

Tesis de la Licenciatura en Astronomía

Perturbaciones Gravitacionales a la Métrica de Kerr

Ignacio Francisco Ranea Sandoval

Director: Dr. Gustavo Dotti
Co-director: Dr. Héctor Vucetich

La Plata, 5 de mayo de 2009

Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas
Universidad Nacional de La Plata



Agradecimientos

A mis viejos
por haber fomentado cada uno de mis proyectos
y por haberse bancado cada una de las despedidas.

A mi familia
por la paciencia y las preguntas.

A Ceci
por todas esas caricias,
y a todos los que me acompañaron en este viaje,
muchas gracias.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Motivación y Objetivos	3
1.2. Teoría General de la Relatividad: Generalidades	4
2. El Colapso Gravitatorio	9
2.1. La Conjetura de Censura Cósmica	11
3. La Solución de Kerr	13
3.1. Características Generales	13
3.2. La Métrica de Kerr en el Formalismo de Newman-Penrose	16
4. Perturbaciones Gravitacionales a la Métrica de Kerr	19
4.1. Teoría de Perturbaciones en Relatividad General	19
4.2. Perturbaciones a la Métrica de Kerr	20
4.3. Ecuaciones de Teukolsky	21
4.3.1. Estudio de la Ecuación Angular	21
4.3.2. Estudio de la Ecuación Radial	24
5. Resultados	27
5.1. Inestabilidad de la Métrica de Kerr en el Régimen Super extremo	27
5.2. Inestabilidad de la Región Interna del Agujero Negro de Kerr	31
5.2.1. Caso Extremo $a = M$	31
5.2.2. Caso Subextremo $a < M$	32
5.3. Comentario	34
6. Implicaciones Astrofísicas	35
7. Trabajo a Futuro	37
8. Apéndices	39
8.1. Apéndice A: Diagramas de Carter-Penrose	39
8.1.1. Algunos Ejemplos	41
8.2. Apéndice B: Horizontes de Cauchy	44
8.3. Apéndice C: Coordenadas de Kerr-Schild	46
Bibliografía	47

Capítulo 1

Introducción

A mind is like a parachute.
It doesn't work if it's not open.
Frank Zappa

Los agujeros negros se encuentran, sin lugar a duda, entre los objetos más fascinantes de la fauna de nuestro universo. Han sido, son y seguirán siendo objeto de grandes especulaciones.

La idea de un objeto con un campo gravitatorio tan grande como para evitar que la luz escapase de él fue propuesta por John Michell en 1783. Pierre-Simon Laplace llegó a la misma conclusión, de manera independiente, en el año 1795. Ambos trabajos utilizaron la teoría newtoniana de la gravitación y la naturaleza corpuscular de la luz para llegar a esta conclusión. Sin embargo estos objetos no deben ser confundidos con agujeros negros, son, simplemente, “estrellas oscuras” que observadores lejanos no pueden observar.

Más de un siglo después, hacia principios del siglo XX, se desarrolló una teoría física que permitió predecir su existencia. A pesar de ello debieron pasar más de 20 años para que esta idea fuese propuesta por primera vez. Julius R. Oppenheimer junto con Hartland Snyder postularon [1], en el año 1939, que, al finalizar su evolución, las estrellas de muy alta masa deberían sufrir un colapso gravitacional continuo dando origen así a lo que hoy conocemos como un agujero negro.

No es tan clara la historia relacionada con el nombre “agujero negro”, pero hay cierto consenso de que, en su charla del año 1967 “Our Universe: The Known and Unknown”, el afamado físico John A. Wheeler lo utilizó como alternativa al de “estrella completamente colapsada gravitacionalmente” que venía usándose hasta ese momento.

Para entender el por qué de tal nombre analicemos primero el tema de la negrura: cuando una estrella masiva empieza el colapso gravitatorio la velocidad del colapso se incrementa hasta un punto en el que comienza a frenarse para, justo antes de alcanzar el horizonte, “congelarse”. Durante este proceso la luminosidad que un observador lejano recibe decrece exponencialmente con el tiempo [2] - [3], y al cabo de un intervalo de tiempo del orden de 10^{-3} s nada más emerge de este objeto, por lo que la “estrella” se vuelve absolutamente negra.

Analicemos ahora por qué “agujero”. Como primer paso definiremos una característica fundamental de los agujeros negros: *el horizonte de eventos*. El horizonte de eventos es una superficie que actúa como una membrana semipermeable y que divide al espacio-tiempo en dos regiones: una región interior y el resto del universo. Esta superficie permite que partículas (materiales o no) ingresen a la región interior, pero impide que las mismas salgan. Ahora haremos mención a otra importante característica de estos objetos, la llamada *última superficie de influencia* \mathcal{M} (Figura 1.1), ésta es

una superficie nula que interseca al horizonte de eventos junto con la superficie de la estrella que colapsa. Cuando algo cruza esta superficie deja de poder influenciar a la estrella hasta que la misma atraviesa el horizonte de eventos, es decir, si un observador externo emite fotones (intentando iluminar al agujero negro para poder observarlo) después de atravesar la superficie \mathcal{M} , el mismo no los verá reflejarse ya que estos rayos de luz llegarán a la superficie de la estrella después de atravesar el horizonte de eventos. Así, desde el punto de vista de la causalidad, en la superficie \mathcal{M} la “estrella” se vuelve un agujero en el espacio-tiempo, aunque, como dijimos antes, en un principio éste no es negro, ya que aún luego de cruzar esta superficie \mathcal{M} parte de la radiación emerge debido a que la luz se propaga con una velocidad finita, de modo similar a como nos sigue llegando luz del Big Bang. Vemos que el nombre agujero negro desvía la atención de la estrella que lo formó, ya que en definitiva la misma resulta irrelevante para la astrofísica del mismo; sólo el horizonte de eventos y la geometría del espacio-tiempo exterior resultan de importancia.

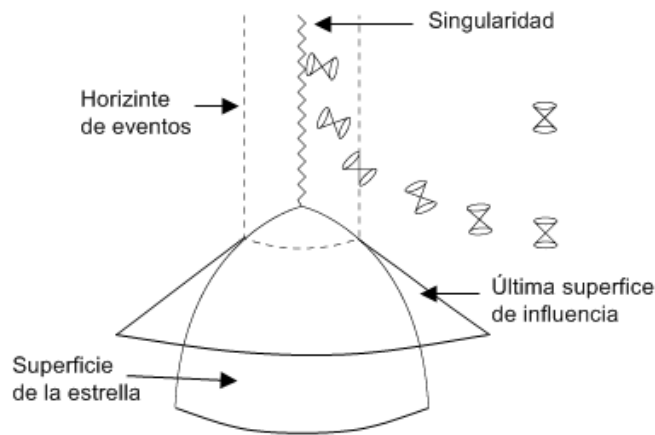


Figura 1.1: Colapso esféricamente simétrico de una estrella. Vemos la última superficie de influencia y horizonte de eventos y el comportamiento de los conos de luz.

Actualmente existe, para un espacio-tiempo con una coordenada temporal y tres espaciales, una familia de soluciones a las ecuaciones de la Teoría General de la Relatividad que contiene a todas las soluciones de agujeros negros estacionarios que se conocen si sólo se admiten campos electromagnéticos: la de Kerr-Newman.

Los agujeros negros fueron, hasta hace algunos años, simplemente soluciones a las ecuaciones Einstein-Maxwell, pero había grandes reservas en la comunidad astrofísica sobre su existencia en el Universo. En la actualidad se conocen más de 20 candidatos a agujero negro de masa estelar [4] - [5], además se tienen fuertes evidencias de que en el centro de la Vía Láctea existe un agujero negro supermasivo (ver, por ejemplo, [6]) al igual que en muchas otras galaxias (ver, por ejemplo, [7]).

El momento angular ($J = aM$, donde a es el parámetro de rotación y M la masa) de estos objetos es más complicado de determinar que su masa por lo que existen sólo algunos casos en los que este parámetro está determinado en forma confiable. Actualmente se están realizando grandes esfuerzos para lograr estimaciones del momento angular de un mayor número de agujeros negros. Esto se debe a que entre la masa y el momento angular, el segundo es el parámetro de mayor importancia ya que es el que determina la geometría, mientras que la masa puede ser pensada como un mero factor de

escala. En trabajos muy recientes [8] - [9] se dan estimaciones al parámetro de rotación de 4 agujeros negros, en todos los casos mostrando valores cercanos a 1 (si utilizamos unidades geométricas).

Así, todos los agujeros negros de los que se posee información sobre su masa y momento angular, son agujeros negros rotantes de Kerr, de donde se desprende que estudios relacionados con esta métrica tienen, potencialmente, gran relevancia astrofísica.

Además de describir a agujeros negros existen regímenes en los que las mismas métricas presentan singularidades desnudas, es decir sin un horizonte de eventos recubriéndolas. Como veremos adelante existen varias razones que hacen suponer que este tipo de objetos no tienen la misma importancia astrofísica que los agujeros negros, particularmente en el caso de Kerr.

Una singularidad es una región donde la variedad que representa al espacio-tiempo es incompleta. Es decir existe al menos una geodésica inextensible. En los ejemplos de métricas con relevancia física coinciden con regiones en las que el escalar de curvatura diverge ¹. Diremos que un espacio-tiempo es singular si posee singularidades de este tipo. Estos puntos, donde la Teoría General de la Relatividad deja de ser aplicable, no pertenecen a la variedad que define al espacio-tiempo.

1.1. Motivación y Objetivos

La Teoría General de la Relatividad de Albert Einstein predice la existencia de métricas que presentan singularidades desnudas. Tales soluciones tienen una serie de características desagradables entre las que se pueden destacar:

- Conexión causal del resto del espacio-tiempo con la singularidad;
- Se pierde predictibilidad debido a que cada superficie de datos iniciales posee un horizonte de Cauchy;
- El teorema de unicidad de Carter-Robinson válido en el caso del agujero negro de Kerr no es aplicable en el régimen super extremo de la misma, cuando ésta presenta una singularidad desnuda, por lo que puede pensarse que la misma es menos relevante.

Estas características, entre otras, llevaron a Roger Penrose a formular la Conjetura de Censura Cósmica (CCC) [10], que enunciaremos con más rigurosidad más adelante, pero que en lenguaje poco técnico afirma:

“El colapso gravitacional de materia “normal” no puede resultar en métricas que contengan singularidades desnudas”.

Esta conjetura aún no ha sido demostrada y es, en el marco de la Teoría General de la Relatividad clásica, uno de los interrogantes más importantes que queda por resolver. Luego, trabajos confiables que aporten información sobre este tema pueden ser considerados de interés.

Sin intentar dar una demostración a esta conjetura, el estudio perturbativo de tales soluciones aporta evidencias que apoyan a la CCC de Penrose en el siguiente sentido:

“Si las soluciones a las ecuaciones de Einstein que presentan singularidades desnudas resultan ser inestables frente a perturbaciones de algún tipo, se puede descartar que en la realidad dichos objetos existan y de esta forma descartar su interés astrofísico.”

¹Uno puede pensar ejemplos matemáticos en los que esto no se cumple: un ejemplo clásico es tomar al espacio-tiempo plano y cortarlo, así todas las geodésicas serán inextensibles pero sin que el escalar de curvatura diverja.

En esta dirección se inició un estudio sistemático de la estabilidad de las singularidades desnudas más relevantes [11] - [12] - [13] - [14].

Además, un estudio perturbativo de cualquier métrica resulta de gran interés, ya que nuestro grado de comprensión de una métrica se enriquece cuando estudiamos como ésta reacciona frente a perturbaciones externas.

La solución a las ecuaciones de Einstein encontrada por Roy Kerr en 1963 [15] adquirió una enorme relevancia astrofísica desde su interpretación como un agujero negro rotante. En su caso super extremo (esto es, cuando $a^2 > M^2$) esta solución presenta una singularidad desnuda.

Hasta el momento de comenzar los estudios relacionados con esta Tesis, solamente existían evidencias numéricas de la inestabilidad de la métrica de Kerr en el régimen super extremo. Es por esto que nos proponemos generalizar los resultados obtenidos en [12] para establecer en forma rigurosa la naturaleza inestable de la métrica de Kerr cuando presenta una singularidad desnuda y, así, aportar evidencias extras que favorezcan la CCC.

1.2. Teoría General de la Relatividad: Generalidades

Nuestra concepción del espacio, el tiempo y las leyes de la dinámica, fueron radicalmente modificadas por Einstein en uno de los cuatro trabajos que publicó en 1905 (el llamado *Annus Mirabilis*) con los que revolucionó varios aspectos de la Física.

En esta teoría Einstein estudia, únicamente, cambios de coordenadas entre sistemas de referencia inerciales. Buscando una teoría que permita cambios de coordenadas totalmente generales, manteniendo su idea de que las leyes de la Física debían ser covariantes (esto es, debían conservar su forma) y, notando que la gravitación resulta incompatible con la idea de que el espacio-tiempo sea globalmente plano es que Einstein desarrolla las ideas fundamentales de la Teoría General de la Relatividad que publica hacia fines del año 1915.

Así, Einstein desarrolla no sólo una teoría del espacio-tiempo, sino también de la gravitación en la que se describe a la gravedad como curvatura en el espacio-tiempo y no como una fuerza que actúa a distancia.

Un postulado fundamental para esta teoría es el principio de equivalencia que, en una de sus tantas formas, puede expresarse de este modo:

“Las observaciones realizadas desde un sistema de referencia en movimiento relativo acelerado respecto a un sistema inercial son, localmente, idénticas a las de un observador inercial en un campo gravitatorio.”

Éste ha sido, y continua siendo, testeado experimentalmente (estudiando diferencias entre masa inercial y masa gravitatoria) con una precisión del orden de una parte en 10^{12} o mejor [16].

Con esta teoría, el mismo Einstein logró explicar, entre otras cosas, un gran interrogante sobre nuestro Sistema Solar que había desconcertado a astrónomos y físicos por aproximadamente medio siglo: el avance (de 43 segundos de arco por siglo) del perihelio de Mercurio. Además predijo, por nombrar algunas de las muchas predicciones exitosas de su Teoría, que la luz de las estrellas debía ser desviada por el campo gravitacional del Sol. Esta predicción fue confirmada durante un eclipse total de Sol por la expedición científica dirigida por Sir Arthur Eddington en 1919 y en muchas oportunidades posteriores [17]. También se predijo el redshift gravitacional, un efecto por el que la longitud de onda de la luz proveniente desde un cuerpo que genera un campo gravitacional intenso

aumenta. Este resultado fue confirmado, definitivamente, en los experimentos que realizaron entre 1959 y 1965 Robert Pound, Glen Rebka Jr. y Joseph Snider [18].

Otra predicción de la Teoría General de la Relatividad son las ondas gravitacionales, también llamadas ondas de Einstein o de Einstein Rosen. Este fenómeno no ha sido, a pesar de los enormes esfuerzos que se están realizando, confirmado en forma directa. Sin embargo, existe una confirmación indirecta a través de las mediciones de la reducción del período orbital del pulsar binario PSR 1913+16. Este pulsar fue descubierto en 1974 por Russel A. Hulse y Joseph H. Taylor, Jr. y resuelto en 1982 (ver, por ejemplo [19]) realizando el análisis suponiendo que el cambio de período observado es debido a la emisión de ondas de gravedad. El excelente acuerdo entre los datos observacionales y las predicciones de la Teoría General de la Relatividad no sólo le valieron a ambos el Premio Nobel de Física en el año 1993, sino que aportaron la primera evidencia de que las ondas gravitacionales eran una realidad física.

En el marco de esta teoría, el espacio-tiempo deja de ser el escenario donde todos los fenómenos ocurren y adquiere un rol protagónico: ahora el espacio-tiempo es curvado por la presencia de materia y dicha curvatura es la que define, a través de las ecuaciones de campo de Einstein, las trayectorias que las partículas describen sobre el espacio-tiempo.

Repasemos brevemente las definiciones de los objetos y ecuaciones que están involucrados en la Teoría.

En la Teoría General de la Relatividad se describe al espacio-tiempo como una variedad diferenciable de dimensión 4.

El tensor métrico g_{ab} , un tensor de segundo rango simétrico que es utilizado para medir el intervalo ds^2 entre dos eventos separados infinitesimalmente, del mismo modo que en la teoría especial de la relatividad ²:

$$ds^2 = g_{ab}dx^a dx^b. \quad (1.1)$$

Los símbolos de Christoffel Γ_{bc}^a están, en la conexión de Levi-Civita, relacionados con el tensor métrico y sus derivadas del siguiente modo:

$$\Gamma_{bc}^a = \frac{1}{2}g^{ad}(g_{dc,b} + g_{db,c} - g_{bc,d}), \quad (1.2)$$

donde con la coma en los índices estamos denotando derivada parcial respecto a las coordenadas señaladas por el mismo.

El tensor de curvatura de Riemann, que depende del tensor métrico y sus derivadas primeras y segundas, está definido del siguiente modo:

$$R_{bcd}^a = \Gamma_{bd,c}^a - \Gamma_{bc,d}^a + \Gamma_{bd}^e \Gamma_{ec}^a - \Gamma_{bc}^e \Gamma_{ed}^a. \quad (1.3)$$

A partir del tensor de Riemann (1.3), se definen varios objetos de gran importancia, como el tensor de Ricci:

$$R_{ab} = R_{acb}^c = g^{cd}R_{dacb} \quad (1.4)$$

²Estamos utilizando la convención de Einstein de suma sobre índices repetidos donde los índices latinos recorren los valores 0, 1, 2 y 3. En el caso de Teoría Especial de la Relatividad el tensor métrico está dado por:

$$\eta_{ab} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

la curvatura escalar de Ricci:

$$R = g^{ab} R_{ab} \quad (1.5)$$

y a partir de ellos el tensor de Einstein

$$G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R. \quad (1.6)$$

Suele ser conveniente definir el llamado tensor de Weyl, la parte de traza nula del tensor de Riemann. Este tensor es idénticamente nulo en 2 y 3 dimensiones y, en 4 dimensiones, está definido como:

$$C_{abcd} = R_{abcd} - \frac{1}{2}(g_{ac}R_{bd} + g_{bd}R_{ac} - g_{bc}R_{ad} - g_{ad}R_{bc}) + \frac{1}{6}(g_{ac}g_{bd} - g_{bc}g_{ad})R. \quad (1.7)$$

El tensor G_{ab} (1.6) cumple con las llamadas identidades de Bianchi:

$$G^{ab}{}_{;b} = 0, \quad (1.8)$$

y recibe este nombre por aparecer en las ecuaciones de campo de Einstein ³. Con punto y coma en los índices estamos denotando derivada covariante respecto a las coordenadas señaladas por el mismo. Hay que notar que las identidades de Bianchi (1.8) implican que:

$$T^{ab}{}_{;b} = 0, \quad (1.9)$$

de donde se desprende que el tensor de energía impulso se conserva.

Si utilizamos unidades geométricas, $c = 1$ y $G = 1$, las ecuaciones de campo de Einstein se escriben:

$$G^{ab} = 8\pi T^{ab}. \quad (1.10)$$

donde T^{ab} es el tensor de energía impulso.

Estas ecuaciones forman un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden acopladas y no lineales, por lo que su resolución en condiciones generales es una tarea para nada sencilla y hasta llevó a Einstein a suponer que nunca podrían ser resueltas en forma analítica.

Notemos que son 10 ecuaciones para determinar los 10 elementos del tensor métrico g_{ab} , pero ahora recordemos las identidades de Bianchi (1.8), estas restricciones sobre el tensor de Einstein (o el de Ricci) hacen que sólo 6 de las ecuaciones (1.10) sean linealmente independientes.

Si lo pensamos en forma cuidadosa esto es razonable, ya que si una dada métrica es solución a las ecuaciones de Einstein en un dado sistema de coordenadas $\{x^a\}$, debe existir otro sistema de coordenadas, $\{x^{a'}\}$, donde la misma también sea solución. Esto se traduce en que en la métrica hay 4 grados de libertad no físicos, que están representados por las cuatro funciones que realizan la transformación entre los sistemas de coordenadas primadas y las sin primar.

Veremos a continuación una deducción de estas ecuaciones a partir de un principio variacional. Para ello partiremos de la llamada acción de Einstein-Hilbert S_G más un término de materia S_M :

$$S = \frac{1}{16\pi} S_G + S_M = \frac{1}{16\pi} \int \sqrt{-g} R d^4x + S_M, \quad (1.11)$$

donde hemos elegido el factor de normalización apropiado para recuperar el resultado correcto. Ahora estudiaremos el comportamiento de la misma frente a variaciones pequeñas respecto de la

³Para ser más justos con David Hilbert las mismas deberían recibir el nombre de ecuaciones de Einstein-Hilbert, ya que el matemático también obtuvo estas ecuaciones en el año 1915.

métrica g_{ab} . Luego de realizar este procedimiento y utilizando el principio de mínima acción (e imponiendo, además, que las variaciones se anulen en el infinito), llegamos a que se debe cumplir:

$$\frac{1}{16\pi} \left(R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} \right) + \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{ab}} = 0. \quad (1.12)$$

Recordando la definición del tensor de Einstein G_{ab} y definiendo al tensor energía impulso T_{ab} como ⁴:

$$\frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{ab}} = T_{ab} \quad (1.13)$$

obtenemos las ecuaciones de Einstein (1.10).

⁴Esta definición puede parecer arbitraria, pero si se observa con más detalle uno ve que la cantidad es un tensor de tipo (0,2), es simétrico, tiene divergencia nula (es decir, se conserva) y además tiene unidades de densidad de energía. Además de esta forma se obtiene el resultado esperado, es por todo esto que la asociación realizada dista mucho de lo arbitrario.

Capítulo 2

El Colapso Gravitatorio

Caen, caen al fin,
caen los disfraces, caen desnudándose...
“Rock Yugular”
Bellinson - Solari

Cuando en una estrella cesan las reacciones termonucleares se inicia el proceso de colapso gravitatorio. A medida que este proceso avanza otras fuerzas (ya no tenemos presente a la presión de radiación) se vuelven relevantes como por ejemplo la presión de electrones o nucleones degenerados y se oponen a que este colapso continúe. Las teorías de evolución estelar predicen que luego de este colapso debe producirse un objeto compacto. Se deben excluir en estas consideraciones a las supernovas tipo Ia, pues se presume que, dada la violencia del evento, no queda remanente central. Los modelos de objetos compactos, sean de enanas blancas o de estrellas de neutrones llegan, además, a la predicción teórica de que poseen una masa máxima. Esto hace que surja el siguiente interrogante:

¿Qué le sucede a un objeto compacto si supera su masa límite?

En el marco de la Teoría General de la Relatividad la respuesta es que, a partir de cierto estado, nada puede detener el colapso gravitatorio, ver Figura 2.1. A pesar de esto, no existen evidencias concluyentes de que como resultado de este proceso deba surgir un agujero negro.

Lo que puede afirmarse es que, al finalizar este proceso, aparece un objeto totalmente colapsado que genera una singularidad en el espacio-tiempo. A pesar de que no existe una única teoría que unifique a la mecánica cuántica con la gravitación (es decir, una teoría cuántica de la gravitación) la mayor parte de la comunidad científica abocada a este tema cree que, en el marco de esa teoría como resultado del colapso gravitacional continuo no se formará una singularidad. En su lugar se generará una región con condiciones físicas extremas, con densidades del orden de la densidad de Planck $\rho_P = \frac{c^5}{\hbar G^2} \sim 5 \times 10^{93} \frac{g}{cm^3}$. Es bueno recordar en este punto que, como dijimos previamente, la Teoría General de la Relatividad general clásica deja de ser aplicable en la singularidad.

En el marco de la Teoría General de la Relatividad, pueden formarse tanto un agujero negro, como una singularidad desnuda, siendo éste el motivo por el cual no hay aún una respuesta al interrogante planteado previamente.

Analicemos los criterios matemáticos clásicos que se utilizan como indicador de colapso gravitatorio continuo (en el sentido de que este proceso genera una singularidad de algún tipo en el espacio-tiempo). Uno es la existencia de una superficie atrapada, es decir, una superficie cerrada en la cual los rayos de luz salientes están en realidad convergiendo. El otro es el siguiente: supongamos

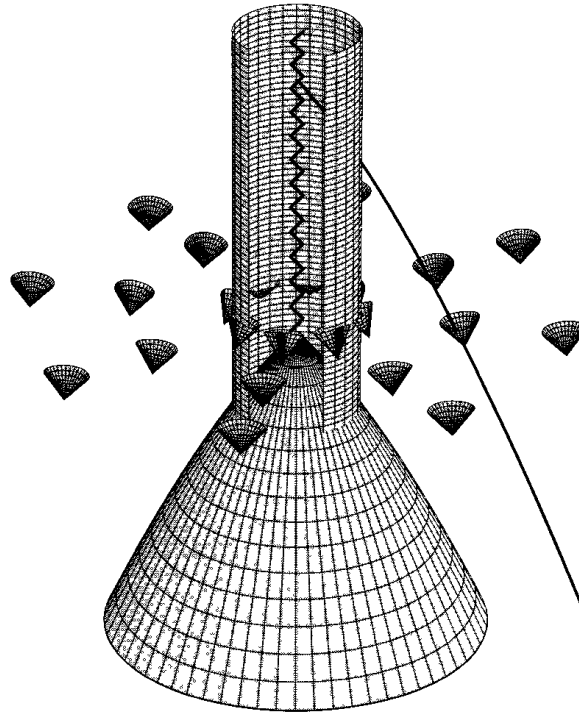


Figura 2.1: Diagrama espacio temporal en 3 dimensiones del colapso gravitatorio esférico de una estrella representado utilizando coordenadas de Eddington-Filkenstein. En el eje vertical se grafica la coordenada temporal, la radial se mide partiendo del eje de simetría y la tercera es la acimutal respecto al eje de simetría. Se observa como a medida que la superficie de la estrella colapsa los radios de la misma van disminuyendo hasta colapsar en la singularidad $r = 0$. El cilindro vertical es el horizonte de eventos ubicado en $r = 2M$ (que en teoría podría no formarse dejando como resultado una singularidad desnuda). Se muestra, también, la línea de mundo de un observador que parte del reposo en el infinito y que cae hacia la singularidad.

una región del espacio-tiempo con una cierta cantidad de materia, en ella ubicamos un punto p y estudiamos su cono de luz futuro C . Tendremos que los infinitos rayos de luz cuyo pasado es p lo atravesarán. Que en cada uno de estos rayos hay un punto en el que su divergencia cambia de signo es la segunda condición para hablar de colapso gravitatorio continuo. La razón es, sin entrar en muchos detalles, que la densidad de energía que está atravesando C enfoca cada uno de los rayos de luz que atraviesan C . De este modo cada elemento de superficie de la intersección del cono de luz C con el borde del futuro cronológico de p comienza a decrecer, sin importar de qué elemento de área estemos hablando, con el pasar del tiempo. Cualesquiera de estas situaciones, junto con suposiciones físicamente razonables, como la hipótesis de que la energía es una cantidad definida positiva y la inexistencia de curvas tipo tiempo cerradas, etc. llevan a la formación de una singularidad en el espacio-tiempo. Los famosos teoremas de Robert Geroch, Stephen Hawking y Roger Penrose formulan esto de modo matemáticamente correcto, pero nada dicen acerca de si las mismas deben o no estar “protegidas” por una superficie que las “desconecte” del resto del universo.

Es un error común creer que si alguno de los criterios mencionados previamente se cumplen (por ejemplo si se forma una superficie atrapada) se debe formar un agujero negro y que, en caso

contrario, el resultado debe ser una singularidad desnuda; ninguno de estos razonamientos es válido.

2.1. La Conjetura de Censura Cósmica

Vimos que las singularidades aparecen naturalmente en el marco de la Teoría General de la Relatividad pero que no se sabe nada de lo referente a si las mismas están o no “cubiertas”. Estudiando la solución de Schwarzschild vemos que cualquier cuerpo esféricamente simétrico que cumpla con la siguiente relación entre M , su masa y R , su radio:

$$\frac{R}{M} < 2, \quad (2.1)$$

curva tanto al espacio-tiempo que ninguna partícula (tenga o no masa en reposo) que atraviese la superficie ubicada en $r = 2M$ puede escapar de su atracción gravitatoria. Dicha superficie se denomina horizonte de eventos y es, como mencionamos previamente, una característica fundamental de cualquier agujero negro pues éstas actúan como una membrana permeable en una sola dirección impidiendo así la “salida” de información desde el mismo.

La Conjetura de Censura Cósmica de Penrose (CCC) afirma que el colapso gravitatorio de una estrella no puede dar como resultado una singularidad desnuda (salvo para configuraciones iniciales extremadamente particulares que uno no espera se den en el marco de los procesos astrofísicos que ocurren en el Universo). Esto es, existe en la naturaleza algún principio fundamental por encima de la Teoría General de la Relatividad que impide que estas soluciones matemáticamente válidas ocurran en el universo, algo similar, si se quiere, a lo que ocurre en la teoría de la electrodinámica clásica con las soluciones avanzadas de ondas electromagnéticas.

Es relativamente sencillo imaginar, en centros galácticos por ejemplo, regiones donde la concentración de masa sea tal que se den las condiciones necesarias para que el proceso de colapso gravitatorio no pueda ser detenido por ninguna otra fuerza. Sin embargo, esto no nos permite inferir que, como resultado final de este proceso, se genere un agujero negro; para poder aseverarlo, hace falta realizar una suposición crucial: la CCC, por alguna razón, es válida.

Daremos, aunque sin entrar en excesivos tecnicismos, una formulación matemática de la CCC. Para ello necesitaremos definir ciertos conceptos, además de utilizar algunas definiciones dadas en el Apéndice A. Comencemos diciendo que si p es un punto del espacio-tiempo denotaremos con $I^+(p)$ ($I^-(p)$) al futuro (pasado) cronológico de dicho punto. Además, notaremos ∂A al borde del conjunto A .

Mencionamos que la CCC previene la formación de singularidades desnudas, en el sentido de que las mismas resulten invisibles para observadores ubicados en el infinito. El borde de esta región del espacio-tiempo constituye lo que se denomina, un horizonte de eventos absoluto. Fuera de esta región están todos los eventos que pueden emitir señales que alcancen el infinito. La CCC prohíbe la existencia de singularidades en esta región. Lo que hemos descrito es la imagen clásica de un agujero negro.

Ahora formularemos la CCC en forma matemáticamente más rigurosa. Para ello hablaremos de los observadores ubicados en \mathcal{J}^+ , así, el horizonte de eventos absoluto queda definido por el borde del pasado de \mathcal{J}^+ , es decir $\partial I^-(\mathcal{J}^+)$.

Sin embargo hay ocasiones en las que esta forma de expresar la CCC no es lo suficientemente apropiada, ya que podría pensarse en un observador cercano al objeto que colapsa quien podría ser testigo de la formación de una singularidad desnuda; de este modo, la singularidad sería desnuda aunque desde un punto de vista local.

Eliminar la falta de predictibilidad que genera la formación de una singularidad desnuda es uno de los principales objetivos de la CCC.

Una forma más fuerte de esta conjetura, que no dependa de los observadores ubicados en \mathcal{J}^+ , ha sido formulada con la misma precisión matemática, pero no entraremos en esos detalles. Con la versión fuerte de la CCC, una singularidad desnuda es descrita por una singularidad que yace en el futuro de algún punto del espacio-tiempo, pero que además puede ser “vista” por un observador particular. De este modo se evita que el censor cósmico “elimine” la singularidad primordial del Big Bang; es decir, el Big Bang no cuenta como una singularidad desnuda ya que no está en el futuro de ningún punto del espacio-tiempo.

Es bueno aclarar que, aun en una Teoría Cuántica de la Gravedad, donde las singularidades serían eliminadas, esta conjetura (reformulada como fuese necesario) seguiría teniendo gran importancia astrofísica, por dos razones:

- No es de esperar que una Teoría Cuántica de la Gravedad haga aparecer un horizonte de eventos donde no lo había clásicamente.
- La física en el espacio-tiempo cercano a una singularidad desnuda (una región con una densidad similar a la de Planck) sería radicalmente diferente a la que ocurre en un agujero negro.

Una consecuencia de la CCC es que, en el marco de la Teoría General de la Relatividad, un agujero negro “nunca se achica”. La forma en la que se mide el tamaño de un agujero negro es utilizando el área de su horizonte de eventos, es decir el área de la intersección del horizonte de eventos con una superficie espacial. Este resultado es conocido como el Teorema del Área de Hawking, que dice:

“Suponiendo que se cumple la CCC y la positividad de la energía, el área del horizonte de eventos de un objeto ubicado en un espacio-tiempo asintóticamente plano es una función que no decrece.”

Hay que remarcar que esto significa, para el caso de un agujero negro de Schwarzschild (en el que el área depende únicamente de la masa M) que su masa no puede decrecer. Para el caso del agujero negro de Kerr esto deja de ser válido, ya que en este caso el área del mismo depende tanto de la masa M , como del parámetro de rotación a . Es por esto que se puede extraer energía de un agujero negro rotante si se hace disminuir su spin.

Capítulo 3

La Solución de Kerr

Now there's a look in your eyes,
like black holes in the sky.
"Shine on You Crazy Diamond"
Pink Floyd

3.1. Características Generales

La solución de Kerr representa la única solución de vacío que la Teoría General de la Relatividad provee para describir a un agujero negro rotante estacionario y sin carga eléctrica. Esta solución es un caso particular de una solución a las ecuaciones de Einstein-Maxwell: la llamada métrica de Kerr-Newman que describe a un agujero negro rotante y con carga eléctrica ¹.

A pesar de esto, los agujeros de Kerr tienen mayor relevancia astrofísica ya que es de esperar que, por acreción de material, los agujeros negros cargados tiendan a neutralizarse rápidamente.

A los efectos de visualizar algunas características de la estructura del espacio-tiempo, resultan muy útiles las coordenadas de Boyer-Lindquist, en las que el elemento de línea para la métrica de Kerr se vuelve:

$$ds^2 = \frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} dt^2 + 2a \sin^2 \theta \frac{r^2 + a^2 - \Delta}{\Sigma} dt d\phi - \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 - \Sigma d\theta^2 - \left(\frac{(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} \right) \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (3.1)$$

donde:

$$\begin{aligned} \Delta &= r^2 - 2Mr + a^2 \\ \Sigma &= r^2 + a^2 \cos^2 \theta. \end{aligned}$$

Esta métrica depende sólo de dos constantes de integración: M , asociada con la masa geométrica y a , relacionada con la velocidad angular de rotación. Para llegar a esta conclusión se debe analizar el comportamiento asintótico de la métrica. Así, para $r \rightarrow \infty$ la métrica toma la forma:

¹Notar que estamos frente a uno de los muy pocos casos en el que una teoría física describe en forma exacta a un objeto macroscópico.

$$ds^2 \sim \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \frac{4Ma \sin^2 \theta}{r} dt d\phi - [1 + \mathcal{O}(r^{-1})][dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2], \quad (3.2)$$

comparando esta expresión con la que se obtiene en la aproximación de campo débil de un objeto que rota, se concluye que la interpretación física de los parámetros M y a es la que dimos al principio de este párrafo.

En el caso extemo y subextremo, $a^2 \leq M^2$, la solución de Kerr representa lo que conocemos como un agujero negro rotante y en el caso super extremo $a^2 > M^2$, una singularidad desnuda.

Puede verse que cuando se estudia el límite $a \rightarrow 0$ se recupera la métrica de Schwarzschild. Además, dejando a fijo, si se estudia el límite $M \rightarrow 0$ se recupera el espacio-tiempo de Minkowski pero en coordenadas elipsoidales.

Esta métrica, al igual que las que describen otro tipo de agujeros negros, tienen singularidades de dos clases con características radicalmente diferentes:

- Existen singularidades en las soluciones de la ecuación $\Delta = 0$, a saber:

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2}, \quad (3.3)$$

éstas reciben el nombre de singularidades coordenadas ya que son, simplemente, un problema en las coordenadas elegidas y pueden eliminarse seleccionando otras.

- Existe, además, una tercera singularidad, ubicada en la solución de la ecuación $\Sigma = 0$ que recibe el nombre de singularidad de curvatura y se ubica en:

$$r = 0 \quad , \quad \theta = \frac{\pi}{2}. \quad (3.4)$$

Ahora pasemos a describirlas con algo más de detalle.

Las singularidades coordenadas reciben nombres distintos y poseen características interesantes. La que está ubicada en r_+ es el horizonte de eventos del agujero negro de Kerr, la ubicada en r_- recibe el nombre de horizonte de Cauchy (ver Apéndice B).

La tercera singularidad es independiente de la elección de coordenadas y su relevancia física es mucho mayor que las singularidades coordenadas, ya que son regiones en las que las ecuaciones de Einstein dejan de ser aplicables y donde el escalar de curvatura diverge.

La geometría de esta singularidad se vuelve más evidente en las coordenadas de Kerr-Schild (ver Apéndice C), pues la misma ocurre en:

$$z = 0 \quad , \quad x^2 + y^2 = a^2 \quad (3.5)$$

es decir, en un anillo. De ahí que se denomine a la singularidad de curvatura de la métrica de Kerr, singularidad de anillo.

Otra forma de notar diferencias entre los diferentes tipos de singularidades es estudiando el comportamiento del invariante de Riemann $R^{abcd}R_{abcd}$, que diverge en la singularidad de curvatura pero no en las singularidades coordenadas. Calculando explícitamente uno obtiene que el invariante de Riemann tiene la siguiente forma:

$$R^{abcd}R_{abcd} = \frac{48M^2(r^2 - a^2 \cos^2 \theta)(\Sigma^2 - 16a^2r^2 \cos^2 \theta)}{\Sigma^6}, \quad (3.6)$$

de donde queda clara nuestra aseveración previa.

Una de las características de las métricas que poseen al menos una singularidad, es que éstas pueden llegar a presentar ciertos dominios en los que se viole el principio de causalidad, dada la aparición de curvas tipo tiempo cerradas ². Esto permitiría que el futuro de un evento afecte su pasado.

Analicemos el caso para la métrica de Kerr, extendida de modo que sean posibles valores negativos de la coordenada r .

Veremos que en el dominio donde $g_{\phi\phi} > 0$ y donde además ϕ es una coordenada tipo tiempo periódica, el principio de causalidad puede ser violado. Para ello veamos la región donde ϕ es tipo tiempo, cuyo borde está dado por la ecuación:

$$\Upsilon^2 = (r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta = (r^2 + a^2)(r^2 + a^2 \cos^2 \theta) + 2Ma^2 r \sin^2 \theta = 0. \quad (3.7)$$

Hay que notar que esta ecuación no tiene ninguna solución si r no admite valores negativos. Hagamos, entonces, el siguiente cambio de variables: $\zeta = -r$. Ahora la ecuación anterior puede reescribirse del siguiente modo:

$$\frac{(\zeta^2 + a^2)^2}{a^2(\zeta^2 + a^2 + 2M\zeta)} = \sin^2 \theta \quad (3.8)$$

cosa que muestra que se debe cumplir, necesariamente,

$$\frac{(\zeta^2 + a^2)^2}{a^2(\zeta^2 + a^2 + 2M\zeta)} \leq 1, \quad (3.9)$$

por lo que ζ queda acotado al intervalo:

$$0 \leq \zeta \leq \zeta_{max} \quad (3.10)$$

donde ζ_{max} es la única solución positiva de:

$$\zeta^3 + a^2\zeta - 2Ma^2 = 0 \quad (3.11)$$

y viene dada por:

$$\zeta_{max} = \frac{2a}{\sqrt{3}} \sinh \left(\frac{1}{3} \sinh^{-1} \left[\frac{3M}{a} \sqrt{3} \right] \right). \quad (3.12)$$

Del mismo modo aparece una restricción para la coordenada θ , ya que:

$$\sin^2 \theta_{min} \leq \sin^2 \theta \leq 1, \quad (3.13)$$

donde:

$$\sin^2 \theta_{min} = \min \left\{ \frac{(\zeta^2 + a^2)^2}{a^2(\zeta^2 + a^2 + 2M\zeta)} \right\} \quad (3.14)$$

que se satisface en $\zeta = \eta M$, donde η es la única solución positiva de la ecuación:

²Aunque esta no es una condición necesaria (un ejemplo tradicional es la métrica de Minkowsky $ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$ donde la variable t es periódica).

$$(\eta + 1)^3 - \left(3 - \frac{a^2}{M^2}\right)(\eta + 1) + 2\left(1 - \frac{a^2}{M^2}\right) = 0, \quad (3.15)$$

dada por:

$$\eta = \frac{\Xi}{3} - \frac{3\left(\frac{a^2}{3M^2} - 1\right)}{\Xi} - 1, \quad (3.16)$$

donde:

$$\Xi = \left(27\frac{a^2}{M^2} - 27 + 3\sqrt{3\left(\frac{a^2}{M^2}\right)^3 + 54\left(\frac{a^2}{M^2}\right)^2 - 81\frac{a^2}{M^2}}\right)^{\frac{1}{3}}. \quad (3.17)$$

Así, vemos que la región en la que puede violarse el principio de causalidad restringe los valores que pueden tomar $-r$ y θ .

A pesar de esto, en el caso $a^2 \leq M^2$ esta región se encuentra incomunicada con el espacio exterior, cosa que permite una mirada despreocupada a este problema. Esto no puede hacerse en el caso $a^2 > M^2$ ya que el horizonte de eventos desaparece, haciendo que esta región esté comunicada con el resto del espacio-tiempo.

3.2. La Métrica de Kerr en el Formalismo de Newman-Penrose

La métrica de Kerr posee una familia de geodésicas nulas dadas por los siguientes vectores tangentes:

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{r^2 + a^2}{\Delta}E, \quad \frac{dr}{d\tau} = \pm E, \quad \frac{d\theta}{d\tau} = 0, \quad \frac{d\phi}{d\tau} = \frac{a}{\Delta}E, \quad (3.18)$$

donde E es una constante. Definimos, entonces, los vectores nulos \mathbf{l} y \mathbf{n} en función de estas geodésicas y agregamos el vector nulo complejo \mathbf{m} y su complejo conjugado, que son elegidos para que resulten ortogonales a los anteriores. Así, obtenemos la base contravariante:

$$l^i = \frac{1}{\Delta}(r^2 + a^2, \Delta, 0, 1), \quad (3.19)$$

$$n^i = \frac{1}{2\Sigma}(r^2 + a^2, -\Delta, 0, a), \quad (3.20)$$

$$m^i = \frac{1}{\sqrt{2}(r + ia \cos \theta)}(ia \sin \theta, 0, 1, \operatorname{cosec} \theta). \quad (3.21)$$

La forma covariante de los mismos es:

$$l_i = \frac{1}{\Delta}(\Delta, -\Sigma, 0, -a\Delta \sin^2 \theta), \quad (3.22)$$

$$n_i = \frac{1}{2\Sigma}(\Delta, \Sigma, 0, -a\Delta \sin^2 \theta), \quad (3.23)$$

$$m_i = \frac{1}{\sqrt{2}(r + ia \cos \theta)}(ia \sin \theta, 0, -\Sigma, -i(r^2 + a^2) \sin \theta). \quad (3.24)$$

Puede verse que estos vectores cumplen las condiciones de normalización requeridas por la versión original del trabajo de Newman-Penrose [20]:

$$\mathbf{l} \cdot \mathbf{n} = 1 \quad , \quad \mathbf{m} \cdot \bar{\mathbf{m}} = -1. \quad (3.25)$$

Los coeficientes de spin son:

$$\begin{aligned} \kappa &= \sigma = \lambda = \nu = \epsilon = 0, \\ \rho &= -\frac{1}{r - ia \cos \theta}; \quad \beta = \frac{\cot \theta}{2\sqrt{2}(r + ia \cos \theta)}; \quad \pi = \frac{ia \operatorname{sen} \theta}{\sqrt{2}(r - ia \cos \theta)^2} \\ \tau &= -\frac{ia \operatorname{sen} \theta}{\sqrt{2}\Sigma}; \quad \mu = -\frac{\Delta}{2\Sigma(r - ia \cos \theta)}; \quad \gamma = \mu + \frac{r - M}{2\Sigma}; \quad \alpha = \pi - \bar{\beta}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Puede mostrarse que todos los escalares de Weyl, salvo Ψ_2 se anulan, veamos la expresión para el no nulo:

$$\begin{aligned} \Psi_2 &= R_{abcd}l^a n^b m^c \bar{m}^d \\ &= -\frac{Mr}{(r + ia \cos \theta)^6}(r^2 - 3a^2 \cos^2 \theta) - i\frac{aM \cos \theta}{(r + ia \cos \theta)^6}(2r^2 - a^2 \cos^2 \theta) \\ &= -\frac{M}{(r - ia \cos \theta)^3}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Habiendo escrito la base de tetradas nulas, los coeficientes de spin y los escalares de Weyl tenemos la descripción completa del espacio-tiempo de Kerr en el formalismo de Newman-Penrose.

Capítulo 4

Perturbaciones Gravitacionales a la Métrica de Kerr

Un árbol perfila la luz del crepúsculo
Un equilibrio
Audaz lo mantiene en su fuste
La luz lo dibuja con sus pausas
Un lado definido por las luces, otro en sombras
La luz
La sombra
Y todo en equilibrio
Por ahora.
“Precario Equilibrio”
Héctor F. Ranea Sandoval

4.1. Teoría de Perturbaciones en Relatividad General

Como vimos antes, obtener soluciones exactas en problemas de Relatividad General no es sencillo, entre otras cosas porque las ecuaciones que uno debe resolver son ecuaciones diferenciales no lineales. Por este motivo, el estudio de perturbaciones es, como en cualquier otra rama de las ciencias exactas, de gran importancia.

Una forma clásica para obtener ecuaciones linealizadas para una perturbación gravitacional es la siguiente: se escriben las ecuaciones de Einstein para una métrica g_{ab} y se la separa de esta forma:

$$g_{ab} = g_{ab}^A + h_{ab}^B, \quad (4.1)$$

donde con los superíndices A y B estamos denotando la métrica de fondo que está siendo perturbada y a la perturbación respectivamente. De este modo podemos expandir las ecuaciones de campo, manteniendo únicamente los términos hasta primer orden en h_{ab}^B . Así se obtiene un sistema de ecuaciones lineales que gobiernan, junto con las condiciones de contorno del problema particular a la perturbación.

Utilizando este formalismo se lograron importantes resultados:

- Para el caso en que se perturba la métrica del espacio-tiempo plano, la solución de ondas gravitacionales;

- Tullio Regge, John Wheeler en el año 1957 y Frank Zerilli en 1970 obtuvieron las ecuaciones para perturbar gravitacionalmente a un agujero negro esféricamente simétrico (Schwarzschild y Reissner-Nordström);

Sin embargo nadie logró encontrar, a partir de manipular las ecuaciones que satisfacen h^{ab} , las ecuaciones separables que rigen a las perturbaciones a la métrica de un objeto con momento angular, es decir a la métrica de Kerr ¹. Para realizar esta tarea hizo falta la utilización de otro formalismo, el de las tetradas. Daremos los conceptos relacionados a este método.

La idea general del método es similar a la descrita previamente. El conjunto completo de ecuaciones de Newman-Penrose [20] forman un sistema acoplado de ecuaciones diferenciales de primer orden donde están involucrados: la tetrada, los coeficientes de spin, el tensor de Weyl, el tensor de Ricci y al escalar de curvatura. Para hacer teoría de perturbaciones en este formalismo se especifica la geometría perturbada escribiendo a la tetrada nula del siguiente modo: $\mathbf{l} = \mathbf{l}^A + \mathbf{l}^B$, $\mathbf{n} = \mathbf{n}^A + \mathbf{n}^B$, etc. Así todas las cantidades involucradas en el formalismo de Newman-Penrose se pueden escribir de esta forma, es decir, $\psi_2 = \psi_2^A + \psi_2^B$, etc. Las ecuaciones para la perturbación se obtienen utilizando las ecuaciones de Newman-Penrose y manteniendo todos los términos con superíndice B a primer orden.

Utilizando este formalismo Richard H. Price en el año 1972 y William H. Press (generalizando el resultado) al año siguiente obtuvieron las ecuaciones para las perturbaciones para el caso de una métrica de Schwarzschild.

4.2. Perturbaciones a la Métrica de Kerr

Como vimos en el Capítulo 3, la métrica de Kerr es estacionaria y axialmente simétrica, esto hace que uno pueda expresar una perturbación general a la misma como una superposición de ondas con diferentes frecuencias ω y diferentes períodos ($2m\pi$, $m = 0, 1, 2, \dots$) en la variable ϕ . Así la perturbación tendrá modos con dependencia en el tiempo y en la variable ϕ de la forma:

$$e^{i(\omega t + m\phi)}, \tag{4.2}$$

pero esto mismo no tendría por qué ocurrir para las otras dos coordenadas; sin embargo, tal separación es posible, como fue descubierto por Teukolsky [21] a principios de la década de 1970.

El estudio general y sistemático de las perturbaciones lineales a la métrica de Kerr es, en gran medida, posible gracias a este descubrimiento. Utilizando el formalismo de Newman-Penrose pueden escribirse ecuaciones diferenciales parciales que describen la evolución de dos componentes linealizadas del tensor de Weyl Φ_s a partir de las cuales puede reconstruirse (aplicando un operador diferencial de segundo grado y un procedimiento rutinario aunque un tanto tedioso) la perturbación h_{ab} que es solución, para una métrica de Kerr de fondo, de las ecuaciones linealizadas de Einstein.

Éstas describen perturbaciones a la métrica de Kerr por campos escalares, electromagnéticos y gravitacionales. Un factor clave para la aplicabilidad de las mismas a problemas concretos es que resultan separables si se eligen las coordenadas de Boyer-Lindquist y la tetrada nula de Kinnersley.

Entre los resultados obtenidos gracias a estas ecuaciones no podemos dejar de mencionar:

- La demostración dada por Bernard F. Whiting de que ninguna solución a las ecuaciones de Teukolsky (ver más adelante) con soporte compacto en la región externa de un agujero

¹Hay que notar que reemplazar la simetría esférica por la axial hace que la separación en armónicos esféricos deje de ser posible.

negro de Kerr que esté bien comportada en el infinito y en el horizonte externo puede crecer exponencialmente con el tiempo ² [22].

- El estudio de colisiones de agujeros negros en el denominado “límite cercano” [23].

4.3. Ecuaciones de Teukolsky

Las perturbaciones al espacio-tiempo de Kerr pueden ser descriptas utilizando un campo $\Phi_s(t, r, \theta, \phi)$. Si uno lo desarrolla del siguiente modo:

$$\Phi_s(t, r, \theta, \phi) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \left(\sum_{l,m} e^{i\omega t} {}_sS_l^m(\theta) e^{im\phi} R_{slm\omega}(r) \right), \quad (4.3)$$

donde s denota el tipo de perturbación que se está estudiando (escalar ($s = 0$), electromagnética ($s = \pm 1$), gravitacional ($s = \pm 2$)) puede mostrarse que las funciones ${}_sS_l^m(\theta)$ y $R_{slm\omega}(r)$ satisfacen las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin\theta \frac{d{}_sS_l^m}{d\theta} \right) + \left(a^2\omega^2 \cos^2\theta - 2a\omega s \cos\theta - \frac{(m + s \cos\theta)^2}{\sin^2\theta} + {}_sE_l^m - s^2 \right) {}_sS_l^m = 0, \quad (4.4)$$

$$\Delta \frac{d^2 R_{slm\omega}}{dr^2} + (s+1) \frac{d\Delta}{dr} \frac{dR_{slm\omega}}{dr} + \left\{ \frac{K^2 - 2is(r-M)K}{\Delta} + 4ir\omega s - [{}_sE_l^m - 2am\omega + a^2\omega^2 - s(s+1)] \right\} R_{slm\omega} = 0. \quad (4.5)$$

Éstas son las llamadas ecuaciones de Teukolsky (angular y radial respectivamente) libres de fuentes.

A pesar del hecho (extraño a primera vista) de que las ecuaciones que describen la perturbación resulten separables, tanto la ecuación angular (4.4) como la radial (4.5) tienen 2 puntos singulares regulares y 1 punto singular irregular. Por este motivo las soluciones no pueden ser escritas en función de una única función especial. A pesar de esto, para el caso de agujero negro existen soluciones analíticas que pueden escribirse como series de funciones especiales ([24], [25], [26]).

4.3.1. Estudio de la Ecuación Angular

Características Generales

A pesar de que la ecuación radial (4.5) es la que contiene la física interesante del problema, debido al (sutil) acoplamiento que existe entre ambas ecuaciones, su resolución está atada a la determinación de los autovalores ${}_sE_l^m(a\omega)$. Para esto nos será útil la ecuación angular (4.4).

Esta ecuación ha sido discutida, ampliamente, en la literatura desde hace unos 30 años y tiene como solución, regular en la esfera a los llamados “Spin Weighted Spheroidal Harmonics” (SWSH por sus siglas en inglés).

²Es importante remarcar que este resultado no da una demostración definitiva a la estabilidad de la región externa de métrica de Kerr en el caso subextremo (cuando la misma representa a un agujero negro). Determinar la estabilidad de dicha métrica es a la fecha un tema abierto de investigación.

Vamos a escribir la ecuación (4.4) de un modo que luego nos resultará de gran utilidad, para ello realizamos el cambio de variables $\sin \theta = x$, así la misma queda:

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{d {}_s S_l^m(x)}{dx} \right] - \left(k^2 x^2 + \frac{1}{1-x^2} \right) {}_s S_l^m(x) + i4kx {}_s S_l^m(x) = - {}_s E_l^m {}_s S_l^m(x). \quad (4.6)$$

Para los autovalores ${}_s E_l^m(a\omega)$ pueden encontrarse, en varios trabajos científicos (ver, por ejemplo, [27]), desarrollos en serie de Taylor alrededor de $\omega = 0$ hasta orden $(a\omega)^6$ para cualquier ω complejo.

El método para obtener estos desarrollos fue presentado en [28]. Pasamos a describir someramente el mismo.

Examinando cuidadosamente el comportamiento de los puntos singulares de la ecuación (4.6) vemos que la solución ${}_s S_l^m(x)$ (bien comportada en los puntos singulares regulares $x = \pm 1$) puede escribirse en la forma:

$${}_s S_l^m(x) = \left[\frac{1}{2}(1-x) \right]^{\frac{\alpha}{2}} \left[\frac{1}{2}(1+x) \right]^{\frac{\beta}{2}} e^{a\omega x} {}_s U_l^m(x), \quad (4.7)$$

donde $\alpha = |m+s|$ y $\beta = |m-s|$ y ${}_s U_l^m(x)$ es una función a determinar.

Entonces vemos que si se sustituye la expresión (4.7) en la (4.6) la ecuación diferencial para ${}_s U_l^m(x)$ es muy similar a la que define a los polinomios de Jacobi $P_r(x)$, esto invita a escribir a esta función como una serie de la forma:

$${}_s U_l^m(x) = \sum_r A_r P_r(x). \quad (4.8)$$

Si se reemplaza el desarrollo (4.8) en la ecuación diferencial para ${}_s U_l^m(x)$ se obtiene una relación de recurrencia para los coeficientes A_r .

Como fue demostrado en [28] la serie (4.8) converge para valores apropiados de ${}_s E_l^m(a\omega)$. Para encontrar dichos valores resulta conveniente reescribir la relación de recurrencia obtenida para los A_r en forma de una fracción continua. Luego se iguala esa expresión a una fracción continua infinita y convergente (cosa que asegura que (4.8) converge), obteniendo así una ecuación trascendente a partir de la cual se pueden determinar los valores de ${}_s E_l^m(a\omega)$. Finalmente, se escribe al autovalor como una serie de potencias de $(a\omega)$ de la forma:

$${}_s E_l^m(a\omega) = \sum_n {}_s f_n^{lm}(a\omega)^n, \quad (4.9)$$

se expande a la fracción continua en potencias de $(a\omega)$ y se resuelven en forma algebraica las ecuaciones que determinan los coeficientes ${}_s f_n^{lm}$ hasta el grado que se desea.

Nuestro Caso

En este estudio propondremos una perturbación con simetría axial, es decir con $m = 0$ y definiremos $a\omega = ik$ eligiendo $s = -2$ porque especializaremos la búsqueda únicamente a perturbaciones gravitacionales. Llamaremos simplemente S a la autofunción angular de Teukolsky y E a su autovalor para simplificar la notación.

Una característica muy importante para nuestros intereses, es el hecho de que en el caso de la perturbación gravitacional que estamos analizando y para valores de ω imaginarios puros con parte imaginaria grande, cuando $k \rightarrow \infty$ el autovalor se comporta del siguiente modo [29]³:

$$E_l(a\omega)|_{a\omega=ik} = (2l - 3)k + \mathcal{O}(k^0), \quad (4.11)$$

este tipo de dependencia había sido encontrada previamente en [30].

Con un método numérico independiente, hemos reproducido con gran nivel precisión los resultados del desarrollo en serie y el comportamiento asintótico (que resulta ser lineal) del autovalor.

El método utilizado consiste en lo siguiente:

Las simetrías que presenta la ecuación (4.6) implican que, para E real, si $S(x)$ es una solución también lo serán⁴:

$$\overline{S(-x)} \quad \text{y} \quad S_{\pm}(x) = S(x) \pm \overline{S(-x)}. \quad (4.12)$$

Teniendo esto en mente podemos restringir la búsqueda de soluciones entre las que tengan parte real e imaginaria con paridad opuesta, cosa que nos permite (salvo un posible factor multiplicativo i) suponer que:

$$S(x) = \overline{S(-x)} \quad (4.13)$$

es decir que $S(x)$ tiene parte real par y parte imaginaria impar.

Es claro que los puntos $x = \pm 1$ son singularidades regulares de la ecuación (4.6). Por este motivo existe una solución regular de Frobenius alrededor de $x = -1$ cuya forma es:

$$\mathcal{F}_{(-1)} = \sum_{n \geq 1} c_n(E, k)(x + 1)^n. \quad (4.14)$$

Además de esta solución existe otra, independiente, que resulta divergente como $\ln(x + 1)$ en $x = -1$, por lo que no la tendremos en cuenta.

La serie (4.14) converge siempre que $|x + 1| < 2$ y se anula en $x = 1$ si $E = E_l(a\omega)|_{a\omega=ik}$ para algún valor de l . En este punto debemos remarcar que, salvo un factor multiplicativo, la serie (4.14) debe coincidir con la solución de Frobenius alrededor de $x = 1$ de la ecuación (4.6). Como hemos mencionado, un SWSH es una solución de la ecuación angular de Teukolsky (4.4) que es regular en el intervalo $x \in [-1, 1]$. Ahora observemos que, si imponemos sobre $S(x)$ la condición (4.13), la regularidad en $x = -1$ implica también la regularidad en $x = 1$ y que, además, como $S(x)$ cumple una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden, la condición (4.13) es equivalente a la condición:

$$\Im(S(0)) = \Re(S'(0)), \quad (4.15)$$

y que, por lo tanto, si elegimos

$$S(x) = \overline{\mathcal{F}_{(-1)}(0)} \mathcal{F}_{(-1)}(x) = \sum_{n, m \geq 1} c_n(E, k) \overline{c_m(E, k)} (x + 1)^n, \quad (4.16)$$

³Se ha elegido el índice l para enumerar a los SWSH de modo que los mismos se reduzcan al caso esférico cuando $a\omega = 0$. En este caso se cumple que:

$$E_l(a\omega)|_{a\omega=0} = l(l + 1). \quad (4.10)$$

Hay que notar que los modos de relevancia son los que tienen $l = 2, 3, 4, \dots$

⁴Utilizaremos \overline{A} para denotar al complejo conjugado de la cantidad A .

se cumple idénticamente que $\Im(S(0)) = 0$ y, por la condición (4.15), tenemos que las soluciones de la ecuación:

$$0 = \Re(S'(0)) = \frac{1}{2} \sum_{n,m \geq 1} n(c_n(E, k) \overline{c_m(E, k)} + \overline{c_n(E, k)} c_m(E, k)), \quad (4.17)$$

serán iguales a $E_l(a\omega)|_{a\omega=ik}$ para algún valor de l , y además $S(x)$ será regular en el intervalo $x \in [-1, 1]$ para esos valores de E .

Aplicamos este procedimiento reemplazando $\mathcal{F}_{(-1)}(x)$ en (4.17) por la serie regular de Frobenius alrededor de $x = -1$ hasta orden $(x + 1)^{40}$ y, resolviendo en forma numérica la ecuación (4.17) para el menor autovalor E (esto es, cuando $l = 2$) para diferentes valores de k . El resultado de este procedimiento puede verse superpuesto con el desarrollo (4.9) y el comportamiento asintótico (4.11) en la Figura 4.1.

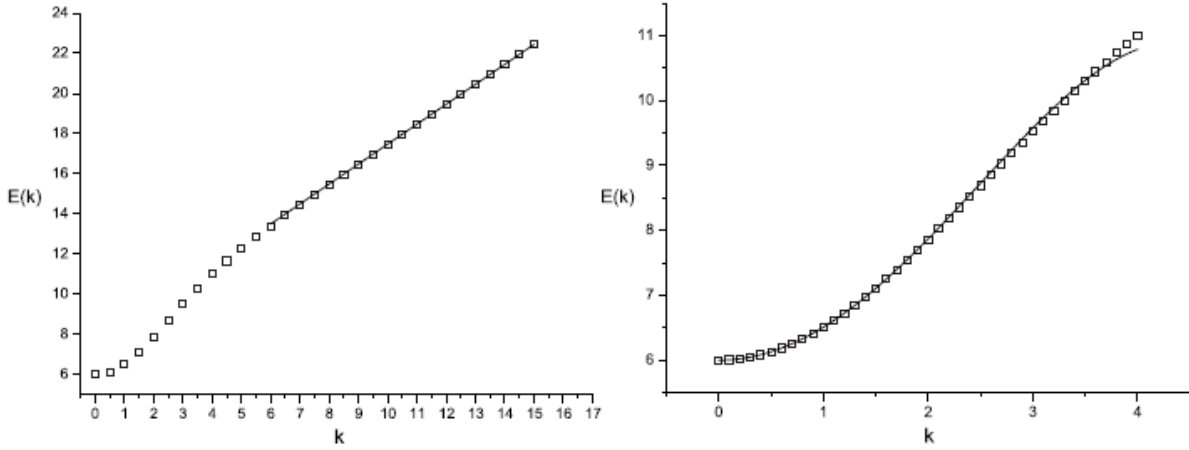


Figura 4.1: Izquierda: Autovalor E para 30 valores diferentes de $k \in [0, 15]$ con un ajuste (línea sólida) de mínimos cuadrados en el intervalo $6 \leq k \leq 15$, cuyo resultado es $E = 0,993k + Cte$ mostrando un excelente acuerdo con el comportamiento asintótico (4.11). Derecha: Se muestran en puntos 40 valores de E obtenidos numéricamente con nuestro método para valores $0 < k < 4$ y superpuesto a ellos la aproximación (4.9) hasta orden k^4 .

4.3.2. Estudio de la Ecuación Radial

La ecuación radial tiene mayor importancia física ya que es la que contiene la información relevante de la perturbación y es donde se fijan las condiciones de contorno de la onda gravitacional que perturba a la métrica de fondo.

Notemos que la ecuación (4.5) puede ser escrita como:

$$\Delta \frac{d^2 R}{dr^2} + Q \frac{dR}{dr} + ZR = 0, \quad (4.18)$$

donde denotaremos a la función radial, para simplificar notación, simplemente con R y donde, además:

$$Q = (s+1) \frac{d\Delta}{dr} \quad (4.19)$$

$$Z = \frac{K^2 - 2is(r-M)K}{\Delta} + 4ir\omega s - [E - 2am\omega + a^2\omega^2 - s(s+1)]. \quad (4.20)$$

Podemos llevar a la ecuación (4.18) a una forma que resultará muy apropiada a nuestros propósitos. Para ello introduciremos un factor integrante L , la función $\psi := R/L$ como nueva incógnita y haremos un cambio a la nueva variable radial r^* de modo tal que se cumpla:

$$\frac{dr^*}{dr} := \frac{1}{f}, \quad (4.21)$$

donde f es una función no especificada, pero que debe ser definida positiva. Como resultado obtenemos que la expresión (4.18) queda escrita en la forma:

$$\frac{\Delta L}{f^2} \frac{d^2\psi}{dr^{*2}} + \left(\frac{2\frac{dL}{dr^*}\Delta}{f^2} + \frac{QL}{f} - \frac{\Delta L \frac{df}{dr^*}}{f^3} \right) \frac{d\psi}{dr^*} + \left(\frac{\Delta \frac{d^2L}{dr^{*2}}}{f^2} + \frac{Q\frac{dL}{dr^*}}{f} - \frac{\Delta \frac{dL}{dr^*} \frac{df}{dr^*}}{f^3} + ZL \right) \psi = 0. \quad (4.22)$$

En el próximo capítulo mostraremos que es posible elegir L y f de modo que la ecuación (4.22) se reduzca a la forma de una ecuación de Schrödinger unidimensional.

Capítulo 5

Resultados

Logic will get you from A to B.
Imagination will take you everywhere.
Albert Einstein

5.1. Inestabilidad de la Métrica de Kerr en el Régimen Super extremo

En este caso hay que recordar que Δ es una función estrictamente definida positiva y puede verse que la elección $f = \sqrt{\Delta}$ da como resultado una variable r^* monótonamente creciente con r que viene dada por la siguiente expresión:

$$r^* = \ln \left(\frac{r - M + \sqrt{r^2 - 2Mr + a^2}}{M} \right) \simeq \begin{cases} \ln \left(\frac{2r}{M} \right) & r \rightarrow \infty \\ \ln \left(\frac{a^2 - M^2}{2M|r|} \right) & r \rightarrow -\infty \end{cases} \quad (5.1)$$

además, vemos que la relación anterior puede ser invertida en término de funciones elementales para obtener:

$$r = \frac{Me^{r^*}}{2} + M + \frac{M^2 - a^2}{2Me^{r^*}}. \quad (5.2)$$

Ahora, como siguiente paso vamos a realizar la elección del factor integrante de modo que el coeficiente de $\frac{d\psi}{dr^*}$ se anule, es decir que:

$$\left(\frac{2 \frac{dL}{dr^*} \Delta}{f^2} + \frac{QL}{f} - \frac{\Delta L \frac{df}{dr^*}}{f^3} \right) = 0. \quad (5.3)$$

Si reemplazamos las expresiones para Q y f y realizamos los cambios de variable de r^* a r nuevamente, obtenemos:

$$\frac{dL}{L} = -\frac{2s+1}{4} \frac{d\Delta}{\Delta}, \quad (5.4)$$

de donde se desprende que:

$$L = \Delta^{-\frac{2s+1}{4}}, \quad (5.5)$$

por lo que la ecuación (4.22)¹ adquiere la forma de una ecuación de Schrödinger unidimensional:

$$\mathcal{H}\psi := -\frac{d^2\psi}{dr^{*2}} + V\psi = -E\psi \quad (5.6)$$

donde el potencial V viene dado por:

$$V := -\left(\frac{\Delta \frac{d^2 L}{dr^2}}{L} + \frac{Q \frac{dL}{dr}}{L} + Z + E\right). \quad (5.7)$$

Debe notarse que el mismo es (recordar la definición de Z dada en (4.20)) independiente de E , siendo esta característica del potencial la principal razón para la elección que hicimos de r^* .

Para el caso particular que estamos estudiando, en el que $s = -2$, $m = 0$ y $\omega = \frac{ik}{a}$, el potencial (5.7) es real y se escribe:

$$V := k^2 V_2 + k V_1 + V_0, \quad (5.8)$$

donde:

$$V_2 = \frac{r^4 + a^2 r^2 + 2a^2 M r}{a^2 (r^2 - 2Mr + a^2)}, \quad (5.9)$$

$$V_1 = 4 \left(\frac{-r^3 + 3Mr^2 - a^2 - a^2 M}{a(r^2 - 2Mr + a^2)} \right), \quad (5.10)$$

$$V_0 = \frac{r^2 - 2Mr + 15M^2 - 14a^2}{4(r^2 - 2Mr + a^2)}. \quad (5.11)$$

Como estamos analizando el caso super extremo, en el que $a > M$, el potencial V es continuo e infinitamente diferenciable en todo el dominio. Además, puede mostrarse que, para cualquier valor positivo de k , el mismo está acotado por debajo. A pesar de esto, hay que tener en cuenta una sutileza: como función de k este mínimo no es una función continua en $k = 0$ y puede mostrarse que:

$$\min\{V(r, k = 0), r \in \mathbb{R}\} = -\frac{7}{2}, \quad (5.12)$$

$$\lim_{k \rightarrow 0^+} \min\{V(r, k), r \in \mathbb{R}\} = -\frac{15}{4}. \quad (5.13)$$

Analicemos con más detalle la ecuación (5.6). Podemos ver que el operador \mathcal{H} definido en ella es autoadjunto en el espacio de Hilbert de las funciones de cuadrado integrable en la variable r^* si definimos el producto interno como:

$$\langle \alpha | \beta \rangle := \int \bar{\alpha} \beta dr^*. \quad (5.14)$$

¹Recordar que la ecuación (4.22) es la ecuación radial de Teukolsky (4.5) que hemos reescrito en una forma más apropiada para nuestros intereses.

5.1. INESTABILIDAD DE LA MÉTRICA DE KERR EN EL RÉGIMEN SUPER EXTREMO 29

Además, teniendo en cuenta que el potencial (5.8) es suave, acotado por debajo y que presenta el siguiente comportamiento asintótico:

$$V \sim \left(\frac{Mke^{r^*}}{2a} \right)^2, \quad |r^*| \rightarrow \infty \quad (5.15)$$

vemos que el espectro del operador \mathcal{H} es discreto y que, además, posee una cota inferior.

Si estudiamos la forma asintótica de la ecuación radial de Teukolsky (4.5) puede mostrarse que las autofunciones normalizables de \mathcal{H} tienen el siguiente comportamiento asintótico:

$$\psi \sim \begin{cases} e^{-\frac{rk}{a}} \left(\frac{M}{r} \right)^{\frac{2kM}{a}-3} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{M}{r}\right) \right) & r \rightarrow \infty \\ e^{\frac{rk}{a}} \left(\frac{M}{r} \right)^{1-\frac{2kM}{a}} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{M}{r}\right) \right) & r \rightarrow -\infty. \end{cases} \quad (5.16)$$

Analicemos algunos aspectos del potencial (5.8):

- El numerador de V_2 es negativo en un intervalo a la izquierda de 0.
- Es fácil ver que $V_1(0) = -4a^2M < 0$. Por ser una función continua sabemos que existirá un entorno alrededor de $r = 0$ en el cual esta función es negativa.

Por estos motivos podemos afirmar que existe un intervalo $s_1(M) < r < s_2(M) < 0$ en el que tanto V_1 como V_2 son negativos. Tomemos una función de prueba normalizada (usando el producto interno definido en (5.14)) y con soporte compacto en el intervalo $r \in (s_1(M), s_2(M))$ a la que llamaremos ψ . Así vemos que:

$$\langle \psi | \mathcal{H} | \psi \rangle = \langle \psi | -(\partial/\partial r^*)^2 | \psi \rangle + \sum_{j=0}^2 k^j \langle \psi | V_j | \psi \rangle, \quad (5.17)$$

donde, para $j = 1, 2$, se cumple que:

$$\langle \psi | V_j | \psi \rangle = \int_{s_1(M)}^{s_2(M)} |\psi|^2 V_j \frac{dr}{\sqrt{\Delta}} < 0. \quad (5.18)$$

En función de que $\langle \psi | V_1 | \psi \rangle < 0$ tenemos que existe un valor crítico k_C tal que:

$$\langle \psi | -(\partial/\partial r^*)^2 | \psi \rangle + \langle \psi | V_0 | \psi \rangle + k \langle \psi | V_1 | \psi \rangle < 0 \quad \text{si } k > k_C, \quad (5.19)$$

de donde se desprende que:

$$\langle \psi | \mathcal{H} | \psi \rangle < k^2 \langle \psi | V_2 | \psi \rangle, \quad (5.20)$$

por este motivo, si llamamos $\epsilon_0(k)$ al menor autovalor de \mathcal{H} tenemos:

$$-\epsilon_0(k) \leq \langle \psi | \mathcal{H} | \psi \rangle < k^2 \langle \psi | V_2 | \psi \rangle, \quad \text{si } k < k_C. \quad (5.21)$$

De la ecuación (5.13) y la anterior se ve que debe cumplirse que:

$$\epsilon_0(k = 0^+) < \frac{15}{4}, \quad \epsilon_0(k) > |\langle \psi | V_2 | \psi \rangle| k^2, \quad k > k_C. \quad (5.22)$$

De las ecuaciones (4.10), (4.11) y (5.22) es fácil notar que para todos los $l = 2, 3, 4, \dots$ las curvas ϵ_0 y $E_l(a\omega)|_{a\omega=ik}$ se cortan en algún punto $k_l > 0$. Demostramos así que existe un autovalor común a la ecuación angular y a la radial de Teukolsky:

$$E := \epsilon_0(k_l) = E_l(a\omega)|_{a\omega=ik_l}. \quad (5.23)$$

En la Figura 5.1 puede verse este resultado general para el caso particular en el que $a/M = 1,4$.

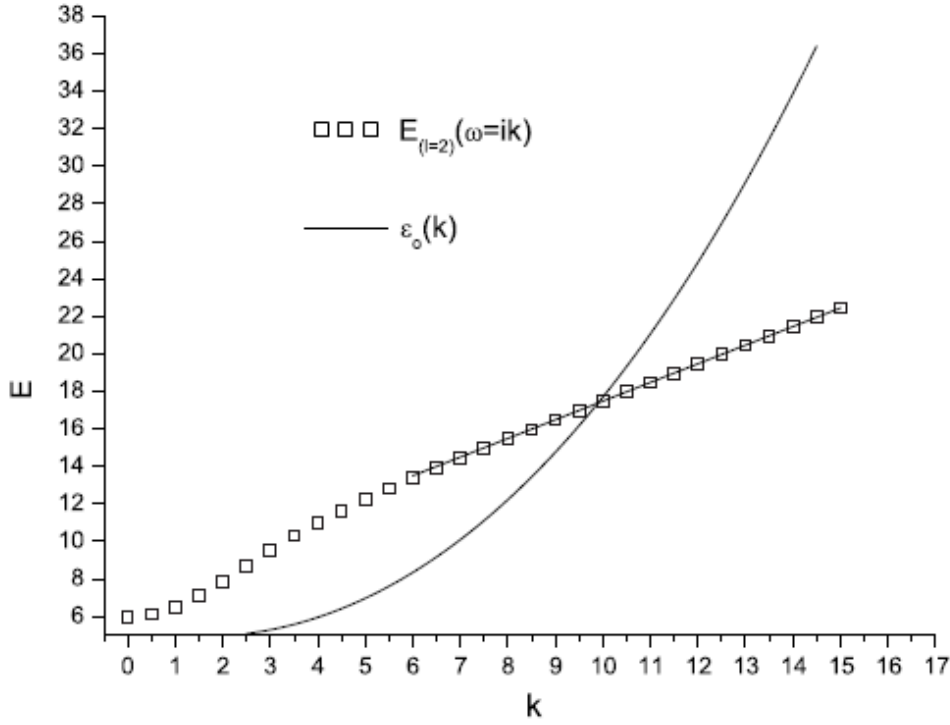


Figura 5.1: Intersección de los autovalores, obtenidos en forma numérica, de las ecuaciones angular y radial de Teukolsky para el caso particular $a/M = 1,4$. Los resultados están en completo acuerdo con los de [12].

De este modo obtuvimos (infinitas) soluciones para las ecuaciones de Teukolsky que están dadas por:

$$S(\theta) = S_{(l,m=0,k_l)}(\theta) \quad (5.24)$$

$$R(r) = \Delta^{\frac{3}{4}} \psi_0^{k_l}(r) \quad (5.25)$$

para valores de $l = 2, 3, \dots$

Cada una de estas soluciones corresponden a una perturbación gravitacional $\Phi_{(s=-2)}(t, r, \theta)$, dada por:

$$\Phi_{(s=-2)}(t, r, \theta) = S_{(l,m=0,k_l)}(\theta) \Delta^{\frac{3}{4}} \psi_0^{k_l}(r) e^{\frac{k_l t}{a}} \quad (5.26)$$

que presenta una dependencia temporal exponencialmente creciente con el tiempo y donde la función $\psi_0^{k_l}(r)$ tiene un comportamiento asintótico de la forma (5.16).

Queda así demostrada la inestabilidad de la métrica de Kerr en el régimen super extremo frente a perturbaciones gravitacionales. Hay que aclarar que el comportamiento asintótico con un decaimiento radial exponencial asegura que cualquier corrección a cantidades físicas de interés se anulan para valores grandes de la coordenada r .

Dedicaremos algunos renglones para analizar las condiciones de contorno que hemos utilizado para resolver la ecuación radial de Teukolsky (5.6).

Hemos exigido que la perturbación se anule para los puntos $r^* = \pm\infty$. Además de imponer condiciones en estos puntos, uno está tentado de imponer alguna condición extra en la singularidad de anillo que presenta la métrica de Kerr en $r = 0$, $\theta = \pi/2$. Aquí hay que notar dos cosas:

- El punto $r = 0$ no es ni un extremo de integración, ni una singularidad en la ecuación (5.6).
- La ecuación (5.6) es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden.

De estos dos ítems vemos que cualquier condición adicional a las que ya impusimos en los puntos $r^* = \pm\infty$ nos llevarían a un sistema arbitrariamente sobre determinado, siendo ésta la razón por la cual podemos decir que las ecuaciones de perturbación no “ven” a la singularidad desnuda de esta métrica ².

Es interesante notar lo siguiente: el potencial (5.8) posee un mínimo muy profundo que puede ser aproximado, para grandes valores de r , por el de un oscilador armónico de constante de orden k^2 . Esto hace que, cerca del estado fundamental, el espaciado entre niveles energéticos de \mathcal{H} en (5.6) sea de orden k . Así, vemos que los modos inestables de la perturbación gravitacional no quedan restringidos al modo radial fundamental, sino que ocurre en general para el autovalor $\epsilon_n(k)$.

5.2. Inestabilidad de la Región Interna del Agujero Negro de Kerr

La ecuación angular de Teukolsky (4.4) no se modifica respecto al caso anterior y por lo tanto no lo harán ni sus autovalores ni sus autofunciones, por este motivo centraremos nuestro enfoque en la ecuación radial (4.5) donde sí existen modificaciones que debemos tener en cuenta.

A pesar de los cambios, el razonamiento utilizado en la Sección anterior puede ser, si se lo adapta en forma apropiada, utilizado para mostrar que la región interior de un agujero negro de Kerr ($a^2 \leq M^2$), es decir la región definida por $r < r_- := M - \sqrt{M^2 - a^2}$, también resulta inestable frente al mismo tipo de perturbaciones gravitacionales.

Deberemos estudiar, por motivos que quedarán claros más adelante, los casos extremo y subextremo en forma separada.

5.2.1. Caso Extremo $a = M$

En este caso la región interna es, ya que $a = M$, la región $r < r_- = r_+ = M$. En la misma, la solución para la ecuación:

$$\frac{dr^*}{dr} = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \quad (5.27)$$

viene dada por:

²Este no es el caso del estudio de perturbaciones gravitacionales lineales a la singularidad desnuda de Schwarzschild, en el que $r = 0$, es donde está ubicada la singularidad de curvatura de esta métrica, que es, además, un extremo integración.

$$r^* = -\ln\left(\frac{M-r}{M}\right), \quad r < M, \quad (5.28)$$

cuya inversa es:

$$r = M(1 - e^{-r^*}), \quad -\infty < r^* < \infty. \quad (5.29)$$

Si utilizamos, como en el caso previo, el factor integrante $\Delta^{3/4}$, obtendremos nuevamente que la ecuación radial de Teukolsky se puede escribir en forma de una ecuación de Schrödinger como la (5.6) con un potencial como (5.8) pero donde ahora r^* está dado por (5.29).

En este caso el potencial V tiene el siguiente comportamiento asintótico:

$$V \sim \begin{cases} 4k^2 e^{2r^*} & r^* \rightarrow \infty \\ k^2 e^{-2r^*} & r^* \rightarrow -\infty, \end{cases} \quad (5.30)$$

por lo que nuevamente el espectro de \mathcal{H} es discreto y con una cota inferior. En este caso la autofunción se comporta asintóticamente de esta manera:

$$\psi \sim \begin{cases} \left(\frac{M}{M-r}\right)^{2k} e^{[-2k(\frac{M}{M-r})]} (1 + \mathcal{O}(\frac{M-r}{r})), & r \rightarrow \infty \\ \left(\frac{M}{r}\right)^{1-2k} e^{\frac{rk}{M}} (1 + \mathcal{O}(M/r)) & r \rightarrow -\infty \end{cases} \quad (5.31)$$

Si seguimos el mismo procedimiento que en el caso de la singularidad desnuda obtenemos la cota (5.21) de donde se muestra que esta región también es inestable frente a perturbaciones gravitacionales.

Vemos que, el decaimiento exponencial (5.31) garantiza que las cantidades de relevancia física sufren correcciones que se anulan en el infinito.

Las consideraciones que realizamos sobre el comportamiento que debe tener la perturbación en la singularidad, son idénticas a las que realizamos para el caso de la singularidad desnuda, por lo que no las repetiremos.

5.2.2. Caso Subextremo $a < M$

Nuevamente nos centraremos únicamente en el estudio de la ecuación radial de Teukolsky. En este caso, en la transformación de la ecuación (4.5) a la forma de una ecuación de Schrödinger aparecen ciertas sutilezas. Si definimos una variable radial nueva r^* a través de $dr^*/dr = 1/\sqrt{\Delta}$ en la región de interés $r < r_-$ obtenemos:

$$r^* = \ln\left(\frac{M-r-\sqrt{r^2-2Mr+a^2}}{M}\right) = \ln\left(\frac{r_-+r_+-2r-2\sqrt{(r_+-r)(r_--r)}}{r_-+r_+}\right), \quad r < r_-. \quad (5.32)$$

Es decir, la ecuación radial de Teukolsky se puede llevar a la forma de una ecuación de Schrödinger (5.6) con el potencial (5.8), pero donde la variable r es la inversa de la ecuación (5.32), es decir:

$$r = -\frac{1}{2M}(-a-M+e^{r^*}M)(a-M+e^{r^*}M)e^{-r^*}. \quad (5.33)$$

En este caso vemos que el dominio para r^* no es el eje real, sino que:

$$-\infty < r^* < r_-^* := \ln \left(\frac{r_+ - r_-}{r_+ + r_-} \right) \quad (5.34)$$

y que por lo tanto la ecuación de Schrödinger es, en este caso, válida solamente en medio eje. El potencial V tiene el siguiente comportamiento asintótico:

$$V \sim \begin{cases} \left[-\frac{1}{4} + \frac{4M^2(M - \sqrt{M^2 - a^2})^2}{M^2 - a^2} \left(\frac{k}{a} - \frac{\sqrt{M^2 - a^2}}{M(M - \sqrt{M^2 - a^2})} \right)^2 \right] \times \\ \quad \times \frac{1}{(r_-^* - r^*)^2} + \dots := \frac{\nu(k)^2 - \frac{1}{4}}{(r_-^* - r^*)^2} + \dots & r^* \rightarrow r_-^* \\ \left[\frac{k(M^2 - a^2)}{2aM} \right]^2 e^{-2r^*} & r^* \rightarrow -\infty \end{cases} \quad (5.35)$$

Las sutilezas de las que hablamos al comienzo de esta Sección son dos: el hecho de que el dominio sea semi infinito, y el comportamiento del potencial en el extremo r_i^* . Las autofunciones de cuadrado integrable de \mathcal{H} presentan un comportamiento asintótico cuando $r^* \rightarrow -\infty$ similar al de los casos anteriores y, cerca del horizonte r_-^* , como:

$$\psi \sim A[(r_-^* - r^*)^{\frac{1}{2} + \nu(k)} + \dots] + B[(r_-^* - r^*)^{\frac{1}{2} - \nu(k)} + \dots]. \quad (5.36)$$

Hay que recalcar dos cosas: 1) la función $\nu(k)$ es positiva y 2) los términos de órdenes superiores en el desarrollo anterior dependen explícitamente del autovalor E .

Podemos ver que, salvo que uno elija $B = 0$, cuando $\nu > 1$, dado un E genérico las funciones (5.36) no son de cuadrado integrable. Ésta es la condición que elige al conjunto posible de autovalores E que formarán el espectro del operador \mathcal{H} . Además, define cuál es el espacio de funciones donde este operador es autoadjunto.

Si, por el contrario, $\nu < 1$, estamos frente a un caso en el que, cualquiera sea el autovalor E , una autofunción bien comportada en $-\infty$ será de cuadrado integrable para $r^* \in (-\infty, r_-^*)$, por lo que debemos realizar una elección de las condiciones de borde para definir al conjunto D_{Fis} de perturbaciones físicamente permitidas. De este modo obtendremos un operador \mathcal{H} que será autoadjunto en D_{Fis} y que tendrá, como consecuencia, un conjunto completo de autofunciones.

El espacio de funciones D_{Fis} está formado por las (en principio infinitas) funciones con comportamiento asintótico en el horizonte como (5.36) y que además posean un cociente $q := B/A \in \mathbb{R}$ fijo. De este modo las funciones de prueba (que poseían soporte compacto) (5.17 - 5.18) pertenecen al espacio D_{Fis} por lo que la cota (5.21) vale sin importar la elección de q . Así, la región III de un agujero negro de Kerr es inestable sin importar las condiciones de contorno que se impongan en el horizonte. Una forma de seleccionar la misma es pedir que el decaimiento en el horizonte sea lo más rápido posible, esto se logra fijando $B = 0$. Así la perturbación gravitacional tiene un comportamiento radial de la forma:

$$\Phi_{s=-2} \sim \Delta^{\frac{3}{4}} (r_-^* - r^*)^{\frac{1}{2} + \nu_l} \sim (r_-^* - r^*)^{2 + \nu_l} \sim (r_- - r)^{1 + \frac{\nu_l}{2}} \quad (5.37)$$

donde $\nu_l := \nu(k_l)$ es una función positiva que crece para valores grandes de l .

5.3. Comentario

La estabilidad de la región exterior del agujero negro de Kerr fue, como dijimos previamente, demostrada en una serie de trabajos entre los que se puede destacar la demostración realizada por Whiting [31] de que ninguna solución a las ecuaciones de Teukolsky que tengan soporte compacto en la región exterior I y que decaigan de modo apropiado en el infinito y en r_+ pueden crecer exponencialmente en el tiempo. Veamos que nuestro razonamiento no entra en contradicción con este importante resultado previo.

Para el caso $a^2 \leq M^2$ y $r > r_+$ podemos definir la variable r^* del mismo modo que para el caso de la singularidad desnuda (5.1) con la salvedad de que en este caso el dominio es solamente $r > r_+$ donde puede mostrarse que el potencial cumple que:

$$V > -\frac{15}{4}, \quad \text{si } a \leq M \quad \text{y } k > 0. \quad (5.38)$$

Entonces tenemos que para cualquier k positivo el autovalor radial para el estado fundamental cumple que: $\epsilon_0(k) < 15/4$ por lo que no puede intersectar, cualquiera sea el l que elijamos, a la curva $E_l(a\omega)|_{a\omega=ik}$.

Veamos esto en el caso superextemo. En este caso el potencial (5.8) se reduce (si hacemos un cambio de variables apropiado en la variable radial para eliminar a el parámetro M de la definición) a:

$$V_{Ext} = \left[\frac{r(r+1)(r^2-r+2)}{(r-1)^2} \right] k^2 - 4 \left[\frac{r^2-2r-1}{r-1} \right] k + \frac{1}{4}. \quad (5.39)$$

Busquemos los puntos críticos para k fijos de esta función, esto nos lleva a tener que resolver la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2k(kr^4 - (2k+2)r^3 + 6r^2 - (2k+10)r + 6 - k)}{(r-1)^3} = 0 \quad (5.40)$$

cuya solución no nula es:

$$k = \frac{2(r-1)(r^2-2r+3)}{(r^2+1)(r^2-2r-1)} \quad (5.41)$$

que, como puede verse, posee, para cada valor de $k > 0$, una única solución en el intervalo $r > 1 := r_- = r_+$ ³ con la variable r variando desde infinito hasta $1 + \sqrt{2}$ a medida que se varía k desde 0 hasta infinito. Estos puntos son, ya que el potencial tiene derivada segunda positiva en los mismos, mínimos globales para el potencial cuando dejamos fijo a k . El potencial V es una función monótonamente decreciente y tiene como asíntota a $-15/4$.

Un razonamiento similar lleva a idéntica conclusión en el caso en el que $a^2 < M^2$.

³Notar que con el cambio de variables que realizamos los horizontes se encuentran en $r = 1$.

Capítulo 6

Implicaciones Astrofísicas

We will first understand how simple the universe is
when we recognize how strange it is.

John A. Wheeler

Como resultado de este trabajo hemos encontrado en forma analítica (reforzando de este modo las evidencias numéricas ya existentes [12]) que la métrica de Kerr en el régimen super extremo es inestable frente a perturbaciones lineales gravitacionales con simetría axisimétrica.

En trabajos previos se ha demostrado que, tanto la métrica de Schwarzschild como la de Reissner-Nordström, son inestables frente a perturbaciones gravitacionales cuando presentan una singularidad desnuda [11] y [12] respectivamente. De este modo vemos que varios de los objetos en los que, teóricamente, puede derivar el colapso gravitacional de un objeto estelar resultan inestables. Esta razón permite descartar su interés astrofísico (existen, como dijimos previamente, otras razones por las que podemos descartar el interés astrofísico de los agujeros negros con simetría esférica y los cargados).

Existen alternativas teóricas a los agujeros negros (ver, por ejemplo, el resumen [32]) entre las que podemos destacar a:

- las estrellas de bosones,
- las “gravastars” (nombre que viene de GRAvitational VACuum STAR, estrellas “formadas” por energía oscura),
- las estrellas de quarks.

Estos son objetos desprovistos de horizonte de eventos que, también, permiten explicar la existencia de objetos supercompactos y masivos de los que se tienen, actualmente, evidencias observacionales.

En trabajos recientes se demostró que las hipotéticas estrellas de bosones y las llamadas “gravastars” son, también, inestables [33].

Esta serie de resultados fortalecen la idea de que el resultado final del colapso gravitatorio de una estrella masiva es un agujero negro de Kerr, aumentando de este modo la relevancia astrofísica de estos objetos.

Capítulo 7

Trabajo a Futuro

What is now proved was once only imagin'd.
William Blake

Los resultados obtenidos en este trabajo son de carácter preliminar y dejan planteados, entre otros, estos interrogantes:

- ¿Cómo es la métrica perturbada?
- ¿Cómo afecta la perturbación a la singularidad de anillo?
- ¿Se puede excitar el modo inestable a partir de una perturbación que esté inicialmente alejada de la singularidad?

Intentar responder estas preguntas e interpretar las respuestas es la parte central del trabajo que piensa encararse en el futuro cercano.

El proceso de reconstrucción es complicado (ver, por ejemplo, [34]) debido a que las variables en el formalismo de Teukolsky involucrado en la teoría perturbativa guardan una compleja relación con la perturbación de la métrica. Se propone así implementar el algoritmo de reconstrucción, desarrollado en [34], en forma general para luego reemplazar la función de Teukolsky por una solución local (serie de Frobenius) que nos permita analizar la geometría resultante al aproximarnos al punto de interés. Esto nos permitiría establecer requisitos para que la solución de las ecuaciones de Teukolsky no implique perturbaciones que introduzcan una singularidad más seria que la de la métrica no perturbada, caso en el que la solución linealizada es aplicable en todo el espacio-tiempo.

Responder a la pregunta sobre si pueden o no ser excitados los modos inestables encontrados no parece ser una tarea simple para el caso gravitacional puro (este trabajo ha sido recientemente realizado en [35] para el caso de la singularidad desnuda de Schwarzschild) por lo que, además, se estudiará la posibilidad de excitar a las mismas por otros mecanismos.

Capítulo 8

Apéndices

8.1. Apéndice A: Diagramas de Carter-Penrose

Para poder introducir los diagramas de Carter-Penrose, resulta imprescindible definir la extensión analítica máxima de una métrica.

A lo largo de su historia las soluciones de agujero negro fueron cambiando su forma a través de la utilización de diferentes sistemas de coordenadas para la descripción del espacio-tiempo. Cada uno de estos sistemas de coordenadas tiene la particularidad de clarificar diferentes características de la geometría del espacio-tiempo, de ahí su utilidad.

Nuevos sistemas de coordenadas permitieron extender la validez de la solución a regiones más amplias del espacio-tiempo. Esto hizo que, naturalmente, surgiera la pregunta de hasta cuándo podía realizarse este proceso de extensión analítica del mismo.

Antes de responder a este interrogante veremos algunas definiciones básicas: diremos que una variedad provista de una geometría dada es máxima si todas las geodésicas que nacen en un punto arbitrario de la misma o bien pueden ser extendidas a valores infinitos (en ambas direcciones) del parámetro afín que describe a la geodésica o ésta termina en una singularidad intrínseca. Si, en particular, todas las geodésicas pueden ser extendidas para valores infinitos del parámetro afín, diremos que la variedad es geodésicamente completa.

Para citar un ejemplo clásico utilizaremos la métrica de Schwarzschild, para la cual la solución de Kruskal-Szekeres es la única extensión analítica máxima. En estas coordenadas los conos de luz no se deforman y mantienen la apertura de 45° en todo el espacio-tiempo. No entraremos en el estudio e interpretación del cuadro superior de la Figura 8.2 que, a pesar de ser muy informativa, no da idea alguna de lo que ocurre en los puntos del “infinito”. Para ello tendremos que introducir un procedimiento llamado compactificación conforme que permite estudiar la estructura de dichos puntos y lleva a otra imagen muy utilizada, los llamados diagramas de Carter-Penrose.

La idea básica de este procedimiento es tomar una métrica física g_{ab} y otra \bar{g}_{ab} que llamaremos métrica no física elegida de modo que ambas sean conformes, es decir, que exista un factor conforme Ω (una función diferenciable y no nula) de modo tal que se cumpla que:

$$\bar{g}_{ab} = \Omega^2 g_{ab}, \tag{8.1}$$

y así utilizando una elección apropiada de la función Ω mapear toda la variedad a una región compacta que puede ser representada en un diagrama finito. Lo que este procedimiento hace es “traer” los puntos del infinito a una posición finita dentro del espacio-tiempo para poder, así, estudiar

su estructura causal. Una vez realizada la compactificación aparecen una serie de puntos y superficies de relevancia:

- la superficie nula \mathcal{J}^+ , llamado infinito nulo futuro, donde finalizan las geodésicas nulas;
- la superficie nula \mathcal{J}^- , llamado infinito nulo pasado, donde comienzan las geodésicas nulas;
- el punto i° , llamado infinito espacial, donde se originan y terminan las geodésicas tipo espacio;
- el punto i^+ , llamado infinito temporal futuro, donde terminan las geodésicas tipo tiempo;
- el punto i^- , llamado infinito temporal pasado, donde comienzan las geodésicas tipo tiempo;

hay que destacar que estos puntos no tienen porqué ser únicos y que en general no lo son.

Una de las principales virtudes de los diagramas de Carter-Penrose es que los mismos capturan (en un modo estandarizado y muy gráfico) la estructura causal de espacios-tiempos “suficientemente” simétricos. Como la relación causal entre diferentes eventos del espacio-tiempo queda definida por los respectivos conos de luz, resulta muy útil tener una coordenada “temporal” y otra “radial”, de modo tal que los conos de luz no se deformen sobre el diagrama del espacio-tiempo.

8.1.1. Algunos Ejemplos

Primero analicemos la solución de Schwarzschild, en la siguiente figura vemos un diagrama mostrando un corte de la misma donde se han suprimido las variables $(\theta$ y ϕ por lo que cada punto del mismo representa una esfera de área $4\pi r^2$. En el primer diagrama veremos que las coordenadas de Schwarzschild reslutan singulares en $r = 2M$, esto puede solucionarse utilizando diferentes coordenadas como se muestra en el panel inferior. En esta extensión a la métrica de Schwarzschild puede verse que esa superficie es, en realidad, una superficie nula.

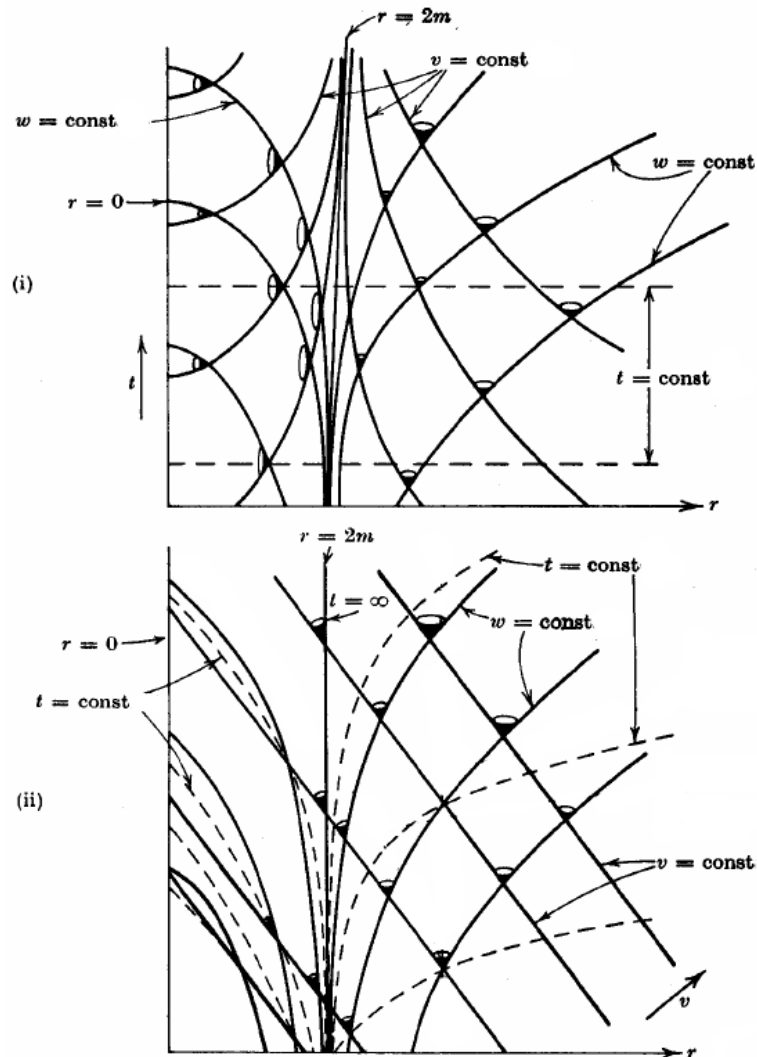


Figura 8.1: Solución de Schwarzschild, corte para (θ, ϕ) constante. (i) Coordenadas de Schwarzschild mostrando una aparente singularidad en $r = 2M$. (ii) Mismo diagrama utilizando las coordenadas de Filkenstein para “eliminar” la singularidad $r = 2M$.

Kruskal obtuvo, en el año 1960, la extensión analítica máxima para la métrica de Schwarzschild, que puede verse en el diagrama superior de la Figura 8.2. Debajo encontramos el diagrama de Carter-Penrose para esta métrica que muestran los infinitos futuros, pasados y nulos de cada una

de las regiones asintóticamente planas I y I' .

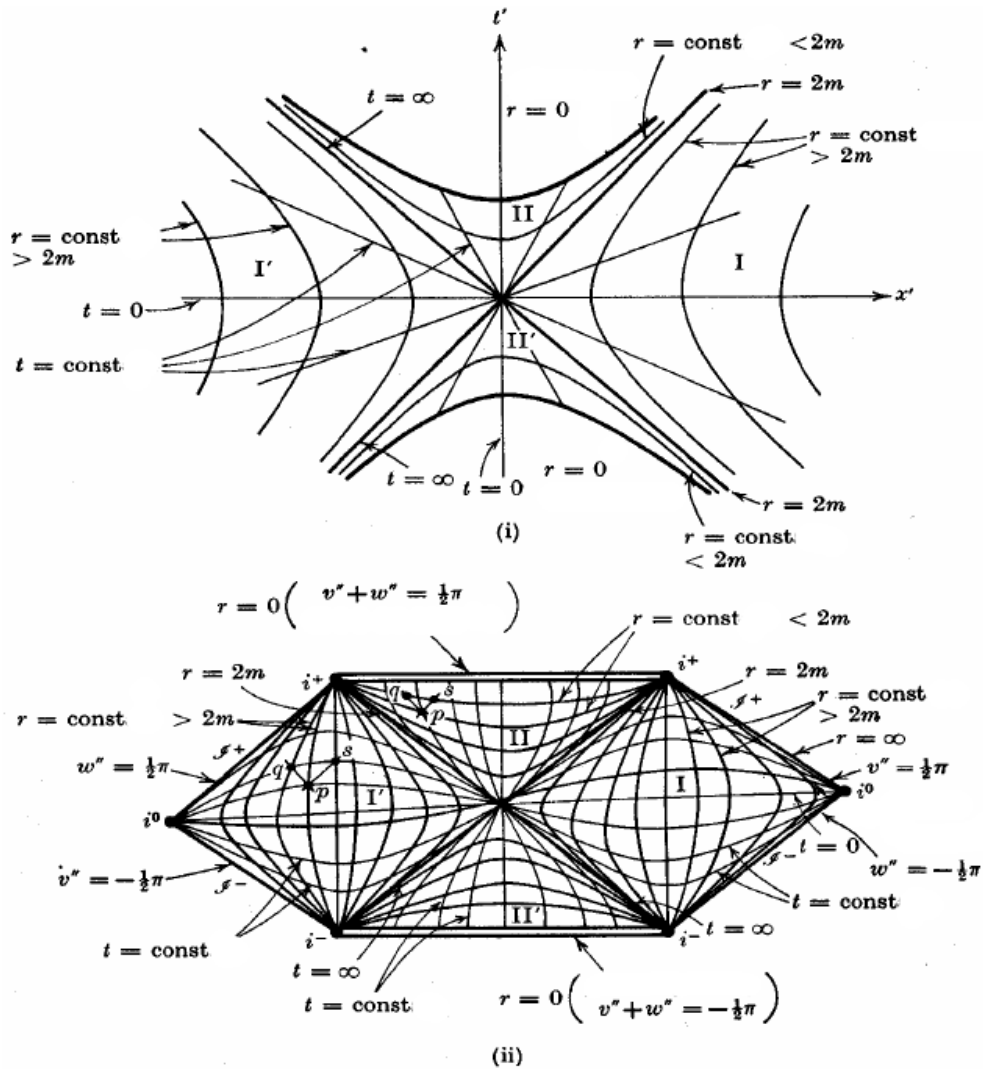


Figura 8.2: Extensión analítica máxima de la solución de Schwarzschild, donde las coordenadas θ y ϕ han sido suprimidas. (i) Diagrama de Kruskal-Szekeres. (ii) Diagrama de Carter-Penrose para el espacio-tiempo de Schwarzschild.

Ahora veamos el diagrama de Carter-Penrose para la métrica de Kerr.

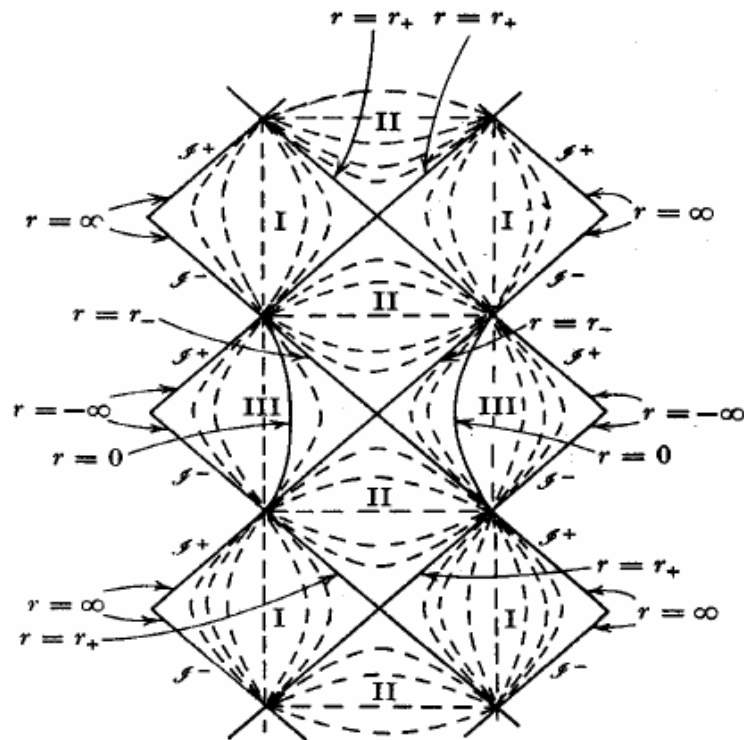


Figura 8.3: Estructura conforme de la solución de Kerr a lo largo del eje de simetría. Las líneas a trazos son líneas donde $r = cte$; las regiones I, II y III están divididas por $r = r_+$ y $r = r_-$.

Entonces vemos que la extensión analítica máxima del espacio-tiempo de Kerr contiene una sucesión de infinitos universos asintóticamente planos conectados. Como además la superficie $r = 0$ es no singular podemos extender este espacio-tiempo a valores negativos de r . Esta región no contiene horizontes y se vuelve plana en $r = -\infty$. Observadores ubicados en esta región interpretan a la métrica de Kerr como una singularidad desnuda (con forma de anillo y masa negativa).

Hay que notar que, especificando los valores de algún campo físicamente relevante (electromagnético, gravitacional, etc.) en una superficie de Cauchy hará que el mismo evolucione de una única forma hasta el horizonte interno ($r = r_-$). Esto hace que en la región III del diagrama de Penrose (Figura 8.3) la evolución no sea única, perdiéndose predictibilidad. De un modo intuitivo puede pensarse que esta falta de predictibilidad se debe a que la región III está conectada con la singularidad desnuda ubicada en ($r = 0$) y por el espacio-tiempo asintóticamente plano al que se accede atravesando la singularidad de anillo. Este hecho resulta muy molesto, ya que esta región del espacio-tiempo es absolutamente regular. Esto llevó a realizar preguntas relacionadas con la estabilidad de este horizonte frente a pequeñas perturbaciones en los datos iniciales, veremos este tema en más detalle en el Apéndice B.

8.2. Apéndice B: Horizontes de Cauchy

Empezaremos dando una serie de definiciones relacionadas con la estructura causal de un espacio-tiempo \mathcal{M} dado.

Una “superficie parcial de Cauchy” \mathcal{S} de un dado espacio-tiempo es una hipersuperficie que no es intersecada más de una vez por ninguna “curva causal”. Diremos que una curva causal es “inextensible hacia el pasado” si no tiene punto temporal final en el espacio-tiempo. Ver Figura 8.4.

El “dominio de dependencia futuro” de la superficie \mathcal{S} , $D^+(\mathcal{S})$ es un conjunto de puntos en el espacio-tiempo para los cuales todas las curvas causales inextensibles hacia el el pasado intersecan a la superficie \mathcal{S} . De modo similar podemos definir el “dominio de dependencia pasado”, \mathcal{S} , $D^-(\mathcal{S})$, y diremos que \mathcal{S} es una superficie de Cauchy si se cumple que:

$$D^+(\mathcal{S}) \cup D^-(\mathcal{S}) = \mathcal{M}. \quad (8.2)$$

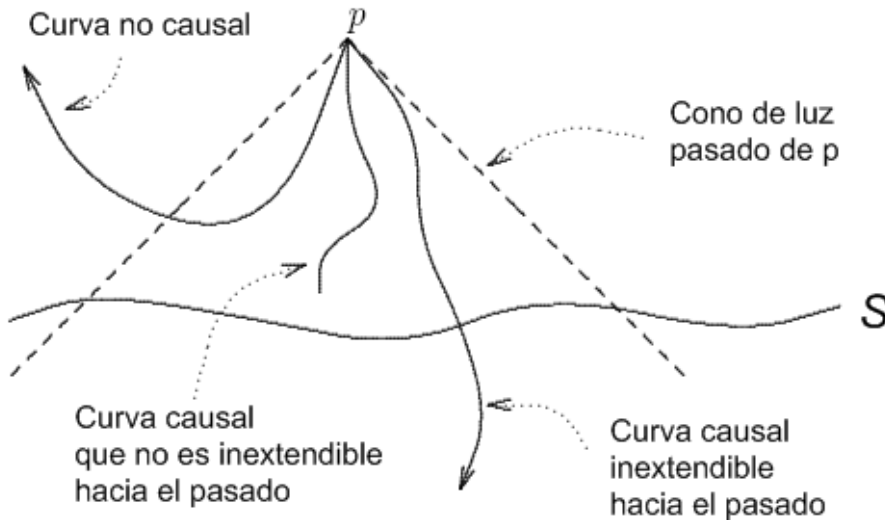


Figura 8.4: Gráfico esquemático de algunas definiciones relacionadas con la estructura causal de un espacio-tiempo arbitrario.

La importancia de $D^+(\mathcal{S})$ radica en que fuera de esta región el comportamiento de ecuaciones diferenciales parciales hiperbólicas (como las ecuaciones de Einstein) no está unívocamente determinado por datos iniciales dados sobre la superficie \mathcal{S} .

Si el espacio-tiempo no es globalmente hiperbólico, es decir, si se cumple la condición (8.2), debe darse que $D^+(\mathcal{S})$ ó $D^-(\mathcal{S})$ tengan un borde en el espacio-tiempo, llamaremos a este borde “horizonte de Cauchy futuro” o “pasado” dependiendo de cuál sea el caso.

Tanto el agujero negro de Reissner-Nordström, como el de Kerr (y Kerr-Newman) tienen horizontes de Cauchy también llamado horizonte interno. Como mencionamos previamente, existen argumentos para sospechar que los mismos tienen una naturaleza inestable. Analicemos, con más detalle, el tema de la estabilidad de estos horizontes.

El primero en señalar que el horizonte de Cauchy de los agujeros negros de Reissner-Nordström debían resultar inestable fue Penrose [36] y utilizó como principal argumento para realizar esta

suposición el hecho de que la radiación que “cae” dentro de un agujero negro de este tipo a lo largo de toda la historia del universo “exterior” se acumula en este horizonte. De este modo, un observador en caída libre que alcance ¹ al mismo “vería” la, infinitamente larga, historia del universo exterior en un intervalo de tiempo propio finito. Así vemos que la radiación llega al horizonte de Cauchy infinitamente corrida hacia el azul, por lo que la densidad de energía debe diverger. Esta divergencia en el tensor de energía-impulso, genera, a través de las ecuaciones de Einstein (1.10), una divergencia en la curvatura. De este modo él concluye que el horizonte de Cauchy se trasformaría en una singularidad de curvatura. En este punto resulta importante mencionar que, a la fecha, no hay una respuesta definitiva al interrogante relacionado con la estabilidad del horizonte de Cauchy por lo que este es un tema abierto de investigación.

Existen trabajos similiares pero referidos a la inestabilidad del horizonte de Cauchy que presenta la métrica de Kerr (ver, por ejemplo, [37]).

¹Cosa que realiza en un intervalo de tiempo propio finito.

8.3. Apéndice C: Coordenadas de Kerr-Schild

Cuando estamos en el caso de una singularidad desnuda de Kerr, es decir el caso en el que $a^2 > M^2$ la métrica de Kerr (3.1) es solamente singular si $r = 0$ y $\theta = \pi/2$, pero, debemos notar que esta singularidad no es un punto sino que es un anillo. Para ver esto más claramente transformemos a las coordenadas (\bar{t}, x, y, z) , las llamadas coordenadas de Kerr-Schild ².

La transformación (de las coordenadas de Boyer-Lindquist) viene dada por:

$$x + iy = (r + ia) \operatorname{sen} \theta e^{i \int (d\phi + a\Delta^{-1}dr)}, \quad (8.3)$$

$$z = r \cos \theta, \quad (8.4)$$

$$\bar{t} = \int (dt + (r^2 + a^2)\Delta^{-1}dr) - r. \quad (8.5)$$

En las nuevas coordenadas, la métrica de Kerr toma la forma:

$$ds^2 = d\bar{t}^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 - \frac{2Mr^3}{r^4 + a^2z^2} \left(d\bar{t} + \frac{r}{a^2 + r^2}(xdx + ydy) + \frac{a}{r^2 + a^2}(ydx - xdy) + \frac{z}{r}dz \right)^2, \quad (8.6)$$

donde r está implícitamente determinada (salvo un signo) en términos de x, y, z por la siguiente relación:

$$r^4 - (x^2 + y^2 + z^2 - a^2)r^2 - a^2z^2 = 0. \quad (8.7)$$

Las superficies $\{r = \text{cte} \neq 0\}$ son elipsoides confocales dentro del plano (x, y, z) que, en $r = 0$ se degeneran en el disco $z^2 + y^2 \leq a^2$, $z = 0$. El borde de éste, el anillo $z^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$ es la única singularidad de curvatura de la métrica, cosa que puede verificarse notando que el invariante de Riemann $R_{abcd}R^{abcd}$ diverge sobre éste. A pesar de esto, como este escalar no diverge dentro del disco, la función r puede continuarse analíticamente para valores negativos de esta variable a través de este disco, obteniendo así la extensión analítica máxima de esta métrica.

²Estas son las coordenadas en las que Kerr descubrió, originalmente, su solución a las ecuaciones de Einstein.

Bibliografía

- [1] J.R. Oppenheimer and H. Snyder, *Phys. Rev.* **56**, 455 (1939).
- [2] M.A. Podurets, *Soviet Astronomy* **8**, 868, (1965).
- [3] W.L. Ames and K.S Thorne, *ApJ* **151**, 659, (1968).
- [4] J. Casares, Invited review to appear in Proceedings of IAU Symposium 238: "Black Holes: From Stars to Galaxies -Across the Range of Masses". Prague 14-18 August 2006, arXiv:astro-ph/0612312.
- [5] J.A. Orosz, J.E. McClintock, R. Narayan, C.D. Bailyn, J.D. Hartman, L. Macri, J. Liu, W. Pietsch, R.A. Remillard, A. Shporer and T. Mazeh, *Nature*, **449**, 7164 (2007), arXiv:0710.3165.
- [6] A.M. Ghez, B.L. Klein, M. Morris and E.E. Becklin, *ApJ* **509**, 2 (1998).
- [7] J. Kormendy and K. Gebhardt, 20th Texas Symposium on relativistic astrophysics, Austin, Texas, 10-15 Decem ber 2000, Melville, NY: American Institute of Physics, 2001, xix, 938 p. AIP conference proceedings, Vol. 586. Edited by J. Craig Wheeler and Hugo Martel, arXiv:astro-ph/0105230.
- [8] J.E. McClintock, R. Narayan and R. Shafee, To appear in *Black Holes*, eds. M. Livio and A. Koekemoer (Cambridge University Press), in press arXiv:0707.4492 (2008) y J.E. McClintock and R.A. Remillard, arXiv:0902.3488v3 [astro-ph.HE] (2009).
- [9] L. Gou, J.E. McClintock, J. Liu, R. Narayan, J.F. Steiner, R.A. Remillard, J.A. Orosz and S.W. Davis, arXiv:0901.0920, (2009).
- [10] R. Penrose, "The Question of Cosmic Censorship", in R.M. Wald (ed), "Black Holes and Relativistic Stars", pp. 103-122. Chicago, IL: University of Chicago Press, 1998; R.M. Wald, *Ann. Phys.* **83**, 548, (1974); V.E. Hubeny, *Phys. Rev. D* **59**, 064013 (1999) [arXiv:gr-qc/9808043].
- [11] R.J. Gleiser and G. Dotti, *CQG* **23**, 5063, (2006). arXiv:gr-qc/0604021v2.
- [12] G. Dotti, R.J. Gleiser and J. Pullin, *Phys. Lett. B*, **644**, 5-6, 289 (2007). arXiv:gr-qc/0607052.
- [13] G. Dotti, R.J. Gleiser, I.F. Ranea-Sandoval and H. Vucetich, *CQG* **25**, 245012, (2008).
- [14] G. Dotti, R.J. Gleiser, J. Pullin, I.F. Ranea-Sandoval and H. Vucetich, *Int. J. Mod. Phys. A* **24**, 1578, (2009). arXiv:0810.0025v1.
- [15] R.P. Kerr, *Phys. Rev. Lett.* **11**, 237 (1963).

- [16] S.G. Turyshev, *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* **58**, 207 (2008). arXiv:0806.1731.
- [17] R.A. Brune, Jr., C.L. Cobb, B.S. Dewitt, C. Dewitt-Morette, D.S. Evans, J.E. Floyd, B.F. Jones, R.V. Lazenby, M. Marin, R.A. Matzner, A.H. Mikesell, M.R. Mikesell, R.I. Mitchell, M.P. Ryan, H.J. Smith, A. Sy and C.D. Thompson, *Astron. J.* **81**, 452, (1976). Última expedición a un eclipse solar total que publicó resultados.
- [18] R.V. Pound and G.A. Rebka, Jr, *Phys. Rev. Lett.* **3**, 439 (1959); R.V. Pound and J.L. Snider, *Phys. Rev. Lett.* **13**, 539 (1964).
- [19] R.A. Hulse, *Review of Modern Physics*, **66**, 3, 699-710 (1994).
- [20] E. Newman, R. Penrose, *J. Math. Phys.* **3**, 566, (1962).
- [21] S.A. Teukolsky, *Phys. Rev. Lett.* **29**, 1114 (1972); S.A. Teukolsky, *ApJ* **185**, 635, (1973).
- [22] B. Carter, Conferencia invitada en la 8^{va} Marcel Grossmann Meeting, Jerusalem, Israel, 22-27 de Junio de 1997. arXiv:gr-qc/9712038 y referencias ahí citadas.
- [23] Ver por ejemplo, G. Khanna, *Phys. Rev. D* **66** 064004 (2002) y R. H. Price and J. Pullin, *Phys. Rev. Lett.* **72**, 3297 (1994) [arXiv:gr-qc/9402039].
- [24] S. Mano, H. Suzuki and E. Takasugi, *Progress of Theoretical Physics*, **95**, No 6, pp. 1079-1096, (1996).
- [25] S. Mano and E. Takasugi, *Progress of Theoretical Physics*, **97**, No 2, pp. 213-232, (1997).
- [26] P.P. Fiziev, arXiv:0902.1277v2 (2009).
- [27] E. Seidel, *CQG* **6**, 1057, (1989).
- [28] E.D. Fackerell and R.G. Crossman, *J. Math. Phys.* **18** 1849 (1977).
- [29] E. Berti, V. Cardoso and M. Casals, *Phys. Rev. D* **73**, 024013, (2006) [Erratum-ibid. *D* **73** 109902, (2006)].
- [30] R.A. Breuer, "Gravitational Perturbation Theory and Synchrotron Radiation", *Lecture Notes in Physics* **44**, Springer Berlin, (1975).
- [31] B.F. Whiting, *J. Math. Phys.* **30**, 1301, (1989).
- [32] M. Visser, C. Barceló, S. Liberati and S. Sonego, Seminario presentado en el workshop "Black Holes in General Relativity and String Theory" 24-30 /10/2008, Veli Losinj, Croacia. arXiv:0902.0346v2.
- [33] V. Cardoso, P. Pani, M. Cadoni and M. Cavaglia, *CQG* **25**, 195010, (2008). arXiv:0808.1615v1 [gr-qc].
- [34] L. Kegeles, J. Cohen, *Phys. Rev.* **D19**, 1641 (1979); P. Chrzanowski, *Phys. Rev.* **D11**, 2042 (1975); R. Wald, *Phys. Rev. Lett.* **41**, 203 (1978); B.F. Whiting and L.R. Price, *CQG* **22**, S589 (2005).
- [35] G. Dotti, R.J. Gleiser, arXiv:0809.3615v1 (2008).

- [36] C.M. DeWitt and J.A. Wheeler (eds.) “Battelle Rencontres: 1967 Lectures in Mathematics and Physics” W.A. Benjamin, inc. 1968.
- [37] P.R. Brady and C.M. Chambers, *Phys. Rev. D* **51**, 4177, 1995. arXiv:gr-qc/9501025.
- [38] Libros de texto utilizados:
S. Chandrasekhar, “The Mathematical Theory of Black Holes”, Oxford University Press, (1983).
S.M. Carroll, “Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity”, Benjamin Cummings, (2003).
R. D’Inverno, “Introducing Einstein’s Relativity”, Oxford University Press, (1992).
S.W. Hawking and G.F.R. Ellis, “The Large Scale Structure of Space-time”, Cambridge University Press, (1973).
J.B. Hartle, “Gravity: And Introduction to Einstein’s General Relativity”, Addison Wesley, (2003).
L.D. Landau and E.M. Lifshitz, “Quantum Mechanics: Non-Relativistic Theory”, Pergamon Press, (1977).
R.M. Wald, “General Relativity”, University of Chicago Press, (1984).
C.W. Misner, K.S. Thorne and J.A. Wheeler, “Gravitation”, W.H. Freeman and Company, (1973).