede representar mediante una serie de Fourier:

$$\eta(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n \operatorname{sen} \frac{2\pi n(x - x_1)}{2L}. \quad (12 \ 78)$$

En vez del índice continuo x tenemos el índice discreto n . Podremos utilizar esta representación de x solamente cuando $\eta(x)$ sea una función regular, cosa que sucede en la mayoría de cantidades campo físicas.

Para ver más fácilmente cómo se puede llevar a cabo el esquema, supondremos que sólo hay una cantidad campo real η que se puede desarrollar en serie de Fourier tridimensional de la forma

$$\eta(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{V^{\frac{1}{2}}} \sum_{\mathbf{k}} q_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}. \quad (12 \ 79)$$

Aquí, \mathbf{k} es un vector de onda que sólo puede tomar módulos y direcciones discretos de manera que en una dimensión lineal dada sólo encaje un número entero (o a veces semientero) de longitudes de onda. Decimos que \mathbf{k} tiene un espectro discreto. El índice

escalar \mathbf{k} representa una cierta ordenación del sistema de índices enteros que se utiliza para enumerar los valores discretos de \mathbf{k} y V es el volumen del sistema, el cual aparece en forma de factor de normalización. Como es real, deberá ser $q_{\mathbf{k}}^* = q_{-\mathbf{k}}$.

La ortogonalidad de las exponenciales en todo el volumen se puede enunciar mediante la relación

$$\frac{1}{V} \int e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \cdot \mathbf{r}} dV = \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}. \quad (12-80)$$

En realidad, los valores permitidos de \mathbf{k} son aquellos para los cuales se satisface la condición (12-80) (según podemos ver considerando la serie de Fourier unidimensional). Se deduce que los coeficientes $q_{\mathbf{k}}(t)$ del desarrollo vienen dados por

$$q_{\mathbf{k}}(t) = \frac{1}{V^{\frac{1}{2}}} \int e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \eta(\mathbf{r}, t) dV. \quad (12-81)$$

De manera análoga, podemos desarrollar la densidad de cantidad de movimiento canónica en la forma

$$\pi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{V^{\frac{1}{2}}} \sum_{\mathbf{k}} p_{\mathbf{k}}(t) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}, \quad (12-82)$$

siendo también $p_{\mathbf{k}}^* = p_{-\mathbf{k}}$. Correspondientemente, los coeficientes $p_{\mathbf{k}}(t)$ del desarrollo se hallarán a partir de

$$p_{\mathbf{k}}(t) = \frac{1}{V^{\frac{1}{2}}} \int e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \pi(\mathbf{r}, t) dV. \quad (12-83)$$

Tanto $q_{\mathbf{k}}$ como $p_{\mathbf{k}}$ son cantidades integrales del tipo dado por la ecuación (12-70). Podemos, pues, buscar los corchetes de Poisson de dichas cantidades. Como las exponenciales no contienen las cantidades campo tenemos, por la ecuación (12-74), ,

$$\begin{aligned} [q_{\mathbf{k}}, p_{\mathbf{k}'}] &= \frac{1}{V} \int dV e^{i(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}} \left\{ \frac{\delta \eta}{\delta \eta} \frac{\delta \pi}{\delta \pi} - \frac{\delta \pi}{\delta \eta} \frac{\delta \eta}{\delta \pi} \right\} \\ &= \frac{1}{V} \int dV e^{i(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}}, \end{aligned}$$

o sea, por la ecuación (12-80),

$$[q_k, p_{k'}] = \delta_{k,k'} \quad (12-84)$$

Por la definición de los corchetes de Poisson (ec. 12-74) resulta evidente que

$$[q_k, q_{k'}] = 0 = [p_k, p_{k'}] \quad (12-85)$$

Así pues, los corchetes de Poisson de q_k, p_k forman un sistema de corchetes de Poisson fundamentales, lo que nos sugiere que los consideremos coordenadas canónicas. Por tanto, la forma de las ecuaciones de movimiento que obedecen adquiere un interés considerable.

Según la ecuación (12-76), la dependencia temporal de q_k se hallará a partir de

$$\dot{q}_k(t) = [q_k, H] = \frac{1}{V^{\frac{1}{2}}} \int dV e^{-ik \cdot r} \left\{ \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \eta} \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \pi} - \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \eta} \frac{\delta \eta}{\delta \pi} \right\}$$

o sea

$$\dot{q}_k(t) = \frac{1}{V^{\frac{1}{2}}} \int dV e^{-ik \cdot r} \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \pi} \quad (12-86)$$

Por otra parte, tenemos que

$$\frac{\partial H}{\partial p_k} = \int dV \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi} \frac{\partial \pi}{\partial p_k} \quad (12-87)$$

Como quiera que \mathcal{H} no es función del gradiente de π , la derivada parcial es igual a la derivada funcional. Además, de la ecuación (12-82) tenemos

$$\frac{\partial \pi}{\partial p_k} = \frac{1}{V^{\frac{1}{2}}} e^{-ik \cdot r} \quad (12-88)$$

Entonces, (12-87) coincide con (12-86) y tenemos

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} \quad (12-89)$$

De manera similar podemos obtener la ecuación de movimiento para p_k , con sólo un paso más. Tenemos de nuevo

$$\dot{p}_k = [p_k, H] = -\frac{1}{V^{\frac{1}{2}}} \int dV e^{ik \cdot r} \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \eta},$$

pero ahora

$$\frac{\partial H}{\partial q_k} = \int dV \left\{ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial q_k} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta_{,j}} \frac{\partial \eta_{,j}}{\partial q_k} \right\}.$$

No obstante, integrando por partes el término que contiene las componentes del gradiente de η , la integral puede reducirse a otra que contenga la derivada funcional,

$$\frac{\partial H}{\partial q_k} = \int dV \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \eta} \frac{\partial \eta}{\partial q_k},$$

y entonces, por la ecuación (12-77) deducimos que

$$\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}. \quad (12-90)$$

Las cantidades q_k y p_k obedecen, pues, las ecuaciones de movimiento de Hamilton.

En cierto modo, hemos descrito un círculo vicioso. Hemos iniciado este capítulo con un sistema discreto utilizando un sistema numerable de coordenadas generalizadas. Pasando al límite de un sistema continuo de variables hemos podido ver cómo tratar sistemas continuos. Por último, hemos introducido una descripción del sistema continuo mediante un sistema de coordenadas discreto y numerable que obedecen el mismo tipo de Mecánica que el sistema discreto del cual hemos partido. A causa de la correspondencia formal con las variables de sistemas discretos, las cantidades q_k y p_k son los candidatos evidentes para la cuantización cuando pasemos de la teoría clásica a la cuántica de campos. Las q_k corresponden a lo que se denominan «números de ocupación» para el campo.

Podríamos describir el campo mediante coordenadas discretas porque el tamaño finito del sistema y las condiciones de contorno permiten un desarrollo de Fourier discreto. Equivalentemente, podemos decir que el desarrollo se efectúa sobre un espectro discreto de ondas planas. Como el vector de onda \mathbf{k} es, en Mecánica cuántica, directamente proporcional a la cantidad de movimiento de la partícula asociada a la onda plana, los desarrollos que hemos utilizado reciben a veces el nombre de *representación por cantidad de movimiento*. No tenemos por qué limitarnos a desarrollos por ondas planas. Podremos

hallar un conjunto numerable de coordenadas siempre que las funciones campo se puedan desarrollar en función de un sistema discreto de funciones propias ortonormales. Estos desarrollos generales discurren siguiendo los pasos que hemos seguido aquí para funciones de onda planas y se estudian detalladamente en algunas de las referencias citadas al final del capítulo.

12-5 TEORÍA DE CAMPOS RELATIVISTA

En el capítulo 7 vimos que resulta muy difícil construir descripciones de Lagrange y Hamilton, covariantes relativísticamente, de la Mecánica del punto. Parte de la dificultad se puede atribuir a los papeles separados que desempeñan las coordenadas del espacio y el tiempo. Para los puntos materiales, las coordenadas espaciales son variables mecánicas mientras que el tiempo es un parámetro monótono. Ahora bien, en la teoría clásica de campos existe una semejanza natural en el tratamiento de las coordenadas del espacio y del tiempo. Todas son parámetros que, juntos, definen un punto en el continuo espacio-temporal en el cual hay que determinar las variables campo. Aun cuando hasta ahora se ha utilizado el sistema espacio-tiempo de cuatro dimensiones tan sólo por razones de simplicidad en la notación, la manera fácil y natural con que encaja en la formulación nos sugiere que una descripción covariante relativísticamente puede ser muy factible en el caso de campos clásicos. Bastarán pequeños arreglos para que la formulación que ya hemos visto pueda tratar campos relativistas en forma que sea manifiestamente covariante según Lorentz.

Tres puntos exigen una atención concreta: (1) la naturaleza (y métrica) del espacio de cuatro dimensiones que se utiliza, (2) las propiedades de transformación de Lorentz de las cantidades campo, densidades de lagrangiana y funciones con ellas relacionadas; y (3) la descripción covariante de los límites de integración. El cuadriespacio cartesiano simple de coordenadas t, x, y, z , que hemos utilizado implícitamente hasta ahora no resulta conveniente para exhibir la invarianza de Lorentz. De entre las distintas métricas y espacios que aparecen en las teorías de Relatividad restringida (cfr. § § 7-2, 7-3) preferimos utilizar el espacio de Minkowski. En él aparecen ocasionalmente, en cantidades que de no ser así serían cantidades físicas reales, factores que contienen la unidad imaginaria i , pero tiene las virtudes de familiaridad y de una notación sencilla y transparente. (En algunos ejercicios se considera la traducción de la formulación a otras métricas). En consecuencia, los índices que estén representados por letras griegas consideraremos que toman los valores enteros de 1 a 4, siendo $x_4 = ict$. Notemos que las ecuaciones de Lagrange (12-23) no se ven afectadas por este cambio. El término

$$\frac{d}{dx_\nu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{\rho,\nu}} \right)$$

queda inalterado por un cambio de escala de cualquiera de las x_ν y el otro término de la ecuación de Lagrange no contiene coordenadas. Además, el cambio de espacio no afecta a la formulación del principio de Hamilton en la ecuación (12-20), ya que sólo introduce

una constante multiplicativa.

Todas las cantidades relacionadas con el campo y las ecuaciones asociadas deberán tener ahora propiedades covariantes según Lorentz definidas. Las cantidades campo deberán, pues, consistir en tensores de universo de un cierto orden —escalar de universo, vector de universo, etc. En principio, η_p no tiene por qué limitarse a una de estas categorías pero puede representar a un conjunto de ellas; p. ej., dos escalares de universo. Las densidades de lagrangiana y de hamiltoniana también deben ser covariantes. En el principio de Hamilton, el elemento de volumen (dx_ν) del cuadriespacio es invariante ante una transformación de Lorentz. Como solemos considerar que la acción I es un escalar, ello significa que la densidad de lagrangiana (y por tanto \mathcal{H}) deben ser escalares universales. Es decir, deben ser funciones de las cantidades campo (posiblemente junto con cantidades covariantes externas) de tal manera que formen escalares de universo. Se deduce pues que el tensor esfuerzo-energía $T_{\mu\nu}$ definido por la ecuación (12-34) es automáticamente un tensor de universo de segundo orden. Sin embargo, el cambio en el cuadriespacio significa que las componentes de $T_{\mu\nu}$ pueden ver alterado su valor. Desde luego, el cambio de (t, x, y, z) a (x, y, z, ict) no afecta a T_{ij} —si la densidad de lagrangiana es la misma. Para las otras componentes, las ecuaciones (12-34) y (12-34') nos indican que, en las mismas condiciones, las correspondencias son

$$\begin{aligned} T_{44} &\rightarrow T_{00}, \\ T_{j4} &\rightarrow icT_{j0}, \\ T_{4j} &\rightarrow -\frac{i}{c}T_{0j}. \end{aligned} \tag{12-91}$$

La densidad de lagrangiana está definida, desde luego, salvo un factor constante multiplicativo. Dicho factor suele tomarse de manera que T_{44} (o su forma simetrizada) representa directamente la densidad de energía del campo. En el cuadriespacio elegido, las cantidades R_μ (ec. 12-36) se definen ahora en la forma

$$R_\mu = \int T_{\mu 4} dV. \tag{12-92}$$

Consideremos un conjunto P_μ relacionado con ellas en la forma

$$P_\mu = \frac{i}{c}R_\mu. \tag{12-93}$$

De la ecuación (12-91) y de la interpretación de T_{j0} que hemos dado (cfr. p. 677) se deduce entonces que P_i representa las componentes de la cantidad de movimiento total del

campo y que P_4 es $(iE)/c$, donde E es la energía total del campo. Ello sugiere que P_μ forma el vector de universo relativista energía-cantidad de movimiento (cfr. p. 378). No obstante, queda aún por demostrar que R_μ y P_μ se transforman como vectores de universo ante una transformación de Lorentz. Para demostrar esta propiedad hemos de examinar qué significa integración sobre el tríplice en una formulación covariante y también cómo hay que tratar en general los límites de integración.

El primer ejemplo en el que se puede cuestionar la covarianza de los límites de integración es en el principio de Hamilton. En la ecuación (12-20) la integral aparece manifiestamente covariante, pero los límites de integración que se deducen de la ecuación (12-12) no lo son. La integración espacial se extiende a un cierto volumen fijo del espacio de tres dimensiones seguida por una integración en el tiempo entre t_1 y t_2 . Pero una integración extendida a V para t fijo no es un concepto covariante, ya que la simultaneidad («tiempo constante») no se conserva necesariamente en una transformación de Lorentz. Una descripción covariante adecuada es decir que la integración se efectúa sobre una hipersuperficie de tres dimensiones que sea del género espacial. Por superficie del género espacial queremos significar una en la cual todos los vectores de universo contenidos en ella sean del género espacial (cfr. p. 370). Los vectores normales a dicha superficie son del género temporal. Ahora bien, todo vector que una dos puntos de universo en una superficie de tiempo constante será, ciertamente, del género espacial, ya que se anula su componente x_4 . Luego, una superficie a tiempo constante constituye un ejemplo particular de superficie del género espacial. Ahora bien, tal superficie conserva su carácter en todos los sistemas de Lorentz, porque la cualidad de un vector de ser del género espacial o del género temporal no queda afectada por la transformación de Lorentz. De manera análoga, lo que en un sistema es una integración para t en un punto fijo se puede describir covariantemente por una integración extendida a una superficie del género temporal. En un sistema unidimensional (en el espacio físico), la integración en el principio de Hamilton dada por la ecuación (12-12) se extiende al rectángulo representado en la figura 12-4. Una transformación de Lorentz es una rotación en el espacio de Minkowski y los lados del rectángulo no será paralelos a los ejes en el espacio transformado. Pero podemos describir la integración en todos los sistemas de Lorentz extendida a una región del cuatriespacio contenida entre dos superficies hipersuperficie del género espacial limitada aquélla por superficies del género temporal que se corten.

La descripción covariante apropiada de cantidades integrales tales como P_μ viene entonces dada por

$$P_\mu = \frac{i}{c} \int_S T_{\mu\nu} dS_\nu, \tag{12-94}$$

donde la integración se extiende a una región de una hipersuperficie del género espacial para la cual los vectores elemento de superficie, dirigidos según la normal a ésta, son dS_ν . Como $T_{\mu\nu}$ es un tensor de universo de segundo orden, es evidente que la P_μ así definida será un vector de universo. Pero ahora podemos demostrar que las componentes de la P_μ dada por (12-94) se reducen a integrales de volumen en el espacio ordinario de tres dimensiones, con tal que su divergencia sea nula, es decir, satisfaga la ecuación (12-33). Imaginemos una región del cuatriespacio definida por tres superficies: S_1 y S_2 que sean del

género espacial y S_3 que sea del género temporal (cfr. fig. 12-5). Mediante un teorema de divergencia en cuatro dimensiones, podemos sustituir una integral de volumen de una divergencia por una integral de superficie:

$$\int_{V_4} \frac{dT_{\mu\nu}}{dx_\nu} (dx_\nu) = \int_{S_1 + S_2 + S_3} T_{\mu\nu} dS_\nu. \quad (12-95)$$

La integración extendida a S_3 corresponde a una integración respecto a t a \mathbf{r} constante. Tomando el volumen suficientemente extenso, la integral extendida a esta superficie mantendrá \mathbf{r} fuera del sistema, en donde se anulan todas las cantidades campo. La propiedad supuesta de ser nula la divergencia de $T_{\mu\nu}$ hace que también sea nula la integral del primer miembro. Por tanto, si se toman en el mismo sentido las normales a las superficies del género espacial,

$$\int_{S_1} T_{\mu\nu} dS_\nu = \int_{S_2} T_{\mu\nu} dS_\nu. \quad (12-96)$$

Si S_1 es una superficie del género espacial arbitraria cualquiera y es S_2 una superficie particular para la cual x_4 , o sea t , es constante, por la ecuación (12-96) será

$$\int_{S_1} T_{\mu\nu} dS_\nu = \int T_{\mu 4} dV. \quad (12-97)$$

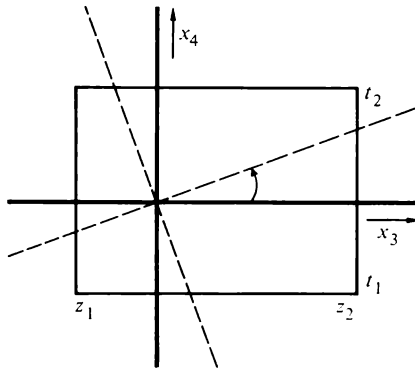


FIGURA 12-4

Regiones de integración en el principio de Hamilton para un sistema que se extiende en una sola dimensión.

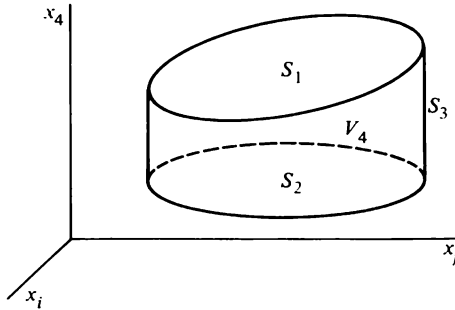


FIGURA 12-5

Volumen de integración esquemático en el espacio de cuatro dimensiones.

La propiedad de transformación como cuadvivector del primer miembro es evidente; por tanto, el segundo miembro, o sea, R_μ se transformará también como cuadvivector en virtud de la ecuación (12-92). Además, si las dos superficies S_1 y S_2 son superficies a t constantes, t_1 y t_2 , respectivamente, la ecuación (12-96) será equivalente a

$$R_\mu(t_1) = R_\mu(t_2),$$

que es, pues, la manera covariante de demostrar que R_μ se conserva en el tiempo.

Por tanto, teniendo un poco de cuidado, podremos aún utilizar dentro del marco de una teoría relativista de campos clásicos las cantidades integrales que se conservan. No siempre podremos llevar a cabo la correspondencia detallada, pero será suficiente en la mayoría de casos que la integración de volumen se refiera a un sistema de Lorentz particular en el cual la hipersuperficie del género espacial sea una región en el espacio de tres dimensiones a t constante. Para la densidad de momento cinético, podemos notar que el análogo covariante de \mathcal{M}_{ij} , (ec. 12-46) es un cuadvitensor de tercer orden:

$$\mathcal{M}_{\mu\nu\lambda} = \frac{i}{c} (x_\mu T_{\nu\lambda} - x_\nu T_{\mu\lambda}), \tag{12-98}$$

que es antisimétrico en μ y ν . La cantidad global o integral correspondiente es

$$M_{\mu\nu} = \int \mathcal{M}_{\mu\nu\lambda} dS_\lambda, \tag{12-99}$$

donde la integración se extiende a una hipersuperficie del género espacial. Si se toma el sistema de Lorentz de manera que la superficie sea a t constante, entonces

$$M_{\mu\nu} \rightarrow \int \mathcal{H}_{\mu\nu 4} dV,$$

lo cual corresponde a la definición anterior. El resto del razonamiento acerca de la conservación de M_{ij} para tensores esfuerzo-energía simétricos podrá entonces realizarse como antes considerando este sistema de Lorentz particular.

Tal como se ha construido en el apartado anterior, la formulación de Hamilton distingue netamente entre la coordenada tiempo y las coordenadas espaciales. Esto no es decir que sea necesariamente no relativista sino, simplemente, que la formulación no es manifiestamente covariante. Debemos imaginar el esquema **hamiltoniano** construido en función del tiempo como el que ve cada observador particular. Si las cantidades campo y las funciones derivadas tienen propiedades de transformación adecuadas, esta construcción para cada sistema de Lorentz no vulnera la Relatividad restringida.

Aún debemos hacer otra puntualización. Representando por η_p un conjunto de cantidades campo covariantes, permitimos la posibilidad de que el sistema consista en dos o más campos en interacción. La densidad de lagrangiana completa puede consistir en una suma de densidades de lagrangiana representativas de los campos libres más términos que describan las interacciones entre campos. Recordemos que una de las dificultades de la Mecánica del punto relativista residía en el problema de considerar **interacciones entre partículas que implicaban necesariamente acción a distancia**. No obstante, las interacciones entre campos pueden tener lugar en un punto y, por tanto, ser compatibles con la Relatividad restringida. Podemos progresar aún más y tratar la interacción entre un campo y una partícula en un punto dado del espacio-tiempo. Existe, pues, la posibilidad de considerar relativísticamente un sistema consistente en un campo continuo, una partícula discreta y la interacción entre ellos. En el próximo apartado veremos como se puede hacer esto en casos concretos, lo cual proporciona ejemplos de teorías de campos relativistas.

12-6 EJEMPLOS DE TEORÍAS DE CAMPO RELATIVISTAS

Vamos a estudiar tres ejemplos, cada uno de complejidad mayor que el anterior.

A. Campo escalar complejo. Todo campo complejo vendrá descrito por dos partes independientes, las cuales podrán expresarse en la forma de parte real y parte imaginaria del campo o en la del propio campo complejo y su complejo conjugado. Vamos a seguir la segunda alternativa. En consecuencia, la densidad de lagrangiana y las funciones asociadas las daremos en función de dos variables campo independientes, ϕ y ϕ^* , cada una de las cuales serán escalares de universo. † Para este ejemplo particular tomaremos la

† Según veremos en el apartado siguiente, los campos complejos conducen de manera natural a una densidad asociada de carga y de corriente y es esta la razón principal de su introducción en las teorías físicas.

densidad de lagrangiana

$$\mathcal{L} = -c^2 \phi_{,i} \phi^{*,i} - \mu_0^2 c^2 \phi \phi^*, \tag{12-100}$$

donde μ_0 es una constante. Observemos que, tal como se estipuló, \mathcal{L} es un escalar de universo. Expresada en función de las variables del espacio y del tiempo, podemos escribir \mathcal{L} en la forma

$$\mathcal{L} = \dot{\phi} \dot{\phi}^* - c^2 \nabla \phi \cdot \nabla \phi^* - \mu_0^2 c^2 \phi \phi^*. \tag{12-100'}$$

Para obtener la ecuación de campo para la cual $\eta_\rho = \phi^*$ observemos que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^{*,,v}} = -c^2 \phi_{,v}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^*} = -\mu_0^2 c^2 \phi.$$

Luego, la ecuación de campo de Euler-Lagrange es

$$\phi_{,vv} - \mu_0^2 \phi = 0, \tag{12-101}$$

o bien, en formas equivalentes,

$$\sum_v \frac{d^2 \phi}{dx_v^2} - \mu_0^2 \phi = 0 \tag{12-102}$$

y

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{d^2 \phi}{dt^2} - \mu_0^2 \phi = 0. \tag{12-102'}$$

Mediante el D'Alembertiano (antes definido, p. 373), la ecuación de campo se puede también escribir en forma covariante así:

$$(\square^2 - \mu_0^2) \phi = 0. \tag{12-103}$$

Análogamente, por la simetría de \mathcal{L} , la ecuación de campo que se obtiene cuando $\eta_\rho = \phi^*$ es

$$(\square^2 - \mu_0^2)\phi^* = 0. \quad (12-103')$$

La ecuación de campo básica satisfecha tanto por ϕ como por ϕ^* se denomina ecuación de Klein-Gordon† y tal como se da aquí representa el análogo relativista de la ecuación de Schrödinger para una partícula cargada de spin cero y energía de la masa en reposo μ_0 .

El tensor esfuerzo-energía definido por la ecuación (12-34) tiene por componentes

$$T_{\mu\nu} = -c^2\phi_{,\mu}\phi^*_{,\nu} - c^2\phi^*_{,\mu}\phi_{,\nu} + c^2(\phi_{,\lambda}\phi^*_{,\lambda} + \mu_0^2\phi\phi^*)\delta_{\mu\nu} \quad (12-104)$$

y es claramente simétrico. Como la densidad de lagrangiana describe un campo libre, sin interacciones con el mundo exterior, \mathcal{L} no contiene explícitamente a x_ν y se cumple el teorema de conservación (12-33) para T_{uv} , según puede comprobarse directamente. Para introducir la formulación de Hamilton hemos de distinguir entre el tiempo y las coordenadas espaciales en un sistema de Lorentz particular. Las cantidades de movimiento conjugadas, según la ecuación (12-53), serán entonces

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \dot{\phi}^*, \quad \pi^* = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}^*} = \dot{\phi}. \quad (12-105)$$

Se deduce que la densidad de hamiltoniana (que tiene la misma magnitud que T_{44}) adopta la forma

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &\equiv \pi\dot{\phi} + \pi^*\dot{\phi}^* - \mathcal{L}, \\ &= \pi\pi^* + c^2\nabla\phi \cdot \nabla\phi^* + \mu_0^2c^2\phi\phi^*. \end{aligned} \quad (12-106)$$

Dejamos para los ejercicios la verificación de que las ecuaciones de movimiento de Hamilton se reducen a las ecuaciones (12-105) y a las ecuaciones de Klein-Gordon. De momento, lo que vamos a hacer es ilustrar la transformación a la representación por cantidad de movimiento. Los desarrollos (12-79) y (12-82) se pueden introducir en la densidad de hamiltoniana. Como el campo no es real, *no* tenemos que $q_k^* = q_{-k}$. En realidad, ahora q_k y q_k^* representan dos conjuntos independientes de coordenadas

† En parte de la literatura moderna, la ecuación de Klein-Gordon en la forma de la ecuación (12-103) se da con un signo más en el término $\mu_0^2\phi$. Ello se debe a la utilización de la métrica dada por la ecuación (7-53) con el correspondiente cambio de signo en la definición del D'Alembertiano. Véase el ejercicio 7.

discretas, representando uno ϕ y el otro ϕ^* . La hamiltoniana total es una suma de integrales de volumen extendida a los tres términos de la ecuación (12-106). Como ejemplo típico, consideremos

$$\mu_0^2 \int \phi \phi^* dV = \frac{\mu_0^2}{V} \sum_{k,k'} \int q_k q_{k'}^* e^{i(k-k') \cdot r} dV,$$

que por la ecuación (12-80) se reduce a

$$\mu_0^2 q_k q_k^*.$$

El único término que precisa de observación especial es el que contiene las divergencias, el cual introduce en el integrando un factor $(ik) \cdot (-ik')$. La forma final de H se puede escribir así:

$$H = p_k p_k^* + \omega_k^2 q_k q_k^*, \tag{12-107}$$

donde

$$\omega_k^2 = c^2 k^2 + \mu_0^2. \tag{12-108}$$

Cada uno de los términos del sumatorio de la ecuación (12-107) tiene la forma de oscilador armónico de masa unidad y pulsación ω_k . Podemos ver esto explícitamente calculando las ecuaciones de movimiento de Hamilton (12-89) y (12-90). En las representaciones por cantidad de movimiento u onda plana, se sustituirán así los campos ϕ y ϕ^* por sistemas discretos de osciladores armónicos, de manera parecida a como se considera el campo sonoro en un sólido finito como colección de «fonones». El espectro discreto de «vibraciones» de nuestro campo cargado escalar viene dado por la ecuación (12-108). La cuantización del campo (es decir, la llamada segunda cuantización) se realiza de manera muy sencilla a través de la representación por cantidad de movimiento. En realidad, el movimiento de cada uno de los osciladores armónicos se cuantiza de la misma manera que se haría con un oscilador armónico real. Ahora bien, este tema escapa de nuestro ámbito.

B. Ecuación de seno-Gordon y campo asociado. Si se tomara real el campo escalar del ejemplo anterior (es decir, $\phi^* = \phi$) y existiera en una sola dimensión del espacio, la densidad de lagrangiana evidente para el modelo de la ecuación (12-100) sería

$$\mathcal{L} = \frac{c^2}{2} \left(\frac{\dot{\phi}^2}{c^2} - \left(\frac{\hat{\phi}}{\hat{c}x} \right)^2 - \mu_0^2 \phi^2 \right). \tag{12-109}$$

(El factor $\frac{1}{2}$) lo hemos introducido por conveniencia; evidentemente, no afecta a la forma de las ecuaciones de movimiento.) La ecuación de campo asociada es

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \mu_0^2 \phi, \quad (12-110)$$

que es la ecuación de Klein-Gordon unidimensional. Notemos que es lineal en el campo $\phi(x, t)$.

Podemos considerar la densidad de lagrangiana de la ecuación (12-109) como aproximación de campo débil de una densidad de lagrangiana de la forma

$$\mathcal{L} = \frac{c^2}{2} \left(\dot{\phi}^2 - \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 \right) - \mu_0^2 c^2 (1 - \cos \phi), \quad (12-111)$$

que tiene la correspondiente ecuación de campo

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \mu_0^2 \text{sen } \phi. \quad (12-112)$$

Era inevitable que, tal vez un tanto frívolamente, se haya dado a la ecuación (12-112) el nombre de ecuación de seno-Gordon. Si la ecuación (12-110) de Klein-Gordon recuerda al oscilador armónico, el término «potencial» de la lagrangiana (12-111) recuerda al término potencial del péndulo lineal. A la ecuación (12-112) se le ha dado también, quizá de manera más apropiada, el nombre de ecuación del péndulo.

En este mundo unidimensional, el tensor esfuerzo-energía sólo tiene cuatro componentes. Como tampoco ahora aparecen x y t explícitamente en \mathcal{L} , los elementos del tensor satisfacen las ecuaciones de conservación, que en este caso son dos. Dejamos los detalles para los ejercicios, si bien la densidad de energía T_{44} presenta un interés particular:

$$T_{44} = \frac{1}{2} \left(\dot{\phi}^2 + c^2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 \right) + \mu_0^2 c^2 (1 - \cos \phi),$$

que, desde luego, tiene igual magnitud que la densidad de hamiltoniana

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \left(\pi^2 + c^2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 \right) + \mu_0^2 c^2 (1 - \cos \phi), \quad (12-113)$$

donde la cantidad de movimiento conjugada es

$$\pi(x, t) = \dot{\phi}.$$

La representación por cantidad de movimiento del campo de Klein-Gordon como suma extendida a osciladores armónicos significa que en el caso unidimensional se puede construir el campo en forma de superposición de ondas planas de la forma

$$q_k(t) e^{ikr} = A_0(k) e^{i(kr - \omega_k t)},$$

donde k y ω_k están relacionadas mediante la *relación de dispersión* (ec. 12-108). En el caso de un campo que obedezca la ecuación de seno-Gordon es mucho más difícil aplicar una representación por cantidad de movimiento, a causa de la presencia del término de \mathcal{H} que contiene $\cos \phi$. Pero aún podemos resolver la ecuación de seno-Gordon con algo parecido a una onda progresiva. Una ϕ solución de la ecuación (12-112) que tenga la forma de una perturbación que se propague con velocidad v , pero que por lo demás conserve su forma, debe ser función exclusiva de $\tau = t - x/v$. En tal caso, la ecuación (12-112) se reduce a

$$\frac{d^2 \phi}{d\tau^2} - A \sin \phi = 0,$$

donde

$$A = \frac{\mu_0^2 c^2 v^2}{c^2 - v^2}. \quad (12-114)$$

En función de la variable τ , la ecuación de movimiento es la de un péndulo simple de amplitud finita. En el caso de ser muy pequeña la amplitud, sabemos que ϕ es un movimiento armónico simple en τ con ω dada por la ecuación (12-108) para un número separado de onda $k = \omega/v$, independiente de la amplitud. Si la amplitud es finita, sabemos también de nuestro estudio del péndulo que, aun cuando ϕ siga siendo periódica, la frecuencia también dependerá de la amplitud. Es decir, la relación de dispersión dependerá también de la amplitud. Desde luego, esta es una característica de las ecuaciones alineales, de las cuales la ecuación de seno-Gordon constituye un ejemplo. La ecuación de Klein-Gordon es lineal, pero la ecuación de dispersión (12-108) decimos que es alineal, es decir, ω_k no es función lineal de k . Sólo se hace lineal cuando $\mu_0 \rightarrow 0$, que es cuando la ecuación de Klein-Gordon se reduce a la ecuación de onda lineal usual.

Podemos, pues, describir la ecuación de seno-Gordon diciendo que es alineal, con relación de dispersión alineal dependiente de la amplitud. Un examen más detenido revela que puede tener soluciones con propiedades compartidas tan sólo por unas pocas

ecuaciones alineales. Dichas soluciones son perturbaciones en onda progresiva que pueden interactuar entre sí —atravesándose unas a otras— y que emergen sin variar su forma salvo, quizá, una rotación de fase. Tales soluciones se encuentran también, por ejemplo, en el caso de la ecuación alineal de Korteweg-deVries,

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \alpha \phi \frac{\partial \phi}{\partial x} + \nu \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} = 0, \quad (12-115)$$

donde α y ν son constantes. Estas ondas solitarias que conservan su forma incluso a través de interacciones se han denominado «solitones» y están encontrando un campo de aplicación cada vez mayor en toda la Física, desde la de partículas elementales a la Física del estado sólido. Por ejemplo, la ecuación del péndulo de seno-Gordon se ha utilizado para describir familias de partículas elementales y también aparece en relación con la teoría de la unión de Josephson.

C. Campo clásico de una partícula de Dirac. Aquí, el campo consiste en cuatro cantidades escalares complejas que aparecen en dos ordenaciones, ψ y ψ^\dagger . Para nuestros fines, podemos considerar que ψ es una matriz columna de cuatro elementos y que ψ^\dagger es la matriz adjunta. Densidad de lagrangiana adecuada es

$$\mathcal{L} = i\psi^\dagger \gamma_\mu \dot{\psi} + m\psi^\dagger \psi. \quad (12-116)$$

Aquí m es una constante igual a la masa de la partícula que se representa (en ciertas unidades) y γ_μ es un conjunto de cuatro matrices de Dirac 4×4 que son generalizaciones de las matrices 2×2 de Pauli σ_i , utilizadas en el capítulo 4 (cfr. ec. 4-74).^{*} El campo tendrá, pues, ocho componentes, cuatro para ψ y cuatro para ψ^\dagger . Si ψ_λ representa un elemento de ψ^\dagger , la \mathcal{L} de la ecuación (12-116) podría escribirse en forma desarrollada así:

$$\mathcal{L} = i\psi_\nu^\dagger (\gamma_\mu)_{\nu\lambda} \dot{\psi}_{\lambda,\mu} + m\psi_\nu^\dagger \psi_\nu.$$

Aquí, $(\gamma_\mu)_{\nu\lambda}$ es el elemento $\nu\lambda$ de γ_μ . Sin embargo, es mucho más conveniente e igualmente concreto conservar siempre la notación matricial para ψ y ψ^\dagger .

^{*} Representadas en forma de matrices 2×2 , las matrices de Dirac se pueden definir en la forma

$$\gamma_i = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma_i \\ -\sigma_i & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \gamma_4 = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -1 \end{pmatrix}.$$

Las representaciones explícitas no son necesarias para ilustrar ψ, ψ^\dagger como ejemplo de campo clásico.

Como \mathcal{L} no contiene $\psi^\dagger_{,\mu}$, las ecuaciones de Euler-Lagrange para las variables ψ^\dagger se obtienen de manera muy sencilla:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^\dagger} = i\gamma_\mu \psi_{,\mu} + m\psi = 0. \tag{12-117}$$

Para las variables ψ , las ecuaciones de Euler-Lagrange correspondientes presentan una forma casi igualmente sencilla:

$$\frac{d}{dx_\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{,\mu}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = i\psi^\dagger_{,\mu} \gamma_\mu - m\psi^\dagger = 0. \tag{12-118}$$

Las ecuaciones (12-117) constituyen la conocida ecuación de onda de Dirac y las ecuaciones (12-118) corresponden a la forma adjunta.

Fácilmente se ve que el tensor esfuerzo-energía formal es

$$T_{\mu\nu} = i\psi^\dagger \gamma_\nu \psi_{,\mu} - \mathcal{L} \delta_{\mu\nu},$$

según puede comprobarse directamente por medio de la representación explícita de ψ y ψ^\dagger en forma de matrices. No obstante, $T_{\mu\nu}$ no es simétrico así como así. Además, la formulación de Hamilton de § 12-4 no se puede efectuar porque \mathcal{L} es, como máximo, lineal en las derivadas respecto al tiempo de las cantidades campo. Así pues, π no contendrá ni $\dot{\psi}$ ni $\dot{\psi}^\dagger$ y al igual que sucede en Mecánica del punto, no podemos invertir las ecuaciones de definición para eliminar las derivadas respecto al tiempo. El campo de Dirac presenta otros aspectos interesantes que aparecerán al final de este apartado y en el siguiente.

D. Campo electromagnético. El campo electromagnético constituye, probablemente, el ejemplo más conocido de campo clásico no construido sobre un sistema mecánico. Así y todo, su formulación es considerablemente más complicada que los ejemplos que hemos considerado y en ocasiones, resulta ambigua. No podemos esperar penetrar en todas sus ramificaciones, pero tocaremos algunos de sus aspectos más importantes.

Las ecuaciones de Maxwell (ec. 1-60) en forma microscópica (es decir, no en un medio macroscópico) consisten en dos ecuaciones homogéneas,

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \tag{12-119}$$

y dos ecuaciones no homogéneas

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi\mathbf{j}}{c}. \quad (12-120)$$

Las ecuaciones homogéneas implican que \mathbf{E} y \mathbf{B} se pueden expresar en función de un potencial escalar ϕ y un potencial vector \mathbf{A} que, juntos, constituyen un cuadvectores A_μ . Sin embargo, las ecuaciones (1-62) y (1-63), que definen las relaciones existentes entre A_μ y (\mathbf{E}, \mathbf{B}) , no fijan unívocamente los valores de los potenciales. En verdad, A_μ está determinado salvo el cuadrigradiante de una función escalar cualquiera. Es necesario añadir una relación adicional o *condición de medida*. En la mayoría de nuestras consideraciones no será necesario fijar explícitamente el calibre de la medida. Cuando sea necesaria una condición de medida concreta utilizaremos la condición de Lorentz (cfr. p. 372), la cual conduce a formas particularmente sencillas de las ecuaciones de onda y puede enunciarse en la forma evidentemente covariante

$$\frac{dA_\mu}{dx_\mu} = 0. \quad (12-121)$$

Las ecuaciones (1-62) y (1-63) pueden también expresarse covariantemente mediante un tensor universo antisimétrico de segundo orden, el *tensor campo* $F_{\mu\nu}$, definido en la forma

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} \equiv A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu}. \quad (12-122)$$

La incertidumbre de medida de A_μ aparece en el hecho de que si es Λ una función escalar cualquiera, podremos sumar a A_μ

$$\frac{d\Lambda}{dx_\mu} \equiv \Lambda_{,\mu} \quad (12-123)$$

sin que ello afecte al valor de $F_{\mu\nu}$. Está claro que $F_{\mu\nu}$ es una especie de rotacional cuatridimensional del vector A_μ . Los elementos puramente espaciales, F_{ij} , son las componentes del rotacional de \mathbf{A} y por tanto vienen dados en función de \mathbf{B} . Para los elementos F_{4j} tenemos

$$F_{4j} = \frac{\partial A_j}{\partial x_4} - \frac{\partial A_4}{\partial x_j} = -\frac{i}{c} \frac{\partial A_j}{\partial t} - i \frac{\partial \phi}{\partial x_j} = iE_j,$$

en virtud de la ecuación (1-63). Por tanto, la forma completa del tensor campo es

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 & B_3 & -B_2 & -iE_1 \\ -B_3 & 0 & B_1 & -iE_2 \\ B_2 & -B_1 & 0 & -iE_3 \\ iE_1 & iE_2 & iE_3 & 0 \end{pmatrix}. \quad (12-124)$$

Es de esperar que las ecuaciones homogéneas (12-119) se satisfagan idénticamente por las $F_{\mu\nu}$, ya que dichas ecuaciones han conducido a los potenciales. No es difícil ver que las ecuaciones (12-119) pueden escribirse en forma de las cuatro ecuaciones

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu} = 0, \quad (\text{no hay convenio de suma}) \quad (12-125)$$

donde μ, ν, λ constituyen un conjunto cíclico cualquiera de tres índices elegidos entre los cuatro.* (Cuando tomemos μ, ν, λ respectivamente iguales a 1, 2, 3, tenemos evidentemente la ecuación $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$.) Pero en función de A_μ las ecuaciones (12-125) son idénticamente ciertas, ya que se pueden escribir en la forma

$$A_{\nu,\mu\lambda} - A_{\mu,\nu\lambda} + A_{\mu,\lambda\nu} - A_{\lambda,\mu\nu} + A_{\lambda,\nu\mu} - A_{\nu,\lambda\mu} = 0,$$

que se anula por destruirse sus términos dos a dos. Por tanto, tan sólo las ecuaciones no homogéneas definirán el campo en función de sus fuentes y son las que deberemos considerar como ecuaciones de campo. En función del tensor campo, las ecuaciones (12-120) se pueden escribir en la forma

$$\frac{dF_{\mu\nu}}{dx_\nu} = \frac{4\pi j_\mu}{c} \quad (12-126)$$

* La ecuación (12-125) se puede escribir en forma más compacta (con el convenio de suma) en la forma

$$\epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} \frac{\partial F_{\lambda\rho}}{\partial x_\nu} = 0, \quad (12-125')$$

donde $\epsilon_{\mu\nu\lambda\rho}$ es el símbolo permutación cuadridimensional (cfr. p. 219).

donde, como antes, j_μ es el cuadrivector $(\mathbf{j}, i\rho c)$. Por ejemplo, cuando $\mu = 4$ la ecuación 12-126 es evidentemente la ecuación $|\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho$. Las ecuaciones (12-125) y (12-126) juntas constituyen la forma covariante de las ecuaciones de Maxwell. Cuando persigamos una formulación de Lagrange del campo electromagnético sólo tendremos que ocuparnos de las ecuaciones (12-126), ya que las demás se satisfacen por definición.

Si tratamos las componentes A_μ del potencial como cantidades campo* será adecuada para el campo electromagnético la densidad de lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{F_{\lambda\rho}F_{\lambda\rho}}{16\pi} + \frac{j_\lambda A_\lambda}{c}. \quad (12-127)$$

Para obtener las ecuaciones de Euler-Lagrange, notemos que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} = \frac{j_\mu}{c}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\mu,\nu}} = -\frac{F_{\lambda\rho}}{8\pi} \frac{\partial F_{\lambda\rho}}{\partial A_{\mu,\nu}}.$$

Ahora bien, según las ecuaciones de definición (12-122), la derivada de $F_{\lambda\rho}$ se anula excepto cuando $\lambda = \mu$, $\rho = \mu$ y $\lambda = \nu$, $\rho = \mu$. Luego

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\mu,\nu}} = \frac{F_{\mu\nu}}{8\pi} - \frac{F_{\nu\mu}}{8\pi} = \frac{F_{\mu\nu}}{4\pi}, \quad (12-128)$$

y las ecuaciones de Euler-Lagrange son

$$\frac{1}{4\pi} \frac{dF_{\mu\nu}}{dx_\nu} - \frac{j_\mu}{c} = 0,$$

que coincide con la ecuación (12-126).†

* Parte de la dificultad del tratamiento del campo electromagnético surge del hecho de que las componentes A_μ no son totalmente independientes —para ser únicas deberían estar relacionadas mediante una cierta condición de medida, tal como la ecuación (12-121). No obstante, para nuestros fines bastará tratar la condición de medida como ligadura «débil» en el sentido de la p. 405.

† El segundo término de \mathcal{L} (ec. 12-127) aparece frecuentemente en la literatura con signo menos, lo cual es consecuencia de utilizar una métrica diferente para el cuadrivector. Véase el ejercicio 14 de este capítulo.

La densidad de lagrangiana de la ecuación (12-127) está claramente en forma de un término de campo libre más un término que describe la interacción con el universo exterior en función del cuadvectores densidad de corriente. En general, \mathcal{L} será por tanto función explícita de x_μ a través de la dependencia espacial y temporal de las cargas y las corrientes. Tan sólo en el caso de campo libre habrá corrientes conservativas en función del tensor esfuerzo-energía. El estudio del tensor esfuerzo-energía se limitará, por tanto, a los campos libres. De la ecuación (12-128) se deduce que, entonces, $T_{\mu\nu}$ queda en la forma

$$T_{\mu\nu} \equiv A_{\lambda,\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\lambda,\nu}} - \mathcal{L} \delta_{\mu\nu} = \frac{A_{\lambda,\mu} F_{\lambda\nu}}{4\pi} - \mathcal{L} \delta_{\mu\nu}.$$

En esta forma, $T_{\mu\nu}$ no es simétrico. Pero si le restamos un término que contenga la suma $A_{\mu,\lambda} F_{\lambda\nu}$ podremos obtener una forma simetrizada:

$$\hat{T}_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} - \frac{A_{\mu,\lambda} F_{\lambda\nu}}{4\pi} = -\frac{F_{\lambda\mu} F_{\lambda\nu}}{4\pi} - \mathcal{L} \delta_{\mu\nu}. \tag{12-129}$$

Ya hemos indicado anteriormente que esto es legítimo, sin que tenga efecto alguno sobre las leyes de conservación o las cantidades integrales, si el término añadido tiene una forma concreta, tal como se ha descrito en la p. 679. Para ver que el término cuadra con lo prescrito, notemos que

$$A_{\mu,\lambda} F_{\lambda\nu} = \frac{d}{dx_\lambda} (A_\mu F_{\lambda\nu}) - A_\mu \frac{dF_{\lambda\nu}}{dx_\lambda}.$$

Pero, en ausencia de corrientes exteriores,

$$\frac{dF_{\lambda\nu}}{dx_\lambda} = -\frac{dF_{\nu\lambda}}{dx_\lambda} = 0$$

según la ecuación (12-126). Además, $A_\mu F_{\lambda\nu} = -A_\mu F_{\nu\lambda}$, por lo que el término simetrizador es en verdad la cuadvivergencia de una cantidad con las propiedades de antisimetría requeridas.

Consideremos ahora \hat{T}_{44} , que debe ser una densidad de energía. Según la ecuación (12-129)

$$\hat{T}_{44} = -\frac{F_{\lambda 4} F_{\lambda 4}}{4\pi} + \frac{F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}}{16\pi}.$$

En la forma explícita del tensor campo vemos que $F_{\mathcal{M}} F_{\mathcal{M}} = -E^2$ y $F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}$, que es precisamente la suma de los cuadrados de todos los términos del tensor es igual a $2(B^2 - E^2)$. Luego,

$$\hat{T}_{44} = \frac{E^2}{4\pi} + \frac{B^2 - E^2}{8\pi} = \frac{E^2 + B^2}{8\pi}, \quad (12-130)$$

que es la expresión usual de la densidad de energía del campo electromagnético. De la ecuación (12-91) podríamos esperar también que $ic\hat{T}_{\nu}$ fuesen las componentes de un vector densidad de flujo de energía. Consideremos, por ejemplo,

$$ic\hat{T}_{41} = -ic\frac{F_{\lambda 4}F_{\lambda 1}}{4\pi} = -\frac{ic}{4\pi}(iE_2B_3 - iE_3B_2)$$

o sea

$$ic\hat{T}_{41} = \frac{c}{4\pi}(\mathbf{E} \times \mathbf{B})_1,$$

que es la primera componente del vector de Poynting que mide el flujo de energía del campo electromagnético. Las restantes componentes de $\hat{T}_{\mu\nu}$ también concuerdan con la interpretación conocida de las propiedades del campo electromagnético, según se verá en los ejercicios del final del capítulo. Notemos que si hubiéramos utilizado $T_{\mu\nu}$ en vez de la forma simétrica, ni la densidad de energía ni la densidad de flujo de energía tendrían la forma usual. Pero las cantidades integrales en volúmenes o en superficies cerradas que los encierren serían las mismas y éstas son, después de todo, las observables.

Podemos hacer alguna cosita más. La densidad de lagrangiana se puede expresar directamente en función de A_μ desarrollando $F_{\lambda\rho}$. De la ecuación (12-122) tenemos que

$$F_{\lambda\rho}F_{\lambda\rho} = 2(A_{\rho,\lambda}A_{\rho,\lambda} - A_{\lambda,\rho}A_{\rho,\lambda}).$$

Pero el segundo término del paréntesis se puede aún transformar algo:

$$A_{\lambda,\rho}A_{\rho,\lambda} \equiv \frac{dA_\lambda}{dx_\rho} \frac{dA_\rho}{dx_\lambda} = \frac{d}{dx_\rho} \left(A_\lambda \frac{dA_\rho}{dx_\lambda} \right) - A_\lambda \frac{d}{dx_\lambda} \left(\frac{dA_\rho}{dx_\rho} \right).$$

El primer término del último miembro no contribuye a la integral de acción porque es una cuadrivergencia que conduce a una integral extendida a una superficie en la cual se anula A_λ . Si admitimos la condición de Lorentz (12-121), el término restante se anula

idénticamente. Luego, para la condición de Lorentz, la densidad de lagrangiana es equivalente a

$$\mathcal{L}' = -\frac{A_{\mu,\nu}A_{\mu,\nu}}{8\pi} + \frac{j_{\mu}A_{\mu}}{c}. \quad (12-131)$$

Para esta densidad de lagrangiana, los términos que entran en las ecuaciones de Euler-Lagrange son

$$\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial A_{\mu,\nu}} = -\frac{A_{\mu,\nu}}{4\pi}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial A_{\mu}} = \frac{j_{\mu}}{c}.$$

Luego, la ecuación (12-131) implica las ecuaciones de campo

$$\square^2 A_{\mu} + \frac{4\pi j_{\mu}}{c} = 0,$$

que son las conocidas ecuaciones de onda para el cuadripotencial vector (ec. 7-81) cuando se utiliza la condición de Lorentz.

Por último, ya hemos hecho notar que la \mathcal{L} para un campo electromagnético (ec. 12-131) consta de una densidad de lagrangiana para campo libre más un término que describe la interacción de una densidad de carga y de una densidad de corriente continuas con el campo. Resulta tentador ver hasta dónde podemos llegar en el intento de introducir interacciones campo-partícula, localizando la carga en un punto. Haremos esto considerando la situación física en un determinado sistema de Lorentz, es decir, vista por un observador particular. Con ello se abandona la covarianza manifiesta, pero el resultado sigue conforme con la Relatividad restringida ya que se deriva de una teoría claramente relativista. La densidad de corriente constituye una medida del movimiento de las cargas y en un sistema dado cualquiera, \mathbf{j} está definida en función de la densidad de carga ρ mediante la relación

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t)\mathbf{v}(\mathbf{r}, t).$$

Aquí, \mathbf{v} es el «campo» de velocidades de la distribución continua de cargas. La localización podemos realizarla con ayuda de la conocida función δ de Dirac. En forma tridimensional, la función δ tiene la propiedad de que si es $f(\mathbf{r})$ una función cualquiera del espacio, se cumple que

$$\int dV f(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{s}(t)) = f(\mathbf{s}),$$

donde $\mathbf{s}(t)$ es la posición espacial de una partícula, por ejemplo, en el instante t (mientras \mathbf{s} esté dentro del volumen de integración). Así pues, la carga espacial y la densidad de corriente correspondientes a una partícula de carga q en el punto \mathbf{s} es

$$\rho = q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{s})$$

y

$$\mathbf{j} = q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{s})\mathbf{v}(\mathbf{r}).$$

Si escribimos la \mathcal{L} de la ecuación (12-127) como suma de un término de campo libre \mathcal{L}_0 y un término de interacción, la lagrangiana vista desde el sistema de Lorentz será

$$\begin{aligned} L &= \int dV \mathcal{L}_0 - \int dV \rho \phi + \frac{1}{c} \int dV \mathbf{A} \cdot \mathbf{j} \\ &= \int dV \mathcal{L}_0 - q\phi + \frac{q}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}. \end{aligned} \quad (12 \ 132)$$

Los términos de interacción de la ecuación (12-132) son exactamente los mismos que los de la ecuación (7-141) de la lagrangiana de una partícula en un campo electromagnético. Ello nos sugiere que se puede formar una lagrangiana para el sistema total de partícula y campo la cual, análoga a la ecuación (7-141), tendría el aspecto siguiente:

$$L = -mc^2\sqrt{1 - \beta^2} - q\phi + \frac{q}{c} \mathbf{v} \cdot \mathbf{A} + \int dV \mathcal{L}_0. \quad (12 \ 133)$$

Considerada como función del tensor campo o de los potenciales, esta lagrangiana implica las ecuaciones de campo; considerada como función de las coordenadas de la partícula, L conduce a las ecuaciones de movimiento de la partícula. Las descripciones mecánicas del campo continuo y de la partícula discreta se han expresado así con un formalismo común.

Describir covariantemente la interacción campo-partícula nos lleva a las mismas dificultades experimentadas en §7-9 cuando se buscaba una formulación de Lagrange covariante para la partícula libre. Resulta mucho más sencillo si la propia partícula se describe mediante un campo (como en Mecánica cuántica relativista) ya que las interacciones campo-campo caen de manera natural en una imagen covariante. Así, el campo complejo de Dirac, ilustrado en el ejemplo anterior, constituye la representación cuántica relativista de un electrón con spin $\frac{1}{2}$. En la teoría de Dirac hay un cuadvectores densidad de corriente de carga dado por

$$j_\mu = -q\Psi^\dagger\gamma_\mu\Psi, \quad (12 \ 134)$$

por lo que la densidad de lagrangiana de interacción es

$$\frac{j_\mu A_\mu}{c} = -\frac{q}{c} \psi^\dagger \gamma_\mu A_\mu \psi. \quad (12-135)$$

Una densidad de lagrangiana total para los dos campos y sus interacciones mutuas tendría, por la condición de Lorentz, la forma

$$\mathcal{L} = -\frac{A_{\mu\nu} A_{\mu\nu}}{8\pi} - \frac{q}{c} \psi^\dagger \gamma_\mu A_\mu \psi + i\psi^\dagger \gamma_\mu \psi_{,\mu} + m\psi^\dagger \psi. \quad (12-136)$$

Tomando ψ^\dagger por variables campo, podemos escribir la ecuación de campo resultante

$$i\gamma_\mu \psi_{,\mu} - \frac{q}{c} \gamma_\mu A_\mu \psi + m\psi = 0 \quad (12-137)$$

o sea

$$\gamma_\mu \left[i \frac{d}{dx_\mu} - \frac{q}{c} A_\mu \right] \psi + m\psi = 0, \quad (12-137')$$

que es la ecuación de Dirac con interacción electromagnética. La expresión entre corchetes de la ecuación (12-137') tiene una forma conocida, ya que el producto de i por el operador derivada constituye la representación mecanocuántica del operador cantidad de movimiento (en la notación que estamos utilizando, en la cual se hace $\hbar = 1$). Por tanto, el corchete es la analogía cuántica de Dirac de la expresión $p_\mu - q/cA_\mu$, tantas veces encontrada con anterioridad. Si por variables campo tomamos las A_μ , las ecuaciones de campo serán

$$\square^2 A_\mu = \frac{4\pi q}{c} \psi^\dagger \gamma_\mu \psi, \quad (12-138)$$

que es la ecuación de onda para el potencial vector electromagnético en interacción con el campo de Dirac.

Una parte importante de la Física moderna se ocupa de la construcción de campos para representar diversos tipos de partículas elementales. Desde luego, tales teorías son todas mecanocuánticas, si bien muchas características de las teorías de campo cuánticas tendrán análogas clásicas concomitantes o casi correspondientes. Hay poca guía física a priori en la construcción de posibles densidades de lagrangiana y términos de interacción para las diversas partículas. La forma de dichas funciones está sometida a ciertas

restricciones debidas a limitaciones de covarianza. Por ejemplo, los términos de \mathcal{L} deben ser combinaciones de campo y otras cantidades tales que den origen a un escalar universo. Usualmente, \mathcal{L} también se encuentra restringida a las cantidades campo o sus primeras derivadas, aun cuando también se han explorado densidades de lagrangiana con derivadas superiores (cfr. Ejercicio 9). Requisitos adicionales referentes a la forma de los términos los proporcionan, o sugieren, propiedades de conservación y de invarianza implícitas en las lagrangianas. Dichas propiedades van más allá que las condiciones de conservación contenidas en el tensor esfuerzo-energía y suelen hallarse mediante la aplicación de un potente método conocido por el nombre de teorema de Noether, el cual constituye el tema del apartado siguiente.

12-7 TEOREMA DE NOETHER*

Ya hemos visto múltiples veces que las propiedades de simetría de la lagrangiana (o de la hamiltoniana) implican la existencia de cantidades conservativas. Así, si la lagrangiana no contiene explícitamente una coordenada particular de desplazamiento, se conserva la correspondiente cantidad de movimiento canónica. La ausencia de dependencia explícita de la coordenada significa que la lagrangiana no queda afectada por una transformación que altere el valor de dicha coordenada; se dice que es invariante, o que es simétrica ante la transformación dada. Análogamente, la invarianza de la lagrangiana ante un desplazamiento del tiempo implica conservación de la energía. El teorema de Noether contiene la descripción formal de la relación entre las propiedades de simetría o invarianza y las cantidades que se conservan. En el cuadridespacio de la teoría clásica de campos es donde dicho teorema alcanza su forma más sofisticada y fértil. Es por esta razón que el estudio explícito del teorema se reserva para el tratamiento de campos, si bien también puede deducirse una versión para sistemas discretos.

La simetría ante una transformación de coordenadas se refiere a los efectos de una transformación infinitesimal de la forma

$$x_\mu \rightarrow x'_\mu = x_\mu + \delta x_\mu, \quad (12-139)$$

donde la variación infinitesimal δx_μ puede ser función de las demás x_ν . El teorema de Noether considera también el efecto de una transformación de las propias cantidades campo, la cual podemos escribir en la forma

$$\eta_\rho(x_\mu) \rightarrow \eta'_\rho(x'_\mu) = \eta_\rho(x_\mu) + \delta \eta_\rho(x_\mu). \quad (12-140)$$

* Emmy Noether, 1882-1935, uno de los matemáticos principales de este siglo, ha sido nominada como «La más grande de las mujeres matemáticas». La publicación original del teorema apareció en *Nachrichten Gesell. Wissenschaft. Göttingen* 2, 235 (1918). Véase el artículo sobre Noether escrito por C. H. Kimberling, *Am. Math. Monthly* 79, 136 (1972).

Aquí, $\delta\eta_\rho(x_\mu)$ mide el efecto de las variaciones de x_μ y de η_ρ y puede ser función de las demás cantidades campo η_λ . Notemos que la variación de una de las variables campo en un punto particular del espacio x_ν es una cantidad diferente $\bar{\delta}\eta_\rho$:

$$\eta'_\rho(x_\mu) = \eta_\rho(x_\mu) + \bar{\delta}\eta_\rho(x_\mu). \tag{12-141}$$

La descripción de las transformaciones en función de variaciones infinitesimales a partir de las cantidades no transformadas nos indica que sólo estamos tratando con transformaciones *continuas*. Así, la simetría ante la inversión en tres dimensiones (simetría de paridad) no será una de las simetrías a las que se pueda aplicar el teorema de Noether. A consecuencia de las transformaciones tanto de las coordenadas como de las cantidades campo, la lagrangiana aparecerá, en general, como función diferente de las variables campo y de las coordenadas de espacio y tiempo:

$$\mathcal{L}(\eta_\rho(x_\mu), \eta_{\rho,\nu}(x_\mu), x_\mu) \rightarrow \mathcal{L}'(\eta'_\rho(x'_\mu), \eta'_{\rho,\nu}(x'_\mu), x'_\mu). \tag{12-142}$$

La versión del teorema de Noether que vamos a presentar no constituye la forma más general posible pero facilita la deducción sin restringir de manera importante el ámbito de aplicación del teorema ni la utilidad de las conclusiones. Supondremos que se cumplen tres condiciones:

1. El cuadriespacio es euclídeo. Este requisito no es indispensable, pero vamos a suponerlo por razón de sencillez. Restringe el espacio-tiempo relativista al espacio de Minkowski, que es complejo pero euclídeo.
2. La densidad de lagrangiana presenta la misma forma funcional para las cantidades transformadas que para las cantidades originales, es decir,

$$\mathcal{L}'(\eta'_\rho(x'_\mu), \eta'_{\rho,\nu}(x'_\mu), x'_\mu) = \mathcal{L}(\eta'_\rho(x'_\mu), \eta'_{\rho,\nu}(x'_\mu), x'_\mu). \tag{12-143}$$

Este tipo de condición no ha intervenido anteriormente en nuestro estudio de las cantidades conservativas, principalmente porque se cumplía automáticamente en las transformaciones que se consideraban. Cuando se transforman coordenadas cíclicas por desplazamiento, el cambio de origen implícito no altera la dependencia funcional que la lagrangiana tiene de las variables. Pero en los tipos más amplios de transformación que abordamos ahora se convierte en una propiedad de simetría que precisa de estudio. Así, la versión de *campo libre* de la densidad de lagrangiana para el campo electromagnético (ec. 12-127) conserva su forma funcional cuando se somete a A_μ a una transformación de medida, mientras que la versión correspondiente de la ecuación (12-131) no lo hace, aun cuando ambas sean cíclicas en A_μ . El requisito expresado por la ecuación (12-143) se denomina *invarianza de forma*. Notemos también que la ecuación (12-143) asegura que las ecuaciones de movimiento tienen igual forma tanto si se expresan en función de las

variables antiguas como en función de las nuevas. La condición de invarianza de forma no es la circunstancia más general en la cual esto es cierto; las densidades de lagrangiana original y transformada pueden también diferir en una cuatridivergencia sin que se modifiquen las ecuaciones de movimiento. La deducción del teorema de Noether se puede llevar a cabo con una tal versión ampliada de la invarianza de forma porque la integral de volumen de la cuatridivergencia se anula. Ahora bien, por razón de sencillez nos limitaremos a la ecuación (12-143).

3. La magnitud de la integral de acción es invariante ante la transformación, es decir,

$$I' \equiv \int_{\Omega'} (dx'_\mu) \mathcal{L}'(\eta'_\rho(x'_\mu), \eta'_{\rho,\nu}(x'_\mu), x'_\mu) = \int_{\Omega} (dx_\mu) \mathcal{L}(\eta_\rho(x_\mu), \eta_{\rho,\nu}(x_\mu), x_\mu). \quad (12-144)$$

De nuevo, esto constituye una ampliación, que las incluyen, de nuestras anteriores propiedades de simetría para coordenadas cíclicas. La lagrangiana no cambia numéricamente ante la traslación de una coordenada cíclica, ni tampoco lo hace el valor de la integral de acción. A la ecuación (12-144) la llamaremos condición de *invarianza de escala*. Así pues, nuestras condiciones segunda y tercera representan generalizaciones de las condiciones de simetría o invarianza que conducen a la existencia de cantidades conservativas en el caso de sistemas discretos.

La combinación de las ecuaciones (12-143) y (12-144) nos da el requisito

$$\int_{\Omega'} \mathcal{L}'(\eta'_\rho(x'_\mu), \eta'_{\rho,\nu}(x'_\mu), x'_\mu) (dx'_\mu) - \int_{\Omega} \mathcal{L}(\eta_\rho(x_\mu), \eta_{\rho,\nu}(x_\mu), x_\mu) (dx_\mu) = 0.$$

En la primera integral, x'_μ representa ahora simplemente una variable de integración muda y por ello podemos escribirla x_μ . Pero, desde luego, queda un cambio del dominio de interacción, por lo que la condición queda en la forma

$$\int_{\Omega'} \mathcal{L}'(\eta'_\rho(x_\mu), \eta'_{\rho,\nu}(x_\mu), x_\mu) (dx_\mu) - \int_{\Omega} \mathcal{L}(\eta_\rho(x_\mu), \eta_{\rho,\nu}(x_\mu), x_\mu) (dx_\mu) = 0. \quad (12-145)$$

En la figura 12-6 se indica la secuencia de transformaciones del espacio y del dominio de integración en un espacio de dos dimensiones. La ecuación (12-145) nos dice que si en la integral de acción extendida al espacio (x_μ) sustituimos las variables campo originales por las cantidades transformadas y transformamos la región de integración, la mencionada integral de acción permanece inalterada.

Ante las transformaciones infinitesimales indicadas por las ecuaciones (12-139) y (12-140) la diferencia de primer orden entre las integrales de la ecuación (12-145) consta, pues, de dos partes. Una es una integral extendida a Ω y la otra una integral extendida a la diferencia de volúmenes $\Omega' - \Omega$. Veamos, con un ejemplo unidimensional, cómo hay que

formar los términos. Consideremos la diferencia de dos integrales:

$$\int_{a+\delta a}^{b+\delta b} [f(x) + \delta f(x)] dx - \int_a^b f(x) dx$$

$$= \int_a^b \delta f(x) dx + \int_b^{b+\delta b} [f(x) + \delta f(x)] dx - \int_a^{a+\delta a} [f(x) + \delta f(x)] dx. \quad (12-146)$$

Hasta un primer orden de magnitud para las cantidades pequeñas, los dos últimos términos se pueden escribir en la forma

$$\int_b^{b+\delta b} f(x) dx - \int_a^{a+\delta a} f(x) dx = \delta b f(b) - \delta a f(a).$$

Con esta aproximación, la ecuación (12-146) queda en la forma

$$\int_{a+\delta a}^{b+\delta b} [f(x) + \delta f(x)] dx - \int_a^b f(x) dx = \int_a^b \delta f(x) dx + f(x) \delta x \Big|_a^b, \quad (12-147)$$

o sea

$$= \int_a^b \left[\delta f(x) + \frac{d}{dx} (\delta x f(x)) \right] dx. \quad (12-148)$$

La análoga multidimensional de la ecuación (12-147) dirá, pues, que la condición de

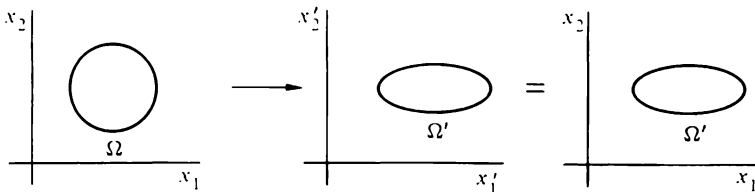


FIGURA 12-6

Ilustración esquemática de la transformación de la integral de acción invariante.

invarianza de la ecuación (12-145) adopta la forma

$$\int_{\Omega} \mathcal{L}'(\eta', x_{\mu}) dx_{\mu} - \int_{\Omega} \mathcal{L}(\eta, x_{\mu}) dx_{\mu} \\ = \int_{\Omega} [\mathcal{L}'(\eta', x_{\mu}) - \mathcal{L}(\eta, x_{\mu})] dx_{\mu} + \int_S \mathcal{L}(\eta) \delta x_{\mu} dS_{\mu} = 0. \quad (12-149)$$

Aquí, $\mathcal{L}(\eta, x_{\mu})$ es una abreviatura de la dependencia funcional total, S es la superficie tridimensional de la región Ω (correspondiente a los puntos terminales a y b en el caso unidimensional) y δx_{μ} es de hecho el vector diferencia entre puntos de S y los puntos correspondientes de la superficie transformada S' (cfr. fig. 12-7). Correspondiendo a la ecuación (12-148), la última integral se puede transformar mediante el teorema de la divergencia cuadrimensional con lo que tendremos para la condición de invarianza

$$0 = \int_{\Omega} dx_{\mu} \left\{ [\mathcal{L}'(\eta', x_{\mu}) - \mathcal{L}(\eta, x_{\mu})] + \frac{d}{dx_{\nu}} (\mathcal{L}(\eta, x_{\mu}) \delta x_{\nu}) \right\}. \quad (12-150)$$

Ahora bien, por la ecuación (12-141), el término diferencia entre los corchetes puede escribirse en primera aproximación en la forma

$$\mathcal{L}'(\eta'_{\rho}(x_{\mu}), \eta'_{\rho, \nu}(x_{\mu}), x_{\mu}) - \mathcal{L}(\eta(x_{\mu}), \eta_{\rho, \nu}(x_{\mu}), x_{\mu}) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{\rho}} \bar{\delta} \eta_{\rho} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{\rho, \nu}} \bar{\delta} \eta_{\rho, \nu}.$$

La propiedad importante del cambio $\bar{\delta}$ es que se trata de un cambio de η en un punto fijo en el espacio x_{μ} (a diferencia de la variación δ de la ecuación 12-140). Por tanto, conmuta con el operador derivación espacial, es decir, podemos intercambiar el orden de

$$\bar{\delta} \quad \text{y} \quad \frac{d}{dx_{\nu}}$$

Simbólicamente,

$$\mathcal{L}'(\eta', x_{\mu}) - \mathcal{L}(\eta, x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{\rho}} \bar{\delta} \eta_{\rho} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{\rho, \nu}} \frac{d \bar{\delta} \eta_{\rho}}{dx_{\nu}},$$

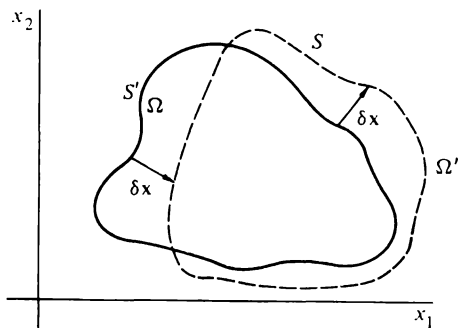


FIGURA 12-7

Ilustración, en dos dimensiones, de las regiones de integración que intervienen en la transformación de la integral de acción.

o sea, utilizando las ecuaciones de campo de Lagrange,

$$\mathcal{L}(\eta', x_\mu) - \mathcal{L}(\eta, x) = \frac{d}{dx_\nu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{\rho,\nu}} \bar{\delta} \eta_\rho \right).$$

Luego la condición de invarianza (ec. 12-150) aparece en la forma

$$\int (dx_\mu) \frac{d}{dx_\nu} \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{\rho,\nu}} \bar{\delta} \eta_\rho + \mathcal{L} \delta x_\nu \right\} = 0, \tag{12-151}$$

que tiene ya la forma de una ecuación de corriente conservativa.

Sin embargo, resulta útil desarrollar algo más la condición especificando la forma de la transformación infinitesimal en función de \$R\$ parámetros infinitesimales \$\epsilon_r, r = 1, 2, \dots, R\$, tales que las variaciones de \$x_\nu\$ y \$\eta_\rho\$ sean lineales en los \$\epsilon_r\$:

$$\delta x_\nu = \epsilon_r X_{r\nu}, \quad \delta \eta_\rho = \epsilon_r \Psi_{r\rho}. \tag{12-152}$$

Las funciones \$X_{r\nu}\$ y \$\Psi_{r\rho}\$ pueden depender de las otras coordenadas y de las variables campo, respectivamente. Si la simetría de la transformación se refiriera solamente a las coordenadas y correspondiera a un desplazamiento de una sola coordenada \$x_\lambda\$, estas funciones serían simplemente

$$X_{r\nu} = \delta_{\nu\lambda}, \quad \Psi_{r\rho} = 0. \tag{12-153}$$

Así, las transformaciones contenidas en la forma de la ecuación (12-152) constituyen una comprobación de las simetrías mucho más extensa que la que hemos venido utilizando. De las ecuaciones (12-140) y (12-141) se deduce que hasta un primer orden de aproximación, $\delta\eta$ y $\bar{\delta}\eta$ vienen relacionadas por

$$\delta\eta_\rho = \bar{\delta}\eta_\rho + \frac{\hat{c}\eta_\rho}{\hat{c}x_\sigma} \delta x_\sigma. \quad (12-154)$$

Luego,

$$\bar{\delta}\eta_\rho = \epsilon_r (\Psi_{r\rho} - \eta_{\rho,\sigma} X_{r\sigma}). \quad (12-155)$$

Sustituyendo las ecuaciones (12-152) y (12-155) en la condición de invarianza (ec. 12-151) tenemos

$$\int \epsilon_r \frac{d}{dx_\nu} \left\{ \left(\frac{\hat{c}\mathcal{L}}{\hat{c}\eta_{\rho,\nu}} \eta_{\rho,\sigma} - \mathcal{L} \delta_{\nu\sigma} \right) X_{r\sigma} - \frac{\hat{c}\mathcal{L}}{\hat{c}\eta_{\rho,\nu}} \Psi_{r\rho} \right\} (dx_\mu) = 0.$$

Como los parámetros ϵ , son arbitrarios, existen r corrientes conservativas con teoremas de conservación diferenciales:

$$\frac{d}{dx_\nu} \left\{ \left(\frac{\hat{c}\mathcal{L}}{\hat{c}\eta_{\rho,\nu}} \eta_{\rho,\sigma} - \mathcal{L} \delta_{\nu\sigma} \right) X_{r\sigma} - \frac{\hat{c}\mathcal{L}}{\hat{c}\eta_{\rho,\nu}} \Psi_{r\rho} \right\} = 0. \quad (12-156)$$

Las ecuaciones (12-156) constituyen la principal conclusión del teorema de Noether, el cual dice, pues, que si el sistema (o la densidad de lagrangiana) tiene propiedades de simetría tales que se cumplan las anteriores condiciones (2) y (3) para transformaciones del tipo indicado en las ecuaciones (12-152), existirán r cantidades conservativas.

La conservación del tensor esfuerzo-energía se obtiene fácilmente como caso particular de la ecuación (12-151). Si \mathcal{L} no contiene ninguna de las x_μ , aquella y por tanto la integral de acción serán invariantes ante transformaciones tales como las ecuaciones (12-153) en donde λ toma todos los valores μ . La ecuación (12-156) se reduce entonces a

$$\frac{d}{dx_\nu} \left\{ \left(\frac{\hat{c}\mathcal{L}}{\hat{c}\eta_{\rho,\nu}} \eta_{\rho,\sigma} - \mathcal{L} \delta_{\nu\sigma} \right) \delta_{\sigma\mu} \right\} = \frac{d}{dx_\nu} \left(\frac{\hat{c}\mathcal{L}}{\hat{c}\eta_{\rho,\nu}} \eta_{\rho,\mu} - \mathcal{L} \delta_{\nu\mu} \right),$$

que coincide con las ecuaciones (12-33) al venir dada $T_{\mu\nu}$ por la ecuación (12-34).

Las transformaciones de la forma indicada por las ecuaciones (12-152) cubren otras muchas simetrías. Una de las más interesantes es una familia de transformaciones de las variables campo solamente, llamadas *transformaciones de medida de primera especie*,* tales que

$$\delta x_\nu = 0, \quad \delta \eta_\rho = \epsilon c_\rho \eta_\rho \quad (\text{sin sumar para } \rho), \quad (12-157)$$

donde las c_ρ son constantes. Si la densidad de lagrangiana (y por tanto la integral de acción) es invariante ante esta transformación, habrá una ecuación de conservación de la forma

$$\frac{d\Theta_\nu}{dx_\nu} = 0, \quad (12-158)$$

donde -

$$\Theta_\nu = c_\rho \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{\rho,\nu}} \eta_\rho. \quad (12-159)$$

La ecuación (12-158) tiene la forma de ecuación de continuidad en la cual Θ_ν desempeña el papel de densidad de corriente j_ν . Por tanto, la invarianza ante una transformación de medida de primera especie conduce a la identificación de una corriente conservativa que sería apropiada para una carga eléctrica con una densidad de corriente que se asocie al campo.

A título de ilustración, consideremos el primer ejemplo de § 12-6; el campo escalar complejo. Una transformación del tipo

$$\phi' = \phi e^{i\epsilon}, \quad \phi^{*'} = \phi^* e^{-i\epsilon} \quad (12-160)$$

corresponde en forma infinitesimal a una transformación de medida del primer tipo (ec. 12-157) siendo

$$c = i, \quad c^* = -i.$$

* La conocida transformación de medida del campo electromagnético, que suma un cuadrigradiante $\Lambda_{\mu\nu}$ a $A_{\mu\nu}$, es una parte de una transformación de medida de segunda especie y no vamos a considerarla.

Es evidente que la densidad de lagrangiana definida en la ecuación (12-100) es invariante ante la transformación (12-160). Por tanto, habrá una densidad de corriente asociada para el campo de Klein-Gordon que puede darse en la forma

$$j_\mu = iq \left(\frac{d\phi}{dx_\mu} \phi^* - \phi \frac{d\phi^*}{dx_\mu} \right), \quad (12-161)$$

la cual concuerda con la densidad de corriente mecanocuántica convencional. Notemos que toda la deducción de la densidad de corriente de carga conservativa depende del hecho de ser complejo el campo. Así pues, según ya hemos dicho, un campo real no lleva a una densidad de carga o de corriente asociada al campo. Para describir campos asociados a **partículas cargadas debemos utilizar un par de campos complejos ϕ y ϕ^* para la partícula (sin spin) de Klein-Gordon, ψ y ψ^\dagger para el electrón de Dirac de spin $\frac{1}{2}$.**

La densidad de lagrangiana para el campo de Dirac (ec. 12-116) es invariante ante la misma transformación si en las ecuaciones (12-160) sustituimos ϕ y ϕ^* por las variables campo de cuatro elementos ψ y ψ^\dagger . En consecuencia, habrá una corriente conservativa asociada a la invarianza de medida dada por

$$\Theta_\mu = i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{,\mu}} \psi,$$

puesto que \mathcal{L} no contiene a $\psi^\dagger_{,\mu}$. Siguiendo el esquema del campo de Klein-Gordon, podríamos esperar que el campo de Dirac tenga una densidad de corriente eléctrica

$$j_\mu = iq(i\psi^\dagger \gamma_\mu) \psi = -q\psi^\dagger \gamma_\mu \psi.$$

Esta es exactamente la forma de j_μ dada por la ecuación (12-134) y utilizada para exhibir la interacción entre los campos de Dirac y electromagnético. La elección de la ecuación (12-134) y utilizada para exhibir la interacción entre los campos de Dirac y electromagnético. La elección de la ecuación (12-134), que entonces pudo parecer sacada de la manga, vemos que es consecuencia, a través del teorema de Noether, de la invarianza de medida de la densidad de lagrangiana.

Debemos recalcar que aun cuando el teorema de Noether demuestra que una propiedad de simetría continua de la densidad de lagrangiana conduce a una condición de conservación, el recíproco no es cierto. Existen condiciones de conservación que no corresponden a ninguna propiedad de simetría. Los ejemplos más destacados en este momento son los campos que tienen soluciones solitones, es decir, que están descritos por la ecuación de seno-Gordon o por la ecuación de Korteweg-de Vries (cfr. p. 699).

Consideremos, por ejemplo, la densidad de lagrangiana para la ecuación de seno-Gordon (ec. 12-109). Como ni x ni t figuran explícitamente, la densidad de lagrangiana

será invariante ante traslaciones del espacio y el tiempo en la manera que se cumplan las condiciones del teorema de Noether. Además, existe una simetría ante una transformación de Lorentz (en el espacio x, t). No se ve ninguna otra simetría. De la aplicación del teorema de Noether podríamos esperar que no hubiera más que tres cantidades conservativas. Con todo, se ha demostrado, por métodos que escapan de la descripción lagrangiana de campos, que existe un número infinito de cantidades conservativas. Es decir, puede encontrarse un número infinito de funciones distintas F_i y G_i que sean polinomios de ϕ y sus derivadas, para las cuales

$$\frac{dF_i}{dt} + \frac{dG_i}{dx} = 0,$$

con lo que las integrales de volumen de las F_i serán constantes en el tiempo. Parece que la presencia de un tal conjunto infinito de cantidades conservativas es condición necesaria para que el campo describa solitones. El estudio de los solitones se encuentra en un vigoroso estado de desarrollo, por lo que probablemente aún no se ha dicho la última palabra acerca de la relación entre las cantidades conservativas y la naturaleza del campo.

Finalmente, podemos deducir fácilmente la versión del teorema de Noether que sería aplicable a sistemas discretos. En este caso, las cuatro coordenadas del espacio-tiempo ya no son variables paramétricas en pie de igualdad — las coordenadas espaciales revierten a su estatus de variables mecánicas (o funciones de las mismas) y tan sólo el tiempo sigue desempeñando el papel de parámetro. La integral de acción, en vez de ser una integral de volumen cuatridimensional,

$$I = \int \mathcal{L}(dx_\mu),$$

es una integral unidimensional en t :

$$I = \int L dt.$$

En vez de las variables campo de índice continuo $\eta_\rho(x_\mu)$ tenemos las coordenadas generalizadas discretas $q_k(t)$. Resulta bastante inmediato recapitular con estas traslaciones los pasos que llevaron al teorema de Noether. Podríamos repetir de esta manera los razonamientos contenidos en las ecuaciones (12-139) a (12-156) aplicados a sistemas discretos. Ahora bien, el efecto de la conversión es suficientemente evidente y claro para que veamos fácilmente que la traslación podemos efectuarla directamente sobre el resultado final (ec. 12-156).

Las reglas de la traslación las podemos resumir en la forma siguiente:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' &\rightarrow L, \\ x_\mu \circ x_\nu &\rightarrow t, \\ \eta_\rho &\rightarrow q_k, \\ \eta_{\rho,\nu} &\rightarrow \dot{q}_k. \end{aligned} \tag{12-162}$$

Además, todas las sumas extendidas a los cuatro valores de los índices en letra griega se reducen a un término en t . A consecuencia de ello, las transformaciones (ec. 12-152) ante las cuales la lagrangiana ha de presentar invarianza de forma y escala se convierten en

$$\delta t = \epsilon_r X_r, \quad \delta q_k = \epsilon_r \Psi_{rk}. \tag{12-163}$$

La ecuación (12-156), enunciado de los teoremas de conservación resultantes de la invarianza, se convierte ahora en

$$\frac{d}{dt} \left\{ \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - L \right) X_r - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \Psi_{rk} \right\} = 0. \tag{12-164}$$

La ecuación (12-164) constituye el enunciado de las conclusiones del teorema de Noether para un sistema mecánico discreto.

La expresión entre paréntesis de la ecuación (12-164) es nuestra vieja conocida la integral de Jacobi h de la ecuación (2-53) o, lo que es equivalente en función de (q,p) , la hamiltoniana. Podemos recobrar la conservación de h considerando una transformación que comporte solamente un desplazamiento del tiempo:

$$X_r = \delta_{r1}, \quad \Psi_{rk} = 0. \tag{12-165}$$

Si la lagrangiana no fuese función explícita del tiempo, está claro que la forma de la lagrangiana y el valor de la integral de acción no se verían afectados por esta transformación. Pero el teorema de Noether (ec. 12-64) nos dice que a consecuencia de ello hay un teorema de conservación

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - L \right) = 0,$$

que coincide con la conocida conclusión de §2-6.

Supongamos además que sea cíclica una coordenada particular q_r . Entonces la lagrangiana y la acción son invariantes ante una transformación para la cual

$$X_r = 0, \quad \Psi_{rk} = \delta_{kl} \delta_{r1}. \quad (12-166)$$

Entonces, la ecuación (12-164) implica de manera inmediata el enunciado de conservación

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \right) = 0,$$

o bien

$$\dot{p}_l = 0.$$

Así pues, los teoremas de conservación tanto de la integral de Jacobi como de la cantidad de movimiento generalizada conjugada de una coordenada cíclica quedan subsumidos en el teorema de Noether dado por la ecuación (12-164). La relación entre propiedades de simetría de un sistema mecánico y cantidades conservativas ha recorrido las formulaciones de la Mecánica que hemos presentado. Como hemos vuelto al punto de partida, volviendo a deducir mediante técnicas sofisticadas los teoremas de simetría hallados en los primeros capítulos, parece apropiado poner aquí punto final a nuestro estudio.

REFERENCIAS SUGERIDAS

J. C. SLATER y N. H. FRANK, *Mechanics*. Este texto un tanto anticuado proporciona aún una referencia destacada de un estudio fácilmente legible, si bien a veces algo elemental, del paso de sistemas discretos a continuos. En particular, el camino que lleva de la cadena discreta a la cuerda continua se examina en el capítulo VII con relación a las vibraciones transversales.

LORD RAYLEIGH, *The Theory of Sound*. Este tratado contiene naturalmente gran cantidad de materia referente a las vibraciones de cuerpos continuos. En el capítulo XI, Volumen 2 hallamos un estudio de la ecuación de onda para la propagación del sonido en gases, en el cual se examina con gran detalle la cuestión del movimiento adiabático del gas comparado con el movimiento isotérmico.

G. WENTZEL, *Introduction to the Quantum Theory of Fields*. La mayoría de monografías referentes a la teoría cuántica de campos comienzan con un estudio de los campos clásicos y proporcionan a menudo las mejores referencias para la teoría clásica. El libro de *Wentzel* fue uno de los primeros. Vale la pena aún consultarlo a causa de la extensión y lucidez con que trata los aspectos clásicos. Sin embargo, lo que tiene que decir el libro acerca de la formulación cuántica ha sido superado hace tiempo y sólo tienen interés histórico en la actualidad. En todo él se utiliza el espacio de Minkowski.

A. O. BARUT, *Electrodynamics and Classical Theory of Fields and Particles*. Es tal vez la mejor referencia para la formulación clásica de campos. El libro de Barut contiene una enorme cantidad de información en un espacio relativamente pequeño —lagrangianas, ecuaciones de campo, tensores esfuerzo-energía y cantidades conservativas para diversos campos, etc. Intenta dar un tratamiento covariante de la formulación de Hamilton, marcado por una complejidad considerable. En esta obra se recogen algunas singularidades de la literatura; p. ej., la forma espinorial de las ecuaciones de Maxwell, la cual puede ignorarse sin cuidado a este nivel introductorio. Se estudia el teorema de Noether pero sin darle este nombre. (Entre paréntesis, podemos indicar que el tratamiento del teorema de Noether de § 12-7 que hemos visto se ha inspirado en buena parte en un artículo de T. H. Boyer, *American Journal of Physics* 34, 475, junio 1966). Debe tenerse presente que Barut utiliza el cuadirespacio con traza -2 .

E. J. SALETAN y A. H. CROMER, *Theoretical Mechanics*. Los textos más modernos de Mecánica clásica para físicos contienen un tratamiento de la teoría clásica de campos y este es uno de los mejores (su capítulo VIII). En todo él se utiliza el cuadirespacio con traza -2 , por lo que las fórmulas abundan en tensores métricos y supraíndices y subíndices (aun cuando no siempre están claras las razones para su versión particular del formalismo). Es particularmente interesante la generalización de la representación por cantidad de movimiento mediante un desarrollo general del campo en funciones ortonormales.

J. D. JACKSON, *Classical Electrodynamics*. Tal como se ha dicho, la segunda edición ha pasado del espacio de Minkowski a otro con traza -2 . No obstante, en el capítulo 11 acerca de la Relatividad restringida se describen detalladamente los métodos para el tratamiento de las cantidades en dicho espacio. El formalismo de los campos clásicos se trata en el capítulo 12, naturalmente haciendo gran hincapié en el campo electromagnético, el cual se estudia en todos sus aspectos. Vale la pena especialmente una descripción de la lagrangiana Proca, que es una forma sugerida de la densidad de lagrangiana para el campo electromagnético cuando el fotón tenga masa. El estudio global es concienzudo y se distingue por su gran claridad.

EJERCICIOS

1. a) Las vibraciones transversales de una cuerda tensa se pueden aproximar mediante un sistema discreto consistente en puntos materiales igualmente espaciados situados sobre una cuerda sin peso. Demostrar que si se hace tender a cero la separación entre dichos puntos, la lagrangiana tiende al límite

$$L = \frac{1}{2} \int \left[\mu \dot{\eta}^2 - T \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right] dx$$

para la cuerda continua, siendo, T la tensión fija. ¿Cuál sería la ecuación de movimiento si la densidad μ fuese función de la posición?

b) Obtener la lagrangiana para la cuerda continua hallando las energías cinética y potencial correspondientes al movimiento transversal. La energía potencial puede obtenerse a partir del trabajo que efectúa la fuerza de tensión al estirar la cuerda durante la vibración transversal.

2. a) Describir el campo de vibraciones sonoras en un gas en el formalismo de Hamilton y obtener las correspondientes ecuaciones de movimiento de Hamilton.

b) Generalizando el desarrollo de la cantidad de movimiento a un campo vectorial, expresar la hamiltoniana para los modos acústicos de un gas en la representación por cantidad de movimiento.

3. Obtener las ecuaciones de movimiento de Hamilton para un sistema continuo a partir del principio de Hamilton modificado, siguiendo el método de §8-5.

4. Demostrar que si se toman ψ y ψ^* como dos variables campo independientes, la densidad de lagrangiana.

$$\mathcal{L} = \frac{\hbar^2}{8\pi^2 m} \nabla\psi \cdot \nabla\psi^* + V\psi^*\psi + \frac{\hbar}{4\pi i} (\psi^*\dot{\psi} - \psi\dot{\psi}^*)$$

conduce a la ecuación de Schrödinger

$$-\frac{\hbar^2}{8\pi^2 m} \nabla^2\psi + V\psi = \frac{i\hbar}{2\pi} \frac{\partial\psi}{\partial t},$$

y a su compleja conjugada. ¿Cuáles son las cantidades de movimiento canónicas? Obtener la densidad de hamiltoniana correspondiente a L.

5. Demostrar que

$$G_i = - \int \pi_k \frac{\partial\eta_k}{\partial x_i} dV$$

es una constante del movimiento si la densidad de hamiltoniana no es función explícita de la posición. La cantidad G_i se puede identificar con la cantidad de movimiento total del campo según la dirección x_i . La semejanza de este teorema con el teorema de conservación usual de la cantidad de movimiento de sistemas discretos es evidente.

6. a) En un cuadriespacio no euclideo, el D'Alembertiano se define en la forma siguiente:

$$\square^2 = g^{\mu\nu} \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\nu}.$$

Aquí, $g^{\mu\nu}$ es el tensor métrico contravariante, el cual en el espacio plano de la Relatividad restringida es el mismo que $g_{\mu\nu}$ (cfr. §7-3). Para el tensor métrico de traza -2 (ec. 7-53), hallar la forma explícita del D'Alembertiano así definido.

b) Una lagrangiana adecuada para el campo mesónico escalar cargado en esta métrica es

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left(g^{\mu\nu} \frac{\partial\phi}{\partial x^\mu} \frac{\partial\phi^*}{\partial x^\nu} - \mu_0^2 \phi\phi^* \right).$$

demostrar que una de las ecuaciones de campo correspondientes es

$$(\square^2 + \mu_0^2)\phi = 0.$$

Demostrar también que, a la luz del apartado (a), esta ecuación coincide con la (12-103).

7. A la densidad de lagrangiana para el mesón cargado escalar (ec. 12-100), sumar el término siguiente para que represente la interacción con un campo electromagnético:

$$\frac{j_\lambda A_\lambda}{c}$$

donde

$$j_\lambda = i(\phi \phi^*_{,\lambda} - \phi_{,\lambda} \phi^*).$$

¿Cuáles son las ecuaciones de campo para ϕ y ϕ^* ? ¿Qué les sucede a las corrientes conservativas y a los teoremas de conservación a ellas asociados?

8. Supongamos que la densidad de lagrangiana en el principio de Hamilton sea función de las derivadas superiores de las cantidades de campo η_ρ :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\eta_\rho, \eta_{\rho,\mu}, \eta_{\rho,\mu\nu}, \dots, X_\lambda).$$

Suponiendo anulación en los puntos terminales, ¿cuál es la forma de las ecuaciones de campo correspondientes a dicha densidad de lagrangiana?

9. Consideremos una cantidad campo escalar η que, para mayor sencillez, sea función solamente de x y de t . Supongamos ahora que la densidad de hamiltoniana sea función de las derivadas espaciales superiores de η y π , es decir,

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(\eta, \eta_{,x}, \pi, \pi_{,x}, \pi_{,xx}).$$

¿Cuáles son las ecuaciones de movimiento de Hamilton correspondientes?

10. Demostrar que la ecuación de Korteweg-de Vries corresponde a la ecuación de campo para un campo escalar ψ con densidad de lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \psi_x \psi_t + \frac{2}{6} \psi_x^3 - \frac{v}{2} \psi_{xx}^2,$$

donde los subíndices indican derivadas respecto a las variables indicadas, habida cuenta que ψ es función potencial de la cantidad ϕ de la ecuación (12-115):

$$\phi = \frac{\hat{c}\psi}{\hat{c}X}.$$

11. Consideremos una densidad de hamiltoniana en el espacio (x, t) :

$$\mathcal{H} = \eta^3 + \frac{1}{2}\eta^2_{,x} + \pi^3_{,x} + \frac{1}{2}\pi^2_{,xx}.$$

Demostrar que las ecuaciones de movimiento de Hamilton corresponden a una forma de la ecuación de Korteweg-de Vries (ec. 12-115) si

$$\eta = \phi(x, t)$$

$$\pi = \int_{-\infty}^x \phi(x', t) dx'.$$

12. Calcular explícitamente iT_{j4}/c y T_{ij} para el tensor electromagnético libre dado por la ecuación (12-129). ¿Qué podemos decir del significado físico de estas componentes?

13. a) En un cuadriespacio con métrica $g_{\mu\nu}$ de traza -2 definida por la ecuación (7-53) de § 7-3, calcular explícitamente los elementos del tensor covariante (matemáticamente hablando) $F_{\mu\nu}$ del campo electromagnético. Dar también los elementos de la matriz con un índice elevado y con dos índices elevados:

$$F^{\lambda}_{\rho} = g^{\lambda\mu} F_{\mu\nu}; \quad F^{\lambda\rho} = g^{\lambda\mu} F_{\mu\nu} g^{\rho\nu}.$$

b) Demostrar que, en esta métrica, una densidad de lagrangiana que lleve a las ecuaciones de Maxwell con corrientes exteriores viene dada por

$$\mathcal{L} = -\frac{F^{\lambda\rho} F_{\lambda\rho}}{16\pi} - \frac{j^{\lambda} A_{\lambda}}{c}.$$

c) Hallar los elementos del tensor esfuerzo-energía simétrico en la misma métrica.

14. La ecuación (12-131) presenta otra densidad de lagrangiana para el campo electromagnético. Hallar el tensor esfuerzo-energía correspondiente. ¿Podemos dar significado físico a las componentes? Para el campo libre, ¿cuáles son las ecuaciones de conservación?

Apéndice A

Demostración del teorema de Bertrand*

La ecuación de la órbita debida a una fuerza central conservativa (ec. 3-34) puede escribirse

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + u = J(u), \quad (\text{A } 1)$$

donde

$$J(u) = -\frac{m}{l^2} \frac{d}{du} V\left(\frac{1}{u}\right) = -\frac{m}{l^2 u^2} f\left(\frac{1}{u}\right). \quad (\text{A } 2)$$

La condición de órbita circular de radio $r_0 = u_0^{-1}$ (ec. 3-41) adopta ahora la forma

$$u_0 = J(u_0). \quad (\text{A } 3)$$

Además, la energía debe cumplir, desde luego, la condición dada por la ecuación (3-42). Si la energía es ligeramente superior a la que exige la circularidad y el potencial es tal que el movimiento sea estable, u permanecerá acotado y sólo variará ligeramente respecto a u_0 y $J(u)$ se podrá expresar en función del primer término de un desarrollo en serie de Taylor en torno a $J(u_0)$:

$$J(u) = u_0 + (u - u_0) \frac{dJ}{du_0} + O((u - u_0)^2). \quad (\text{A } 4)$$

* Véase § 3-6.

Como de costumbre, la derivada que aparece en la ecuación (A-4) es una abreviatura de la derivada de J respecto de u calculada en $u = u_0$. Si representamos por x la diferencia $u - u_0$, la ecuación de la órbita para el movimiento en la proximidad de las condiciones de circularidad será

$$\frac{d^2x}{d\theta^2} + x = x \frac{dJ}{du_0},$$

o bien

$$\frac{d^2x}{d\theta^2} + \beta^2 x = 0, \quad (\text{A-5})$$

donde

$$\beta^2 = 1 - \frac{dJ}{du_0}. \quad (\text{A-6})$$

Para que x describa una oscilación estable acotada, β^2 debe ser definida positiva. De la definición dada por la ecuación (A-2) tenemos

$$\frac{dJ}{du} = \frac{2m}{l^2 u^3} f\left(\frac{1}{u}\right) - \frac{m}{l^2 u^2} \frac{d}{du} f\left(\frac{1}{u}\right) = -\frac{2J}{u} - \frac{m}{l^2 u^2} \frac{d}{du} f\left(\frac{1}{u}\right).$$

En vista de las condiciones de circularidad (ec. 3-41 ó ec. A-3), deducimos que

$$\frac{dJ}{du_0} = -2 + \frac{u_0}{f_0} \frac{df}{du_0},$$

donde, además del convenio utilizado para las derivadas, f_0 representa $f(1/u_0)$. Aquí, β^2 viene dada por

$$\beta^2 = 3 - \frac{u_0}{f_0} \frac{df}{du_0} = 3 + \frac{r}{f} \frac{df}{dr} \Big|_{r=r_0},$$

que es la misma ecuación (3-46) y la condición de estabilidad $\beta^2 > 0$ se reduce así a la ecuación (3-43).

Tomando un origen de θ adecuado, la solución de la ecuación (A-5) para β^2 definida positiva se puede escribir en la forma

$$x = a \cos \beta \theta \tag{A-8}$$

(cfr. ec. 3-45). Para que la órbita se mantenga cerrada cuando la energía y el momento cinético se aparten así ligeramente de la circularidad, la cantidad β debe ser un número racional. Queremos hallar leyes para la fuerza tales que para una amplia gama de condiciones iniciales, es decir, para una amplia gama de valores de u_0 , las órbitas que se desvíen ligeramente de la circularidad se mantengan cerradas. En estas circunstancias, tal como se arguyó en el texto principal, β debe tener el mismo valor en todo el dominio de valores de u_0 y la ecuación (A-7) se puede considerar como ecuación diferencial para $f(1/u)$ o $f(r)$. La ley de la fuerza que buscamos deberá conformar con una dependencia de r dada en la ecuación (3-48):

$$f(r) = -\frac{k}{r^3 - \beta^2}, \tag{A-8}$$

donde k es una constante y β un número racional.

La ley para la fuerza de la ecuación (A-8) permite aún una amplia variedad de comportamientos para la fuerza. No obstante, intentaremos aplicar a dicha ley condiciones más restrictivas, exigiendo que incluso cuando sean considerables las desviaciones respecto a la circularidad se mantenga cerrada la órbita. Por tanto, deberemos tratar con desviaciones de u respecto a u_0 de tal magnitud que debamos conservar más que el primer término del desarrollo en serie de Taylor de $J(u)$. Podremos, pues, sustituir la ecuación (A-4) por

$$J(u) = u_0 + xJ' + \frac{x^2}{2}J'' + \frac{x^3}{6}J''' + O(x^4), \tag{A-9}$$

donde se sobreentiende que las derivadas están calculadas en $u = u_0$. En función de este desarrollo de $J(u)$, la ecuación de la órbita se convierte en

$$\frac{d^2x}{d\theta^2} + \beta^2 x = \frac{x^2 J''}{2} + \frac{x^3 J'''}{6}. \tag{A-10}$$

Queremos encontrar la naturaleza de la ley fuente tal que incluso cuando la desviación x respecto a la órbita circular sea suficientemente grande para que no puedan despreciarse

los términos del segundo miembro, la solución de la ecuación (A-10) siga representando una órbita cerrada. En el caso de perturbaciones pequeñas de la circularidad sabemos que x tiene el comportamiento descrito por la ecuación (A-8), que representa el término fundamental de un desarrollo de Fourier según $\beta\theta$. Buscamos por tanto una solución de órbita cerrada incluyendo algunos términos más en el desarrollo de Fourier:

$$x = a_0 + a_1 \cos \beta\theta + a_2 \cos 2\beta\theta + a_3 \cos 3\beta\theta. \quad (\text{A-11})$$

Las amplitudes a_0 y a_2 deben ser de menor magnitud que a_1 porque se anulan más rápidamente que a_1 cuando se tiende a la circularidad. Según veremos, a_3 debe ser de un orden de magnitud aún más bajo que el de a_0 o a_2 , que es por lo que se pueden despreciar los términos en $\cos 4\beta\theta$ y demás. En consecuencia, en el término en x^2 del segundo miembro de la ecuación (A-10) no se incluyen los factores en $\cos 3\beta\theta$ y en el término en x^3 sólo se conservan los factores en $\cos \beta\theta$. Al calcular en el segundo miembro las potencias y productos de las funciones coseno, se reducen mediante identidades tales como

$$\cos \beta\theta \cos 2\beta\theta = \frac{1}{2}(\cos \beta\theta + \cos 3\beta\theta)$$

y

$$\cos^3 \beta\theta = \frac{1}{4}(3 \cos \beta\theta + \cos 3\beta\theta).$$

Conservando de manera consistente los términos hasta el orden de a_1^3 de esta manera, la ecuación (A-10) con la solución (A-11) se puede reducir a

$$\begin{aligned} & \beta^2 a_0 - 3\beta^2 a_2 \cos 2\beta\theta - 8\beta^3 a_3 \cos 3\beta\theta \\ &= \frac{a_1^2}{4} J'' + \left[\frac{2a_1 a_0 + a_1 a_2 J'' + \frac{J''' a_1^3}{8}}{2} \right] \cos \beta\theta \\ &+ \frac{a_1^2}{4} J'' \cos 2\beta\theta + \left[\frac{a_1 a_2 J'' + \frac{J''' a_1^3}{24}}{2} \right] \cos 3\beta\theta. \end{aligned} \quad (\text{A-12})$$

Para que sea válida la solución, deberán anularse por separado los coeficientes de cada término coseno, lo cual lleva a cuatro condiciones para la amplitud y las derivadas de J :

$$a_0 = \frac{a_1^2 J''}{4\beta^2}, \quad (\text{A-13a})$$

$$a_2 = -\frac{a_1^2 J''}{12\beta^2}, \quad (\text{A-13b})$$

$$0 = \frac{2a_1 a_0 + a_1 a_2}{2} J'' + \frac{J''' a_1^3}{8}, \quad (\text{A-13c})$$

$$a_3 = -\frac{1}{8\beta^3} \left[\frac{a_1 a_2}{2} J'' + \frac{J''' a_1^3}{24} \right]. \quad (\text{A-13d})$$

Recordemos que hemos demostrado, sobre la base de desviaciones ligeras respecto a la circularidad, que para órbitas cerradas la ley de la fuerza debe tener la forma de la ecuación (A-8) o que $J(u)$ venga dada por

$$J = +\frac{mk}{l^2} u^{1-\beta^2}. \quad (\text{A-14})$$

Teniendo presente la condición de circularidad (ec. A-3), las diversas derivadas en u_0 se pueden calcular en la forma

$$J'' = \frac{\beta^2(1-\beta^2)}{u_0} \quad (\text{A-15a})$$

y

$$J''' = \frac{-\beta^2(1-\beta^2)(1+\beta^2)}{u_0^2}. \quad (\text{A-15b})$$

Las ecuaciones (A-13a,b) dicen pues que a_0/a_1 y a_2/a_1 son del orden de a_1/u_0 que, por hipótesis, es un número pequeño. Además, la ecuación (A-13d) indica que a_3/a_1 es del orden de $(a_1/u_0)^2$, lo que justifica lo anteriormente afirmado de que a_3 es de orden de magnitud inferior al de a_0 o a_2 .

La ecuación (A-13c) es una condición impuesta sólo a β , condición que es en realidad la conclusión principal del teorema de Bertrand. Sustituyendo en la ecuación (A-13c) las ecuaciones (A-13a,b) y (A-15) tenemos la condición

$$\beta^2(1-\beta^2)(4-\beta^2) = 0. \quad (\text{A-16})$$

Para desviaciones respecto a la órbita circular, es decir, $\beta \neq 0$, las únicas soluciones son

$$\beta^2 = 1, \quad f(r) = -\frac{k}{r^2} \quad (\text{A-17a})$$

y

$$\beta^2 = 4, \quad f(r) = -kr. \quad (\text{A } 17\text{b})$$

Luego las dos únicas leyes de fuerza posibles compatibles con la solución son o la ley de gravitación inversamente proporcional al cuadrado de la distancia o la ley de Hooke.

Hemos partido de órbitas que eran circulares. Éstas son posibles para todas las leyes de fuerza atractiva en una amplia gama de valores de l y E , los cuales fijan a su vez el radio de la órbita. El requisito de que la órbita circular sea *estable* para todos los radios restringe ya la forma de la ley de la fuerza mediante la condición de desigualdad $\beta^2 > 0$ (ec. 3-48). Si además buscamos leyes de la fuerza tales que las órbitas que sólo se desvían ligeramente de la circular sigan siendo cerradas, independientemente de cuál sea el radio de la órbita de referencia, las leyes de la fuerza quedan restringidas al conjunto discreto dado por la ecuación (A-8) con valores de β racionales. Para que las órbitas sigan siendo cerradas para desviaciones mayores respecto a la circularidad, independientemente de cuáles sean las condiciones iniciales de la órbita de referencia, tan sólo se permiten dos de estos valores racionales: $|\beta| = 1$ y $|\beta| = 2$. Como sabemos que estas leyes de fuerza atractiva dan en realidad órbitas cerradas para todos los valores de E y l que lleven a un movimiento acotado, deberán ser las *únicas* leyes de la fuerza que lleven a órbitas cerradas para todo movimiento acotado.

Apéndice B

Los ángulos de Euler en otros convenios*

Los ángulos de Euler definidos en el texto se especifican por una rotación inicial de un ángulo ϕ alrededor del eje z original, una segunda rotación de ángulo θ alrededor del eje intermedio x y una tercera rotación de ángulo ψ alrededor del eje z final. A esta secuencia la llamamos «convenio x », haciendo referencia a la elección de la segunda rotación. Son también posibles otros convenios y dos de ellos han encontrado aplicación frecuente en campos particulares. Vamos a dar fórmulas para propiedades de una rotación general en función de los ángulos de Euler de estos otros dos convenios.

CONVENIO y

Según dijimos en el texto, este convenio es práctica casi normal en Mecánica cuántica y campos relacionados con ella. Sólo se diferencia del convenio x en que la segunda rotación tiene lugar alrededor del eje intermedio y . La transcripción del convenio x al convenio y es particularmente sencilla porque θ conserva su significado en ambos convenios y se obtienen fácilmente los cambios correspondientes a los otros ángulos. En el convenio x , ϕ es el ángulo que forma la línea de nodos con el eje x ; en el convenio y , es la misma medida del ángulo que forma aquella con el eje y . Análogamente, en el convenio x , ψ es el ángulo que la línea de nodos forma con el eje x' ; mientras que en el convenio y es el mismo ángulo relativo al eje y' . Utilizando momentáneamente subíndices para indicar el convenio que se utiliza, lo anterior implica la relación (cfr. fig. 4-7)

$$\begin{aligned}\phi_x &= \phi_y + \frac{\pi}{2} \\ \psi_x &= \psi_y - \frac{\pi}{2}\end{aligned}\tag{B-1y}$$

* Véase §4.4.

o sea

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \phi_x &= \cos \phi_y, & \operatorname{sen} \psi_x &= -\cos \psi_y, \\ \cos \phi_x &= -\operatorname{sen} \phi_y, & \cos \psi_x &= \operatorname{sen} \psi_y. \end{aligned} \quad (\text{B } 2y)$$

Con esta receta obtenemos las fórmulas siguientes en función de los ángulos de Euler en el convenio y :

Matriz rotación:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\operatorname{sen} \psi \operatorname{sen} \phi + \cos \theta \cos \phi \cos \psi & \operatorname{sen} \psi \cos \phi + \cos \theta \operatorname{sen} \phi \cos \psi & -\cos \psi \operatorname{sen} \theta \\ -\cos \psi \operatorname{sen} \phi - \cos \theta \cos \phi \operatorname{sen} \psi & \cos \psi \cos \phi - \cos \theta \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \psi & \operatorname{sen} \psi \operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta \cos \psi & \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \psi & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (\text{B-3y})$$

Podemos obtener el mismo resultado notando que el cambio de x por y corresponde a una rotación de los sistemas de referencia de un ángulo $-\pi/2$ ó $3\pi/2$ alrededor del eje z . Podemos pues traducir la matriz \mathbf{A} del convenio x al convenio y mediante una transformación de semejanza por medio de la matriz ortogonal \mathbf{G} :

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

llegando también a la ecuación (B-3).

Parámetros de Cayley-Klein. Como antes, la matriz \mathbf{Q} se puede obtener por el producto de las matrices \mathbf{Q} correspondientes a cada rotación, estando la única diferencia en la matriz \mathbf{Q}_θ , que ahora es

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_\theta &= e^{i\sigma_2 \frac{\theta}{2}} = \mathbf{1} \cos \frac{\theta}{2} + i\sigma_2 \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \\ -\operatorname{sen} \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{B } 4y)$$

Del producto de matrices $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_\psi \mathbf{Q}_\theta \mathbf{Q}_\phi$ (o por las ecuaciones B-3) obtendremos los parámetros de Cayley-Klein

$$\begin{aligned} \alpha &= e^{i\left(\frac{\psi - \phi}{2}\right)} \cos \frac{\theta}{2}, & \beta &= e^{i\left(\frac{\psi - \phi}{2}\right)} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}, \\ \gamma &= -e^{-i\left(\frac{\psi - \phi}{2}\right)} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}, & \delta &= e^{-i\left(\frac{\psi + \phi}{2}\right)} \cos \frac{\theta}{2}. \end{aligned} \tag{B-5y}$$

Parámetros de Euler. De las ecuaciones (4-65) y (B-5y) se deduce inmediatamente que en el convenio y los parámetros de Euler vienen dados por

$$\begin{aligned} e_0 &= \cos \frac{\psi + \phi}{2} \cos \frac{\theta}{2}, & e_2 &= \cos \frac{\psi - \phi}{2} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}, \\ e_1 &= \operatorname{sen} \frac{\psi - \phi}{2} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}, & e_3 &= \operatorname{sen} \frac{\psi + \phi}{2} \cos \frac{\theta}{2}. \end{aligned} \tag{B-6y}$$

Componentes de la velocidad angular. Bien sea por utilización directa de las ecuaciones (B-2) o siguiendo los significados físicos de las partes componentes de ω , se pueden obtener las siguientes componentes de ω según los ejes del cuerpo en el convenio y:

$$\begin{aligned} \omega_{x'} &= -\dot{\phi} \operatorname{sen} \theta \cos \psi + \dot{\theta} \operatorname{sen} \psi, \\ \omega_{y'} &= \dot{\phi} \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \psi + \dot{\theta} \cos \psi, \\ \omega_{z'} &= \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}. \end{aligned} \tag{B-7y}$$

Análogamente, las componentes de ω según los ejes del espacio son

$$\begin{aligned} \omega_x &= -\dot{\theta} \operatorname{sen} \phi + \dot{\psi} \operatorname{sen} \theta \cos \phi, \\ \omega_y &= \dot{\theta} \cos \phi + \dot{\psi} \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi, \\ \omega_z &= \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\phi}. \end{aligned} \tag{B-8y}$$

Por último, notemos que

$$\cos \left(\frac{\Phi}{2} \right) = e_0 = \cos \frac{\psi + \phi}{2} \cos \frac{\theta}{2}, \tag{B-9y}$$

que es lo mismo que la ecuación (4-97) para el convenio x .

CONVENIO xyz

En este convenio cada rotación tiene lugar alrededor de un eje rotulado diferentemente. Está claro que serán posibles diversas secuencias de rotación. La mayoría de aerodinamicistas norteamericanos y británicos prefieren* la secuencia en la cual la primera rotación es el ángulo de *guiñada* ϕ alrededor de un eje z , la segunda es el ángulo de *cabeceo* θ alrededor de un eje intermedio y , siendo la tercera el ángulo de *rotación* ψ alrededor del eje final x (o eje de figura del vehículo). † De las tres matrices de rotación elemental, **D** sigue siendo la dada por la ecuación (4-43), **C** aparece en la forma

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\text{sen} \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen} \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (\text{B-10}xyz)$$

y **B** es la dada por la ecuación (4-44) (escribiendo ψ en lugar de θ , desde luego). El producto **BCD** da la

Matriz de rotación

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \phi & \cos \theta \text{sen} \phi & -\text{sen} \theta \\ \text{sen} \psi \text{sen} \theta \cos \phi - \cos \psi \text{sen} \phi & \text{sen} \psi \text{sen} \theta \text{sen} \phi + \cos \psi \cos \phi & \cos \theta \text{sen} \psi \\ \cos \psi \text{sen} \theta \cos \phi + \text{sen} \psi \text{sen} \phi & \cos \psi \text{sen} \theta \text{sen} \phi - \text{sen} \psi \cos \phi & \cos \theta \cos \psi \end{pmatrix} \quad (\text{B-11}xyz)$$

Parámetros de Cayley-Klein. La matriz **Q** viene dada por

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_\psi \mathbf{Q}_\theta \mathbf{Q}_\phi = \begin{pmatrix} \cos \frac{\psi}{2} & i \text{sen} \frac{\psi}{2} \\ i \text{sen} \frac{\psi}{2} & \cos \frac{\psi}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & \text{sen} \frac{\theta}{2} \\ -\text{sen} \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\phi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\phi/2} \end{pmatrix}.$$

* Véase R. L. Pio, «Euler Angle Transformations», *IEEE Transactions on Automatic Control* AC11, 707 (1966).

† En la literatura técnica se le llama a veces secuencia 321, es decir, la primera rotación tiene lugar alrededor del eje 3, etc.

Al efectuar la multiplicación encontramos que los parámetros de Cayley-Klein tienen la forma

$$\alpha = \delta^* = \left(\cos \frac{\psi}{2} \cos \frac{\theta}{2} - i \operatorname{sen} \frac{\psi}{2} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \right) e^{i\phi/2} \tag{B 12xyz}$$

$$\beta = -i^* = \left(\cos \frac{\psi}{2} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\psi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \right) e^{-i\phi/2}.$$

Parámetros de Euler. De las ecuaciones (B-11xyz) se deduce que los parámetros de Euler son

$$\begin{aligned} \cos \frac{\Phi}{2} = e_0 &= \cos \frac{\psi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\phi}{2} + \operatorname{sen} \frac{\psi}{2} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{\phi}{2}, \\ e_1 &= \operatorname{sen} \frac{\psi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\phi}{2} - \cos \frac{\psi}{2} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{\phi}{2}, \\ e_2 &= \cos \frac{\psi}{2} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cos \frac{\phi}{2} + \operatorname{sen} \frac{\psi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{\phi}{2}, \\ e_3 &= -\operatorname{sen} \frac{\psi}{2} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cos \frac{\phi}{2} + \cos \frac{\psi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{\phi}{2}. \end{aligned} \tag{B 13xyz}$$

Notemos que el coseno del ángulo de rotación total tiene ahora una forma diferente de las correspondientes a los convenios *x* o *y*.

Componentes de la velocidad angular. Está claro que ω_ψ está dirigida según el eje del cuerpo *x*, ω_ϕ según el eje *z* del espacio y ω_θ según el eje intermedio *y*, o sea en el plano *yz* final. Las componentes resultantes según los ejes del cuerpo son

$$\begin{aligned} \omega_x &= \dot{\psi} - \dot{\phi} \operatorname{sen} \theta, \\ \omega_y &= \dot{\theta} \cos \psi + \dot{\phi} \cos \theta \operatorname{sen} \psi, \\ \omega_z &= -\dot{\theta} \operatorname{sen} \psi + \dot{\phi} \cos \theta \cos \psi. \end{aligned} \tag{B 14xyz}$$

Análogamente, las componentes de ω según los ejes del espacio son

$$\begin{aligned} \omega_x &= \dot{\psi} \cos \theta \cos \phi - \dot{\theta} \operatorname{sen} \phi, \\ \omega_y &= \dot{\psi} \cos \theta \operatorname{sen} \phi + \dot{\theta} \cos \phi, \\ \omega_z &= \dot{\phi} - \dot{\psi} \operatorname{sen} \theta. \end{aligned} \tag{B 15xyz}$$

Apéndice C

Propiedades de transformación de $d\Omega^*$

Las componentes $d\Omega_j$ son los elementos de la matriz 3×3 antisimétrica ϵ (ec. 4-105) y vienen dados formalmente en función del símbolo de permutación por la relación

$$\epsilon_{mn} = \epsilon_{mnj} d\Omega_j. \quad (\text{C-1})$$

Ante una transformación ortogonal cuya matriz sea \mathbf{B} , la matriz ϵ se transforma mediante una transformación de semejanza

$$\epsilon' = \mathbf{B}\epsilon\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{B}\epsilon\tilde{\mathbf{B}}, \quad (\text{C-2})$$

con componente genérica

$$\epsilon'_{kl} = b_{km} b_{ln} \epsilon_{mn}. \quad (\text{C-3})$$

La propiedad de antisimetría se conserva en una transformación de semejanza; por tanto, los elementos de ϵ' se pueden escribir también en la forma

$$\epsilon'_{kl} = \epsilon_{kli} d\Omega'_i. \quad (\text{C-4})$$

* Véase §4-8.

Con estas representaciones de las matrices antisimétricas, las propiedades de transformación de $d\Omega_j$ vienen, pues, dadas por

$$\epsilon_{kli} d\Omega'_i = b_{km} b_{ln} \epsilon_{mnj} d\Omega_j. \quad (\text{C } 5)$$

Si es \mathbf{A} una matriz 3×3 , el determinante de \mathbf{A} viene dado por†

$$|\mathbf{A}| = \epsilon_{pqi} a_{pm} a_{qn} a_{ij}, \quad (\text{C } 6)$$

si mnj es una permutación cíclica de 1, 2, 3. Permutando m con n , con lo que la permutación no será cíclica, cambia el signo de la expresión ya que la operación equivale a permutar dos columnas en un determinante. Además, la expresión se anula si dos de los índices mnj son iguales, ya que en un determinante que tenga dos columnas iguales es nulo. Estas propiedades respecto a los índices son exactamente las del símbolo de permutación. Por tanto, la ecuación (C-6) se puede escribir así de manera más general:

$$\epsilon_{mnj} |\mathbf{A}| = \epsilon_{pqi} a_{pm} a_{qn} a_{ij}, \quad (\text{C } 7)$$

sin restricción alguna para los índices mnj . Podemos aplicar la ecuación (C-7) a la matriz ortogonal \mathbf{B} y recordando que el cuadrado del determinante de una matriz ortogonal es siempre $+1$, obtenemos

$$\epsilon_{mnj} = \epsilon_{pqi} b_{pm} b_{qn} b_{ij} |\mathbf{B}|. \quad (\text{C } 8)$$

Podemos escribir ahora la ecuación (C-5) en la forma

$$\epsilon_{kli} d\Omega'_i = \epsilon_{pqi} b_{km} b_{pn} b_{ln} b_{qn} b_{ij} |\mathbf{B}|. \quad (\text{C } 9)$$

† La mayoría de libros de Álgebra lineal dan el equivalente de este desarrollo del determinante; p. ej., R. R. Stoll, *Linear Algebra and Matrix Theory*, p. 92; S. Lipschutz, *Theory and Problems of Linear Algebra*, p. 172; y G. Strang, *Linear Algebra and its Applications*, p. 157. En verdad, muchos de los libros antiguos utilizan la ecuación (C-6) como definición de determinante, p. ej., la clara monografía de H. W. Turnbull, *The Theory of Determinants, Matrices and Invariants*, p. 12. (La postura más moderna es definir el determinante en función de sus propiedades manipulativas.) Véase también el capítulo 4 de G. Arfken, *Mathematical Methods for Physicists*; T. C. Bradbury, *Theoretical Mechanics*, pp. 26-28; y G. Goertzel y N. Tralli, *Some Mathematical Methods of Physics*, apéndice 1A.

Por la propiedad de ortogonalidad de \mathbf{B} tenemos

$$b_{km}b_{pm} = \delta_{kp}, \quad b_{ln}b_{qn} = \delta_{lq}.$$

con lo que la ecuación (C-9) se reduce a

$$\epsilon_{kli} d\Omega'_i = \epsilon_{kli} |\mathbf{B}| b_{ij} d\Omega_j. \quad (\text{C-10})$$

Se deduce que

$$d\Omega'_i = |\mathbf{B}| b_{ij} d\Omega_j, \quad (\text{C-11})$$

que es el resultado (ec. 4-110) que queríamos demostrar.

Apéndice D

Condiciones de Staeckel para la separabilidad de la ecuación de Hamilton-Jacobi

Vamos a demostrar que las condiciones de Staeckel (v. antes p. 551) proporcionan condiciones suficientes para la separabilidad de la ecuación de Hamilton-Jacobi, es decir, que si se cumplen se pueden separar las variables en la ecuación de Hamilton-Jacobi. En el Pars* podemos encontrar una demostración de la necesidad de las condiciones de Staeckel. La demostración que damos aquí sigue a grandes rasgos el procedimiento de Garfinkel. †

De las ecuaciones (10-44) y (10-45) se deduce que la hamiltoniana del sistema se puede escribir en la forma

$$H = \frac{1}{2} \sum_i \frac{(p_i - a_i)^2}{T_{ii}} + V(q). \quad (\text{D-1})$$

Como el sistema es conservativo, las dos formas de la ecuación de Hamilton-Jacobi, con ayuda de la ecuación (10-46), se reducen a

$$\frac{1}{2} \sum_i \frac{1}{T_{ii}} \left[\left(\frac{\partial W}{\partial q_i} - a_i \right)^2 + 2V_i(q_i) \right] = \alpha_1. \quad (\text{D-2})$$

* L. A. Pars, *A Treatise on Analytical Dynamics*, 1965, pp. 321-323.

† B. Garfinkel en *Space Mathematics, Part I*, (J. B. Rosser, ed.) 1966, pp. 52-45. (Hay algunas erratas evidentes: un factor 2 en la ecuación (82) y un signo menos en la ecuación (87).)

donde α_1 es la primera de n constantes de integración. La ecuación (D-2) se puede escribir de manera compacta definiendo algunos vectores n -dimensionales:

$$\begin{aligned} \mathbf{b} & \text{ con elementos } \frac{1}{T_{ii}}, \\ \mathbf{c} & \text{ con elementos } \left(\frac{\partial W}{\partial q_i} - a_i \right)^2, \\ \mathbf{V} & \text{ con elementos } V_i(q_i). \end{aligned}$$

La ecuación (D-2) aparece ahora como la ecuación escalar (en notación matricial)

$$\mathbf{b}(\mathbf{c} + 2\mathbf{V}) = 2\alpha_1. \quad (\text{D-3})$$

La última de las condiciones de Staeckel (ec. 10-47) se puede también escribir en forma matricial definiendo un vector δ_1 de elementos

$$(\delta_1)_j = \delta_{1j}, \quad (\text{D-4})$$

es decir, el primer elemento es 1 y el resto son ceros. Entonces, la ecuación (10-47) aparece con nuestra actual notación en la forma

$$\mathbf{b} = \delta_1 \phi^{-1}. \quad (\text{D-5})$$

Pretendemos ahora que una solución de (D-3) esté contenida en la forma

$$\mathbf{c} + 2\mathbf{V} = 2\phi\gamma, \quad (\text{D-6})$$

donde γ es un vector de elementos constantes, pero que por lo demás no están especificados. Para que se cumpla la ecuación (D-3) deberá, pues, ser

$$\mathbf{b}\phi\gamma = \alpha_1,$$

o, en virtud de la ecuación (D-5)

$$\delta_1\gamma = \alpha_1. \quad (\text{D-7})$$

La naturaleza del vector δ_i , definido por la ecuación (D-4), es tal que la ecuación (D-7) se reduce a

$$\gamma_1 = \alpha_1, \tag{D-7'}$$

es decir, el primer elemento de γ debe ser la constante de integración α_1 .

La ecuación (D-6) es equivalente al sistema de ecuaciones

$$\left(\frac{\partial W}{\partial q_i} - a_i(q_i) \right)^2 = -2V_i(q_i) + 2 \sum_j \phi_{ij}(q_i) \gamma_j. \tag{D-8}$$

Como los demás términos de la ecuación i -ésima sólo dependen de q_i , podremos hallar una solución completa de W en forma separada

$$W(q_1, \dots, q_n) = \sum_i W_i(q_i), \tag{D-9}$$

con lo que finalmente tenemos

$$\left(\frac{\partial W_i(q_i)}{\partial q_i} - a_i(q_i) \right)^2 = -2V_i(q_i) + 2 \sum_j \phi_{ij}(q_i) \gamma_j, \tag{D-10}$$

que es equivalente a la ecuación (10-48).

Notemos que la matriz ϕ sólo depende de los elementos diagonales de la matriz \mathbf{T} y de la naturaleza del sistema de coordenadas y no del «potencial vector» \mathbf{V} . Por ejemplo, consideremos una forma de ϕ que sea adecuada para utilizarse en problemas con una partícula en coordenadas polares esféricas. Podemos deducir los elementos de ϕ considerando un problema sencillo de esta naturaleza en el cual la ecuación de Hamilton-Jacobi sea separable directamente. El movimiento en el espacio bajo la acción de una fuerza central proporciona un problema de este tipo. Si designamos las coordenadas r, θ y ϕ por los subíndices 1, 2 y 3, respectivamente, las ecuaciones separadas (10-59), (10-58) y (10-56) podrán escribirse en la forma

$$\left(\frac{\partial W_1}{\partial r} \right)^2 = -2mV(r) + 2m\alpha_1 - \frac{\alpha_2}{r^2}, \tag{D-11a}$$

$$\left(\frac{\partial W_2}{\partial \theta} \right)^2 = \alpha_2^2 - \frac{\alpha_1}{\text{sen}^2 \theta}, \tag{D-11b}$$

$$\left(\frac{\partial W_3}{\partial \phi} \right)^2 = \alpha_3^2. \tag{D-11c}$$

Como sabemos que cada elemento de la primera fila de ϕ^{-1} ha de tener el factor $1/m$, podríamos esperar que cada elemento de ϕ tuviera el factor m . Comparando las ecuaciones (D-11) con las (D-10) intuimos los siguientes elementos para γ y ϕ :

$$\gamma_1 = \alpha_1, \quad \gamma_2 = \frac{\alpha_2}{2m}, \quad \gamma_3 = \frac{\alpha_3^2}{2m}, \quad (\text{D } 12)$$

y

$$\phi = m \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 1 & -\text{csc}^2 \theta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{D } 13)$$

El cálculo directo nos indica que la matriz inversa ϕ^{-1} es

$$\phi^{-1} = \frac{1}{m} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{r^2} & \frac{1}{r^2 \text{sen}^2 \theta} \\ 0 & 1 & \text{csc}^2 \theta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{D } 14)$$

y está claro que ϕ y ϕ^{-1} tienen las propiedades que se exige de ellas.

Apéndice E

Formulación lagrangiana del campo acústico en los gases

Para estudiar las ecuaciones de campo que describen las vibraciones sonoras en los gases, representaremos el desplazamiento de cada partícula del gas, respecto a su posición normal, por el vector $\boldsymbol{\eta}$ de componentes $\eta_i, i = 1, 2, 3$. Cada punto xyz del espacio tendrá así asociadas a él tres coordenadas generalizadas. Supondremos siempre pequeña la perturbación, por lo que la presión P y la densidad μ diferirán sólo ligeramente de sus respectivos valores de equilibrio P_0 y μ_0 .

En un sistema discreto, el problema se plantea en la formulación lagrangiana hallando las energías cinética y potencial y escribiendo la lagrangiana igual a la diferencia de dichas cantidades. La lagrangiana que buscamos es la integral de volumen de una densidad \mathcal{L} . Las energías cinética y potencial se pueden obtener de manera análoga en forma de integrales de volumen de densidades \mathcal{T} y \mathcal{V} , respectivamente, que guarden la relación

$$\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{V}. \quad (\text{E } 1)$$

La densidad de energía cinética no presenta problema alguno; teniendo presente que los desplazamientos respecto del equilibrio son pequeños, tenemos

$$\mathcal{T} = \frac{\mu_0}{2} \dot{\boldsymbol{\eta}}^2 = \frac{\mu_0}{2} (\dot{\eta}_1^2 + \dot{\eta}_2^2 + \dot{\eta}_3^2). \quad (\text{E } 2)$$

Obtener la densidad de energía potencial ya resulta algo más difícil. La energía potencial del gas es una medida del trabajo que puede efectuar el gas al dilatarse contra la presión. En esencia, se debe a lo que los científicos del siglo XVII llamaban el «muelle»

del gas. Consideremos una masa M de gas con volumen de equilibrio

$$V_0 = \frac{M}{\mu_0} \quad (\text{E-3})$$

suficientemente pequeño para que en todo él sea constante γ . Entonces γV_0 representa la energía potencial de la cantidad de gas. A consecuencia de la perturbación sonora, el volumen pasa de V_0 a $V_0 + V$. Ahora bien, en una variación de volumen dV el trabajo efectuado sobre el sistema, es decir, el incremento de su energía potencial, es $-P dV$.* Luego la energía potencial correspondiente a una variación de volumen desde V_0 a $V_0 + \Delta V$ es

$$\gamma V_0 = - \int_{V_0}^{V_0 + \Delta V} P dV.$$

Podíamos pensar que como ΔV es pequeño, se puede aproximar la integral a $P_0 \Delta V$. Según veremos, este término no contribuye en realidad a las ecuaciones de movimiento. Por tanto, será necesario pasar a la aproximación siguiente, en la cual la curva que da P en función de V se sustituye por una recta en la región entre V_0 y $V_0 + \Delta V$ (cfr. fig. E-1):

$$\int_{V_0}^{V_0 + \Delta V} P dV = P_0 \Delta V + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_0 (\Delta V)^2. \quad (\text{E 4})$$

Para calcular la derivada de P respecto a V , debemos hacer alguna reflexión acerca de la Termodinámica del caso. En principio, nos sentimos inclinados a utilizar la ley de Boyle,

$$PV = C, \quad (\text{E 5})$$

que da la relación entre presión y volumen, y esto fue lo que hizo Newton. Sin embargo, nos lleva a un resultado erróneo porque la ecuación (E-5) supone que las variaciones de presión y volumen tienen lugar *isotérmicamente*. En realidad, las vibraciones sonoras son casi siempre tan rápidas que no hay tiempo para que la conducción extraiga el calor desarrollado e iguale las temperaturas. Las contracciones y expansiones tienen lugar

* La deducción elemental de costumbre es la siguiente. La fuerza que ejerce el sistema exterior sobre un elemento de superficie dA es $P dA$, dirigida hacia el interior. Al dilatarse, la superficie recorre una distancia dx según la normal hacia el exterior y el trabajo efectuado será $-P dA dx = -P dV$.

adiabáticamente, es decir, sin intercambio de calor con el medio ambiente. En estas condiciones, la relación entre P y V es

$$PV^\gamma = C, \tag{E 6}$$

donde γ es la razón constante entre los calores específicos a presión constante y a volumen constante.* Luego, la derivada buscada es

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_0 = -\frac{\gamma P_0}{V_0}. \tag{E 7}$$

La variación de volumen conviene expresarla en función de la variación de densidad correspondiente. Como $V = M/\mu$, la variación de V vendrá dada por

$$\Delta V = -\frac{M}{\mu_0^2} \Delta \mu = -V_0 \sigma, \tag{E 8}$$

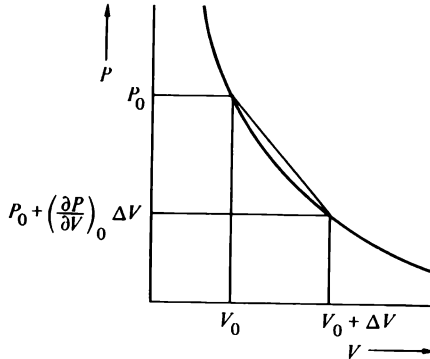


FIGURA E-1

Diagrama presión-volumen para un gas.

* La deducción puede encontrarse en M. W. Zemansky, *Heat and Thermodynamics*, 5.ª ed. (New York: McGraw-Hill, 1968), §5-5.

donde hemos representado por σ la variación relativa de densidad

$$\mu = \mu_0(1 + \sigma). \quad (\text{E } 9)$$

Combinando las ecuaciones (E-3, 4, 7 y 9) la densidad de energía potencial queda en la forma

$$\gamma = P_0\sigma + \frac{\gamma P_0}{2}\sigma^2. \quad (\text{E } 10)$$

Esta forma no es aún la útil para la lagrangiana; todavía tenemos que expresar σ en función de η . Consideremos un volumen finito cualquiera V en el espacio. La masa que sale de este volumen a causa de la pequeña perturbación respecto al equilibrio viene dada por

$$\mu_0 \int \eta \cdot d\mathbf{A},$$

estando la integral extendida a la superficie que limita el volumen. La integral de volumen de la variación de densidad debe ser exactamente igual a este transporte de masa:

$$-\mu_0 \int \sigma dV = \mu_0 \int \eta \cdot d\mathbf{A}. \quad (\text{E } 11)$$

Por el teorema de la divergencia, la relación (E-11) se puede escribir

$$-\int \sigma dV = \int \nabla \cdot \eta dV,$$

y como la igualdad es válida para todo volumen, deberá ser†

$$\sigma = -\nabla \cdot \eta. \quad (\text{E } 12)$$

† La ecuación (E-12), puesta en la forma más conocida,

$$\dot{\rho} = -\nabla \cdot \rho \dot{\mathbf{r}},$$

nos damos cuenta que es la *ecuación de continuidad* para el movimiento del gas.

Habida cuenta de esto, la forma final de la densidad de energía potencial es

$$\gamma' = -P_0 \nabla \cdot \boldsymbol{\eta} + \frac{\gamma P_0}{2} (\nabla \cdot \boldsymbol{\eta})^2. \quad (\text{E } 13)$$

Podemos ver ahora que el término en γ' lineal en σ no puede contribuir a la energía potencial total. Según la ecuación (E-11) la integral de volumen de σ es igual a la integral de superficie de $\boldsymbol{\eta}$ cambiada de signo y si la superficie encierra totalmente en su interior al sistema, debe ser nula, es decir, no se transporta masa hacia afuera del sistema. Que este término tenga una contribución nula a L no es razón suficiente para suprimirlo en \mathcal{L} . Es concebible que el comportamiento funcional del término pueda aún tener un efecto sobre la ecuación de movimiento. (Recordemos que la hamiltoniana covariante de un sistema puede ser nula pero, desde luego, las ecuaciones de movimiento no desaparecen.) Por tanto, el término deberá conservarse de momento. La densidad de lagrangiana total podrá, pues, escribirse en la forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\mu_0 \dot{\boldsymbol{\eta}}^2 + 2P_0 \nabla \cdot \boldsymbol{\eta} - \gamma P_0 (\nabla \cdot \boldsymbol{\eta})^2), \quad (\text{E-14})$$

que es la ecuación (12-24).

Bibliografía

Las ediciones que se consignan son (en su mayor parte) las consultadas para la preparación de este libro. Cuando se conozcan ediciones o reimpressiones posteriores se indican después de la cita. No se pretende dar una bibliografía completa. Si se consigna un trabajo determinado en las Referencias Sugeridas de un capítulo, se indica este hecho con el número del capítulo apropiado entre paréntesis después de la referencia.

Tratados generales de Mecánica clásica

AHARONI, J., *Lectures on mechanics*. Oxford: Oxford University Press, 1972. (Chapter 5)

AMES, JOSEPH SWEETMAN, AND FRANCIS D. MURNHAGHAN, *Theoretical mechanics*. Boston: Ginn and Company, 1929. New York: Dover, 1958.

APPEL, PAUL, *Traité de mécanique rationnelle, Tome 2: Dynamique des systèmes. Mécanique analytique*, 6th ed. Paris: Gauthier-Villars, 1953.

BARGER, VERNON D., AND MARTIN G. OLSSON, *Classical mechanics, a modern perspective*. New York: McGraw-Hill, 1973. (Chapter 5)

BARTLETT, JAMES H., *Classical and modern mechanics*. University, Alabama: University of Alabama Press, 1975.

BRADBURY, T. C., *Theoretical mechanics*. New York: Wiley, 1968. (Chapter 4)

CORBEN, H. C., AND PHILIP STEHLE, *Classical mechanics*, 2nd ed. New York: Wiley, 1960. New York: R. E. Krieger, 1974. (Chapter 6)

FINKELSTEIN, ROBERT J., *Nonrelativistic mechanics*. Reading, Mass.: W. A. Benjamin, 1973.

FOWLES, GRANT R., *Analytical mechanics*. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1962.

GANTMACHER, F., *Lectures in analytical mechanics*. Translated from Russian. Moscow: Mir Publishers, 1970. Reprint, 1975.

GREENWOOD, DONALD T., *Principles of dynamics*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1965.

———. *Classical dynamics*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1977.

GROESBERG, SANFORD WALTON, *Advanced mechanics*. New York: Wiley, 1968. (Chapter 5)

- HAMEL, GEORG, *Theoretische Mechanik, eine einheitsliche einföhrung in die gesamte Mechanik*. Berlin: Springer-Verlag, 1949. Corrected reprint, 1967. (Chapter 4)
- HAUSER, WALTER, *Introduction to the principles of mechanics*. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1965. (Chapter 1)
- KANE, THOMAS R., *Dynamics*. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1968.
- KILMISTER, C. W., *Hamiltonian dynamics*. New York: Wiley, 1964. (Chapter 9)
- . *Lagrangian dynamics*. New York: Plenum Press, 1967.
- KILMISTER, C. W., AND J. E. REEVE, *Rational mechanics*. New York: American Elsevier, 1966. (Chapter 1)
- KONOPINSKI, EMIL JAN, *Classical descriptions of motion*. San Francisco: Freeman, 1969.
- LANCZOS, CORNELIUS, *The variational principles of mechanics*, 4th ed. Toronto: University of Toronto Press, 1970. (Chapters 1, 2, 8, 9, 10)
- LANDAU, L. D., AND E. M. LIFSHITZ, *Mechanics*, 3rd ed. *Course of Theoretical Physics*, vol. 1. Translated from Russian. Oxford: Pergamon Press, 1976. (Chapters, 1, 3, 6)
- MACMILLAN, WILLIAM DUNCAN, *Theoretical mechanics*.
 Vol. 1: *Statics and the dynamics of a particle*. New York: McGraw-Hill, 1927. (Chapter 3)
 Vol. 3: *Dynamics of rigid bodies*. New York: McGraw-Hill, 1936. New York: Dover, 1960. (Chapter 5)
- MARION, JERRY B., *Classical dynamics of particles and systems*, 2nd ed. New York: Academic Press, 1970. (Chapter 3)
- MEIROVITCH, LEONARD, *Methods of analytical dynamics*. New York: McGraw-Hill, 1970. (Chapters 5, 6)
- MILNE, E. A., *Vectorial mechanics*. New York: Interscience Publishers, 1948.
- MORGENSTERN, D., AND I. SZABO, *Vorlesungen über theoretische Mechanik*. Berlin: Springer-Verlag, 1961.
- OSGOOD, WILLIAM F., *Mechanics*. New York: Macmillan, 1937. (Chapter 1)
- PARS, L. A., *A treatise on analytical dynamics*. London: Heinemann, 1965.
- SALETAN, EUGENE J., AND ALAN H. CROMER, *Theoretical mechanics*. New York: Wiley, 1971. (Chapters 4, 9, 11, 12)
- SLATER, JOHN C., AND NATHANIEL H. FRANK, *Mechanics*. New York: McGraw-Hill, 1947. (Chapter 12)
- SOMMERFELD, ARNOLD, *Mechanics. Lectures on theoretical physics*, vol. 1. New York: Academic Press, 1952. (Chapter 5)
- SPOSITO, GARRISON, *An introduction to classical dynamics*. New York: Wiley, 1976.
- SUDARSHAN, E. C. G., AND N. MUKUNDA, *Classical dynamics: A modern perspective*. New York: Wiley, 1974. (Chapter 9)

- SYMON, KEITH R., *Mechanics*, 3rd ed. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1971. (Chapters 1, 5, 7, 8)
- SYNGE, JOHN L., *Classical dynamics*, in vol. 3, part 1 of *Encyclopedia of physics*. Berlin: Springer-Verlag, 1960. (Chapters 8, 9)
- SYNGE, JOHN L., AND BYRON A. GRIFFITH, *Principles of mechanics*, 3rd ed. New York: McGraw-Hill, 1959.
- TER HARR, D., *Elements of Hamiltonian mechanics*. Amsterdam: North-Holland, 1961. Second ed., Oxford: Pergamon Press, 1971. (Chapters 6, 8, 10)
- THIRRING, WALTER, *A course in mathematical physics I: Classical dynamical systems*. Translated from German. New York: Springer-Verlag, 1978.
- THOMSON, WILLIAM (LORD KELVIN), AND PETER GUTHRIE TAIT, *Treatise on natural philosophy*. Cambridge: Cambridge University Press, 1879. Slightly revised, 1896. Reprinted as *Principles of mechanics and dynamics*, New York: Dover, 1962.
- WEBSTER, ARTHUR GORDON, *The dynamics of particles and of rigid, elastic, and fluid bodies*. Leipzig: B. G. Teubner, 1904. New York: Stechert-Hafner, 1920.
- WELLS, DALE A., *Theory and problems of Lagrangian dynamics*. New York: McGraw-Hill (Schaum), 1967. (Chapters 2, 8)
- WHITTAKER, E. T., *A treatise on the analytical dynamics of particles and rigid bodies*, 4th ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1937. (Chapters 1, 2, 3, 4, 6, 8)
- ZAJAC, ALFRED, *Basic principles and laws of mechanics*. Boston: D. C. Heath, 1966.
- . *Principles of classical mechanics and field theory*, in vol. 3, part 1 of *Encyclopedia of physics*. Berlin: Springer-Verlag, 1960. (Chapters 1, 8) (See also J. L. Synge; and C. Truesdell and R. A. Toupin.)

Trabajos acerca de aspectos especiales de la Mecánica clásica

- ABRAHAM, RALPH, AND JERROLD E. MARSDEN, *Foundations of mechanics*, 2nd ed. Reading, Mass.: Benjamin/Cummings, 1978. (Chapter 11)
- ANDERSON, JAMES L., *Principles of relativity physics*. New York: Academic Press, 1967.
- ARNOLD, V. I., *Mathematical methods of classical mechanics*. Translated from the Russian edition of 1974. New York: Springer-Verlag, 1978.
- ARNOLD, V. I., AND A. AVEZ, *Ergodic problems of classical mechanics*. New York: W. A. Benjamin, 1968.
- BERGMANN, PETER GABRIEL, *Introduction to the theory of relativity*. New York: Prentice-Hall, 1942.
- BORN, MAX, *The mechanics of the atom*. Translated by J. W. Fisher. London: G. Bell and Sons, 1927. Reprint, New York: Ungar, 1967. (Chapters 9, 10, 11)

- BROWN, ERNEST W., *An introductory treatise on the lunar theory*. Cambridge: Cambridge University Press, 1896. Reprint, New York: Dover, 1960.
- BROUWER, DIRK, AND GERALD M. CLEMENCE, *Methods of celestial mechanics*. New York: Academic Press, 1961.
- BRUNET, PIERRE, *Etude historique sur le principe de la moindre action*. Paris: Herrmann et Cie, 1938. (Chapter 8)
- BYLERLY, WILLIAM ELWOOD, *An introduction to the use of generalized coordinates in mechanics and physics*. Boston: Ginn, 1913. New York: Dover, 1965.
- CHEN, YU, *Vibrations: Theoretical methods*. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1966. (Chapter 6)
- CRANDALL, STEPHEN H., et al., *Dynamics of mechanical and electromechanical systems*. New York: McGraw-Hill, 1968.
- DANBY, J. M. A., *Fundamentals of celestial mechanics*. New York: Macmillan, 1962. (Chapters 3, 11)
- DEUTSCH, RALPH, *Orbital dynamics of space vehicles*. Englewood Cliffs, N.J., Prentice-Hall, 1963. (Chapter 11)
- DZIOBEK, OTTO, *Mathematical theories of planetary motions*. Register Publishing Co., 1892. Reprint, New York: Dover, 1962.
- EINSTEIN, ALBERT, *The meaning of relativity*, 5th ed. Princeton: Princeton University Press, 1956. (Chapter 7)
- FINLAY-FREUNDLICH, E., *Celestial mechanics*. New York: Pergamon Press, 1958.
- FOCK, V., *The theory of space, time and gravitation*, 2nd English ed. New York: Pergamon (Macmillan), 1964. (Chapter 7)
- FRENCH, A. P., *Special relativity*. (The M.I.T. Introductory Physics Series.) New York: W. W. Norton, 1968. (Chapter 7)
- GARFINKEL, BORIS, *The Lagrange-Hamilton-Jacobi mechanics*, in *Space mathematics, Part 1*, J. Barkley Rosser, ed., *Lectures in applied mathematics*, vol. 5. Providence, R. I.: American Mathematical Society, 1966. (Chapters 10, 11)
- GEYLING, FRANZ T., AND H. ROBERT WESTERMAN, *Introduction to orbital mechanics*. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1971.
- GIACAGLIA, G. E. O., *Perturbation methods in non-linear systems*. New York: Springer-Verlag, 1972. (Chapter 11)
- GOSSICK, B. R., *Hamilton's principle and physical systems*. New York: Academic Press, 1967. (Chapter 2)
- GRAY, ANDREW, *A treatise on gyrostatics and rotational motion*. London: Macmillan, 1918. New York: Dover, 1959. (Chapter 5)
- GRAMMEL, R., *Der Kreisel*. Berlin: Springer-Verlag, 1950.
- HAGEDORN, R., *Relativistic kinematics*. New York: W. A. Benjamin, 1963. Reprint, 1973. (Chapter 7)

- HAGIHARA, YUSUKE, *Celestial mechanics*, vol. 2, parts 1 & 2, *Perturbation theory*. Cambridge, Mass.: M.I.T. Press, 1972. (Chapter 11)
- KERNER, EDWARD H., ed., *The theory of action-at-a-distance in relativistic particle dynamics*. A reprint collection. New York: Gordon and Breach, 1972.
- KLEIN, FELIX, *The mathematical theory of the top*. New York: Scribners, 1897. Reprinted in *Congruence of sets and other monographs*, Bronx, N.Y.: Chelsea, 1967.
- KLEIN, FELIX, AND ARNOLD SOMMERFELD, *Über die Theorie des Kreisels* (4 vols.). Leipzig: B. G. Teubner, 1897-1910. Reprint, New York: Johnson, 1965. (Chapter 5)
- KOTKIN, G. L., AND V. G. SERBO, *Collection of problems in classical mechanics*. Translated from Russian. Oxford: Pergamon Press, 1971.
- KURTH, RUDOLF, *Introduction to the mechanics of the solar system*. New York: Pergamon Press, 1969.
- LEHNERT, BO, *Dynamics of charged particles*. Amsterdam: North-Holland, 1964. (Chapter 11)
- LEIMANIS, EUGENE, *The general problem of motion of coupled rigid bodies about a fixed point*. New York: Springer-Verlag, 1965. (Chapter 5)
- MACH, ERNST, *The science of mechanics*, 5th English ed. LaSalle, Ill.: Open Court, 1942. (Chapter 1)
- MAGNUS, KURT, *Kreisel Theorie und Anwendungen*. Berlin: Springer-Verlag, 1971.
- MANN, RONALD A., *The classical dynamics of particles: Galilean and Lorentz Relativity*. New York: Academic Press, 1974. (Chapter 7)
- MCCUSKEY, S. W., *Introduction to celestial mechanics*. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1963. (Chapter 3)
- MERCIER, ANDRÉ, *Analytical and canonical formalism in physics*. Amsterdam: North-Holland, 1959.
- MISNER, CHARLES W.; KIP S. THORNE; JOHN ARCHIBALD WHEELER, *Gravitation*. San Francisco: Freeman, 1973. (Chapter 7)
- MØLLER, C., *The theory of relativity*, 2nd ed. Oxford: Oxford University Press, 1972.
- MOSER, JURGEN, *Stable and random motions in dynamical systems, with special emphasis on celestial mechanics*. Princeton: Princeton University Press, 1973. (Chapter 11)
- MOULTON, FOREST RAY, *An introduction to celestial mechanics*, 2nd ed. New York: Macmillan, 1914.
- NORTHROP, THEODORE G., *The adiabatic motion of charged particles*. New York: Interscience, 1963. (Chapter 11)
- OLSON, HARRY F., *Solution of engineering problems by dynamical analogies*, 2nd ed. Princeton, N.J.: D. Van Nostrand, 1966 (corrected reprint of *Dynamical analogies*, 2nd ed., 1958). (Chapter 2)

- PLUMMER, H. C., *An introductory treatise on dynamical astronomy*. Cambridge: Cambridge University Press, 1918. Reprint, New York: Dover, 1960. (Chapter 3)
- POINCARÉ, HENRI, *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste* (3 vols.). Paris: Gauthier-Villars, 1892-99. Reprint, New York: Dover, 1957.
- ROUTH, EDWARD JOHN, *Dynamics of a system of rigid bodies*. Part I, *Elementary Part*, 5th ed. London: Macmillan, 1891. Part II, *Advanced Part*, 5th ed. London, Macmillan, 1892. (Chapter 5)
- SANTILLI, RUGGERO MARIO, *Foundations of theoretical mechanics I*. New York: Springer-Verlag, 1978.
- SARD, R. D., *Relativistic mechanics: Special relativity and classical particle dynamics*. New York: W. A. Benjamin, 1970. (Chapter 7)
- SCHWARTZ, HERMAN M., *Introduction to special relativity*. New York: McGraw-Hill, 1968. (Chapter 7)
- SEIGEL, CARL LUDVIG, AND J. K. MOSER, *Lectures on celestial mechanics*. Translated from German. New York: Springer-Verlag, 1971.
- SMART, W. M., *Celestial mechanics*. New York: Wiley, 1953. Reprint, 1961.
- SOPER, DAVISON EUGENE, *Classical field theory*. New York: Wiley, 1976.
- STERNBERG, SHLOMO, *Celestial mechanics*. New York: W. A. Benjamin, 1969.
- STERNE, THEODORE E., *An introduction to celestial mechanics*. New York: Interscience, 1960.
- TISSERAND, F., *Traité de mécanique céleste, Tome I, Perturbation des planètes* . . . Paris: Gauthier-Villars, 1889. New printing, 1960.
- TRUESDELL, C., *Essays in the history of mechanics*. New York: Springer-Verlag, 1968. (Chapter 1)
- TRUESDELL, C., AND R. A. TOUPIN, *The classical field theories*, in vol. 3, part 1 of *Encyclopedia of Physics*. Berlin: Springer-Verlag, 1960. (Chapter 1)
- WINTNER, AUREL, *The analytical foundations of celestial mechanics*. Princeton: Princeton University Press, 1941.
- WRIGLEY, WALTER; WALTER M. HOLLISTER; AND WILLIAM G. DENHARD, *Gyroscopic theory, design and instrumentation*. Cambridge, Mass.: M.I.T. Press, 1969. (Chapter 5)
- YOURGRAU, WOLFGANG, AND STANLEY MANDELSTAM, *Variational principles in dynamics and quantum theory*, 3rd ed. Philadelphia: Saunders, 1968.

Trabajos acerca de otras ramas de la Física y la Matemática que contienen materias de interés para la Mecánica clásica

- ARFKEN, GEORGE, *Mathematical methods for physicists*. New York: Academic Press, 1966. Second ed., 1970. (Chapter 4)
- BADGER, PARKER H., *Equilibrium thermodynamics*. Boston: Allyn and Bacon, 1967. (Chapter 8)

- BARUT, A. O., *Electrodynamics and classical theory of fields and particles*. New York: Macmillan, 1964. (Chapters 7, 12)
- BLISS, GILBERT AMES, *Calculus of variations*. Carus Mathematical Monographs, 1. LaSalle, Ill.: Open Court, 1925. (Chapter 2)
- BOCHER, MAXIME, *Introduction to higher algebra*. New York: Macmillan, 1907.
- BORN, MAX, AND PASCUAL JORDAN, *Elementare Quantenmechanik*. Berlin: Julius Springer, 1930. Ann Arbor: J. W. Edwards, 1946.
- BORN, MAX, AND EMIL WOLF, *Principles of optics*. London: Pergamon Press, 1959. Fifth ed., Oxford: Pergamon Press, 1975. (Chapter 10)
- BRAND, LOUIS, *Vector and tensor analysis*. New York: Wiley, 1947. (Chapter 5)
- BRILLOUIN, LEON, *Tensors in mechanics and elasticity*. Translated from the 1938 French edition. New York: Academic Press, 1964. (Chapter 10)
- BORISENKO, A. I., AND I. E. TARAPOV, *Vector and tensor analysis with applications*. Translated and revised by R. A. Silverman. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1968. (Chapter 4)
- CARATHÉODORY, C., *Calculus of variations and partial differential equations*. San Francisco: Holden-Day, vol. 1, 1965; vol. 2, 1967. Translated from German edition, 1935; revised, 1956. (Chapters 9, 10)
- CASIMIR, H. B. G., *Rotation of a rigid body in quantum mechanics*. Groningen: J. B. Wolters, 1931.
- CONDON, E. U., AND G. H. SHORTLEY, *The theory of atomic spectra*. Cambridge: Cambridge University Press, 1935.
- COURANT, R., AND D. HILBERT, *Methods of mathematical physics*, 2 vols. New York: Interscience, vol. 1, 1953; vol. 2, 1962. (Chapters 2, 8, 10)
- CRONIN, JEREMIAH A.; DAVID F. GREENBERG; AND VALENTINE L. TELEGDI, *University of Chicago graduate problems in physics, with solutions*. Chicago: University of Chicago Press, 1977.
- DAVYDOV, A. S., *Quantum mechanics*. Oxford: Pergamon Press, 1965. Second ed., 1976.
- DIRAC, PAUL A. M., *Lectures on quantum mechanics*. New York: Yeshiva University, 1964.
- EISELE, JOHN A., AND ROBERT M. MASON, *Applied matrix and tensor analysis*. New York: Wiley-Interscience, 1970.
- EISENHART, LUTHER PFAHLER, *Continuous groups of transformation*. Princeton: Princeton University Press, 1933. Reprint, New York: Dover, 1961.
- ELSGOLC, L. E., *Calculus of variations*. Translated from Russian. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1962.
- GARDNER, MARTIN, *New mathematical diversions from Scientific American*. New York: Simon & Schuster, 1971.
- GELFAND, I. M., AND S. V. FOMIN, *Calculus of variations*. Translated and edited by Richard A. Silverman. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1963.

- GIBBS, J. WILLARD, *Vector analysis*. Edited by E. B. Wilson. New York: Scribner, 1901. New Haven: Yale University Press, 1931.
- GOERTZEL, GERALD, AND NUNZIO TRALLI, *Some mathematical methods of physics*. New York: McGraw-Hill, 1960.
- GUILLEMIN, ERNST A., *The mathematics of circuit analysis*. New York: Wiley, 1949. (Chapter 6)
- HERZBERG, GERHARD, *Infrared and Raman spectra of polyatomic molecules*. New York: D. Van Nostrand, 1945. (Chapters 4, 6)
- HESS, SEYMOUR L., *Introduction to theoretical meteorology*. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1959. (Chapter 4)
- HILDEBRAND, FRANCIS B., *Methods of applied mathematics*, 2nd ed. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1965.
- HIRSCHFELDER, JOSEPH O.; CHARLES F. CURTISS; AND R. BYRON BIRD, *Molecular theory of gases and liquids*. New York: Wiley, 1954. Slightly revised edition, 1964. (Chapter 3)
- JACKSON, JOHN DAVID, *Classical electrodynamics*. New York: Wiley, 1962. Second ed., 1975.
- JEFFREYS, H., AND BERTHA S. JEFFREYS, *Methods of mathematical physics*, 2nd ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1950. Third ed., 1972. (Chapters 4, 6)
- KAPLAN, WILFRED, *Advanced calculus*, 2nd ed. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1973.
- LANDAU, L. D., AND E. M. LIFSHITZ, *Quantum mechanics, non-relativistic theory*, 2nd ed., in vol. 3 of *Course of theoretical physics*. Oxford: Pergamon Press, 1965. Third ed., 1977.
- LANG, SERGE, *A second course in calculus*, 3rd ed. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1973.
- LINDSAY, ROBERT BRUCE, AND HENRY MARGENAU, *Foundations of physics*. New York: Wiley, 1936. (Chapters 1, 8)
- LIPSCHUTZ, SEYMOUR, *Theory and problems of linear algebra*. Schaum's Outline Series. New York: McGraw-Hill, 1968.
- LOEBL, ERNEST M., ed., *Group theory and its applications*, vol. II. New York: Academic Press, 1971. (Chapters 3, 9, 10)
- LOOMIS, LYNN H., AND SHLOMO STERNBERG, *Advanced calculus*. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1968.
- MARGENAU, HENRY, AND GEORGE MOSELEY MURPHY, *The mathematics of physics and chemistry*. New York: D. Van Nostrand, 1943. New York: Krieger, 1976.
- MARION, JERRY B., *Principles of vector analysis*. New York: Academic Press, 1965. Second ed., 1970. (Chapter 4)
- MATHEWS, JON, AND R. L. WALKER, *Mathematical methods of physics*. New York: W. A. Benjamin, 1965. Second ed., 1970.

- MCINTOSH, HAROLD. *See* LoebI, Ernest M.
- MERZBACHER, EUGEN, *Quantum mechanics*. New York: Wiley, 1961. Second ed., 1970.
- MUNK, WALTER H., AND GORDON J. F. MACDONALD, *The rotation of the earth, a geophysical discussion*. Cambridge: Cambridge University Press, 1960. (Chapter 5)
- NERING, EVAR D., *Linear algebra and matrix theory*. New York: Wiley, 1963.
- NEWTON, ROGER G., *Scattering theory of waves and particles*. New York: McGraw-Hill, 1966. (Chapter 3)
- PANOFSKY, WOLFGANG K. H., AND MELBA PHILLIPS, *Classical electricity and magnetism*, 2nd ed. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1962.
- PARS, L. A., *An introduction to the calculus of variations*. New York: Wiley, 1962. (Chapter 2)
- PEARSON, CARL E., ed., *Handbook of applied mathematics*. New York: Van Nostrand Reinhold, 1974.
- PEASE, MARSHAL C., III, *Methods of matrix algebra*. New York: Academic Press, 1965.
- LORD RAYLEIGH, *The theory of sound* (2 vols.), 2nd ed. London: Macmillan, 1894-1896. New York: Dover, 1945. (Chapters 1, 12)
- ROSE, M. E., *Elementary theory of angular momentum*. New York: Wiley, 1957.
- ROZENTAL, S., *Niels Bohr: His life and work*. Amsterdam: North-Holland, 1967. New York: Wiley, 1967.
- RUND, HANNO, *The Hamilton-Jacobi theory in the calculus of variations*. London: D. Van Nostrand, Ltd., 1966. (Chapters 2, 7, 8, 9)
- SCHIFF, LEONARD I., *Quantum mechanics*, 3rd ed. New York: McGraw-Hill, 1968.
- SMIRNOV, V. I., *A course of higher mathematics* (5 vols.). Translated from Russian. Oxford: Pergamon Press, 1964.
- SOMMERFELD, ARNOLD, *Atomic structure and spectral lines*. Translated by H. L. Brose from the 5th German edition of 1931. New York: Dutton, 1934. (Chapter 10)
- STACEY, FRANK D., *Physics of the earth*. New York: Wiley, 1969. Second ed., 1977. (Chapters 4, 5)
- STOLL, ROBERT R., *Linear algebra and matrix theory*. New York: McGraw-Hill, 1952. Reprint, New York: Dover, 1969. (Chapter 4)
- STRANG, GILBERT, *Linear algebra and its applications*. New York: Academic Press, 1976.
- SYNGE, J. L., *Geometrical optics*. Cambridge: Cambridge University Press, 1937.
- SYNGE, J. L., AND A. SCHILD, *Tensor calculus*. Toronto: University of Toronto Press, 1949. (Chapters 4, 6, 7)
- TOLMAN, RICHARD C., *The principles of statistical mechanics*. Oxford: Oxford University Press, 1938. (Chapter 9)

- TURNBULL, H. W., *The theory of determinants, matrices and invariants*, 2nd ed. London: Blackie, 1945.
- VAN VLECK, J. H., *Quantum principles and line spectra*. Bulletin No. 54 of the National Research Council. Washington D.C.: National Research Council, 1926. (Chapter 10)
- WEINSTOCK, ROBERT, *Calculus of variations*. New York: McGraw-Hill, 1952. (Chapter 2)
- WENTZEL, GREGOR, *Quantum theory of fields*. Translated by C. Houtermans and J. W. Jauch. New York: Interscience, 1949. (Chapter 12)
- WEYL, HERMAN, *The classical groups*. Princeton: Princeton University Press, 1939. Second ed., reprint of first, with additions, 1946.
- WHITHAM, G. B., *Linear and nonlinear waves*. New York: Wiley, 1974.
- WIGNER, EUGENE P., *Group theory, and its application to the quantum mechanics of atomic spectra*. Translated from German by J. J. Griffin. New York: Academic Press, 1959.
- WILLS, A. P., *Vector analysis, with an introduction to tensor analysis*. New York: Prentice-Hall, 1931. New York: Dover, 1931. (Chapter 5)
- WILSON, E. BRIGHT, JR.; J. C. DECIUS; AND PAUL C. CROSS, *Molecular vibrations, the theory of infrared and Raman vibrational spectra*. New York: McGraw-Hill, 1955. (Chapter 6)
- ZEMANSKY, MARK W., *Heat and thermodynamics*, 5th ed. New York: McGraw-Hill, 1968.

Tablas de integrales y funciones matemáticas, y otros trabajos de referencia

- ABRAMOWITZ, MILTON, AND IRENE A. STEGUN, eds., *Handbook of mathematical functions, with formulas, graphs and mathematical tables*. NBS Applied Math. Series 55. Washington, D.C.: Government Printing Office, 1964. New York: Dover, 1965.
- GRADSHTEYN, I. S., AND I. M. RYZHIK, *Table of integrals, series and products*, 4th ed. Prepared by Yu V. Geronimus and M. Yu Tseytlin. Translated from Russian. New York: Academic Press, 1965.
- PEIRCE, B. O., *A short table of integrals*, 3rd ed. Boston: Ginn, 1929. Fourth ed. by B. O. Peirce and R. M. Foster), Boston: Ginn, 1956.
- SELBY, SAMUEL M., ed., *Handbook of mathematical tables*. Cleveland, Ohio: Chemical Rubber Publishing Co. (CRC), 1962.
- SPIEGEL, MURRAY R., *Mathematical handbook of formulas and tables*. New York: McGraw-Hill, 1968.

Índice de símbolos

Al elegir los diversos símbolos se han seguido ciertos principios generales siempre que ha sido posible. Los vectores se han representado por letras negritas mientras que los tensores de segundo orden y de órdenes superiores, así como las matrices, se representan mediante negritas sans serif. Cuando un vector se trate específicamente como tensor de primer orden o se represente por una matriz columna (o fila) podrá representarse mediante negritas normales, si bien lo más frecuente será utilizar negritas sans serif. En el caso de símbolos griegos se utilizará el mismo tipo de negritas para vectores, matrices y tensores.

Un punto colocado sobre una letra denota invariablemente derivación respecto al tiempo. Los acentos (primas) se utilizan frecuentemente para indicar cantidades que se han sometido a una transformación de algún tipo. En el capítulo 4, los acentos en las coordenadas se refieren a sistemas de ejes solidarios al cuerpo, para distinguirlos de los sistemas de ejes del espacio que no llevan acentos, pero ello no se hará subsiguientemente. En general, los acentos también se utilizan para marcar símbolos que comporten alguna cantidad relativa al centro de masa. Existen otros muchos usos excepcionales del símbolo acento que quedarán claros en el contexto del razonamiento que se esté haciendo. Sin embargo, debemos señalar dos ejemplos concretos. Las secciones eficaces de dispersión en función del ángulo en el sistema del laboratorio (*no* del ángulo en el sistema del centro de masa) se marcan con un acento (véase p. 147). Y en § 7-9 un acento sobre una letra indica derivación respecto a un parámetro θ utilizado en vez del tiempo.

Para simplificar el aspecto de muchas fórmulas se han utilizado, de vez en cuando, diversas notaciones de subíndices para indicar derivación respecto a la variable subindicada (o su índice). Véase, p. e., p. 486 y siguientes, la nota de pie de página 536 y todo el capítulo 12 a continuación de la p. 666.

Al estudiar las transformaciones canónicas se ha utilizado frecuentemente minúsculas para las variables originales y mayúsculas para las variables transformadas. Los subíndices 0 denotan frecuentemente valores iniciales o de equilibrio. Como de costumbre, los complejos conjugados se indican con un asterisco. Cuando se utilice el asterisco para otra cosa, siempre se indica específicamente.

Este índice de símbolos no pretende ser completo. Los símbolos utilizados corrientemente no suelen necesitar de índices, p. e., las coordenadas cartesianas (x, y, z) ; las coordenadas polares planas (r, θ) (o las variantes: (r, ϕ) , (r, ψ) , etc.); las coordenadas polares esféricas (r, θ, ϕ) , o la notación del Análisis vectorial. Hablando en general, el índice omite (salvo cuando pueda haber ambigüedad) símbolos «tacha», que sólo se utilizan en una página o dos de su definición y no vuelven a utilizarse después con el mismo significado.

Los símbolos definidos en los ejercicios no llevan normalmente índices salvo cuando tengan una utilidad más amplia o puedan dar lugar a ambigüedad; tales referencias se indican por números de página en cursiva. Cuando se consignent dos o más números de página, el primero corresponde a una referencia inicial, a menudo accidental. Los números de página subsiguientes indican descripciones o definiciones más completas.

- A** área, 88.
- A(r)** medida de la amplitud de la onda, 592.
- A_μ** cuadvectores del potencial electromagnético, 373.
- A** potencial vector electromagnético, 27.
- A, A** vector de Laplace-Ringe-Lenz y su módulo, 129, 130.
- A** matriz de transformación, general, 169.
- A, B, C, etc.**, matrices ortogonales, 174.
- A** matriz de rotación 3×3 completa, 186.
- A** matriz cuadrada formada por vectores propios **a_k** de oscilaciones pequeñas, 312.
- A** tensor de segundo orden bidimensional, invariante del oscilador armónico bidimensional, 515.
- A⁻¹** inversa de la matriz **A**, 175.
- Ā** traspuesta de la matriz **A**, 178.
- A[†]** matriz adjunta de **A**, 180.
- |A|** determinante de la matriz **A**, 183.
- a* semieje mayor, 121.
- a, b* constantes de movimiento para la peonza pesada simétrica, 273.
- a* parámetro dependiente del tiempo en la teoría de invariantes adiabáticos, 643.
- a* separación de equilibrio, molécula de cadena lineal, 660.
- a_{ij}* elementos de la matriz de transformación ortogonal, 168.
- a_i, a_{jk}* amplitudes de oscilaciones pequeñas en modos normales, 308, 309, 311.
- a_j^k* coeficientes de *q_k* en el desarrollo en serie de Fourier, 566.
- a₀, a₁, a₂, . . .* amplitudes del desarrollo de Fourier de oscilaciones en torno a una órbita circular, 732.
- a** aceleración, 2.
- a** vector propio de amplitudes de oscilación pequeña, 310.
- a_k** matriz columna (o fila) correspondiente al vector propio del *k*-ésimo valor propio de oscilación pequeña, 310.

- a** matriz columna (o fila) correspondiente al vector propio **a** de oscilaciones pequeñas, 332.
- a** vector traslación del origen en la transformación de Poincaré, 350.
- a** matriz columna (o fila) de coeficientes de velocidades en la lagrangiana, 423.
- a, b, c** matrices $2s \times 2s$ en la forma linealizada de la routhiana, 435.
- B** inducción magnética, 27.
- B** matriz rotación correspondiente al ángulo de Euler, ψ , 186.
- C_j capacidad, 64.
- C, C_k factores de escala en oscilaciones pequeñas, 309, 317.
- C_{ijk} constantes de estructura, 512.
- C_j coeficientes del desarrollo en serie de Fourier de H , 633.
- C** vector de Laplace-Runge-Lenz, normalizado para movimiento no acotado, 514.
- C** matriz columna (o fila) de C_k , 309.
- C** matriz rotación correspondiente al ángulo de Euler, θ , 186.
- C** celeridad de la luz, 27, 345.
- c_{ij} constantes de ligadura del cuerpo rígido, 15.
- c_j $2n$ funciones de las variables canónicas α_i, β_i que son (las funciones) independientes entre sí, 612.
- c_p constantes de transformación de medida de primera especie, 719.
- D** densidad en el espacio fásico, 518.
- D** desplazamiento eléctrico, 26.
- D** cantidad conservativa, monopolo magnético, 157.
- D** vector de Laplace-Runge-Lenz normalizado, movimiento acotado, 513.
- D** matriz rotación correspondiente al ángulo de Euler ϕ , 186.
- E** energía total del sistema, 76, 90.
- E_j fuerza electromotriz, 52.
- E' energía total constante, problema unidimensional equivalente de la peonza simétrica pesada, 273-274.
- E** intensidad del campo eléctrico, 27.
- \mathcal{E} energía cinética relativista en unidades de mc^2 , 388.
- e excentricidad, 117, 119, 120.
- e carga del electrón, 136.
- e_0, e_1, e_2, e_3 parámetros de Euler, 196.
- e** vector de componentes e_1, e_2, e_3 , 210.
- $F(q, t)$, función diferenciable arbitraria, 25.
- F** anomalía de excentricidad, movimiento hiperbólico, 156.
- F, F_1, F_2, F_3, F_4 funciones generatrices, 463, 465s.
- F_j fuerza excitadora en oscilaciones pequeñas, 328, 333.
- F_μ, F^μ componentes de un vector covariante y contravariante, respectivamente, 358.
- $F_{\mu\nu}, \mathbf{F}$ tensor campo electromagnético, 704.
- F** fuerza, 2.

- F** matriz cuadrada de coeficientes de disipación \mathcal{F}_{ij} , 332.
- \mathcal{F} función de disipación, 29, 333.
- \mathcal{F}_i coeficientes de la forma diagonal de la función de disipación, 331.
- \mathcal{F}_{ij} coeficientes de la función de disipación, 330.
- $f(r)$, $\mathbf{f}(r)$ fuerza en un campo de fuerzas centrales, módulo y vector, 89.
- $f'(r)$ módulo de la fuerza en el potencial unidimensional equivalente, 92.
- $f(u)$ función en el problema de la peonza simétrica pesada, 277.
- $f_i(q, t)$, \mathbf{f} funciones de transformación de punto y matriz de columna (o fila) asociada, 470s.
- \mathbf{f}_i fuerza de la ligadura, 20.
- G** constante de la gravitación universal, 126.
- $G(q, p)$ función generatriz de una transformación canónica infinitesimal, 482.
- G_i componentes del campo de cantidades de movimiento, 725.
- G** tensor métrico, 314.
- g , \mathbf{g} aceleración de la gravedad, 34.
- g_{ik} elementos del tensor métrico, 314.
- H** hamiltoniana, 74, 418.
- H_0 hamiltoniana no perturbada, 606.
- ΔH hamiltoniana de perturbación, 607.
- H_1, H_2, H_3, \dots adiciones de perturbación a la hamiltoniana, 625, 631.
- H** intensidad del campo magnético, 27.
- \mathbb{H} hamiltoniana covariante, 441.
- \mathcal{H} densidad de hamiltoniana, 680.
- h función energía, integral de Jacobi, 74.
- h constante de Planck, 413, 586.
- \hbar constante de Planck dividida por 2π , 489.
- h parámetros de perturbación, problema de Kepler para movimiento acotado, 617.
- h momento cinético por unidad de masa, 652.
- I** acción, integral de acción, 44.
- I** intensidad, densidad de flujo, 132.
- I** momento de inercia, 249.
- I_1, I_2, I_3 momentos principales de inercia, valores propios del tensor de inercia, 253, 256.
- I, I' invariante exacto para el oscilador armónico lineal dependiente del tiempo, 652s.
- I_{jk} elementos de la matriz de momentos de inercia, o del tensor de inercia, 244.
- I** tensor de inercia, 244.
- i inclinación, 573, 582.
- i, j, k** vectores unitarios de los ejes cartesianos, 163.
- $J(u)$ función intermedia en el teorema de Bertrand, 729.
- J_n invariantes integrales de Poincaré, 491.
- J_i variables de acción, 559, 563.

- J_1, J_2, J_3 no degeneradas, variables de «acción» transformadas para los problemas de Kepler, 578.
- J_ϕ, J_θ, J_r variables de acción para el problema de Kepler, 573.
- J** vector (matriz fila o columna) de variables de acción, 630.
- J_0 vector (matriz fila o columna) de variables de acción no perturbadas, 630.
- J** matriz $2n \times 2n$ antisimétrica de formulación simpléctica, 426.
- j_μ cuadvectores de densidad de corriente, 372.
- j, j densidad de corriente, 26.
- j** vector (matriz columna o fila) de índices enteros, 566.
- K** hamiltoniana transformada, kamiltoniana, 463.
- K** energía cinética relativista, 378.
- K_ν cuadvectores de la fuerza de Minkowski, 374.
- K_i generadores matriciales de las transformaciones de Lorentz puras infinitesimales, 366.
- k constante de la fuerza, ley de la fuerza inversamente proporcional al cuadrado de la distancia, 93.
- k constante de la fuerza, ley de Hooke, 99.
- k constante de Boltzmann, 103.
- k número cuántico acimutal, 587.
- k número de onda, 591.
- k** vector número de onda, 591.
- L** lagrangiana, 25, 26.
- L** eikonal, 592.
- L_0, L_1, L_2 funciones homogéneas, componentes de la lagrangiana, 75.
- L_j coeficientes de autoinducción, 64.
- $L_{\mu\nu}$ elementos de la transformación de Lorentz en el espacio de Minkowski, 347.
- L, L** momento cinético, 3.
- L** matriz de la transformación de Lorentz, principalmente en el espacio de Minkowski, 348.
- \mathcal{L} densidad de lagrangiana, 663.
- \mathcal{L}_0 densidad de lagrangiana de campo libre, 710.
- l módulo del momento cinético (orbital), 88.
- l distancia del centro de gravedad al punto fijo de la peonza simétrica pesada, 271.
- l longitud del péndulo simple, 557, 614.
- M** masa total del sistema, 7.
- M** masa del Sol o de la Luna, 285.
- M** masa de un satélite artificial, 291.
- M** masa de la Tierra, 622.
- M_0, M_j, M_{jk} coeficientes de energía cinética, 31.
- M_{jk} coeficientes de inducción mutua, 64.
- M_{ij} elementos del tensor momento cinético del campo total, 678.
- $M_{\mu\nu}$ cuadritensor momento cinético total, de un sistema, 391.
- M** momento dipolar magnético, 240, 293.
- M_i generadores matriciales elementales de una rotación, 221, 222.

- M** matriz jacobiana de una transformación canónica, las nuevas variables respecto a las antiguas, 478.
- M_{ij} elementos del tensor densidad del momento cinético del campo, 678.
- $M_{\mu\nu\lambda}$ cuadritensor de tercer orden, densidad de momento cinético, 695.
- m masa, 2.
- m masa de la Tierra, 288.
- m masa de un satélite artificial, 621, 622.
- m número cuántico magnético, 587.
- m_{ij} coeficientes en la forma cuadrática de velocidad de la energía cinética, 307.
- $m_{\mu\nu}$ cuadritensor momento cinético de una partícula, 391.
- N número de partículas del sistema, 16.
- $N_{\mu\nu}$ cuadritensor del momento relativista, 391.
- N** par momento de una fuerza, 3.
- N** matriz antisimétrica de componentes de vector unitario, 221.
- N_i** generadores matriciales de rotación infinitesimal en el plano x_i-x_4 , 513.
- n número de coordenadas independientes (grados de libertad), 22.
- n exponente de la ley de la potencia para una fuerza central, 104, 108.
- n exponente de la ley potencial para una fuerza central, 112.
- n índice de refracción, 158, 591.
- n número cuántico principal, 587.
- n** vector unitario, 70.
- P presión, 103.
- P_n polinomio de Legendre de orden n , 286.
- P_μ cuadricantidad de movimiento total de un sistema, 379.
- P_μ cantidades integrales en teoría de campos relativista, 692.
- P** cantidad de movimiento total, 8.
- P** matriz compleja 2×2 de las coordenadas, 191.
- P** matriz de la transformación de Lorentz pura, 352.
- P** matriz columna (o fila) de las cantidades de movimiento transformadas, 471.
- p_j cantidad de movimiento canónica o conjugada, 67.
- p_ν cuadvivector de cantidad de movimiento, 376.
- p_k coeficientes del desarrollo de la densidad de cantidad de movimiento en el espacio de las cantidades de movimiento, 688.
- p, p** cantidad de movimiento, 2.
- p** vector de cantidades de movimiento conjugadas de las coordenadas cartesianas de una partícula, 424.
- p** matriz columna (o fila) de cantidades de movimiento canónicas, 423.
- p_j, p_μ cantidades de movimiento canónicas (§ § 7-8 y 7-9 solamente), 395, 406.

- p vector de cantidades de movimiento conjugadas de las coordenadas cartesianas de una partícula (§ 7-9 solamente), 407.
- Q_j fuerza generalizada, 22.
- Q energía de reacción, 147.
- Q_i, P_i variables canónicas transformadas, 463.
- Q matriz 2×2 unitaria asociada a la matriz de rotación, 189.
- Q matriz 2×2 unimodular asociada a la transformación de Lorentz, 362.
- Q_θ, Q_ϕ, Q_ψ matrices 2×2 unidades asociadas a las rotaciones de los ángulos de Euler, 197.
- q carga, 27.
- q_j coordenada generalizada, 16.
- q_0 amplitud de referencia, oscilador armónico perturbado, 636.
- q_k coeficientes del desarrollo de la cantidad campo en el espacio de las cantidades de movimiento, 688.
- q, p constantes en problemas de la peonza simétrica pesada, 277.
- $\delta_q, \delta_p, \delta_{\eta_i}$ variaciones infinitesimales de variables canónicas, 481.
- q matriz columna (o fila) de coordenadas generalizadas, 424.
- R radio de la Tierra, 292.
- R routhiana, 432.
- R función perturbadora, 613.
- R radio gravitatorio del Sol, 620.
- R_0 radio de giro, 258.
- R_j resistencia, 64.
- R_j coordenadas espaciales del centro de energía relativista, 393.
- R_μ cantidades integrales conservativas, 673.
- R vector de posición, centro de masa, 7.
- R, R vector propio (y su matriz columna o fila), 203.
- R parte de la rotación espacial de la matriz de la transformación de Lorentz, 350.
- r número de coordenadas cíclicas en el método de Routh, 432.
- r_0 radio de órbita circular, 112.
- r, s, t subíndices que se refieren a partículas, 381.
- r vector de posición, 1.
- S impulso de una fuerza generalizada, 80.
- S función principal de Hamilton, 535.
- S_1, S_2, S_3 constantes del movimiento, oscilador armónico bidimensional, 516.
- dS_ν elemento de superficie en un cuatridespacio, 694.
- S matriz inversión, 183.
- S matriz 2×2 compleja de coordenadas en un cuatridespacio real, 362.
- s número de coordenadas no cíclicas en el método de Routh, 432.
- s parámetro de impacto, 134.
- s, ds longitud de un arco o camino, y diferencial de la, 4.
- s_j coordenadas generalizadas, 40.
- T energía cinética, 4.

- T temperatura, 103.
- T tiempo de paso por el perihelio, 134.
- T energía total relativista (de una partícula libre), 378.
- T_0, T_1, T_2 funciones homogéneas componentes de la energía cinética, 31.
- T_{ij} coeficientes constantes en el desarrollo de la energía cinética en torno al equilibrio, 307.
- $T_{\mu\nu}$ elementos del tensor esfuerzo-energía, 672, 676.
- $\hat{T}_{\mu\nu}$ tensor esfuerzo-energía simetrizado, 707.
- $T_{ijk}...$ componente del tensor T , 245.
- T_μ debilidades de corriente, 673ss.
- \mathbf{T} matriz cuadrada de los coeficientes de energía cinética T_{ij} , 310.
- \mathbf{T} matriz cuadrada de coeficientes de términos cuadráticos en la velocidad de L , 424.
- \mathbf{T} tensor general de orden N , 245.
- \mathbf{T} tensor de esfuerzos, 675.
- \mathcal{T} densidad de energía cinética, 672.
- t tiempo, 2.
- U potencial generalizado, 26.
- U, W integral de columna de \mathcal{U}, \mathcal{W} , 685s.
- \mathcal{U}, \mathcal{W} funciones de cantidades canónicas campo, 685s.
- u recíproco de r , la coordenada radial, 108.
- u igual a $\cos \theta$, variable en el problema de la peonza simétrica pesada, 275.
- u velocidad de la onda, 589.
- u, v, w funciones, independientes entre sí, de variables generalizadas, 487.
- u_ν cuadrivelocidad, velocidad universo, 371.
- V potencial, energía potencial, 5.
- V volumen, 103.
- V' potencial en un problema unidimensional equivalente, 93.
- V_{ij} coeficientes de energía potencial respecto al equilibrio, 307.
- V, V velocidad, y celeridad, del centro de masa, 145.
- \mathbf{V} matriz cuadrada de los coeficientes V_{ij} , 310.
- v densidad de energía potencial, 672.
- \mathbf{v} vector velocidad, 1.
- v celeridad, 4.
- W trabajo, 4.
- W función característica de Hamilton, 538, 541s.
- W^* función característica de Hamilton en función de (q, w) , 643.
- W_i función característica de Hamilton separada, 548, 551.
- \mathbf{W} matriz jacobiana de cantidades de movimiento respecto a las coordenadas, 440.
- w_i variables ángulo, 559, 564.
- w_1, w_2, w_3 variables ángulo transformadas del problema de Kepler, 578.
- w_0, J_0 variables acción-ángulo no perturbadas, 625.
- \mathbf{w} vector (matriz columna o fila) de variables ángulo, 565.

- w_0 vector (matriz columna o fila) de variables ángulo no perturbadas, 630.
- X, Y, Z ; o X_1, X_2, X_3 componentes de vectores propios, 202s.
- X_{rv} función que describe la transformación de x_v en el teorema de Noether, 718.
- X matriz cuadrada de componentes de un vector propio, 205.
- x, y variables en el problema de la peonza simétrica pesada, 278.
- x desviación de la órbita respecto de la circularidad, $u - u_0$, 729.
- $x_i = x_1, x_2, x_3$ coordenadas cartesianas del espacio ordinario, 167.
- $x_\mu = x_1, x_2, x_3, x_4$ coordenadas cartesianas del espacio de Minkowski, 347.
- $x_\mu = x_1, x_2, x_3, x_0$ coordenadas del cuadriespacio real, 355.
- x matriz columna o fila de un vector, 174.
- Y función generatriz en la teoría de la perturbación, 626.
- Y módulo de Young, 660, 661.
- Y_i funciones de desarrollo de la función generatriz de perturbación, 626, 631.
- Z, Z' número atómico, 136.

ÍNDICE DE SÍMBOLOS GRIEGOS

- α parámetro en camino variado, 46.
- α parámetro continuo de transformación canónica, 504.
- α energía constante en sistemas conservativos (principalmente en teoría de la perturbación), 538, 626.
- α, β constantes en el problema de la peonza simétrica pesada, 274.
- α, β, γ cosenos directores, 166.
- $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ parámetros de Cayley-Klein, 188.
- $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots$ términos del desarrollo para la energía en la teoría de la perturbación, 626, 631.
- α_i cantidades de movimiento constantes conjugadas de coordenadas cíclicas, 461, 543.
- α_i, β_i variables canónicas generadas por la función principal de Hamilton, 534.
- α_1 valor constante de la hamiltoniana o la energía, 542.
- $\alpha_\theta, \alpha_\psi$ constantes de separación, cada una igual al momento cinético total en el problema de la fuerza central, 552, 554.
- α_ϕ momento cinético conjugado de ϕ , 554.
- α_k, β_k matrices columna o fila real e imaginaria que forman a_k , 311.
- β parámetro de la oscilación armónica simple en torno a una órbita circular, 114.
- β razón v/c , 345.

- β_i constantes de integración en el método de la función característica de Hamilton, 543.
- β razón vectorial v/c , 346.
- β vector (matriz columna o fila) de constantes de integración, 566.
- Γ razón giromagnética, 294.
- γ frecuencia de oscilaciones pequeñas ω , dividida por i , 332.
- γ constante en la transformación de Lorentz, igual a $(1 - \beta^2)^{-1/2}$, 346.
- γ un fotón, ec. (7-109), p. 384 solamente.
- γ razón del calor específico a presión constante al calor específico a volumen constante, 668.
- γ_i cantidades de movimiento canónicas transformadas, 537.
- γ matriz columna (o fila) de las variables canónicas α_i, β_i , 608.
- γ_μ matrices de Dirac, 702.
- Δ operador variación, principio de mínima acción, 447.
- δ operador infinitesimal del desplazamiento virtual, 20.
- δ operador variación, principio de Hamilton, 48.
- δ operador diferencia infinitesimal general, 481, 713.
- $\bar{\delta}$ operador diferencia infinitesimal para cantidades campo en un punto, 713.
- \hat{c} operador diferencial infinitesimal, para cambio de función ante una transformación canónica infinitesimal, 499s.
- $\delta()$ función δ de Dirac, 709.
- δ_k factores de fase, 318.
- δ_{lm} símbolo de Kronecker, 166.
- δ matriz de la transformación de Lorentz pura infinitesimal, 365.
- ϵ excentricidad (sólo pp. 136-137).
- ϵ parámetro infinitesimal de transformación, 482.
- ϵ parámetro de desarrollo en la teoría de la perturbación, 626.
- ϵ_r parámetros de cambio infinitesimal, teorema de Noether, 718.
- ϵ_{ijk} símbolo de permutación (densidad de Levi-Civita), 219.
- ϵ matriz antisimétrica de rotación infinitesimal, 215.
- $\zeta()$ función de camino variado, 664, 666.
- ζ_j coordenadas normales de oscilaciones pequeñas, 319.
- ζ matriz columna (o fila) de coordenadas normales, 319.
- ζ matriz columna (o fila) de variables canónicas transformadas, 478.
- $\eta()$ función de camino variado, 46.
- η_i coordenadas generalizadas del desplazamiento respecto al equilibrio, 307.
- $\eta(x, t), \eta(x_\mu), \eta(x_\nu)$ cantidades campo, 663, 665s.
- η matriz columna o fila de coordenadas η_i relativas al equilibrio, 311.
- η matriz columna (o fila) de variables canónicas, 426.
- Θ ángulo de desviación en el sistema del centro de masa, 134, 143.

- Θ_ν densidades de corriente conservativas de transformaciones de medida, 719.
- θ, ϕ, ψ ángulos de Euler, 184.
- θ ángulo de nutación de la peonza simétrica pesada, 271, 275.
- θ parámetro invariante de Lorentz para el progreso del punto universo, 402.
- θ' constante de integración para la coordenada θ , órbita elíptica, 117.
- θ_1 parámetro en el péndulo de amplitud finita, 615.
- ϑ ángulo de desviación en el sistema del laboratorio, 143.
- κ factor de amortiguamiento en oscilaciones pequeñas con disipación, 332.
- κ constante de fuerza relativista normalizada, 399.
- κ vector unitario en la dirección del movimiento relativo, 364.
- Λ lagrangiana invariante de Lorentz, 402.
- $\Lambda_{\mu\nu}$ elementos de la transformación de Lorentz en el cuadriespacio real, 357.
- Λ matriz de transformación de Lorentz en el cuadriespacio real, 357.
- λ valor propio, 203.
- λ parámetro de desarrollo, péndulo de amplitud finita, 615.
- λ parámetro de escala de la transformación canónica ampliada, 465.
- λ longitud de onda, 592.
- λ longitud de onda reducida, 596.
- λ_i multiplicador indeterminado de Lagrange, 57.
- λ matriz diagonal de valores propios, 204.
- μ masa reducida, 87.
- μ masa por unidad de longitud, 660.
- μ, μ_0 densidad, masa por unidad de volumen, 668.
- μ_0 constante (masa) en la ecuación de Klein-Gordon, 696s.
- ν frecuencia, 332.
- ν_i derivadas respecto al tiempo de Q_i generadas por la función característica de Hamilton, 543.
- ν_i, ν «frecuencias» en el formalismo de las variables acción-ángulo, 560, 563.
- ν_0, ν_0 frecuencias no perturbadas, 625s., 630.
- π densidad de cantidad de movimiento, 680.
- ρ, ρ_e densidad de carga, 293.
- ρ razón de masas reducidas en la dispersión, 146, 147.
- ρ, ρ_m densidad de masa, 153, 243, 293.
- ρ subíndice de cantidades campo, 665.
- ρ_i coordenadas de desplazamiento respecto al equilibrio en oscilaciones pequeñas en torno al movimiento estacionario, 433.
- $d\rho$ elemento de longitud de camino en un espacio de configuración curvilínea, 452.
- ρ de componentes ρ_1, ρ_2, ρ_3 , vector que define al elipsoide de inercia, 258.

- σ variación relativa de densidad, 668.
 $\sigma(\Theta)$ sección eficaz diferencial de dispersión, 134.
 σ_T sección eficaz total de dispersión, 138.
 σ «vector» de las matrices de spin de Pauli, 199.
 σ_0 matriz 2×2 unidad, 362.
 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ matrices de spin de Pauli, 199.
 $\sigma_\mu = \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_0$ «cuadrivector» de matrices de spin de Pauli, 362.
 τ, τ_i periodo, 125.
 τ tiempo propio, 369s.
 Φ ángulo de desviación, 141.
 Φ ángulo de retroceso, 159.
 Φ ángulo de rotación de una transformación ortogonal propia, 207.
 Φ_i funciones en la teoría de la perturbación independiente del tiempo, 632.
 ϕ potencial electromagnético escalar, 27.
 ϕ ángulo de precesión, peonza simétrica pesada, 271, 275.
 ϕ ángulo de rotación imaginario en el espacio de Minkowski, 349.
 ϕ campo escalar de onda luminosa, 591.
 $\phi(q, Q)$ cantidad de movimiento canónica p en función de q y Q , 492.
 ϕ, ϕ^* campos escalares complejos, 696.
 ϕ matriz en condiciones Staeckel, 551.
 ψ ángulo que forman las direcciones de la asíntota incidente y el periápside, 135.
 $\Psi_{r\rho}$ función que describe la transformación de η_ρ en el teorema de Noether, 717.
 ψ anomalía de excentricidad, 124.
 ψ parte imaginaria del ángulo de rotación en el espacio de Minkowski, 349.
 ψ ángulo del radio vector orbital relativo al periápside, anomalía verdadera, 622.
 ψ función de onda, 594.
 $\psi(q, Q)$ cantidad de movimiento canónica transformada en función de q y Q , 492.
 ψ, ψ^\dagger cantidades campo de Dirac complejas, 702.
 Ω pulsación de precesión, 268.
 Ω longitud del nodo ascendente, 582.
 Ω dominio de integración cuadriddimensional, 712.
 $d\Omega$ elemento de ángulo sólido, 133.
 Ω vector unitario de dirección, 133.
 Ω vector de precesión, 268.
 $d\Omega$ vector diferencial de rotación infinitesimal, 216.
 ω, ω_i velocidad angular de rotación, pulsación, 35, 127.
 ω, ω_k frecuencias normales de oscilación pequeña, 309.
 ω pulsación del oscilador armónico lineal, 473-474.
 ω argumento del perihelio, 582.

- ω vector velocidad angular, 223.
 ω frecuencia de precesión de Thomas, 355.
 ω_c frecuencia ciclotrónica, 648.
 ω_t, ω_l frecuencia de Larmor, 295.

SÍMBOLOS MISCELÁNEOS

- 0** matriz con elementos nulos, 426.
1 matriz unidad, 176.
1 afinor unidad, 248.
 ' indica derivada respecto a θ , 402.
 ∇ operador nabla, 5.
 \square operador nabla cuatridimensional, 373.
 \square^2 D'Alembertiano, 373.
 $[,]$ conmutador, corchete de Lie, 222.
 $[,]$ corchete de Poisson, 484.
 $\{ , \}$ corchete de Lagrange, 489.
 $\frac{\delta}{\delta\psi}$ derivada funcional (respecto a ψ), 682.

Índice alfabético

- Abraham, R. y Marsden, E., 655.
Aceleración centripeta, 97.
— Coriolis, 229.
Acción, 45.
— Maupertuis, 450.
Acustica, 305.
Afelio, 124.
Afinor, 246, 509.
—, definición, 247.
Aharoni, J., 299.
Álgebra Lie, 222, 488.
— — grupo Lorentz restringido, 366.
Alfvén, T., 343.
Ángulo balanceo, 188.
— dispersión, 133, 139, 141.
— —, coordenadas laboratorio, 143.
— Euler, 183, 184, 735.
— —, convenios, 735.
— — definidos por rotaciones, 185.
— guiñada, 188.
— inclinación o picado, 188.
— rotación, 557.
— Tait-Bryan, 188.
—, variable, 559.
Anomalia excéntrica, 124.
— kepleriana, expresiones ángulos, 640.
— media, 127.
— verdadera, 124.
Antiprotón, energía cinética movimiento, 386.
Arco iris, dispersión, 140.
Arfken, G., 233, 742.
Argumento perihelio, 582, 586.
Armónico frecuencia fundamental, 322.
Aro que rueda por plano inclinado, 61.
Atwood, máquina, 34.
Aureola, dispersión, 142.
Badger, P. H., 453.
Bamboleo Chandler, 270.
Barger, V. D. y Olsson, M. G., 298.
Barut, A. O., 362, 409, 724.
Baker, G. A., 517.
Bertrand, J., 116.
—, teorema, 112-116, 729.
Bessel, función, 156.
Bifurcación, 558.
Binet, elipsoide, 265.
Bliss, G. A., 77.
Block, H. D., 492.
Bohlin, desarrollo, 639.
Boltzmann, 103.
Borisenko, A. J. y Tarapov, I. E., 233.
Born, M., 521, 597, 654.
Born, M. y Wolf, E., 598.
Boyle, ley, 104.
—, —, deducción, 102-103.
Bradbury, T. C., 234, 742.
Brand, L., 297.
Braquistócrona, 52.
Breit-Darwin, lagrangiana, 408.
Bridgman, P. W., 37.
Brillouin, L., 590, 598.
Brújula giroscópica, 285.
Brunet, P., 454.
Byerly, W. E., 77.
Campo acústico, densidad lagrangiana, 667-668.
— — gases, formulación lagrangiana, 749.
— clásico no construido sobre sistema mecánico, 703.
— — partícula Dirac, 702.
—, cuantización, 699.

- Campo, densidad corriente energía, 676.
 —, — energía, 676.
 — Dirac, densidad corriente eléctrica, 720.
 — —, — lagrangiana, 720.
 —, ecuación asociada, 700.
 —, — básica, 698.
 —, — mediante el D'Alembertiano, 697.
 —, ecuaciones, 677.
 — electromagnético, 703.
 — —, campo libre densidad lagrangiana, 713.
 — —, densidad energía, 708.
 — —, — lagrangiana, 706.
 — —, ecuaciones Euler-Lagrange, 706.
 — —, flujo energía, 708.
 — escalar complejo, 696.
 —, formulación hamiltoniana, 681.
 — fuerzas central, dispersión, 132-143.
 — Klein-Gordon, representación cantidad movimiento, 701.
 — libre densidad lagrangiana, 713.
 — mesónico escalar, lagrangiana, 725.
 —, tensor, 704.
 —, teoría relativista, 691.
 —, — —, densidad lagrangiana, 692, 697.
 —, — —, ecuaciones lagrange, 691.
 —, — —, transformación Lorentz, 693.
 — velocidades distribución continua cargas, 709.
 Cantidad campo, 692.
 — movimiento canónica, 67, 396, 406.
 — — —, representación por vector, 425.
 — — conjugada, 67.
 — — relativista, 376.
 — —, teorema conservación, 501.
 Característica D'Alembert, 638.
 Carathéodory, C., 465, 492, 521, 597.
 —, teorema, 492.
 Carga, campo velocidades distribución continua, 709.
 — — —, precesión sistemas, 293.
 —, medida movimiento, 709.
 Casimir, H. B. G., 511.
 Catenaria, ecuación, 51, 52.
 Cayley-Klein, parámetros, 188, 195, 736.
 — —, — en términos ángulos Euler, 738.
 — —, — función ángulos Euler, 198.
 Centrifuga repulsiva, 95.
 Centro energía, 393.
 — gravedad, 7.
 — masa, 7, 393.
 — — sistema partículas, 7.
 — —, transformaciones coordenadas, 10, 12.
 Ciclón hemisferio norte, esquema, 231.
 Cinemática, 381.
 — cuerpo rígido, 161.
 — relativista colisiones, 381.
 — — sistema muchas partículas, 380.
 Circuito acoplado, aplicación formulación Lagrange, 65.
 — eléctrico acoplado, 305.
 Circulación, 557.
 Clausius, virial, 102.
 Cohete, ecuación movimiento, 38.
 —, teoría movimiento, 414.
 Colectividad microcanónica, 520.
 Colisión, cinemática relativista, 381.
 Compton, longitud onda, 413.
 Condición degeneración, 571.
 — Lorentz, 372.
 — —, densidad lagrangiana, 709.
 — medida, 704.
 — simpléctica, transformación canónica, 480.
 — Staeckel, 551.
 Cónica, ecuación general, 119.
 Conmutador, 222.
 —, condiciones, 514.
 — matrices, 489.
 Cono cuerpo, 264.
 — espacio, 264.
 Conservación energía, teorema, 554, 555.
 —, teoremas, 671, 722.
 Constante estructura grupo Lie, 512.
 Construcción Poincot, 262, 264.
 Convenio x , 188.
 — xyz , 188.
 — y , 188.
 Coordenada cartesiana a coordenada polar plana, 463.
 — ciclica, 67, 427.
 —, ecuación Lagrange movimiento, 69.
 — generalizada, 16.
 — ignorable, 67.
 — independiente cuerpo rígido, 161.
 — normal, 319.
 — — sistema, 322.
 — para problema dos cuerpos, 86.
 — ponderada en masa, 309.
 Corben, H. C. y Stehle, P., 336.
 Corchete Lagrange, 489.
 — — fundamental, 490.
 — — —, notación matricial, 490.
 — —, invarianza canónica, 489.
 — Lie, 222, 514.
 — Poisson, 484, 688, 689.

- Corchete Poisson, cálculo, 493.
 — — clásico conmutador cuántico principio correspondencia, 496.
 — — fundamental, 485.
 — —, invariantes canónicos, 486.
 — — matriz, 484.
 — — — cuadrada, 484.
 — — momento cinético, relaciones, 507.
 — —, propiedades algebraicas, 486.
 — —, relaciones, 507.
 Coriolis, aceleración, 229.
 —, fuerza, 226-233.
 —, módulo aceleración, 228.
 Corriente conservativa, 673.
 Coseno director, 69, 163.
 Coulomb, potencial truncado, 158.
 Courant, R. y Hilbert, D., 77, 418, 453, 535, 597.
 Covariante, formulaciones, 367.
 Cramer, regla, 333.
 Crowell, método, 641.
 Cuadridivergencia, 669.
 Cuadriespacio no euclídeo, D'Alembertiano, 725.
 Cuadrivector, 368.
 — cantidad movimiento-energía, 376.
 — — —, módulo, 380.
 — densidad corriente de carga, 710.
 — género espacial, 370.
 Cuadrivelocidad, 371.
 Cuantización, camino real, 587.
 — campo, 699.
 Cuerpo en órbita, precesión periápside, 624.
 — rígido, 14, 161.
 — —, cinemática, 161.
 — —, coordenadas independientes, 161.
 — —, ecuaciones movimiento, 239.
 — — exento momentos, movimiento, 261.
 — —, fuerzas interiores, 14.
 — —, ligaduras, 15.
 — —, puntos referencia, 162.
 Curva hipocicloide, 79.

 Chandler, bamboleo, 270.
 Chasles, M., 209.
 —, teorema, 208, 239.
 Chen, Y., 336.
 Choque elástico, energía cinética, 14.
 — inelástico, energía cinética, 147.

 D'Alembert, característica, 638.
 —, principio, 19-26.
 D'Alembertiano, 373, 697.
 — cuadriespacio no euclídeo, 725.
 Danby, J. M. A., 151, 654.
 Degeneración, 313.
 —, condiciones, 578.
 —, ejemplos sencillos, 570.
 — exacta, 637.
 Del Campo, A. R., 284.
 Delaunay, variables, 586.
 —, —, relación parámetros orbitales, 611.
 Densidad cantidad movimiento, 680.
 — — — adicional, 675.
 — — — canónica, 688.
 — — — del campo, 675.
 — carga propia, 372.
 — corriente, 709.
 — — eléctrica, 372.
 — — — campo Dirac, 720.
 — — energía campo, 676.
 — — — varilla elástica, 674.
 — — mecanocuántica convencional, 720.
 — energía campo, 676.
 — — — electromagnético, 708.
 — hamiltoniana, 680.
 — lagrangiana, 663.
 — — campo acústico, 667-668.
 — — — Dirac, 720.
 — —, — libre, 713.
 — —, componente tensor esfuerzo-energía, 677.
 — — condición Lorentz, 709.
 — — interacción, 711.
 — — meson cargado escalar, 697, 726.
 — —, vibraciones longitudinales varilla elástica, 665.
 — Levi-Civita, 219, 509.
 — momento cinético, 678.
 Derivada funcional, 682.
 — hidrodinámica, 518.
 — material, 518.
 — parcial, 519.
 Desplazamiento virtual, 19, 22.
 Desviación coordenada generalizada respecto equilibrio, 307.
 — repulsiva, 135.
 Determinante jacobiano, 491.
 — —, valor, 491.
 Deutsch, R., 655.

- Diada, 246.
 —, nonion, 247.
 Diagonalización simultánea dos formas cuadráticas, 320.
 Dicke, R., 624.
 Dilatación, simetría, 465.
 — tiempo, 370.
 Dirac, campo clásico partícula, 702.
 —, —, densidad lagrangiana, 720.
 —, ecuación, interacción electromagnética, 711.
 —, electrón, 720.
 —, función, 709.
 —, matrices, 702.
 —, P. A. M., 454.
 —, teoría, cuadvectores densidad corriente carga, 710.
 Disco vertical rueda sobre plano horizontal, 18.
 Disipación, función, 333.
 Dispersión, ángulo, 133, 139.
 — aureola, 142.
 — arco iris, 140.
 — campo fuerzas central, 132-143.
 — dos partículas, sistema centro masa, 144.
 — — — laboratorio, 143.
 — inelástica, 148.
 —, relación, 699, 701.
 — Rutherford, ángulo dispersión, 139.
 —, sección eficaz, 133.
 —, — — total, 138.
 —, transformación problema coordenadas laboratorio, 143.
 Distancia apsidal, 97.
- Ecuación alineal, 702.
 — — Korteweg-deVries, 702.
 — campo, 679.
 — — Euler-Lagrange, 697.
 — canónica Hamilton, 421.
 — débil, 405.
 — diferencial, Euler-Lagrange, 55.
 — — órbita, 105-111.
 — Dirac con interacción electromagnética, 711.
 — Kepler, 127.
 — Lagrange, 25, 29.
 — — sistemas no holonomos, 58.
 — movimiento, 21, 25, 87, 308, 494.
 — — canónica, 444.
 — — Hamilton, 417, 444.
- Ecuación onda, 592.
 — — en una dimensión con velocidad propagación, 662.
 — — Schrödinger, 595.
 — — tridimensional, 669.
 — orbital movimiento, 543.
 — péndulo, 700.
 — peonza rápida, 277.
 — perturbación Lagrange, 614.
 — secular, 316.
 — seno-Gordon y campo asociado, 699.
 — transformación, 345.
 — — canónica, 461.
 — — sistema variables, 16.
 — — dos sistemas coordenadas, 523.
 Eikonal, 592.
 —, ecuación, óptica geométrica, 593.
 Einstein, A., 408.
 —, ecuaciones campo, 619.
 —, ley adición, 411.
 —, — — velocidades paralelas, 349.
 Eisenhart, L. P., 512.
 Eje instantáneo rotación, 223.
 — paralelo, teorema, 259.
 — principal, 256.
 — —, transformación, 256.
 Electrón Dirac, 720.
 Elemento matriz cambio, 169.
 Elipse, excentricidad, 121.
 Elipsoide Binet, 265.
 — inercia, 258.
 — — relativo plano invariable, movimiento, 263.
 Encke, método, 641.
 Energía cinética, 12.
 — —, densidad, 749.
 — —, forma matriz, 424.
 — — movimiento alrededor punto, 239-244.
 — — partícula, 4.
 — —, teorema resolución, 86.
 — en reposo, 379.
 — libre, función, 420.
 — potencial, 5.
 — — en equilibrio, forma curva, 306.
 — — interna sistema, 14.
 — —, notación matricial, 319.
 — — sistema resortes, 64.
 — — total, 14.
 —, teorema conservación, 93.
 —, — equipartición, 103.
 — total partícula, 437, 438.
 Entalpia, 419.

- Entropía, 419.
 Equilibrio estable, 306.
 — inestable, 306.
 — lábil, 307.
 Equinoccio, precesión, 285, 621.
 —, — astronómica, 270.
 Escala, transformación, 464.
 Escalar, 245.
 — universo, 368, 696.
 Esfuerzo-energía, tensor, 671, 676.
 Espacio configuraciones, 43.
 — —, transformación, 463.
 — cuatro dimensiones, aplicación teorema divergencia, 669.
 — — —, volumen integración esquemático, 695.
 — fásico, 681.
 — —, movimiento volumen, 519.
 — —, transformación, 463.
 — —, volumen infinitesimal, 519.
 — Minkowski, 347, 691.
 — —, matriz transformación Lorentz, 347.
 — real cuatro dimensiones, transformaciones Lorentz, 356.
 — Riemann, 314.
 — —, elemento longitud camino, 359.
 —, tensor métrico, 314.
 —-tiempo, 347.
 Espectro molecular, 305.
 Espinorial, 201.
 Euler, ángulos, 183, 184, 735.
 —, —, convenios, 735.
 —, —, definidos por rotaciones, 185.
 —, ecuaciones, 259.
 —-Lagrange, ecuación campo, 697.
 — —, ecuaciones, 394, 402, 444, 703, 706.
 — —, — diferenciales, 55.
 —, parámetros, 196, 737.
 —, teorema, 202-208.
 Excentricidad elipse, 121.
 — sección cónica, 119.
 Factor escala, parte imaginaria, 319.
 Fase onda, 592.
 Fermat, variaciones principio, 593.
 Figura Lissajous, 563.
 Física molecular y del estado sólido, 185.
 Flujo energía campo electromagnético, 708.
 — gradiente presiones, 230.
 Fock, V., 409.
 Fonon, 699.
 Formulación lagrangiana covariante, 401.
 Fotón, 413.
 —, cantidad movimiento energía, 384.
 Foucault, péndulo, 232.
 Fourier, serie múltiple, 567.
 —, — simple, 567.
 Fradkin, D. M., 131.
 Frecuencia angular, 268.
 — degenerada, eliminación, 578.
 — giro, 649.
 — Larmor, 295.
 — movimiento periódico, 560.
 — nutación peonza «rápida», 278.
 — oscilación, 325.
 — —, fuerza disipativa, 333.
 — oscilador armónico lineal, 562.
 — precesión media, 279.
 — — Thomas, 355.
 — resonancia, 317.
 — — nula, 325.
 — vibración libre, 317.
 French, A. P., 408.
 Fuerza aplicada partícula, 6.
 — conservativa, 4.
 — Coriolis, 226-233.
 — disipativa, efecto, 328.
 — exterior, 6.
 — generalizada, componentes, 22.
 — gradiente presión, 230.
 — gravitatoria atracción, 126.
 — interior, 6.
 — Lorentz, 27.
 — Minkowski, 374.
 —, momento, 3.
 — mutua partículas, 12.
 Función disipación, 64, 333.
 — — Rayleigh, 29.
 — elíptica, 109.
 — energía, 74.
 — generatriz, 470.
 — — polinomios Legendre, 286.
 — — transformación, 465.
 — — — canónica infinitesimal, 482.
 — homogénea, aplicación teorema Euler, 104.
 — perturbadora, 613.
 — principal Hamilton, 534.
 Galileo, sistema, 2.
 —, transformación, 342.
 —, — lineal, 345.
 —, —, sistema, 343.
 Garfinkel, B., 568, 598, 654, 745.
 Gas, diagrama presión-volumen, 751.

- Gas movimiento, ecuación continuidad. 752.
 — perfecto, deducción ley Boyle, 102.
 — —, teorema virial, 103.
 —, velocidad sonido, 669.
 —, vibración sonora, 749.
- Generador rotación espacio tridimensional, 517.
 — — infinitesimal, 222.
- Geoide Tierra, 228.
- Giacaglia, G. E. O., 638, 655.
- Gibbs, función, 420.
- Girador unidad, 200.
- Goldschmidt, solución, 79.
- Goldstein, H., 130.
- Gordon, ecuación seno, 699-700.
- Gossick, B. R., 78.
- Grado libertad, 16.
- Gradshteyn, I. S. y Ryzhik, I. W., 118.
- Gram-Schmidt, ortogonalidad, 256.
- Gray, A., 297.
- Grupo Lie, 511.
 — simetría, 511.
- Guillemin, E. A., 337.
- Hagedorn, R., 409.
- Hagihara, Y., 655.
- Hamel, G., 234.
- Hamilton, deducción ecuaciones a partir principio variacional, 443, 445.
 —, ecuación canónica, 421.
 —, — movimiento, 417, 426, 444, 494, 536.
 —, —, notación matricial o simpléctica, 426.
 —, formulación, 418, 437.
 —, —, mecánica relativista, 437.
 —, —, coordenada cíclica, 431.
 —, —, sistema continuo coordenada, 679-680.
 —, —, tiempo, 438.
 —, —, ventajas, 461.
 —, función característica, 542.
 —, —, — ecuación Hamilton-Jacobi, 541.
 —, — —, totalmente separable, 551.
 —, — generatriz ecuación transformaciones, 503.
 —, — principal, 534, 537, 540.
 —, —, —, Ecuación Hamilton-Jacobi, 533.
 —, — —, solución, 547.
 —-Jacobi, ecuación, constantes separación, 547.
 ———, — derivadas parciales, 541, 545.
 ———, — mecanocuántica, 595.
 ———, — módulo gradiente, 589.
 ———, —, separación variables, 546.
- Hamilton-Jacobi, ecuaciones separables, 551.
 ———, separabilidad ecuación, 550.
 ———, — —, condiciones Staekel, 745.
 ———, soluciones completas ecuación, 546.
 ———, — — — en derivadas parciales, 535.
 ———, teoría, 533, 588.
 ———, variables ecuación, 554.
 —, principio, 43-45, 443, 664.
 —, — adecuadamente covariante, 402.
 —, —, ecuaciones Euler-Lagrange, 444.
 —, — modificado, 450.
 —, —, regiones integración, 694.
 —, — modificado, 444, 446.
 —, W. R., 130.
- Hamiltoniana, 420, 497.
 —, cambio, 500.
 — coordenadas cartesianas, 515.
 —, diagonalización, 434.
 — efectiva oscilación pequeña, 527.
 —, forma matriz, 423.
 — no perturbada, 608, 638.
 — — — en forma oscilador armónico, 615.
 — oscilador armónico unidimensional, 538.
 — péndulo plano, 614.
 — perturbación, 605, 628, 629.
 — —, elemento matricial, 628.
 — — problema Kepler, 618.
 — problema perturbación, 606.
 —, procedimiento construcción, 422.
 — transformada, 463.
 — un grado libertad, 455.
- Hansen, método, 641.
- Hansen, W., 36.
- Heisenberg, imagen, 507.
- Herpolhodia, 264.
- Hertz, principio mínima curvatura, 453.
- Herzberg, G., 234, 336.
- Hess, S. L., 234.
- Hill, método, 641.
- Hipérbola excentricidad, 136.
- Hirschfelder, J. O., 151.
- Hodógrafa particula, 157.
- Hooke, ley, 64.
- Howland, R. A., 625.
- Identidad Jacobi, 487, 488, 496.
- Imagen Heisenberg, 507.
- Inclinación órbita, 582.
- Inercia, elipsoide, 258.
 —, productos, 243.
 —, tensor, 248.

- Integral acción, 45.
 — — invariante, transformación, 715.
 — —, variación Δ , 447.
 — elíptica, 109.
 — Jacobi, 74.
 — principio Hamilton, 55.
 Interacción campo-partícula, 709.
 — electromagnética, ecuación Dirac, 711.
 Invariancia Lorentz, 367.
 Invariante adiabático, 642.
 — canónico, 491.
 — integral Poincaré, 491, 520.
 Invarianza adiabática, 643.
 — escala, 714.
 — forma, 713.
 — oscilador armónico dependiente tiempo, 653.
 Jackson, J. D., 288, 293, 409, 724.
 Jacobi, C. G. J., 421.
 —, identidad, 487, 488, 496.
 —, —, corchetes Poisson, 487.
 —, integral, 74.
 —, principio, 452.
 Jeffreys, H., 78.
 Jeffreys, H. y Jeffreys, B. S., 233, 335.
 Josephson, teoría unión, 702.
 Kaplan, W., 75, 491.
 Kepler, ecuación, 127.
 —, problema, 116-122, 512.
 —, — acotado, elementos angulares órbita, 581.
 —, —, hamiltoniana adicional, 619-620.
 —, —, — perturbación, 618.
 —, —, potencial perturbador, 617.
 —, —, tratado con variables acción-ángulo, 572.
 —, —, velocidad precesión secular, 619.
 —, tercera ley, 126.
 Kerner, E. H., 410.
 Kilmister, C. W., 522.
 Kilmister, C. W. y Reeve, J. E., 36.
 Klein, Felix, 188, 298.
 Klein, F. y Sommerfeld, A., 274, 297.
 —Gordon, campo, representación cantidad movimiento, 701.
 ———, ecuación, 698.
 ———, — unidimensional, 700.
 Korteweg-deVries, ecuación alineal, 702.
 Laboratorio, sistema, 2.
 Lagrange, corchete, 489.
 —, — fundamentales, 490.
 —, — —, notación matricial, 490.
 —, deducción ecuaciones a partir principio Hamilton, 53.
 —, ecuación campo, 681.
 —, —, sistemas no holonomos, 58.
 —, ecuaciones, 25, 29, 402, 404, 415, 432.
 —, —, método variacional, 443.
 —, — movimiento, 434, 660.
 —, — perturbación, 614.
 —, forma Nielsen, 39.
 —, formulación, 665.
 —, —, ecuación movimiento, 417.
 —, —, sistemas continuos, 663.
 —Hamilton, transición formulación, 418.
 —, multiplicador, 62.
 —, — indeterminado, 57, 460.
 Lagrangiana, 25, 422, 432, 435.
 — Breit-Darwin, 408.
 — campo electromagnético, 67.
 — — mesónico escalar, 725.
 — cíclica, cantidad movimiento canónica, 649.
 — covariante, 404, 439, 441.
 — —, cantidades movimiento canónicas, 441.
 —, densidad, 663.
 — dependiente tiempo, 402.
 —, forma matriz, 423.
 —, formulación, campo acuático gases, 749.
 — homogénea, 403.
 — no covariante, 404.
 — oscilador armónico, 541.
 — partícula campo electromagnético, 406.
 — — cargada campo electromagnético, 29.
 —, potencial, 700.
 — sistema dinámico, 455.
 — — un grado libertad, 458.
 Lanczos, C., 36, 44, 77, 454, 521, 597.
 Landau, L. D. y Lifshitz, E. M., 77, 138, 151, 335.
 Lang, S., 440.
 Laplace-Runge-Lenz, vector, 128-132, 531.
 —, vector, 130, 512.
 Laplaciana coordenadas cartesianas, 595.
 Larmor, frecuencia, 295.
 —, precesión, 587.
 —, teorema, 297.

- Legendre, función generatriz polinomios, 286.
 —, transformación, 418.
 —, —, definición, 569.
 Lehnert, B., 655.
 Leimanis, E., 299.
 Levi-Civita, densidad, 219, 509.
 Ley acción y reacción, 9.
 — adición Einstein para velocidades paralelas, 349.
 — débil acción y reacción, 6.
 — fuerte acción y reacción, 8.
 Libración, 556.
 Lie, álgebra, 222, 488.
 —, corchete, 222, 514.
 —, grupos, 511.
 —, —, constante estructura, 512.
 —, —, transformación canónica infinitesimal, 511.
 Ligadura, 14-19.
 — bilateral, 16.
 —, clasificación, 15.
 — diferencial no integrable, 18, 19.
 — disco rodante, ecuaciones, 39.
 — esclerónoma, 15.
 — holonoma, 15.
 — no holonoma, 15.
 — reónoma, 15.
 — rodadura, 17.
 — unilateral, 16.
 Lindsay, R. B. y Margenau, H., 37, 455.
 Línea nodos, 185, 582.
 — universo, 369.
 Liouville, teorema, 518, 520.
 Lissajous, figuras, 101, 563.
 Loeb, M., 151.
 Longitud camino óptico, 592.
 — nodo ascendente, 582.
 — onda Compton, 413.
 — — reducida, 596.
 Lorentz, fuerza, 27.
 —, invariancia, 367.
 —, sistema, 437.
 —, transformación, 344, 361, 693.
 —, — en espacios reales cuatro dimensiones, 356.
 —, —, forma vectorial, 364.
 —, — general, 346.
 —, — homogénea, 350.
 —, — no homogénea, 350.
 —, — ortocrona, 351.
 —, — propia, 351.
 —, — pura, 352.
 Lorentz, transformación pura infinitesimal, 365.
 —, — restringida, 351.
 —, —, ventajas representaciones unimodulares, 365.
 Ludford, G. S. S. y Yannitell, D. W., 480.
 Lunar, teoría, 639.
 Luz, velocidad en vacío, 343.
 Macfarlane, A. J., 362.
 MacMillan, W. D., 151, 297.
 Mach, E., 37.
 Mann, R. A., 410.
 Máquina Atwood, 34.
 Marion, J. B., 151, 218, 233.
 Masa reducida, 87.
 Mathews, J. y Walker, R. L., 286.
 Matriz adjunta, 180.
 — —, variaciones, 424.
 — antisimétrica, 180.
 — autoadjunta, 181.
 — cambio, propiedades formales, 173.
 —, característica, 204.
 — columnas, elementos, 426.
 — cuadrada, elementos, 426.
 — diagonalizadora, ortogonal, 310.
 — Dirac, 702.
 —, ecuación secular, 204.
 — generatriz rotación infinitesimal, 513.
 — giro Pauli, 199.
 — hemisimétrica, 180.
 — hermitica, 181.
 — —, valores propios, 255.
 — inversa, 423.
 — jacobiana, 440.
 — ortogonal, 178.
 — — real, 203.
 — Pauli, 426.
 —, productos, 187.
 — real simétrica, 321.
 — rotación, fórmulas función ángulos Euler, 736.
 — simétrica, 423.
 — simpléctica, 480.
 —, sistema homomorfo, 193.
 — transformación, 169.
 — — Lorentz espacio Minkowski, 347.
 — traspuesta, 178.
 — unidad, 176.
 — unimodular, 190.
 — unitaria, 181.
 — — asociada, 192.
 —, valores propios, 203.

- Maupertuis, acción, 450.
 Maxwell, ecuaciones, 26.
 —, —, forma covariante, 706.
 —, — — microscópica, 703.
 McCuskey, S. W., 124, 151.
 McIntosh, H. V., 151, 517, 522, 598.
 Mecánica analítica, 1.
 — aplicada, 185.
 — celeste, 185.
 — —, construcción métodos perturbación, 639.
 — —, ecuaciones perturbación, 613.
 — —, técnicas perturbación, 639.
 — —, variables Delaunay, 586.
 — clásica, 1, 593.
 — —, movimiento sistema, 518.
 — —, teoría restringida relatividad, 341.
 — cuántica, imagen Heisenberg, 507.
 — espacial, técnicas perturbación, 639.
 — no relativista, principio mínima acción, 451.
 — partícula, 1.
 — punto, conservación integral Jacobi, 671.
 — —, ecuaciones energía, 373.
 — —, — fuerza, 373.
 — relativista, formulación Hamilton, 437.
 — —, — lagrangiana, 394.
 Mecánica sistema partículas, 6.
 Meirovitch, L., 299, 336.
 Melbourne, W. G., 620.
 Mercurio, precesión perihelio, 621.
 —, — secular perihelio, 621.
 Mesón, 343, 413.
 — cargado escalar, densidad lagrangiana, 697, 726.
 Método perturbación especial, 639.
 — residuos, 576.
 Meyer, R. E., 651.
 Microcanónica, colectividad, 520.
 Michelson y Morley, experimentos, 343.
 Minkowski, espacio, 347, 691.
 —, fuerza, 374.
 Misner, C. W., Thorne, K. S. y Wheeler, J. A., 361, 409, 621.
 Modo normal vibración, 322.
 Módulo Young, 661.
 Molécula, coordenadas internas, 337.
 — triatómica lineal, modos degenerados, 327.
 — — —, — normales longitudinales, 326.
 — — —, vibraciones libres, 323.
 Momento cantidad movimiento, 678.
 — cinético, 10, 12.
 Momento cinético canónico, 507.
 — —, constante movimiento, 515.
 — —, dirección constante, 88.
 — — movimiento alrededor punto, 239-244.
 — — spin, 13.
 — —, teorema conservación, 501.
 — — total campo, 678.
 — fuerza, 3.
 — inercia, 250.
 — — respecto eje rotación, 249.
 — magnético sistema cargas en movimiento, 293.
 — principal inercia, 256.
 Monógeno, sistemas, 44.
 Monopolo magnético, 157.
 Moser, J., 655.
 Movimiento acotado, órbita, 97.
 — bajo fuerza constante, 397.
 — completamente degenerado, 577.
 — cuasi-periódico, 642.
 — cuerpo rígido, teorema Euler, 202.
 —, ecuaciones, 308.
 —, — Euler, 259.
 —, ecuación Lagrange, 68.
 —, — orbital, 543.
 —, —, varilla elástica, 662.
 — en tiempo en problema Kepler, 122.
 — ergódico, 642.
 — estacionario, coordenadas cíclicas, 433.
 —, —, — no cíclicas, 433.
 — helicoidal, 209.
 — hiperbólico, 397.
 —, ilimitado, órbita, 96.
 —, ley Newton, 342.
 — orbital o espiral, 141.
 — oscilatorio, periodo, 399.
 — periódico, 556.
 — planetario, segunda ley Kepler, 89.
 — partícula cargada en campo magnético, 400.
 — — utilizando coordenadas cartesianas, 32.
 — — — — polares planas, 32.
 — planetario, leyes Kepler, 126.
 — radial, ecuación, 649.
 —, segunda ley Newton, 128.
 — sistema, 43.
 — —, camino, 43.
 — — volumen espacio fásico, 519.
 Multiplicador indeterminado Lagrange, 57, 460.
 — Lagrange, 62.
 Munk, W. H. y Macdonald, G. J. F., 299.

- Napier, reglas, 584.
 Newton, resunga ley movimiento, 128.
 —, R. G., 152.
 Nielsen, forma. Ecuaciones Lagrange, 39.
 Nivel atómico, desdoblamiento Zeeman, 587.
 Nodo ascendente, 582.
 — —, longitud, 582.
 —, línea, 582.
 Noether, deducción teorema, 714.
 —, E., 712.
 —, teorema, 671, 712.
 Northrop, T. G., 655.
 Nonion diada, 247.
 Número cuántico acimutal, 587.
 — — magnético, 587.
 — — principal, 587.
 — ocupación cuantizado discreto, 322.
 Nutación astronómica, 291.

 Olson, H. F., 65, 78.
 Onda elástica longitudinal, velocidad
 propagación, 662.
 —, fase, 592.
 — tridimensional, ecuación, 669.
 Operador cantidad movimiento,
 representación mecanocuántica, 711.
 — cuadrigradiante, 358, 372.
 — diferencial escalar universo, 373.
 — gradiente cuadrimensional, 373.
 — rotación plano, 171.
 Óptica, ecuación onda escalar, 591.
 — geométrica, 591.
 — —, ecuación eikonal, 593.
 Órbita cerrada, condiciones, 112-116.
 — circular, condición, 98.
 —, clasificación, 92.
 — correspondiente movimiento ilimitado, 96.
 — debida fuerza central conservativa,
 ecuación, 729.
 —, ecuación diferencial, 105-111.
 —, elementos astronómicos, 581.
 — elíptica problema Kepler acotado espacio,
 581.
 — espacio fásico correspondiente péndulo
 simple, 558.
 —, extensión por reflexión, 107.
 —, inclinación, 582.
 — Kepler, elementos Poincaré, 602.
 — movimiento acotado, 97.
 — osculatrix, 611.

 Órbita osculatrix, determinación parámetros
 mediante tratamiento perturbaciones, 611.
 — punto figurativo espacio fásico, 557.
 — satélite, 285.
 — —, precesión, 621.
 Orbital, determinación dependencia
 temporal constantes, 612.
 Ortogonalidad, condición, 169, 350.
 — Gram-Schmidt, 256.
 Oscilación, amplitud, 687.
 —, — compleja, 309.
 —, —, representación mediante serie Fourier,
 687.
 — en torno movimiento estacionario, 431.
 — forzada, frecuencia, 328.
 —, frecuencia, 325.
 — pequeña, 305.
 — sinusoidal perpendicular, composición,
 101.
 Oscilador anarmónico, término primer orden
 hamiltoniana perturbación, 629.
 — — unidimensional, 634.
 — — —, hamiltoniana, 635.
 — armónico, 64, 429.
 — —, energía total, 516.
 — — frecuencia dependiente tiempo,
 invariante, 651.
 — — isotropo, 99.
 — — — bidimensional, 514.
 — — —, grupo simetría, 517.
 — — lineal, 652.
 — — —, aplicación variables acción-
 ángulo, 561.
 — — — con lagrangiana y hamiltoniana,
 651-652.
 — — —, frecuencia, 562.
 — —, método Hamilton-Jacobi, 538.
 — —, solución, 476, 540.
 — — tridimensional, frecuencias
 movimiento, 563.
 — — unidimensional relativista, 398.
 — isotropo bidimensional, 327.
 — lineal isotropo, constantes rigidez, 570.
 — puntual, trayectoria, 605.
 Osgood, W. F., 37.

 Panofsky, W. K. H., 293.
 Parámetro Cayley-Klein, 188, 195, 736.
 — Euler, 196, 737.
 — impacto, 134.

- Pars, L. A., 77, 78, 233, 454, 480, 521, 598, 745.
- Partícula, cantidad movimiento, 2.
- cargada campo magnético, movimiento, 400.
 - Dirac, campo clásico, 702.
 - , dispersión, 132.
 - , ecuación movimiento, 6.
 - , — — Newton, 374.
 - , energía cinética, 4.
 - , — total, 437, 438.
 - , fuerza aplicada, 6.
 - , fuerzas mutuas, 12.
 - , hodógrafa, 157.
 - , mecánica, 1.
 - onda, dualidad, 593.
 - , teorema conservación cantidad movimiento, 3, 8.
 - , — — momento cinético, 4, 9.
 - Tierra, velocidad escape, 38.
 - , vector aceleración, 2.
 - , — posición, 1.
 - , — velocidad, 1.
- Pauli, matriz, 426.
- , — giro, 199.
- Péndulo compuesto, 301.
- doble, 17.
 - , ecuación, 700.
 - Foucault, 232.
 - lineal, potencial, 700.
 - plano, 301.
 - , frecuencia, 614.
 - , hamiltoniana no perturbada, 616.
 - , hamiltoniana, 614.
 - , — perturbación, 616.
 - , límite amplitudes pequeñas, 614.
 - , momento inercia, 615.
 - seno-Gordon, ecuación, 702.
 - simple, órbitas espacio fásico, 558.
- Peonza rápida, ecuación, 277.
- , frecuencia nutación, 278.
 - simétrica, ángulos Euler, 271.
 - — cargada, 304.
 - , —, orientación, 271.
 - — pesada punto fijo, 270.
- Periápside, argumento, 622.
- Periapsis, 123.
- Perihelio, 123, 124.
- , argumento, 582, 586.
 - Mercurio, precesión, 621.
 - , — secular, 621.
- Periodo movimiento oscilatorio, 399.
- péndulo plano amplitud finita, 614.
- Permutación cuatridimensional, 705.
- , símbolo, 219.
- Perturbación, 605.
- canónica, teoría, 605.
 - cuatridimensional gravitatoria, 606.
 - dependiente tiempo, 606.
 - — —, ejemplos, 614.
 - , efectos periódicos, 612.
 - , hamiltoniana, 628.
 - independiente tiempo, ecuación Hamilton-Jacobi, 626, 627.
 - — — para un orden superior al primero, 630.
 - — — en primer orden con un grado libertad, teoría, 624.
 - — —, teoría, 624.
 - Lagrange, ecuaciones, 613-614.
 - , método general con solución analítica Delaunay, 640.
 - orden n-ésimo, 613.
 - periódica parámetros satélites, 612.
 - por fuerza central problema Kepler acotado, 617.
 - , técnicos especiales, 641.
- Pierce, B. O., 118.
- Planck, constante, 596.
- Planeta, movimiento, 126.
- Plano invariable, 264.
- orbital, precesión, 622.
- Plummer, H. C., 151.
- Poincaré, elementos. Órbitas Kepler, 602.
- , invariante integral, 491, 520.
 - , método, 625.,
 - , transformación, 350.
- Poinsot, construcción, 262, 264.
- Poisson, corchetes, 484, 688, 689.
- , —, cálculo, 493.
 - , — fundamentales, 485.
 - , —, matriz, 484.
 - , —, naturaleza, 487.
 - , —, propiedades algebraicas, 486.
 - teorema, 496.
- Polhodia, 264.
- Polinomio Legendre, función generatriz, 286.
- Postfactor, 247.
- Potencial, 5.
- Coulomb truncado, 158.
 - dependiente velocidad, 26.
 - escalar campos electromagnéticos, 27.

- Potencial fuerza integral, 105-111.
 — generalizado, 26.
 — lagrangiana, 700.
 — péndulo lineal, 700.
 — perturbador, 617.
 — Schering, 26.
 — unidimensional equivalente fuerza atractiva, 94.
 — vector magnético, 27.
 Poynting, vector, 708.
 Pozo rectangular, 157.
 Precesión equinoccios, 285, 621.
 — Larmor, 587.
 — media, frecuencia, 279.
 — órbitas satélites, 285, 621.
 — perihelio Mercurio, 621.
 — pseudorregular, 279.
 — regular, 281.
 — secular perihelio Mercurio, 621.
 — sistemas cargas campo magnético, 293.
 — Thomas, 353.
 — velocidad angular, 355
 Prefactor, 247.
 Presión, flujo gradiente, 230.
 Principio correspondencia, 486.
 — equivalencia. Relatividad Galileo, 430.
 — Hertz mínima curvatura, 453.
 — integral, 43.
 — mínima acción, 446, 450, 593.
 — — —, forma Jacobi, 452.
 — trabajos virtuales, 21.
 — variacional ecuaciones Hamilton, 446.
 — —, formulación, 63.
 Problema Kepler acotado, potencial perturbador, 617.
 Producto inercia, 243.
 Pseudoescalar, 219.
 Pseudotensor, 245.
 Pseudovector, 219.
 Pulsación ciclotrónica, 649.
 — fuerza exterior, 329.
 Radio giro, 258.
 — gravitacional Sol, 620.
 — vector, 259.
 Raya espectral, frecuencia, 296.
 Rayleigh, función disipación, 29.
 —, lord, 37, 336, 723.
 Rayos luminosos, trayectorias, 593.
 Razón giromagnética, 294.
 Reactor neutrones térmicos, 150.
 Región integración principio Hamilton, 694.
 — ultrarrelativista, 383.
 Regla cadena, aplicaciones, 22.
 — Napier, 584.
 Relación dispersión, 699, 701.
 Relatividad restringida, periodo oscilador armónico, 400.
 — —, programa básico, 342.
 — —, teoría, 344.
 —, teoría restringida, 341.
 Representación por cantidad de movimiento, 690.
 Residuo, método, 576.
 Resonancia, 330, 638.
 —, frecuencia, 317.
 — profunda, 639.
 — superficial, 638.
 Revolución, 557.
 Riemann, espacio, 314.
 —, —, elemento longitud camino, 359.
 Rodadura, ecuación ligadura, 51.
 Rotación, 557.
 — cuerpo rígido para spin, 19.
 —, diagramas vectoriales deducir fórmula, 209.
 — espacial, 366.
 — — sistema, transformaciones canónicas, 511.
 — finita, 209-212.
 —, fórmula, 210.
 — infinitesimal, 213-222.
 — vectores sentido antihorario, 220.
 Routh, E. J., 297.
 —, método, 431.
 —, —, oscilaciones en torno movimiento estacionario, 431.
 Routhiana, 431.
 Rund, H., 78, 403, 409, 454, 521.
 Runge-Lenz, vector, 129.
 Rutherford, sección eficaz dispersión, 138.
 Saletan, E. J. y Cromer, A. H., 234, 654, 724.
 Sard, R. D., 345, 370, 408.
 Satélite artificial, puesta al día métodos perturbación, 641.
 —, hamiltoniana perturbación, 622.
 —, precesión órbitas, 285.
 Sección eficaz diferencial dispersión, 133.
 — — dispersión, 133.

- Sección eficaz total dispersión, 138.
 Seno-Gordon, descripción ecuación, 701-702.
 —, ecuación, 699.
 —, —, densidad lagrangiana, 699, 720.
 Serie Fourier simple, 567.
 Schering, función potencial, 26.
 Schwartz, H. M., 409.
 Schwarzschild, F., 559.
 —, solución esféricamente simétrica, 619.
 Schrödinger, ecuación, 595.
 —, ecuación onda, 595.
 Siegel, C. L., Kolmogonov, A. N., Arnol, V. I. y Moser, J., 642.
 Simetría dilatación, 465.
 —, grupos, 511.
 Sistema conservativo, 4.
 — continuo coordenadas generalizadas, formulación Lagrange, 670.
 — —, formulación Lagrange, 663.
 — —, principio Hamilton límite, 663.
 — — unidimensional, densidad lagrangiana, 663.
 — degenerado, 570.
 —, desplazamiento virtual, 19.
 — discreto - sistema continuo, transición, 659.
 — espacio fásico, ecuación trayectoria punto figurativo, 557.
 — Galileo, 2.
 — inercial, 2, 437.
 — laboratorio, 2.
 — mecánico, grupos simetría, 511.
 — monógeno, 44.
 — no holonono, principio Hamilton, 56.
 — partículas, mecánica, 6.
 — totalmente separable, variables acción-ángulo, 562.
 — un grado libertad, variables acción-ángulo, 556.
 — unidades Gauss, ecuaciones Maxwell, 26.
- Slater, J. C. y Frank, N. H., 723.
 Smart, W. M., 620.
 Smirnov, V. I., 535.
 Sol, movimiento planetario campo gravitatorio, 126.
 —, radio gravitatorio, 620.
 Soliton, 702.
 Solución Goldschmidt, 79.
 Sommerfeld, A., 298, 597.
 —, condiciones cuánticas, 586.
- Sonido, velocidad en los gases, 669.
 Spiegel, M. R., 118, 123.
 Spin, momento cinético, 13.
 Stacey, F. D., 234, 299.
 Staeckel, condiciones, 551, 745.
 —, —, aplicación, 552.
 —, —, forma matricial, 746.
 —, —, matriz, 555.
 —, — para separabilidad ecuación Hamilton-Jacobi, 745.
 Stoll, R. R., 233, 742.
 Strang, G., 742.
 Sudarshan, E. C. G. y Mukunda, N., 522.
 Superficie revolución área mínima, 50.
 Symon, K. R., 36, 297, 408, 435, 454, 675.
 Synge, J. L., 399, 434, 454, 521.
 Synge, J. L. y Schild, A., 233, 335, 408.
- Tait-Bryan, ángulos, 188.
 T.C.I. (Transformación canónica infinitesimal), 481.
 Tensor, 244.
 — alternante, 219.
 — campo, 704.
 — cartesiano, 245.
 — covariante, 359.
 — esfuerzos, 675.
 — esfuerzo-energía, 671, 676.
 — —, densidad lagrangiana, 677.
 — inercia, 248.
 — —, valores propios, 252.
 — métrico espacio, 314.
 — momento inercia, 248.
 — orden cero, 245.
 — primer orden, 245.
 — segundo orden, 245.
 — universo, 368.
- Teorema conservación, 427, 671.
 — — cantidad movimiento, 70.
 — — — — partícula, 3, 8.
 — — momento cinético partícula, 4, 9.
 — cuántico, 496.
 — Liouville, 518.
 — vectorial, 9.
- Teoría campos relativista, 691.
 — — —, ejemplos, 696.
 — lunar, 639.
 — perturbación general, 639.
 — Relatividad restringida, espacio Minkowski, 691.
- Ter Haar, D., 335, 454, 597.
 Término giroscópico, 434.

- Thomas, frecuencia precesión, 355.
 —, precesión, 353.
 Tiempo, dilatación, 370.
 — propio, 369.
 — universo, 369.
 Tierra, forma, 228.
 —, geoide, 228.
 Tolman, R. C., 521.
 Trabajo, 4.
 — virtual, 20.
 — — fuerzas aplicadas, 20.
 — —, principio, 21.
 Transformación canónica, 461, 465, 470.
 — —, condición simpléctica, 480.
 — —, ecuaciones, 461.
 — — extensa, 465.
 — — infinitesimal, 481.
 — — —, ecuaciones básicas, 496.
 — — —, función generatriz, 482.
 — — —, grupos Lie, 511.
 — — —, matriz jacobiana, 482.
 — —, método simpléctico, 476.
 — — problema perturbado, 607.
 — —, punto vista activo, 498.
 — —, — — pasivo, 498.
 — — restringida, 465, 476.
 — cononoide, 522.
 — contacto, 465.
 — covariante, 368.
 — $d\Omega$, propiedades, 741.
 — escala, 464.
 — Galileo, 342.
 — identidad, 176, 470.
 — integral acción, 716-717.
 — Legendre, definición, 569.
 — lineal Galileo, 345.
 — — o vectorial, 167.
 — Lorentz, 344, 361, 693.
 — —, forma vectorial, 364.
 — — homogénea, 350.
 — — no homogénea, 350.
 — — ortocronas, 351.
 — — propia, 351.
 — — pura, 352.
 — — — infinitesimal, 365.
 — — restringida, 351.
 — — ventajas representaciones unimodulares, 365.
 — medido primera especie, 719.
 — ortogonal, 167, 169.
 — — bidimensional, 170.
 Transformación ortogonal, ecuaciones, 463.
 — — impropia, 184.
 — — propia, 184.
 — Poincaré, 350.
 — punto, 40.
 — puntual, 463.
 — semejanza, 182.
 Truesdell, C., 37.
 Truesdell, C. y Toupin, R. A., 37.
 Turnbull, H. W., 742.
 Universo, 347.
 Valor propio, ecuación, 203, 308, 310.
 — — tensor inercia, 252.
 Van Vleck, J. H., 579, 598.
 Variable acción, 556.
 — — ángulo, 559, 643.
 — — — para sistemas totalmente separables, 562.
 — — —, problema Kepler, 572.
 — — — sistemas un grado libertad, 556.
 — —, invarianza adiabática, 648.
 — — J , 559.
 — —, propiedad invarianza adiabática, 588.
 — ángulo, 559.
 — —, ecuaciones transformación, 569.
 — canónica, 418.
 — degenerada, 638.
 — Delaunay, 586.
 — lenta, 637.
 — rápida, 637.
 Variación, cálculo, técnicas, 45.
 — coordenadas, 640.
 — secular, 612.
 Varilla elástica, densidad corriente energía, 674.
 — —, — lagrangiana, 672.
 — —, ecuación movimiento, 662.
 — — infinitamente larga, movimiento, 6.
 Vector aceleración partícula, 2.
 — axial, 219.
 — cantidad movimiento canónica, 438.
 — conservativo, 129.
 — contravariante, 358.
 — covariante, 358.
 — género temporal, 370.
 — Laplace, 130, 512.
 — — Runge-Lenz, 128-132.
 — momento cinético, 243.
 — — — tridimensional, 517.

- Vector polar, 218.**
 — posición, área barrida, 89.
 — — partícula, 1.
 — — rotación sistema, 69.
 — — traslación sistema, 69.
 — Poynting, 708.
 — propio, dirección, 204.
 — Runge-Lenz, 129.
 — sistema, 508.
 — velocidad partícula, 1.
 —, — variación, 222-226.
Velocidad angular, 223.
 — —, componentes, 737.
 — —, —, en términos ángulos Euler, 739.
 — — rotación, 35.
 — areolar, 88.
 — escape partícula Tierra, 38.
 —, función cuadrática homogénea, 330.
 — luz vacío, 343.
 — paralela, ley adición Einstein, 349.
 — propagación ondas elásticas longitudinales, 662.
 — radial, 92.
 — sonido gases, 669.
 — universo, 372.
 — variación vector, 222-226.
Vibración, espectro discreto, 699.
 — forzada, 328.
 — —, amplitudes, 328.
 — libre, 329.
 — —, frecuencia, 317.
 — —, molécula triatómica lineal, 323.
 — longitudinal varilla elástica, densidad lagrangiana, 665.
 — mecanismos, 305.
Vibración, modo normal, 322.
 — sonora, densidad energía cinética, 672.
 — — gases, 749.
 — transitoria, cálculo operacional, 340.
Viento geostrofico, 230.
Vinti, J., 568.
Virial Clausius, 102.
 —, teorema, 101-105, 579.
 —, —. Utilidad, 102.
Von Zeipel, método, 624-625, 641.
 — —, método, 641.
Weber, electrodinámica, 26.
Webster, 264.
Weinstock, R., 77.
Wells, D. W., 78, 454.
Wentzel, G., 723.
Weyl, H., 426.
Whittaker, E. T., 37, 45, 77, 150, 233, 335, 453.
Wilson, E. B. jr., Decius, J. C. y Cross, P. C., 336.
Wrigley, W., Hollister, W. M. y Denhard, W. G., 299.
 xyz, convenio, 738.
 y, convenio, 735.
 Young, módulo, 661.
Zeeman, desdoblamiento, niveles atómicos, 587.
 —, efecto, 587.
 —, —, desplazamiento frecuencia, 296.
Zemansky, M. W., 751.