



**I  
N  
A  
O  
E**

# **Ajuste Simultáneo a Curvas de Luz y Velocidad Radial para Sistemas en Tránsito**

Por

**Lic. José Gerardo Ahuatzi Reyes**

Tesis sometida como requisito parcial para  
obtener el grado de

**MAESTRO EN CIENCIAS EN LA  
ESPECIALIDAD DE ASTROFÍSICA**

en el

**Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y  
Electrónica**

Diciembre 2014  
Tonantzintla, Puebla

Supervisada por:

**Dr. Carlos del Burgo Díaz**

© INAOE 2014

El autor otorga al INAOE el permiso de  
reproducir y distribuir copias en su totalidad o en  
partes de esta tesis



# Agradecimientos

A mi familia, por estar conmigo siempre y apoyarme en cada una de mis empresas.

A los amigos que he hecho en este instituto, en especial a aquellos con los que compartí incontables noches en vela.

A mi asesor, el Dr. Carlos del Burgo, por su guía y su consejo durante la realización del trabajo de tesis que se resume en este escrito.

A los Doctores Ivânio Puerari, Elsa Recillas Pishmish y Manuel Gerardo Corona Galindo, por la revisión de este escrito, así como por sus atinadas correcciones y sugerencias.

A la Coordinación de Astrofísica del INAOE, por el apoyo y la confianza mostrados durante mi estancia en su programa de maestría.

Finalmente, agradezco al CONACYT por la beca número 345021 con la cual fui beneficiado durante mis primeros dos años de maestría, así como al Dr. del Burgo por la beca 183007-21593-2692, otorgada para la conclusión de este trabajo en el marco del proyecto CONACYT CB-2012-183007.

# Resumen

Se presenta un modelo para caracterizar sistemas planetarios. Para sistemas en tránsito, cuya caracterización es nuestra principal motivación científica, el modelo permite obtener estimaciones coherentes de algunos parámetros físicos (masas y radios) y orbitales (inclinación, excentricidad, longitud del semieje mayor, argumento del periastro) a partir de ajustes simultáneos de series temporales de datos, que son generalmente curvas de luz y curvas de velocidad radial. El modelo usado para realizar los ajustes se basa en un modelo de  $N$  cuerpos que se integra numéricamente, como alternativa a los modelos analíticos usados comúnmente. Su uso pretende alcanzar la máxima precisión posible en el análisis de sistemas planetarios múltiples en los que existe interacción dinámica apreciable entre dos o más planetas miembros. Hemos validado el modelo usándolo para extraer los parámetros de varios sistemas planetarios conocidos (alrededor de las estrellas huésped HD 209458, HAT-P-14 y WASP-44) y concluimos que el modelo se encuentra en un estado funcional.

El modelo admite cierto margen de mejora, como la incorporación de algunos efectos físicos adicionales para un tratamiento más preciso de los datos y de mejoras en el método de integración con el objetivo de alcanzar una mayor eficiencia computacional. Este modelo es útil para el análisis de datos obtenidos con los espectrógrafos de nueva generación como, por ejemplo, CARMENES, cuyo objetivo más ambicioso es la búsqueda de planetas telúricos en la zona habitable de estrellas de baja masa. El modelo también servirá para el desarrollo del proyecto PHASES, que es un telescopio espacial de bajo costo para la obtención de espectros estelares de baja resolución calibrados de forma absoluta.

# Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Motivación . . . . .	1
1.2. Antecedentes . . . . .	1
1.3. Detección de exoplanetas . . . . .	3
1.3.1. Método de velocidad radial . . . . .	3
1.3.2. Método del tránsito . . . . .	4
1.3.3. Otros métodos . . . . .	5
1.4. Caracterización de sistemas planetarios . . . . .	9
1.4.1. Elementos orbitales keplerianos . . . . .	9
1.4.2. Modelos analíticos para curvas de luz de sistemas en tránsito	11
1.4.3. Modelos analíticos para curvas de velocidad radial . . . . .	13
1.4.4. Modelo de N cuerpos . . . . .	14
1.4.5. Extracción simultánea de parámetros . . . . .	15
1.4.6. Degeneraciones en la extracción de parámetros . . . . .	15
1.4.7. Estado del arte del <i>software</i> para el análisis de curvas de luz y curvas de velocidad radial . . . . .	16
<b>2. Metodología</b>	<b>18</b>
2.1. Conversión de parámetros keplerianos a coordenadas cartesianas .	18
2.2. Algoritmos de extracción paramétrica . . . . .	20
2.2.1. Asexual Genetic Algorithm . . . . .	20
2.2.2. Métodos de Monte Carlo vía cadenas de Markov . . . . .	20
2.3. Descripción del modelo . . . . .	21
2.3.1. Modelo físico . . . . .	21
2.3.2. Método de exploración del espacio paramétrico y selección del mejor ajuste . . . . .	21
2.3.3. Estimación de los parámetros y sus incertidumbres . . . . .	22
2.3.4. Programación del algoritmo . . . . .	22
2.3.5. Equipo usado . . . . .	22

---

<b>3. Resultados</b>	<b>23</b>
3.1. HD 209458 b . . . . .	23
3.1.1. Datos . . . . .	24
3.1.2. Resultados y Discusión . . . . .	24
3.2. HAT-P-14 b . . . . .	28
3.2.1. Datos . . . . .	28
3.2.2. Resultados y Discusión . . . . .	29
3.3. WASP-44b . . . . .	33
3.3.1. Datos . . . . .	34
3.3.2. Resultados y Discusión . . . . .	34
<b>4. Discusión general y conclusiones</b>	<b>39</b>
<b>5. Trabajo futuro</b>	<b>42</b>
<b>Referencias</b>	<b>44</b>

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Motivación

Este proyecto está integrado dentro del proyecto de investigación “Caracterización de Sistemas Planetarios”, financiado por el programa Ciencia Básica de CONACYT CB-2012-183007. El proyecto de investigación está relacionado con el desarrollo de PHASES, un telescopio espacial para la caracterización de sistemas planetarios (del Burgo et al., 2010, 2013a,b). Esta tesis se enmarca en este contexto y el principal objetivo ha sido la validación de un modelo de N cuerpos, mediante su aplicación para el ajuste simultáneo de curvas de luz y curvas de velocidad radial de tres sistemas estrella-planeta conocidos. En la tesis doctoral, como continuidad de este trabajo, planeamos usar el modelo desarrollado para explotar el máximo su desempeño.

### 1.2. Antecedentes

Los avances en la detección y caracterización de planetas orbitando estrellas distintas de nuestro Sol han sido más que sobresalientes en los últimos veinte años, particularmente con la revolución que han significado instrumentos como los espectrógrafos de alta resolución *High Resolution Echelle Spectrometer* (HIRES: Vogt et al. 1994) y *High Accuracy Radial velocity Planet Searcher* (HARPS: Mayor et al. 2003), y sobretodo el telescopio espacial Kepler (Borucki et al. 2010). La muestra más clara de este crecimiento es el anuncio este año del descubrimiento de más de 700 nuevos exoplanetas (Lissauer et al. (2014); Rowe et al. (2014))<sup>1</sup>. Futuras misiones espaciales como *Transiting Exoplanet Survey Satellite* (TESS: Ricker et al. (2014)) y *Planetary Transits and Oscillations of stars* (PLATO: Rauer et al. (2014)), permitirán buscar planetas telúricos en zonas habitables. Asimismo, se

---

<sup>1</sup>Fueron verificados como planetas 715 objetos previamente identificados con Kepler como candidatos a planetas.

encuentran en desarrollo instrumentos en tierra de muy alta precisión, siendo el *Echelle Spectrograph for Rocky Exoplanet and Stable Spectroscopic Observations* (ESPRESSO: Pepe et al. (2010)), un claro ejemplo, pudiendo detectar planetas similares a la Tierra alrededor de estrellas parecidos a nuestro Sol. Temporalmente más inmediato, el espectrógrafo *Calar Alto high-Resolution search for M dwarfs with Exoearths with Near-infrared and optical Échelle Spectrographs* (CARMENES: Amado et al. (2013); Quirrenbach et al. (2012)) se abocará a buscar planetas tipo Tierra alrededor de estrellas enanas de tipo espectral M temprano.

La evolución natural que siguen este tipo de instrumentos exige a su vez la evolución de los procedimientos para el procesamiento de datos, debiendo estos últimos ser acordes a la precisión de las nuevas observaciones. Esto se traduce en la necesidad de desarrollar algoritmos cada vez más eficaces y precisos para la extracción de información, y conlleva a programas que exigen computadoras de alto rendimiento. Afortunadamente, cada vez es más factible tener acceso a clústeres basados en CPUs (*Central Processing Units*) o GPUs (*Graphics Processing Units*) que permiten llevar a cabo este tipo de cálculos.

Una de las tareas primarias en esta empresa es la obtención de los parámetros básicos de las componentes de los sistemas, por ejemplo: los radios, las masas y las distancias. Obteniendo el radio y la masa del planeta es posible obtener su densidad, lo cual es especialmente importante porque permite discernir su composición, al menos en cierto grado (por ejemplo, si es un planeta gaseoso o un planeta rocoso). Obtener el radio de la estrella huésped con gran precisión es muy importante, ya que determina la precisión del radio del planeta.

Hasta el día de hoy, esta tarea es acometida principalmente con la idea de obtener estimaciones rápidas y lo necesariamente precisas para las observaciones existentes. Los algoritmos más usados al día de hoy utilizan aproximaciones analíticas que disminuyen significativamente el costo computacional de la extracción, pero que pudieran no obtener el máximo beneficio científico de los datos adquiridos. La aplicación de funciones analíticas está sujeta, sin embargo, a la simplicidad de los sistemas. Así, cuando hay interacciones entre planetas no se pueden usar estas aproximaciones y es necesario enfrentarse al problema de  $N$  cuerpos. Esta posibilidad tomará más fuerza conforme la precisión de las observaciones vaya aumentando.

Por otro lado, la extracción de los parámetros de un planeta a partir únicamente de una curva de luz, por más tránsitos observados que se tengan, presenta serios desafíos, más allá de los puramente computacionales. El problema, en el caso general, puede presentar severas degeneraciones en uno o más parámetros, aún en modelos relativamente simples. La inclusión de datos que contengan información de otras características del sistema al análisis de una curva de luz, puede ayudar a remover degeneraciones en ciertos parámetros y a mejorar las estimaciones de algunos otros. Es el caso del análisis simultáneo de curvas de luz y curvas

de velocidad radial. Aunque en este trabajo no se abordará el tema, al ajuste simultáneo también se puede añadir más información, como la astrométrica.

Considerando lo anterior, este trabajo de tesis ha sido dedicado a desarrollar una metodología general con vistas a estudiar en un futuro próximo aquellos sistemas planetarios que presentan interacciones dinámicas entre sus planetas miembros, dedicando un esfuerzo en mantener la máxima precisión posible y en obtener el máximo potencial de los datos adquiridos, considerando para ello ajustes simultáneos de curvas de luz y curvas de velocidad radial.

### 1.3. Detección de exoplanetas

En 1995, la detección del primer planeta alrededor de una estrella distinta al Sol (51-Peg: Mayor & Queloz 1995) capturó la atención de la comunidad astrofísica. Aunque no fue el primer exoplaneta descubierto (en 1992 fue detectado un sistema planetario múltiple alrededor del pulsar PSR B1257+12, Wolszczan & Frail 1992), sí fue el primero que se halló en órbita alrededor de una estrella que, como nuestro sol, se encuentra en la fase principal de su evolución (la denominada secuencia principal). Es a partir de este descubrimiento, que comienza la vertiginosa carrera que ha sido la búsqueda de exoplanetas. El método usado para la detección de 51-Peg b es el denominado método de velocidad radial y, hasta hace unos pocos años, fue la herramienta más exitosa en esta tarea.

#### 1.3.1. Método de velocidad radial

El método de velocidad radial se basa en la medición de las variaciones periódicas en la componente de la velocidad de una estrella sobre la línea de visión del observador, también denominada velocidad radial. Mediante una serie de observaciones espectroscópicas, es posible obtener estas variaciones midiendo el corrimiento al rojo o al azul del espectro de luz de la estrella.

Una característica importante de este método, es que, con el instrumento adecuado, es teóricamente posible detectar cualquier planeta cuya impronta en la curva de velocidad radial de la estrella sea mayor al ruido generado por la rotación y actividad de la estrella, salvo en el caso estadísticamente menos frecuente en el que el plano de la órbita coincide con el plano del cielo.

Este método proporciona información acerca de las características puramente dinámicas de los planetas, en particular, sus masas y periodos orbitales. Esta característica lo hace el método de confirmación más confiable y utilizado (dada la masa de un objeto en órbita, es posible confirmar o descartar su naturaleza planetaria). Además, la masa de un planeta puede ser fácilmente estimada a partir de la semiamplitud que genera en la curva de velocidad radial de su estrella. Si



suponemos una órbita circular, dicha semiamplitud está dada por:

$$K = \left( \frac{2\pi G}{P} \right)^{1/3} \frac{m \sin i}{(M + m)^{2/3}}, \quad (1.1)$$

donde  $P$  es el periodo orbital,  $i$  es la inclinación orbital,  $M$  es la masa de la estrella y  $m$  la es la masa del planeta.

A pesar de lo simple que pueda parecer este método por la expresión anterior, el problema general en que dos o más planetas orbitan una estrella puede, debido a las interacciones dinámicas, necesitar un análisis computacionalmente exhaustivo. Esto debido a que, en principio, el movimiento de tres o más cuerpos que interaccionan dinámicamente es caótico. En estos casos un desarrollo numérico puede ser la manera apropiada de tratamiento, aunque no siempre la más factible. Esto se discute con detalle en la sección 1.4.4.

Con la llegada del telescopio espacial Kepler, el método de velocidad radial dio paso al denominado método del tránsito como el método con más planetas descubiertos, a pesar de requerir valores de inclinaciones adecuados para ver los planetas eclipsar sus estrellas. Dicho esto, los planetas candidatos encontrados por Kepler han de ser confirmados, lo que generalmente se hace con el método de la velocidad radial.

### 1.3.2. Método del tránsito

Este método se basa en la detección de la disminución periódica del flujo medido de una estrella cuando un planeta cruza el disco estelar desde el punto de vista del observador. Este último fenómeno se conoce como tránsito y se le añade el adjetivo primario cuando se le compara con el fenómeno inverso, es decir, cuando el planeta es ocultado por la estrella, al cual se le denomina tránsito secundario. Se puede establecer, mediante una consideración geométrica sencilla, que la inclinación de la órbita de dicho planeta respecto del plano del cielo del observador debe ser cercana a  $90^\circ$ ; dependiendo del tamaño de la estrella y del semieje mayor de la órbita, la desviación de la inclinación respecto de  $90^\circ$  puede ser de unos pocos grados, en la mayoría de los casos, y llegar incluso a poco más de  $20^\circ$  (de acuerdo con las inclinaciones obtenidas hasta ahora con los datos de Kepler).

A pesar de que estadísticamente representan una muestra pequeña del total de exoplanetas potencialmente detectables, con la puesta en marcha de amplios cartografiados celestes de larga duración (Kepler; CoRoT, Baglin et al. 2006; la red HATNet, Bakos et al. 2004; OGLE, Udalski (2003); los consorcios WASP y SuperWASP, Pollacco et al. 2006; entre otros), el descubrimiento de planetas en tránsito se ha hecho rutinario, particularmente con Kepler, hasta el punto de poder encontrar incluso planetas más pequeños que Mercurio (Barclay et al., 2013) y sistemas multiplanetarios.

Una gran ventaja de este método es que los objetos que pueden ser estudiados con él pueden también ser estudiados por el método de velocidad radial, permitiendo llevar a cabo un estudio más completo del sistema, así como minimizar el impacto de la degeneración en algunos parámetros en común para ambos métodos: la excentricidad, el argumento del periastro, y el periodo orbital.

Una de las características que hace más interesante a este método de estudio, es la impronta de algunas características de la estrella en la curva de luz, como su actividad y rotación. La actividad de una estrella puede conllevar a la falsa detección de objetos en tránsito (las manchas estelares pueden disminuir de una forma casi periódica el brillo de la estrella) o dificultar la detección de tránsitos débiles. Asimismo, algunos fenómenos adicionales pueden dificultar la caracterización de un sistema a partir de una curva de luz de un tránsito ó, cuando se combinan observaciones con distintas características, ayudar a romper alguna degeneración en algún modelo. Un ejemplo de esto último se presenta en Knutson et al. (2007), que utiliza la diferencia de la impronta en las curvas de luz a diferentes longitudes de onda de un fenómeno denominado oscurecimiento al borde para romper la degeneración en la inclinación orbital que se presenta en la forma de una curva de luz.

El oscurecimiento al borde de una estrella es la disminución del brillo del disco estelar de su centro a sus bordes. Es un fenómeno difícil de modelar físicamente y comúnmente se utilizan aproximaciones analíticas (p.e., Claret 2000, 2004; van Hamme 1993). La impronta de este fenómeno es distinta para diferentes longitudes de onda, siendo más evidente en el azul que en el rojo (véase la Figura 1.1).

### 1.3.3. Otros métodos

#### Método directo

El único método directo para observar un exoplaneta es la obtención de imágenes directas de éste. Para ello se requiere realizar imágenes con grandes telescopios que posean una excelente resolución angular para poder separar al planeta de su estrella huésped. Con los mejores instrumentos actuales, la obtención de este tipo de imágenes sólo es posible en ciertos casos en donde la órbita del exoplaneta se encuentra alejada lo suficiente de su estrella para poder resolverlo ópticamente pero tan cerca de ella que ésta pueda “calentar” lo necesario al planeta; más aún, este tipo de observación sólo es posible para sistemas cercanos y para exoplanetas gigantes. A la fecha existen algunos planetas con observaciones directas, entre estos se encuentran  $\beta$  Pic b, Fomalhaut b, y el sistema planetario de la estrella HR 8799 (Figura 1.2)

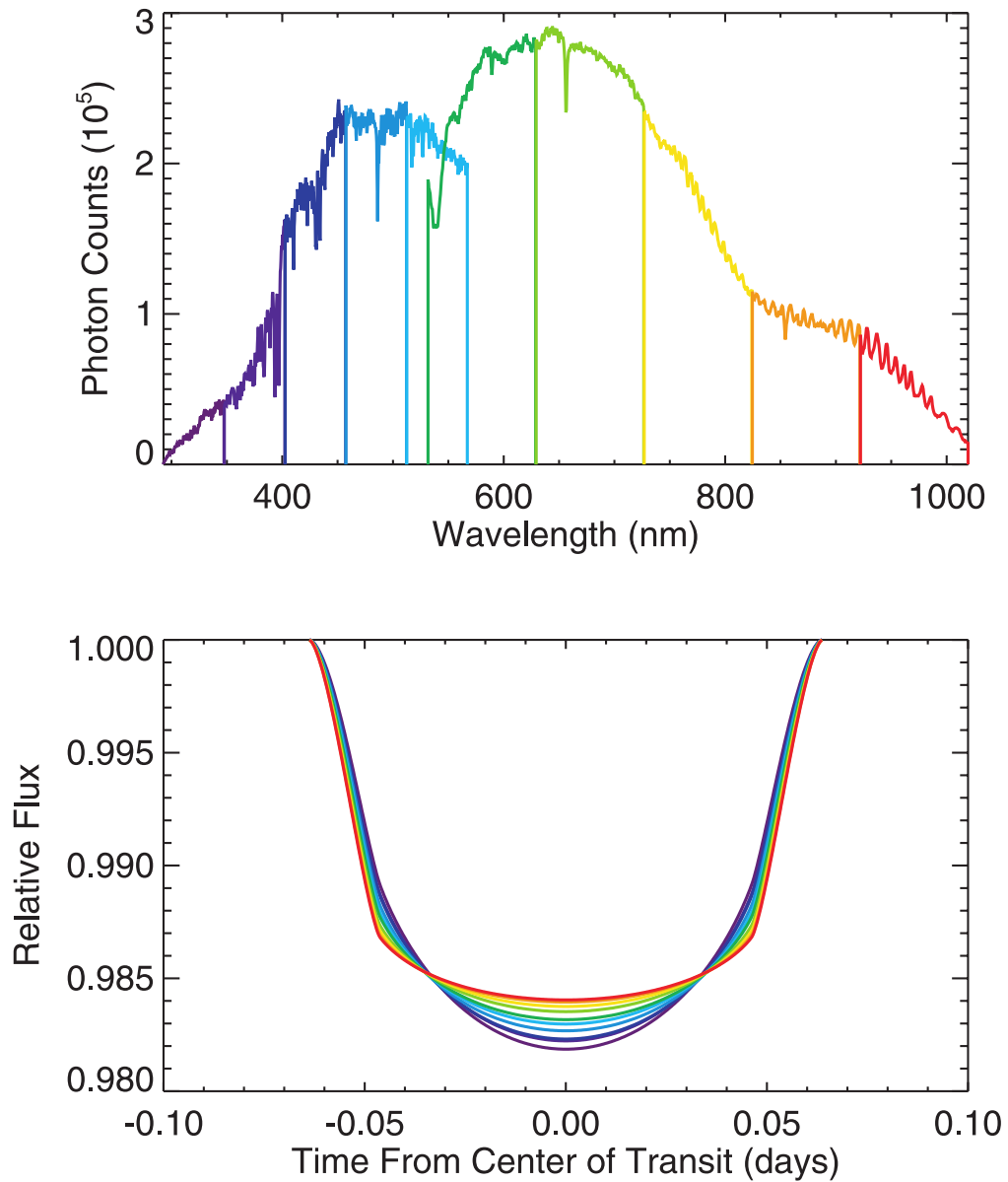


Figura 1.1: Imagen ilustrativa del efecto del oscurecimiento al borde en la curva de luz de un tránsito, según la longitud de onda de observación. El código de colores es correspondiente entre los dos paneles mostrados. Knutson et al. (2007).

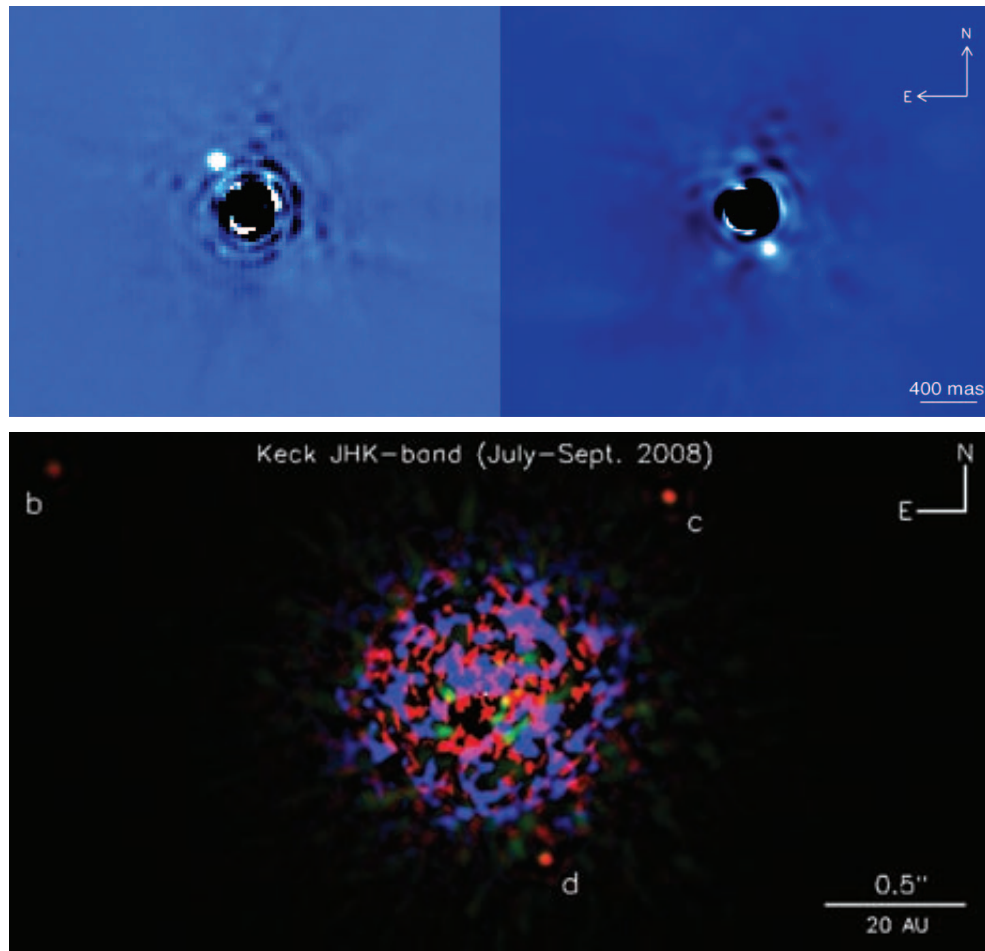


Figura 1.2: Imágenes directas de dos sistemas planetarios. En el panel superior se observa a  $\beta$  Pic b (Lagrange et al., 2010). En el panel inferior se observa el sistema planetario de la estrella HR 8799 (Marois et al., 2008).

**Transit Timing Variations (TTVs) y Transit Duration Variations (TDVs).**

La detección de un planeta por medio de la curva de luz de su estrella huésped no se limita a los planetas en tránsito. Si existe un planeta en tránsito y un segundo planeta que interacciona dinámicamente con el primero, la atracción gravitatoria que éste último ejerce sobre el planeta en tránsito puede generar una impronta en la curva de luz de su estrella huésped, ya sea produciendo variaciones del tiempo que pasa entre dos tránsitos sucesivos o TTVs, o bien propiciando una variación en la duración de los tránsitos o TDVs. Estos dos métodos han tenido sus propios éxitos en la detección y caracterización de exoplanetas. Uno de los ejemplos más célebres de este éxito es la caracterización del sistema de la estrella KOI-142 (Mazeh et al., 2013), conocido como “el rey de las variaciones de tránsitos” debido a que presenta TTVs con una amplitud de  $\sim 12$  hr (véase la Figura 1.3). Asimismo, entre los primeros descubrimientos de Kepler, el método de TTVs permitió confirmar dos planetas en tránsito alrededor de la estrella Kepler-9, contribuyendo a la detección de un tercer planeta en tránsito (Holman et al., 2010). Del mismo modo, este método ha sido utilizado más recientemente en la confirmación de decenas de sistemas planetarios (Steffen et al., 2013; Xie, 2013, 2014). Por otro lado, se espera que el método de TDVs sea de gran utilidad en la búsqueda de exolunas (Kipping, 2009). A la fecha, se han descubierto directamente por TTVs tres exoplanetas: Kepler-46 c, Kepler-419 c y KOI-620.02 (Exoplanet Team, 2014).

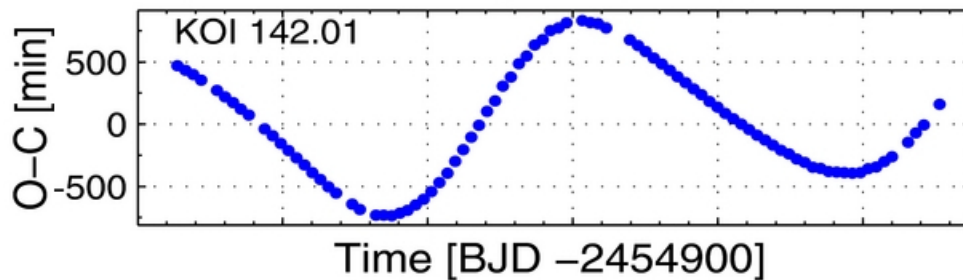


Figura 1.3: Gráfico de las TTVs de los tránsitos de KOI-142b. Cada punto de la curva representa un retraso o un adelanto, según el valor sea negativo o positivo respectivamente, de un tránsito dado respecto de una predicción lineal, es decir, considerando un periodo constante (O-C: observado menos calculado). La amplitud de la curva es  $\sim 12$  h. Mazeh et al. (2013), versión web.

**Astrometría**

Este es el método más antiguo en la búsqueda de exoplanetas, toda vez que sólo se requiere la medición de la posición de la estrella en el cielo en diferentes instantes de tiempo, tarea que se ha hecho en el pasado incluso antes de

la llegada de las placas fotográficas. Esta técnica tuvo mucho éxito en la caracterización de estrellas binarias visuales. No obstante, la baja perturbación en la posición de una estrella que supone una acompañante de baja masa, como lo es un planeta, dificulta la detección de nuevos exoplanetas con este método; a la fecha ha habido varias falsas detecciones pero ningún planeta confirmado que se haya detectado por primera vez con este método. Sin embargo, la astrometría es un método potencialmente complementario a la mayoría de los otros métodos de detección, pues su nicho de detección ideal son los planetas cuyas órbitas son paralelas al plano del cielo, los cuales no pueden ser detectados, por ejemplo, con el método de velocidad radial o el método del tránsito. Además, pueden proveer información adicional a análisis realizados por otros métodos; en particular, las variaciones temporales de la posición observada de una estrella pueden incorporarse a un análisis conjunto basado en un modelo de  $N$  cuerpos, como el que ha sido desarrollado en este trabajo (ver la Sección 1.4.4).

### **Microentes gravitacionales**

Cuando un planeta (o cualquier otro objeto compacto) pasa en la línea de visión de un observador hacia una estrella más distante (o cualquier otro objeto de fondo), el brillo que percibe el observador es magnificado debido a la curvatura que produce el campo gravitacional del planeta en la luz de la estrella. Hasta la fecha se han descubierto 33 exoplanetas usando este efecto.

### **Efecto de beaming relativista**

Este efecto, también conocido como efecto Doppler relativista, consiste en el incremento o disminución del brillo observado de una estrella según se le observe con una velocidad radial positiva o negativa, es decir acercándose o alejándose. Además del efecto Doppler común que desplaza el espectro de luz al azul o al rojo, este efecto produce que una mayor cantidad de fotones se propaguen en la dirección en la cual se desplaza la estrella, teniendo un efecto contrario en la dirección opuesta. Kepler-76 b fue detectado por primera vez usando este efecto además de otros dos: las modulaciones elipsoidales y las modulaciones de reflexión (Faigler et al., 2013).

## **1.4. Caracterización de sistemas planetarios**

### **1.4.1. Elementos orbitales keplerianos**

El problema dinámico de los dos cuerpos, es decir, hallar una descripción del movimiento de dos cuerpos respecto de un sistema de referencia arbitrario, es el

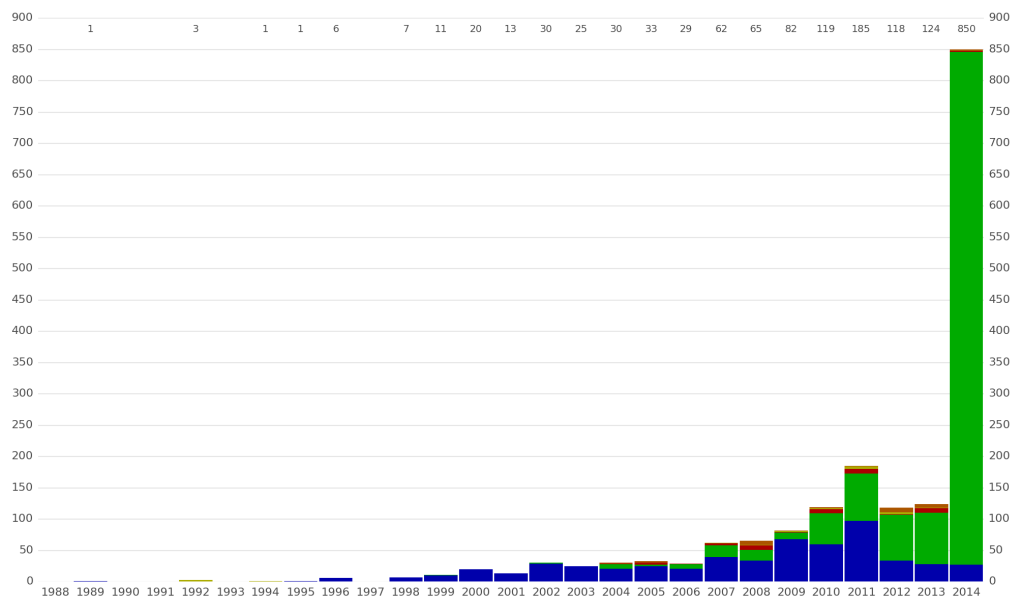


Figura 1.4: Gráfico de barras que muestra el número de detecciones de exoplanetas por año hasta 2014. Se usan códigos de colores para mostrar la contribución de cada método: verde, método del tránsito; azul, velocidad radial; amarillo, TTVs; rojo, imagen directa; naranja, lentes gravitatorias. Crédito: “Discovery Methods Bar”, Aldaron. Wikimedia Commons. Actualizado el 2014-09-23, datos de Open Exoplanet Catalogue.

único caso del problema general de  $N$ -cuerpos que admite una solución analítica que se expresa en las leyes de Kepler.

La elipse que según la primera ley de Kepler traza un objeto, denominado cuerpo menor, al orbitar un segundo objeto, denominado cuerpo mayor, puede ser descrita de forma unívoca espacial y temporalmente (es decir, en qué punto de la elipse se encuentra el cuerpo menor en un tiempo dado) mediante 6 parámetros. El conjunto de parámetros más extendido para esta tarea es de los denominados elementos keplerianos. Una posible expresión de estos últimos es la siguiente:

- $a$      $\equiv$     El semieje mayor de la órbita. Establece el tamaño de la órbita.
- $e$      $\equiv$     La excentricidad de la órbita. Define cuán elongada es la elipse trazada por la órbita.
- $\Omega$     $\equiv$     La longitud del nodo ascendente. Es el ángulo que hace el nodo ascendente, es decir, el punto en el que la órbita cruza el plano del cielo de forma ascendente, con la línea de visión del observador respecto del centro de la órbita. Orienta el plano de la órbita respecto de la línea de visión.
- $i$      $\equiv$     La inclinación de la órbita. Es el ángulo que hace el plano de la órbita con el plano del cielo del observador.
- $\omega$     $\equiv$     El argumento del periastro. Define la orientación de la elipse sobre el plano de la órbita. Es el ángulo que hace el periastro (el punto más cercano de la órbita al cuerpo mayor) con el nodo ascendente respecto del centro de la órbita.
- $M_0$     $\equiv$     La anomalía media. Define la posición del objeto menor en la órbita en un tiempo dado.

#### 1.4.2. Modelos analíticos para curvas de luz de sistemas en tránsito

En los inicios de la búsqueda de exoplanetas, las observaciones dedicadas a buscar tránsitos eran breves, de unos pocos días, y de una precisión modesta. En tales condiciones, la detección de exoplanetas por este método tenía una tendencia hacia los planetas gigantes y cercanos a su estrella y frecuentemente presentaban excentricidades cercanas a cero. Seager & Mallén-Ornelas (2003) encontró una solución única para los parámetros de un sistema formado por una estrella y un planeta a partir de una curva de luz de uno o más tránsitos, la cual era válida para este tipo de órbitas. El modelo desarrollado en Seager & Mallén-Ornelas (2003) utiliza fórmulas aritméticas que permiten obtener aproximaciones útiles y rápidas. Otra ventaja de este modelo es que permite estimar la densidad estelar a partir únicamente de la curva de luz de uno o más tránsitos.

Este modelo considera las siguientes características del sistema:

1. La órbita del planeta es circular.



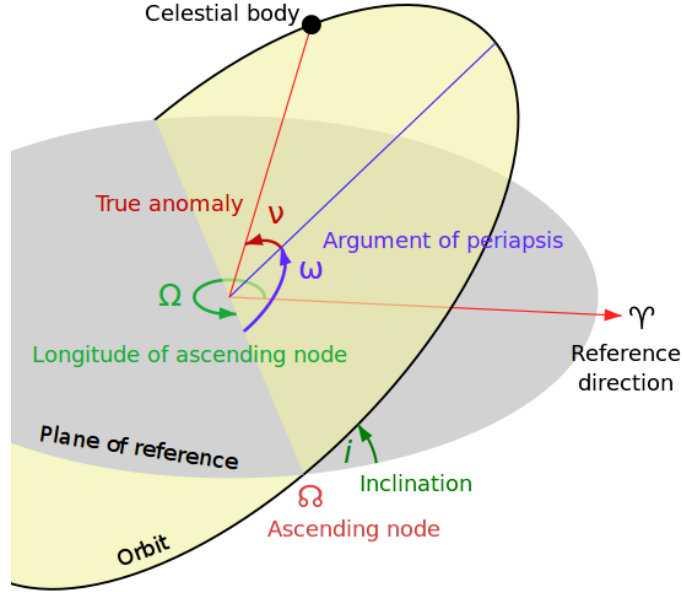


Figura 1.5: Disposición de los elementos keplerianos. “Orbit1” by Lasunncty (talk). Wikipedia.

2.  $M_p \ll M_*$  y la compañera es oscura en comparación a la estrella.  $M_p$  y  $M_*$  son las masas del planeta y de la estrella, respectivamente.
  3. Se conoce la relación masa-radio de la estrella.
  4. La luz proviene sólo de una estrella y no de dos o más estrellas combinadas.
- Además, se requiere de las siguientes condiciones sobre la curva de luz:
1. Los tránsitos deben presentar fondos planos en la curva de luz.
  2. El periodo puede ser derivado de la curva de luz.

Si estas condiciones son satisfechas, entonces el modelo permite calcular los cuatro parámetros físicos  $R_p/R_*$ ,  $b$ ,  $a/R_*$ ,  $\rho_*$  a partir de los observables  $t_T$  (duración total del tránsito),  $t_F$  (duración de la sobreimposición completa del disco planetario sobre el disco estelar),  $\Delta F$  (profundidad del tránsito) y  $P$  (periodo orbital), mediante las fórmulas:

$$\frac{R_p}{R_*} = \sqrt{\Delta F}, \quad (1.2)$$

$$b \equiv \frac{a}{R_*} \cos i$$

$$= \left\{ \frac{\left(1 - \sqrt{\Delta F}\right)^2 - \left[\sin^2\left(\frac{t_F \pi}{P}\right) / \sin^2\left(\frac{t_T \pi}{P}\right)\right] \left(1 + \sqrt{\Delta F}\right)^2}{1 - \left[\sin^2\left(\frac{t_F \pi}{P}\right) / \sin^2\left(\frac{t_T \pi}{P}\right)\right]} \right\}^{1/2}, \quad (1.3)$$

$$\frac{a}{R_*} = \left\{ \frac{\left(1 + \sqrt{\Delta F}\right)^2 - b^2 \left[1 - \sin^2\left(\frac{t_T \pi}{P}\right)\right]}{\sin^2\left(\frac{t_T \pi}{P}\right)} \right\}^{1/2}, \quad (1.4)$$

$$\rho_* \equiv \frac{M_*}{R_*^3}$$

$$= \left(\frac{4\pi^2}{P^2 G}\right) \left\{ \frac{\left(1 + \sqrt{\Delta F}\right)^2 - b^2 \left[1 - \sin^2\left(\frac{t_T \pi}{P}\right)\right]}{\sin^2\left(\frac{t_T \pi}{P}\right)} \right\}. \quad (1.5)$$

A partir de los parámetros obtenidos y utilizando una relación radio-masa para la estrella, por ejemplo una ley del tipo

$$R_* = k M_*^x \quad (1.6)$$

es posible obtener los parámetros  $M_*$ ,  $R_*$  (radio de la estrella),  $i$  (inclinación),  $a$  (longitud del semieje mayor) y  $R_p$  (radio del planeta).

### 1.4.3. Modelos analíticos para curvas de velocidad radial

Los modelos analíticos de las curvas de velocidad radial resultan muy simples. Un modelo que incluye la excentricidad de la órbita es el siguiente:

$$V(t) = V_0 + \frac{2\pi a m \sin i}{(M + m)P\sqrt{1 - e^2}} (\cos(\nu(t) + \omega) + e \cos \omega), \quad (1.7)$$

en donde  $V(t)$  es la velocidad radial de la estrella en el tiempo  $t$ ,  $V_0$  es la velocidad del sistema planetario en conjunto,  $m$  es la masa del planeta,  $M$  es la masa de la estrella y los demás parámetros corresponden a la órbita del planeta: la longitud del semieje mayor,  $a$ ; la excentricidad,  $e$ ; la inclinación,  $i$ ; la anomalía verdadera,  $\nu$ , y el argumento del periastro,  $\omega$ .

Este modelo se simplifica un poco si consideramos órbitas circulares:

$$V(t) = V_0 + \frac{2\pi a m \sin i}{(M + m)P} \cos(l(t)), \quad (1.8)$$

en donde  $l(t)$  es el argumento de latitud, es decir, el ángulo que hace la posición del objeto con el nodo ascendente (el argumento del periastro y la anomalía verdadera no están definidos para órbitas elípticas).

#### 1.4.4. Modelo de N cuerpos

La evolución dinámica de un sistema planetario está dominada totalmente por la atracción gravitatoria entre sus componentes. Para la mayoría de los sistemas tales interacciones se dan en el régimen no relativista. En tales circunstancias, la forma más precisa de modelar dicha evolución es utilizando directamente las ecuaciones de movimiento newtoniano. Para un sistema de  $n$  cuerpos, estas ecuaciones pueden ser descritas por el sistema de  $2n$  ecuaciones diferenciales ordinarias (ODEs, por sus siglas en inglés) vectoriales de primer orden compuesto por las siguientes ecuaciones:

$$\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \mathbf{v}_i, \quad (1.9)$$

$$\frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = G \sum_{j \neq i} \frac{m_j}{\|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\|^3} (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j), \quad (1.10)$$

para cada  $i$  comprendido en  $1, \dots, n$ .

El número de variables libres en este sistema es de  $2n$ . Usando las simetrías físicas del sistema es posible reducir el número de variables libres, reduciendo el costo computacional para resolver dicho sistema. Las simetrías son las siguientes:

- **Traslacionales:** En ausencia de una fuerza externa al sistema de  $n$ -cuerpos, el centro de masa del sistema se desplaza como una partícula con aceleración nula. En otras palabras, la posición del centro de masa puede ser descrito por:

$$\mathbf{r}_{CM}(t) = \mathbf{R} + t\mathbf{V}, \quad (1.11)$$

en donde los vectores  $\mathbf{R}$  y  $\mathbf{V}$  son constantes y representan la posición en el tiempo  $t = 0$  y la velocidad del centro de masa. La constancia de estos vectores proporciona la primera reducción del número de variables libres.

- **Rotacionales:** En ausencia de una fuerza ajena al sistema, el torque externo aplicado al sistema de  $n$ -cuerpos es cero. Esto implica que el momento angular del sistema permanece constante

$$\sum_i \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i = A_0. \quad (1.12)$$

Una última constante del sistema está dada por la conservación de la energía:

$$K + U = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2 + G \sum_{i < j} \frac{m_i m_j}{\|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\|}. \quad (1.13)$$

Usando las simetrías del problema, la complejidad computacional se puede reducir de un sistema de  $2n$  ODEs a  $2n - 10$  ODEs.

### 1.4.5. Extracción simultánea de parámetros

Uno de los métodos más efectivos para combinar la información de dos o más tipos de observaciones de naturaleza distinta pero con un origen común, es la extracción simultánea: a partir de un modelo base que intenta describir el origen común de las observaciones, obtenemos modelos para cada uno de los tipos de observación. En nuestro caso la información que proviene de observaciones distintas son las curvas de luz y las curvas de velocidad radial de sistemas en tránsito; el origen común es el movimiento orbital que produce las variaciones observadas en éstas. Por separado, la modelación de dichas curvas puede proporcionarnos información acerca de los siguientes parámetros:

1. Curvas de luz:  $\omega$ ,  $e$ ,  $P$ ,  $T_p$ ,  $i$ ,  $a/R_\star$  y  $R_p/R_\star$ ,
2. Curvas de velocidad radial:  $\omega$ ,  $e$ ,  $P$ ,  $T_p$  y  $K$ ,

donde  $\omega$  es el argumento del periastro,  $e$  excentricidad orbital,  $P$  es el periodo orbital<sup>2</sup>,  $T_p$  es el tiempo total de duración del tránsito,  $i$  es la inclinación orbital,  $a$  es el semieje mayor de la órbita,  $R_p$  es el radio del planeta,  $R_\star$  es el radio de la estrella y  $K$  es la semiamplitud de la velocidad radial.

Un parámetro que se puede determinar “completamente” a partir de los anteriores es la masa del planeta,  $m$ . Es posible determinar la inclinación,  $i$ , a partir de la curva de luz y luego determinar  $m \sin i$  a partir de la curva de velocidad radial, para finalmente determinar  $m$  (y su incertidumbre), con algunas operaciones simples. Sin embargo, esto puede producir ciertos sesgos en la determinación de  $m$ ; los parámetros en común no tienen porque coincidir para ambas curvas. En este sentido, la extracción simultánea de estos parámetros puede proporcionarnos información del sistema con mayor coherencia, a partir de ambos tipos de datos.

Un aspecto quizás más importante de la extracción simultánea es que potencialmente permite restringir las degeneraciones en un modelo dado, en comparación con la extracción separada.

### 1.4.6. Degeneraciones en la extracción de parámetros

En la búsqueda de un modelo que describa lo mejor posible un conjunto de datos, es posible hallar modelos que ofrezcan más de una respuesta que, estadísticamente, sea igual de aceptable. En el caso que nos atañe, no siempre es posible caracterizar de forma unívoca un sistema planetario dado un conjunto de observaciones. Considérese una curva de luz hipotética,  $C$ , la cual admite una curva modelo, digamos  $K_p$ , que ajusta perfectamente todos los datos de la curva, es decir, que  $K_p$  coincide con  $C$ . Si se consideran incertidumbres en la curva  $C$ , cualquier curva modelo que pase sobre las barras de error de ésta puede considerarse una solución estadísticamente tan válida como  $K_p$ . En efecto, para modelos lineal-

<sup>2</sup>El periodo puede ser determinado usando un periodograma de Lomb-Scargle (Lomb, 1976; Scargle, 1982).

les, dos curvas con un estadístico  $|\Delta\chi_{red}^2| \approx |\Delta\chi^2/N| < 3 * \sqrt{2/N}$ , donde  $N$  es el número de puntos de los datos, no pueden ser distinguidos de manera estadísticamente confiable (Andrae et al., 2010). Más aún, para modelos no lineales, la determinación de  $\chi_{red}$  es otra fuente de incertidumbre (Andrae et al., 2010). La inclusión de datos que contienen información proveniente de otras características del sistema en un análisis simultáneo puede mejorar el análisis. Esto no siempre se extiende a la inclusión de datos del mismo tipo, por ejemplo, la simple inclusión de más puntos en la curva de luz  $C$  con el mismo nivel de incertidumbre, no reduciría el rango de soluciones que pasan sobre las barras de error de la nueva curva.

#### 1.4.7. Estado del arte del *software* para el análisis de curvas de luz y curvas de velocidad radial

ExoFast (Eastman et al., 2013) es un conjunto de rutinas escritas en el lenguaje de programación científico IDL diseñado para ajustar tránsitos exoplanetarios y variaciones de velocidad radial simultánea o separadamente y caracterizar los parámetros, incertidumbres y covarianzas con un método MCMC (véase la Sección 2.2.2) de evolución diferencial. Proporciona un marco extensible y modular que permite extender sus capacidades. Sin embargo está diseñado considerando sistemas de un sólo planeta (es decir, que no considera interacciones dinámicas), aunque es posible adaptarlo para utilizar efectos adicionales (TTVs o tránsitos diferenciales, por ejemplo). Su análisis estadístico es básico pero suficiente.

PlanetPack (Baluev, 2013) es un *software* originalmente concebido para el análisis avanzado de datos de velocidad radial cuyos objetivos son la detección y caracterización de exoplanetas, además de realizar simulaciones básicas de  $N$  cuerpos. Su diseño está enfocado en el uso extensivo (posee un modo interactivo pero puede ser utilizado también en procesos en serie). Puede realizar ajustes a velocidades radiales en sistemas múltiples tanto con órbitas keplerianas como con un modelo de  $N$  cuerpos. Además, puede incorporar errores autocorrelacionados y dispone de varias rutinas para la determinación de la significancia estadística de los resultados. Está programado en C++ y ha sido optimizado para disminuir su costo computacional. Recientemente se le ha incorporado la posibilidad de ajustar uno o más tránsitos, pudiendo detectar TTVs, además de que se le ha incorporado la capacidad de ejecución paralela y en multihilos (Baluev, 2014).

Systemic Console 2 es la nueva versión de Systemic Console (Meschiari et al., 2009), que es un paquete que incorpora diversas herramientas para el análisis de datos de velocidad radial y TTVs, pudiendo utilizar un modelo de  $N$  cuerpos. Su característica más llamativa es quizás su interfaz interactiva, aunque sus rutinas también pueden ser utilizadas en procesos en serie mediante una interfaz de alto nivel para el lenguaje de programación estadístico R. Está escrito en C y tiene capacidades de paralelización, además de ofrecer la posibilidad de proporcionar

rutinas personalizadas para ciertas tareas (la integración numérica y la estimación de los errores).

*Transit Analysis Package* (TAP; Gazak et al. (2012); Gazak et al. (2011)) es un paquete de *software* escrito en IDL que utiliza técnicas MCMC para ajustar curvas de luz de tránsitos usando ExoFast. Es capaz de ajustar simultáneamente curvas de luz observadas en distintas condiciones, distintos filtros, etc., además de incorporar un análisis de errores basado en wavelets que considera ruido auto-correlacionado. Posee una interfaz gráfica que hace muy intuitivo sus uso.

AutoKep (Gazak et al., 2011) es una herramienta gráfica para la preparación de curvas de luz a partir de los datos de *Kepler en Mikulski Archive for Space Telescopes* (MAST) para su análisis mediante TAP (u otros *softwares*).

JKTEBOP (Southworth 2008). Este programa usa el modelo de EBOP (Eclipsing Binary Orbit Program), el cual simula las componentes de un sistema binario eclipsante usando elipsoides biaxiales e integra numéricamente en anillos concéntricos sobre su superficie. JKTEBOP incorpora además el algoritmo de optimización de Levenberg-Marquardt, un tratamiento mejorado del oscurecimiento al borde y extensas técnicas de análisis de errores. El cálculo de errores se hace mediante un algoritmo de simulación basado en métodos de Monte Carlo.

## Capítulo 2

# Metodología

### 2.1. Conversión de parámetros keplerianos a coordenadas cartesianas

En cada instante de tiempo, es posible asignar una órbita kepleriana tangente a la órbita de un cuerpo menor aún en presencia de una fuerza externa que perturbe el movimiento del primero (en tales condiciones es claro que la órbita no es kepleriana), la cual representaría el movimiento del cuerpo si instantáneamente la fuerza externa cesase. En otras palabras, es la órbita kepleriana que coincide con los vectores de estado orbitales en ese momento. La órbita tangente se denomina órbita osculante y a los elementos keplerianos que la determinan se les llama elementos osculantes.

La asignación arbitraria de vectores de estado iniciales no crea una órbita elíptica en la mayoría de los casos, porque en la ausencia de fuerzas externas, vectores de estado arbitrarios podrían producir ya sea trayectos parabólicos, hiperbólicos o elipsoidales.

Una manera conveniente de establecer las constantes iniciales para la integración de las ecuaciones diferenciales es mediante el uso de vectores de elementos keplerianos; con perturbaciones despreciables, estos producirían órbitas keplerianas.

Para poder usar elementos keplerianos como constantes iniciales, es necesario realizar una conversión a vectores de estado. Ahora vamos a describir esta conversión.

1. Se halla la excentricidad anómala,  $E$ , mediante la ecuación de Kepler  $M = E - e \sin E$  usando un algoritmo numérico. En este trabajo hemos usado el algoritmo de Newton-Rapson.

## 2.1 Conversión de parámetros keplerianos a coordenadas cartesianas 9

2. Se obtiene la anomalía verdadera,  $\nu$ , mediante la fórmula:

$$\nu = 2 \arctan2 \left( \sqrt{1+e} \sin \frac{E}{2}, \sqrt{1-e} \cos \frac{E}{2} \right). \quad (2.1)$$

3. Se obtiene la distancia al cuerpo mayor por medio de la expresión:

$$r_c = a(1 - e \cos E); \quad (2.2)$$

4. y los vectores de posición,  $\mathbf{o}$ , y velocidad,  $\dot{\mathbf{o}}$  en el marco de referencia orbital, es decir, con el eje  $z$  perpendicular al plano de la órbita, el eje  $x$  en la dirección y sentido del periastro y el origen en la posición del cuerpo mayor:

$$\mathbf{o} = r_c (\cos \nu, \sin \nu, 0) \quad (2.3)$$

$$\dot{\mathbf{o}} = \frac{\sqrt{GMa}}{r_c} \left( -\sin E, \sqrt{1-e^2} \cos E, 0 \right) \quad (2.4)$$

5. Se hacen las transformaciones necesarias para pasar del sistema de referencia orbital al sistema de referencia orientado según el observador (el origen del sistema de coordenadas es también la posición del cuerpo mayor). Esto es, se obtienen los vectores de posición,  $\mathbf{r}$  y velocidad,  $\mathbf{v}$ , a partir de los vectores  $\mathbf{o}$  y  $\dot{\mathbf{o}}$ . Estas transformaciones colocan a la órbita con un argumento del periastro  $\omega$ , inclinación  $i$ , y longitud del nodo ascendente  $\Omega$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= R_z(-\Omega)R_x(-i)R_z(-\omega)\mathbf{o}(t) \\ &= o_x(t) \begin{pmatrix} \cos \omega \cos \Omega - \sin \omega \cos i \sin \Omega \\ \cos \omega \sin \Omega - \sin \omega \cos i \cos \Omega \\ \sin \omega \sin i \end{pmatrix} + \\ & \quad o_y(t) \begin{pmatrix} -\sin \omega \cos \Omega - \cos \omega \cos i \sin \Omega \\ -\sin \omega \sin \Omega + \cos \omega \cos i \cos \Omega \\ \cos \omega \sin i \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t) &= R_z(-\Omega)R_x(-i)R_z(-\omega)\dot{\mathbf{o}}(t) \\ &= \dot{o}_x(t) \begin{pmatrix} \cos \omega \cos \Omega - \sin \omega \cos i \sin \Omega \\ \cos \omega \sin \Omega - \sin \omega \cos i \cos \Omega \\ \sin \omega \sin i \end{pmatrix} + \\ & \quad \dot{o}_y(t) \begin{pmatrix} -\sin \omega \cos \Omega - \cos \omega \cos i \sin \Omega \\ -\sin \omega \sin \Omega + \cos \omega \cos i \cos \Omega \\ \cos \omega \sin i \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.6)$$



## 2.2. Algoritmos de extracción paramétrica

### 2.2.1. Asexual Genetic Algorithm

Los algoritmos genéticos son una familia de algoritmos que se inspiran en algunas pautas de la herencia genética y de la evolución darwiniana. A partir de una población inicial, se forma una nueva población con características similares a las de los padres, pero en las cuales el azar toma un papel importante. Posteriormente se aplica un proceso de selección en el que los individuos con ciertas características deseables sobreviven y pueden repetir el ciclo.

AGA (*Asexual Genetic Algorithm*) se puede catalogar como un algoritmo genético, aunque difiere de los algoritmos genéticos estándar en la forma en que se construyen las nuevas generaciones. A diferencia de estos últimos, en los que cada nuevo individuo involucra a dos padres, la creación de nuevos individuos de una población en AGA sólo requiere de un individuo padre, lo que podría denominarse reproducción asexual (Cantó et al., 2009). La estructura general de este algoritmo aplicado a ajustes de datos a curvas paramétricas se puede establecer como sigue:

1. Generar una población inicial aleatoria de curvas (es decir, una colección de puntos en el espacio paramétrico). Este paso es la primera y más fuerte restricción del muestreo del espacio paramétrico.
2. Elegir los mejores individuos por medio de una función mérito, por ejemplo, el estadístico  $\chi^2$  (véase la Sección 2.3.2). La elección se hace de tal forma que el algoritmo pueda converger a uno o varias soluciones (por ejemplo eligiendo en cada iteración a los puntos descendientes más cercanos a sus padres).
3. Construir una nueva población a partir de los individuos seleccionados en 2. Los individuos padre son incluidos en la nueva población.
4. Iterar al paso 2 si no se ha alcanzado alguno de los criterios de alto.

### 2.2.2. Métodos de Monte Carlo vía cadenas de Markov

*Métodos de Monte Carlo vía cadenas de Markov (MCMC)*. Los algoritmos basados en MCMC son muy variados y aquellos basados en caminatas aleatorias son los más simples. En este caso se describe una implementación del algoritmo Metrópolis-Hastings, siguiendo a Collier Cameron et al. (2007), cuya estructura se puede resumir como sigue:

1. Se elige un punto inicial en el espacio paramétrico.
2. Se perturba al punto actual con saltos aleatorios adecuados en cada componente. Dichos saltos se acercan a 0 conforme el algoritmo evoluciona.
3. Se decide si se mantiene el punto actual o se sustituye por el punto obtenido en la perturbación usando una función denominada cociente de aceptación, que para esta implementación es la exponencial negativa del estadístico  $\chi^2$ . Esta función determina la probabilidad de aceptar el nuevo punto, si su valor

es menor que 1, o que se acepte automáticamente el punto, si tal función es mayor o igual a 1.

4. Si no se ha alcanzado alguno de los criterios de alto se itera al paso 2.

## 2.3. Descripción del modelo

Nuestro modelo se puede separar en tres partes: el modelo físico, el método de exploración del espacio paramétrico y selección del mejor ajuste, y la estimación de los parámetros del modelo que mejor describen los datos y las incertidumbres asociadas.

### 2.3.1. Modelo físico

Para este modelo se consideran estimaciones halladas en la literatura de los parámetros intrínsecos de la estrella, que para este caso son su masa y su radio, además de la ley de oscurecimiento al borde, incluyendo sus coeficientes.

El modelo físico se basa en la integración numérica de un modelo de  $N$  cuerpos, caracterizado por una  $n$ -tupla de parámetros. Dicha  $n$ -tupla consiste de 6 parámetros keplerianos por cada cuerpo considerado, distinto de la estrella, que indican las posiciones iniciales de cada planeta en el marco de referencia de la estrella. El modelo de  $N$  cuerpos se integra mediante un método Runge-Kutta-Fehlberg (4,5) para obtener los vectores de posición y velocidad en cada punto temporal en el que se tienen datos, ya sea de velocidad radial o de la curva de luz. A partir de dichos vectores, se obtiene la componente radial de la velocidad de la estrella y la posición del planeta en tránsito en relación al disco estelar según el punto de vista del observador. Con este último dato se obtiene la disminución del brillo de la estrella, usando el modelo de Mandel & Agol (2002). De este modo se obtienen una curva de velocidad radial y una curva de luz modelos.

### 2.3.2. Método de exploración del espacio paramétrico y selección del mejor ajuste

Para hallar el mejor ajuste al modelo se utilizó AGA (véase la Sección 2.2.1). La selección del mejor ajuste se hizo considerando las curvas modelo que minimizaran el estadístico  $\chi^2$ .

$$\chi^2 = \sum \left( \frac{v_{mod,i} - v_i}{\sigma_i} \right)^2 + \sum \left( \frac{f_{mod,i} - f_i}{\varsigma_i} \right)^2, \quad (2.7)$$

en donde la primera sumatoria cuantifica el ajuste de las curvas de velocidad radial y la segunda cuantifica el ajuste de las curvas de luz. Por supuesto, para ello hemos supuesto que los errores de los datos son Gaussianos.

### 2.3.3. Estimación de los parámetros y sus incertidumbres

La estimación de los parámetros y sus errores asociados correspondientes al modelo arriba descrito se hizo mediante una técnica de Monte Carlo. A partir de la curva de luz original se genera una curva de luz “sintética” de la siguiente manera: por cada punto  $(t_i, l_i + \varsigma_i)$  de la curva de luz original generamos un punto  $(t_i, l'_i)$ , donde  $l'_i$  se obtiene aleatoriamente a partir de la distribución Gaussiana con media  $l_i$  y desviación estándar  $\varsigma_i$ . Análogamente generamos una curva de velocidad radial. Una vez generadas, obtenemos el mejor ajuste del modelo a estas curvas sintéticas.

Este proceso se repite un número suficiente de veces y se almacenan las tuplas de parámetros correspondientes a los mejores ajustes. Posteriormente, para un parámetro dado del modelo, se realizan histogramas con los valores de la componente correspondiente de las tuplas de parámetros almacenados. Esto nos devuelve una distribución para cada parámetro del modelo de la cual podemos extraer el valor esperado del parámetro y su incertidumbre asociada.

### 2.3.4. Programación del algoritmo

El algoritmo fue programado en el lenguaje de uso general C. Para la integración numérica se utilizaron las rutinas correspondientes de la GNU Scientific Library (GSL). Para disminuir el tiempo de cómputo, se utilizó programación multiprocesos de memoria compartida (es decir, sólo para una estación de trabajo, corriendo varios hilos del mismo proceso), lo cual se implementó usando la versión de GNU de la interfaz OpenMP (denominada libgomp). El programa usa los códigos de Mandel & Agol (2002) escritos en el lenguaje Fortran 77 para la modelación de la disminución del brillo estelar durante los tránsitos planetarios.

### 2.3.5. Equipo usado

El modelo ha sido ejecutado en los siguientes equipos:

1. Intel Core i7 3970X con 6 núcleos, 12 hilos, a 3.5 GHz, memoria RAM a 1600MHz.
2. Intel Core i7 2600 con 4 núcleos, 8 hilos a 3.4 GHz, memoria RAM a 1333MHz.
3. Intel Core i7 4500U con 2 núcleos, 4 hilos a 3GHz, memoria RAM a 1600MHz.

## Capítulo 3

# Resultados

Ahora presentamos los ejemplos de validación de nuestro modelo. Estos sistemas son sistemas con sólo un planeta confirmado y se eligieron por las siguientes razones: HD 209458, por contar con una estrella relativamente brillante ( $V = 7.65$ ), por ser uno de los sistemas planetarios más estudiados y por contar con observaciones de excelente calidad; HAT-P-14, por estar en el límite de observación de PHASES ( $V = 10$ ); WASP-44, por contar con una estrella relativamente débil ( $V = 12.9$ ) y, con ello, permitirnos examinar el desempeño del modelo con datos con un nivel más alto de ruido.

### 3.1. HD 209458 b

HD 209458 b es un planeta subjoviano (en masa, superjoviano en radio) que orbita con un periodo muy corto una estrella de tipo G0V. Este exoplaneta fue el primero en ser observado transitando su estrella huésped. Fue reportado por primera vez por Henry et al. (1999) y Latham et al. (1999) dentro de dos proyectos independientes de búsqueda de exoplanetas por medio del método de velocidad radial, usando el Telescopio Keck/HIRES, y los espectrógrafos ELODIE, en el Telescopio de 1.93 m en el Observatoire de Haute Provence, y CORALIE en el telescopio Leonhard Euler de 1.2 m en La Silla. Las primeras observaciones de tránsitos de HD 209458 fueron obtenidas por Charbonneau et al. (2000) y Henry et al. (2000). Robichon & Arenou (2000) por su parte, usando los datos de fotometría de la misión Hipparcos, obtuvo un periodo orbital de  $3.524739 \pm 0.000014$  días.

Este sistema ha sido estudiado por medio de numerosos instrumentos, siendo uno de los objetos estelares más observados. Entre las observaciones más remarquables se encuentran la fotometría de alta precisión (Brown et al., 2001) y la espectroscopía de transmisión (Sing et al., 2008) realizadas con el telescopio espacial Hubble.

En los últimos años, HD 209458 b y su estrella huésped han sido el objetivo de un gran cantidad de investigaciones acerca de la naturaleza y dinámica de las atmósferas de planetas gigantes cercanos a su estrella (los llamados Júpiteres calientes): simulaciones de la dinámica atmosférica (Ionov et al., 2012), composición química detallada y estructura (Moses et al., 2011; Vidal-Madjar et al., 2011, 2013), evaporación o escape de material atmosférico (Bourrier & Lecavelier des Etangs, 2013; Bourrier et al., 2014; Lecavelier Des Etangs, 2010; Liliensten et al., 2013), inversión térmica (Diamond-Lowe et al., 2014), etc.

### 3.1.1. Datos

Los datos de fotometría de HD 209458 usados en este trabajo fueron tomados de Brown et al. (2001). Las mediciones de velocidad radial fueron tomados de Butler et al. (2006). Ambas curvas fueron plegadas usando un periodo de 3.52474859 (Southworth, 2008) y un tiempo central de 2453344.76824 (Richardson et al., 2006). Los coeficientes de oscurecimiento al borde (cuadráticos) considerados son  $q_1 = 0.2925$  y  $q_2 = 0.3475$ . El radio de la estrella,  $R$ , fue obtenido de Boyajian et al. (2014). Usando este dato y la densidad,  $\rho$ , hallada en la misma fuente, se calculó la masa,  $M$ . Su incertidumbre se calculó usando la siguiente fórmula:

$$\sigma_M^2 = \sigma_\rho^2 \left( \frac{\partial M}{\partial \rho} \right)^2 + \sigma_R^2 \left( \frac{\partial M}{\partial R} \right)^2. \quad (3.1)$$

### 3.1.2. Resultados y Discusión

La Figura 3.1 muestra el mejor ajuste simultáneo a las curvas de luz y de velocidad radial obtenido con nuestro modelo. Los distribuciones obtenidas con nuestro modelo para HD 209458 considerando 448 puntos Monte Carlo se presentan en la Figura 3.2. En la Tabla 3.1 se muestra una comparación del valor esperado y su incertidumbre calculados a partir de un ajuste de una función Gaussiana a estas distribuciones, además de valores extraídos de los siguientes trabajos: Winn et al. (2005), Wittenmyer et al. (2005), Southworth (2010), Miller-Ricci et al. (2008) y Kipping (2008). Entre estos trabajos, los dos primeros realizan un ajuste simultáneo a curvas de velocidad radial y de luz. La Figura 3.3 presenta estos datos gráficamente con el fin de facilitar su comparación. Note que las masas estelar y planetaria presentan una sobreestimación, debida probablemente a que no se alcanzó el nivel adecuado de ajuste en la curva de velocidad radial, puesto que nuestro modelo fue ajustado sin dar mayor peso a la curva de velocidad radial y realizando un número fijo de iteraciones para los tres sistemas analizados, aunque los datos de la curva de luz y de velocidad radial de HD 209458 tienen incertidumbres bajas y, por consiguiente, requieren un ajuste más preciso y un mayor tiempo de cómputo. La incorporación de criterios de parada más adecuados que la

Tabla 3.1: Estimaciones de algunos parámetros del sistema de la estrella HD 209458. La letra en paréntesis indica el tipo de ajuste realizado: S, ajuste simultáneo que incluye curvas de velocidad radial y de luz; F, ajuste que sólo incluye curvas de luz.

	Este trabajo	Winn et al. (2005) (S)
$M_\star$	$1.41 \pm 0.26$	1.06
$R_\star$		$1.15 \pm 0.05$
$M_p$	$0.798 \pm 0.097$	$0.657 \pm 0.064$
$R_p$	$1.508 \pm 0.096$	$1.355 \pm 0.06$
$a$	$0.0508 \pm 0.0030$	
$e$	$0.0026 \pm 0.0037$	$0.0147 \pm 0.0053$
$i$	$86.632 \pm 0.098$	$86.55 \pm 0.03$
	Wittenmyer et al. (2005) (S)	Southworth (2010) (F)
$M_\star$	$1.093 \pm 0.092$	$1.148 \pm 0.033$
$R_\star$	$1.145 \pm 0.056$	$1.162 \pm 0.012$
$M_p$	$0.657 \pm 0.052$	$0.714 \pm 0.014$
$R_p$	$1.350 \pm 0.066$	$1.380 \pm 0.015$
$a$		$0.04747 \pm 0.00046$
$e$		
$i$		
	Miller-Ricci et al. (2008) (F)	Kipping (2008) (F)
$M_\star$	$1.101 \pm 0.064$	$1.163 \pm 0.096$
$R_\star$	$1.118 \pm 0.03$	$1.072 \pm 0.055$
$M_p$		$0.681 \pm 0.039$
$R_p$	$1.339 \pm 0.04$	$1.275 \pm 0.082$
$a$		
$e$		$0.014 \pm 0.005$
$i$	$86.929 \pm 0.01$	$87.94 \pm 0.76$

realización de un número dado de iteraciones es una de las mejoras a implementar en el modelo (véase el Capítulo 5).

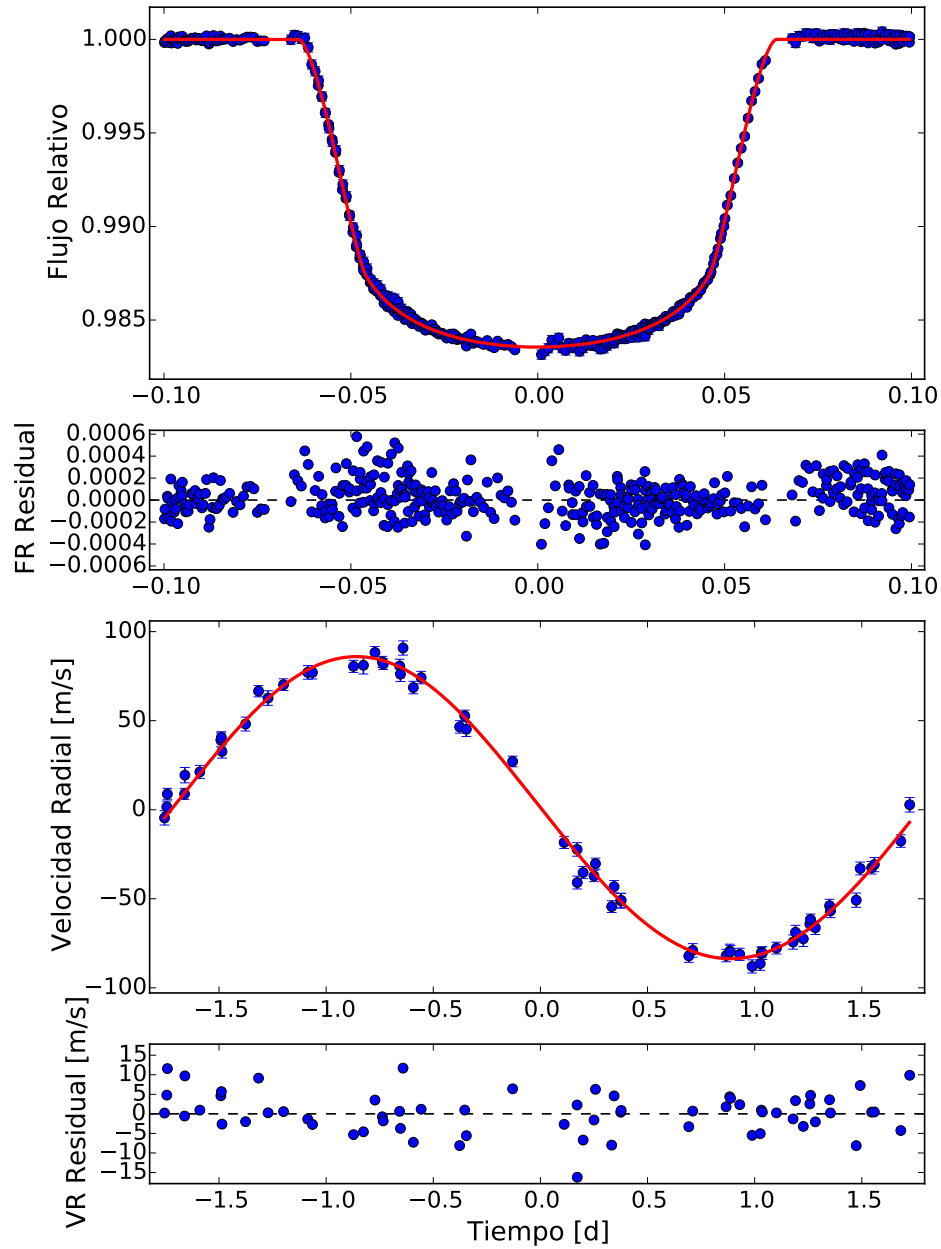


Figura 3.1: Comparación de los datos de las curvas de luz y de velocidad radial de HD 209458 b (en azul) con el mejor ajuste simultáneo de nuestro modelo (en rojo). Se muestran también los residuos respectivos (datos-ajuste). El primer y segundo paneles muestran la comparación y los residuos, respectivamente, correspondientes a la curva de luz. El tercer y cuarto paneles corresponden a la curva de velocidad radial.

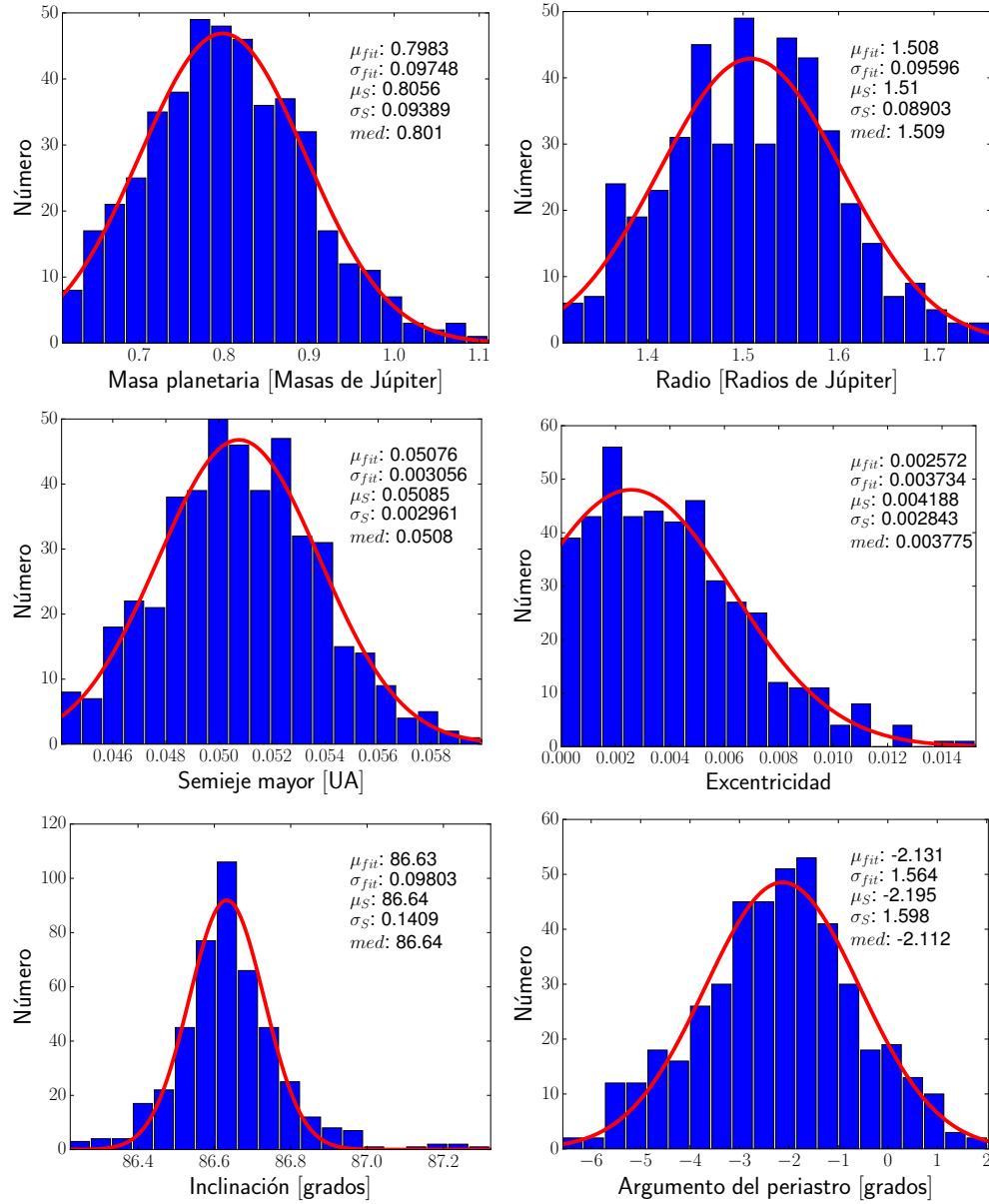


Figura 3.2: Distribuciones obtenidas para algunos parámetros del sistema de la estrella HD 209458. En cada panel, la línea roja indica el ajuste Gaussiano. El significado de las etiquetas es el siguiente:  $\mu_{fit}$  y  $\sigma_{fit}$  son la media y desviación estándar del ajuste a una función Gaussiana,  $\mu_S$  y  $\sigma_S$  son la media y desviación estándar muestrales, y  $med$  indica la mediana del histograma.



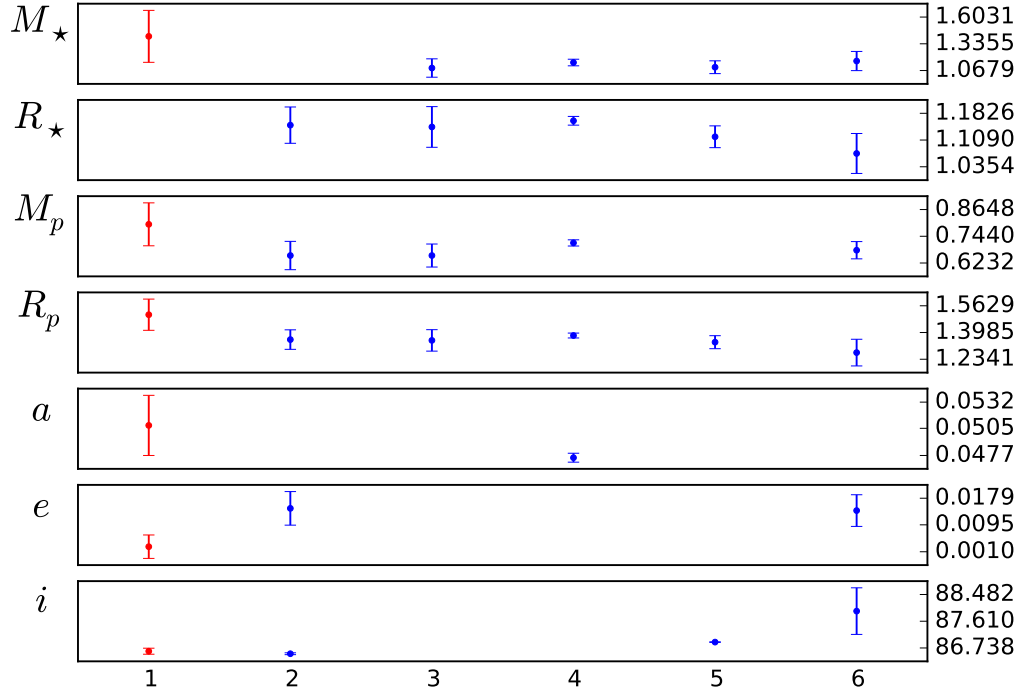


Figura 3.3: Comparación gráfica de las estimaciones de la Tabla 3.1. El eje de las abscisas indica la referencia: 1, este trabajo (en rojo); 2, Winn et al. (2005); 3, Wittenmyer et al. (2005); 4, Southworth (2010); 5, Miller-Ricci et al. (2008); 6, Kipping (2008).

## 3.2. HAT-P-14 b

### 3.2.1. Datos

Los datos de fotometría fueron obtenidos de Torres et al. (2010b). Los datos de velocidad radial fueron obtenidos de Winn et al. (2011). Ambas curvas fueron plegadas con un periodo de 4.627657 días y un tiempo central de 2455134.43856 (Simpson et al., 2011). Los coeficientes de oscurecimiento al borde (cuadráticos) utilizados son  $q_1 = 0.1089$  y  $q_2 = 0.2439$  (Torres et al., 2010b).

El rango de masa y de radio estelares para este caso se consideró del valor más bajo al valor más alto a un sigma de las estimaciones para cada uno de estos parámetros realizadas por Torres et al. (2010b) y Simpson et al. (2011).

### 3.2.2. Resultados y Discusión

La Figura 3.4 muestra el mejor ajuste obtenido con nuestro modelo a las curvas de luz y de velocidad radial. La Figura 3.5 presenta las distribuciones obtenidas para este sistema con 679 puntos Monte Carlo. La Tabla 3.2 muestra los resultados obtenidos a partir de estas distribuciones mediante su ajuste a una función Gaussiana, además de valores extraídos de los siguientes trabajos: Simpson et al. (2011), Torres et al. (2010b), Knutson et al. (2014), Southworth (2012) y Winn et al. (2011). De estos autores, los dos primeros realizan un ajuste simultáneo a curvas de luz y de velocidad radial. La Figura 3.6 presenta estos mismos resultados, pero de manera gráfica. Note en la Figura 3.5, que el ajuste de la curva de velocidad radial con nuestro modelo presenta algunas discrepancias que parecen sugerir una restricción inadecuada de los valores iniciales del argumento del periastro. No obstante, las masas estelar y planetaria concuerdan bastante bien con las de la literatura (presentando barras de error un poco mayores), pues estos dos parámetros están mayormente ligados a la amplitud de la curva de velocidad radial. Los parámetros con mayor discrepancia son la excentricidad, muy ligada a la determinación del argumento del periastro y a la curva de velocidad radial, y a la inclinación que en este caso parece afectada por este mismo parámetro. La restricción inicial adecuada de los parámetros del sistema es uno de los objetivos futuros para la continuación de este trabajo (véase el Capítulo 5).

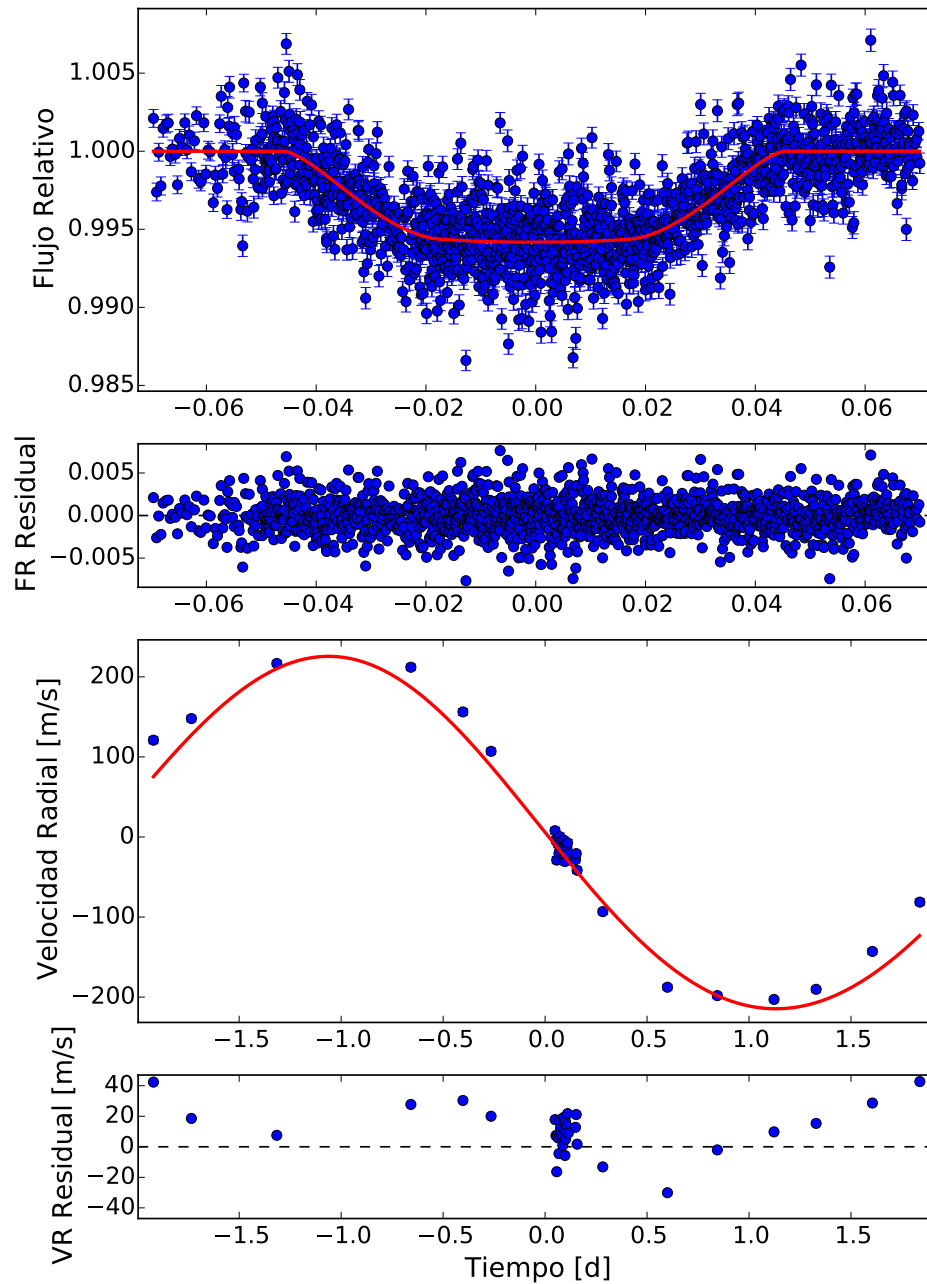


Figura 3.4: Comparación de los datos de las curvas de luz y de velocidad radial de HAT-P-14 b (en azul) con el mejor ajuste simultáneo de nuestro modelo (en rojo). Se muestran también los residuos respectivos (datos-ajuste). El primer y segundo paneles muestran la comparación y los residuos, respectivamente, correspondientes a la curva de luz. El tercer y cuarto paneles corresponden a la curva de velocidad radial.

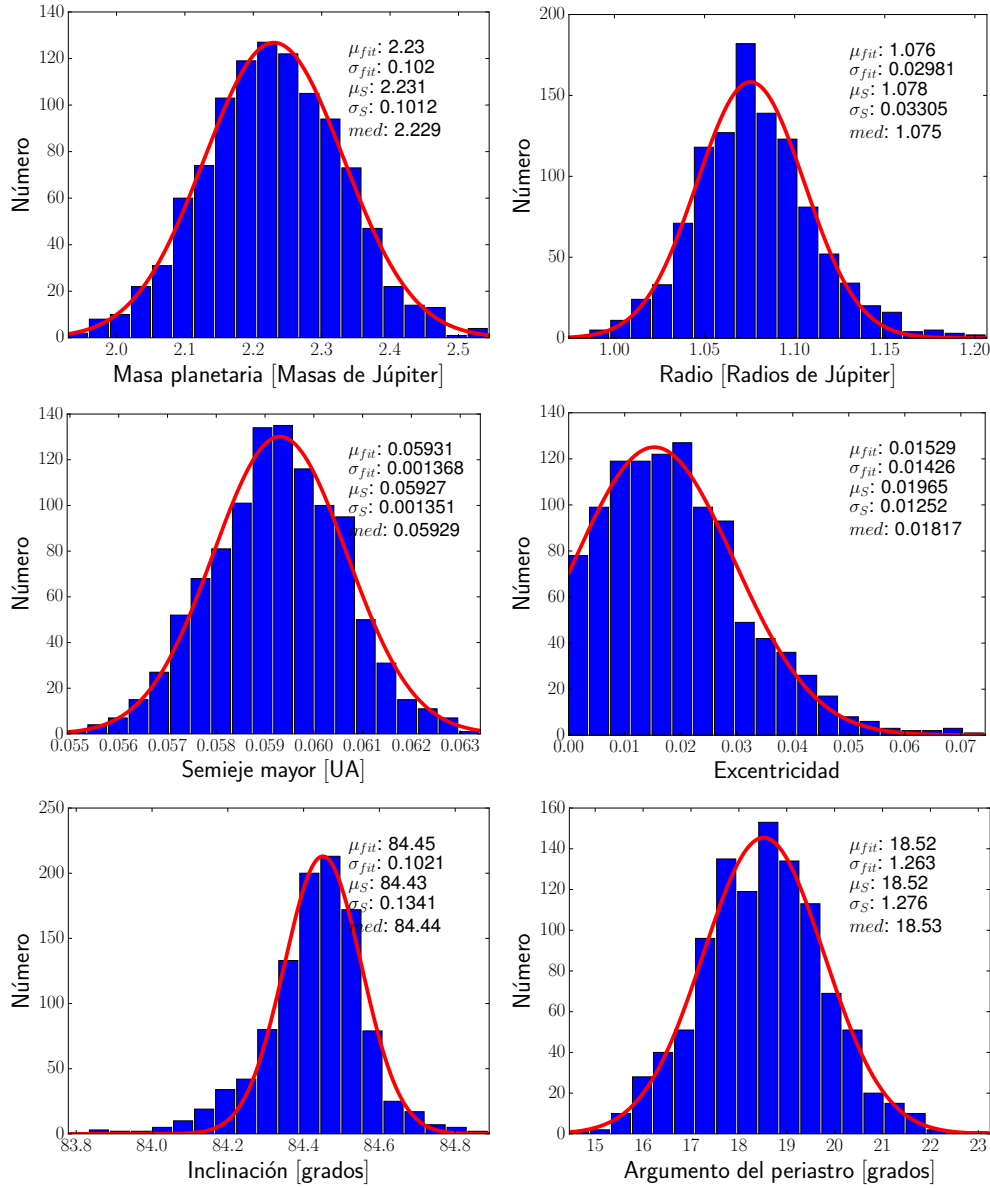


Figura 3.5: Distribuciones obtenidas para algunos parámetros del sistema de la estrella HAT-P-14. En cada panel, la línea roja indica el ajuste Gaussiano. El significado de las etiquetas es el siguiente:  $\mu_{fit}$  y  $\sigma_{fit}$  son la media y desviación estándar del ajuste a una función Gaussiana,  $\mu_S$  y  $\sigma_S$  son la media y desviación estándar muestrales, y  $med$  indica la mediana del histograma.

Tabla 3.2: Estimaciones de algunos parámetros del sistema de la estrella HAT-P-14. La letra en paréntesis indica el tipo de ajuste realizado: S, ajuste simultáneo que incluye curvas de velocidad radial y de luz; F, ajuste que sólo incluye curvas de luz; ajuste que sólo incluye curvas de velocidad radial.

	Este trabajo	Simpson et al. (2011) (S)
$M_\star$	$1.401 \pm 0.094$	$1.32 \pm 0.03$
$R_\star$		$1.53 \pm 0.10$
$M_p$	$2.23 \pm 0.10$	$2.28 \pm 0.07$
$R_p$	$1.076 \pm 0.030$	$1.20 \pm 0.15$
$a$	$0.0593 \pm 0.0014$	$0.0596 \pm 0.0005$
$e$	$0.015 \pm 0.014$	$0.066 \pm 0.023$
$i$	$84.45 \pm 0.10$	$83.2 \pm 0.6$
	Torres et al. (2010b) (S)	Knutson et al. (2014) (RV)
$M_\star$	$1.386 \pm 0.045$	
$R_\star$	$1.468 \pm 0.054$	
$M_p$	$2.232 \pm 0.059$	$2.316 \pm 0.072$
$R_p$	$1.150 \pm 0.052$	
$a$	$0.0606 \pm 0.0007$	
$e$	$0.107 \pm 0.013$	$0.115 \pm 0.015$
$i$	$83.5 \pm 0.3$	
	Southworth (2012) (F)	Winn et al. (2011) (RV)
$M_\star$	$1.418 \pm 0.048$	$1.386 \pm 0.045$
$R_\star$	$1.591 \pm 0.056$	$1.468 \pm 0.042$
$M_p$	$2.271 \pm 0.079$	$2.232 \pm 0.058$
$R_p$	$1.219 \pm 0.059$	$1.142 \pm 0.033$
$a$	$0.06108 \pm 0.00069$	
$e$	$0.107 \pm 0.013$	$0.107 \pm 0.013$
$i$	$83.01 \pm 0.27$	$83.52 \pm 0.22$

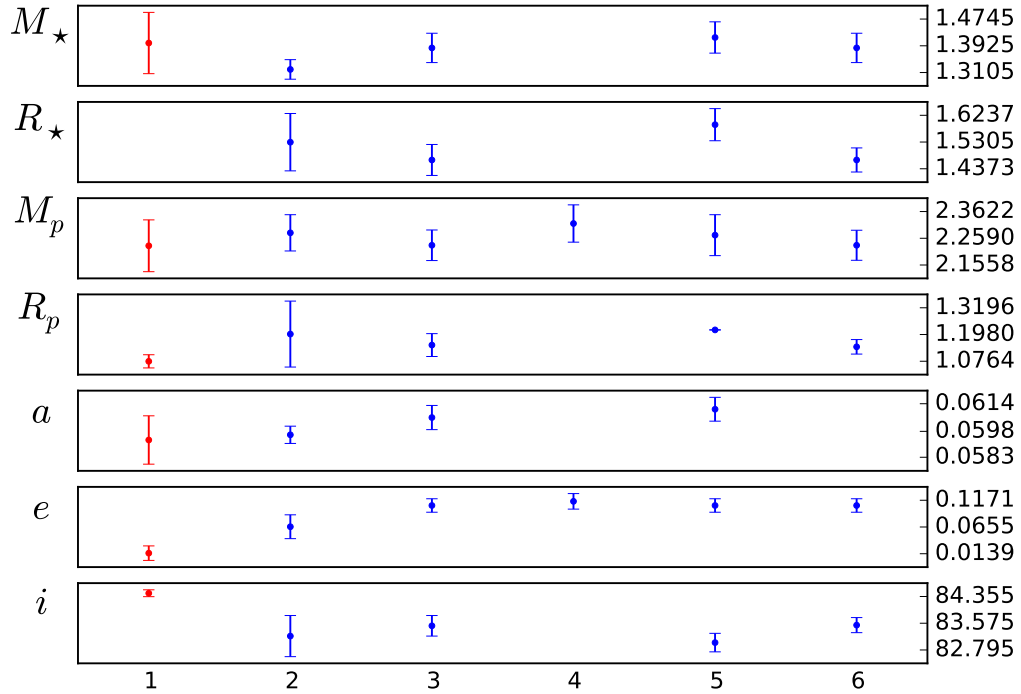


Figura 3.6: Comparación gráfica de las estimaciones de la Tabla 3.2. El eje de las abscisas indica la referencia: 1, este trabajo (en rojo); 2, Simpson et al. (2011); 3, Torres et al. (2010b); 4, Knutson et al. (2014); 5, Southworth (2012); 6, Winn et al. (2011).

### 3.3. WASP-44b

WASP-44b es un planeta subjoviano en tránsito que orbita alrededor de una estrella de masa similar al Sol y de tipo G8V. Anderson et al. (2012) reporta el descubrimiento de este planeta y realiza un análisis simultáneo de curvas de luz y de velocidad radial en el cual se asume una órbita circular. Por otra parte, Mancini et al. (2013) realiza un estudio de WASP-44 mediante fotometría simultánea en varias bandas obteniendo estimaciones de los radios estelar y planetario con una menor incertidumbre. Mancini et al. (2013) halla que el radio estimado para el planeta difiere significativamente del valor teórico esperado para un planeta sin núcleo, A partir de esto, este autor sugiere que WASP-44b es “rico en metales”, con una envoltura de H/He rodeando un núcleo que contiene elementos pesados

ó una envolvente de H/He mezclada con elementos pesados.

### 3.3.1. Datos

Los datos de fotometría y de velocidad radial para el análisis de este objeto fueron tomados de Anderson et al. (2012). Ambas curvas fueron plegadas con un periodo de 2.4238039 y un tiempo central de 2455434.376 (de la misma fuente). Para el ajuste del modelo a la curva de luz se usaron los coeficientes de oscurecimiento al borde (cuadráticos)  $q_1 = 0.4049$  y  $q_2 = 0.2822$  obtenidos mediante el algoritmo `jktld` de John Southworth, con una temperatura de 5410.0 K y una gravedad superficial de  $\log g = 4.4810$

La masa y radio inicial para el análisis se obtuvieron de Anderson et al. (2012). A partir de datos espectroscópicos obtenidos con CORALIE, este autor realiza un análisis de líneas espectrales para obtener estimaciones de la temperatura efectiva, la gravedad superficial y la metalicidad de la estrella. Estos tres parámetros los introduce posteriormente en las calibraciones de Torres et al. (2010a) para estimar la masa y radio estelares.

### 3.3.2. Resultados y Discusión

La Figura 3.7 muestra el mejor ajuste simultáneo a las curvas de luz y de velocidad radial obtenido con nuestro modelo. La Figura 3.8 muestra las distribuciones obtenidas para este sistema usando 645 puntos Monte Carlo. La Tabla 3.3 contiene los resultados del ajuste de una función Gaussiana a dichas distribuciones, así como los resultados obtenidos por otros autores: Anderson et al. (2012), quien realiza un ajuste simultáneo a curvas de velocidad radial y de luz, y Mancini et al. (2013). La Figura 3.9 presenta de forma gráfica estos mismos resultados. Como se puede observar, el único parámetro que parece alejarse de las estimaciones, aunque concuerda dentro de las barras de error, es la longitud del semieje mayor. Las masas de la estrella y del planeta concuerdan con ambos autores, pero sus barras de error son visiblemente mayores. Estas dos discrepancias parecen relacionadas a la falta de algunos datos de menor incertidumbre en relación a los usados por Anderson et al. (2012), puesto que usamos los 15 datos disponibles en Anderson et al. (2012), mientras que este mismo autor utiliza 19 datos en sus ajustes (véase la Figura 4 de Anderson et al. 2012). El radio del planeta estimado con nuestro modelo concuerda muy bien con el determinado por este autor, lo cual es esperable debido a que se han utilizado los mismos datos (de la curva de luz) y en ambos casos se ha hecho un ajuste simultáneo. Mancini et al. (2013), al contrario de Anderson et al. (2012), realiza su análisis usando curvas de luz obtenidas con fotometría de varias bandas. Así, las diferencias entre los valores de los radios se pueden deber a la existencia de una atmósfera planetaria.

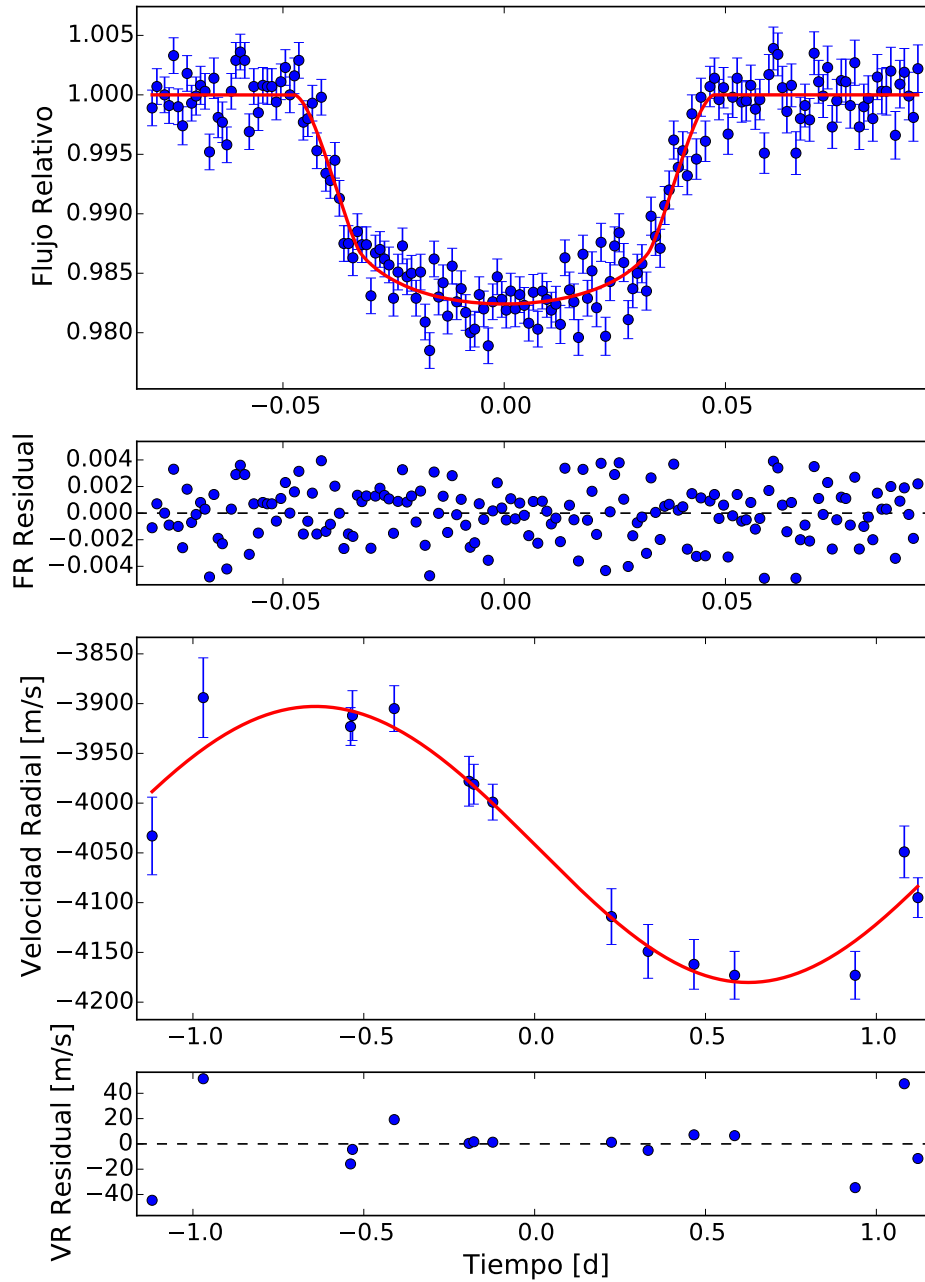


Figura 3.7: Comparación de los datos de las curvas de luz y de velocidad radial de WASP-44 b (en azul) con el mejor ajuste simultáneo de nuestro modelo (en rojo). Se muestran también los residuos respectivos (datos-ajuste). El primer y segundo paneles muestran la comparación y los residuos, respectivamente, correspondientes a la curva de luz. El tercer y cuarto paneles corresponden a la curva de velocidad radial.



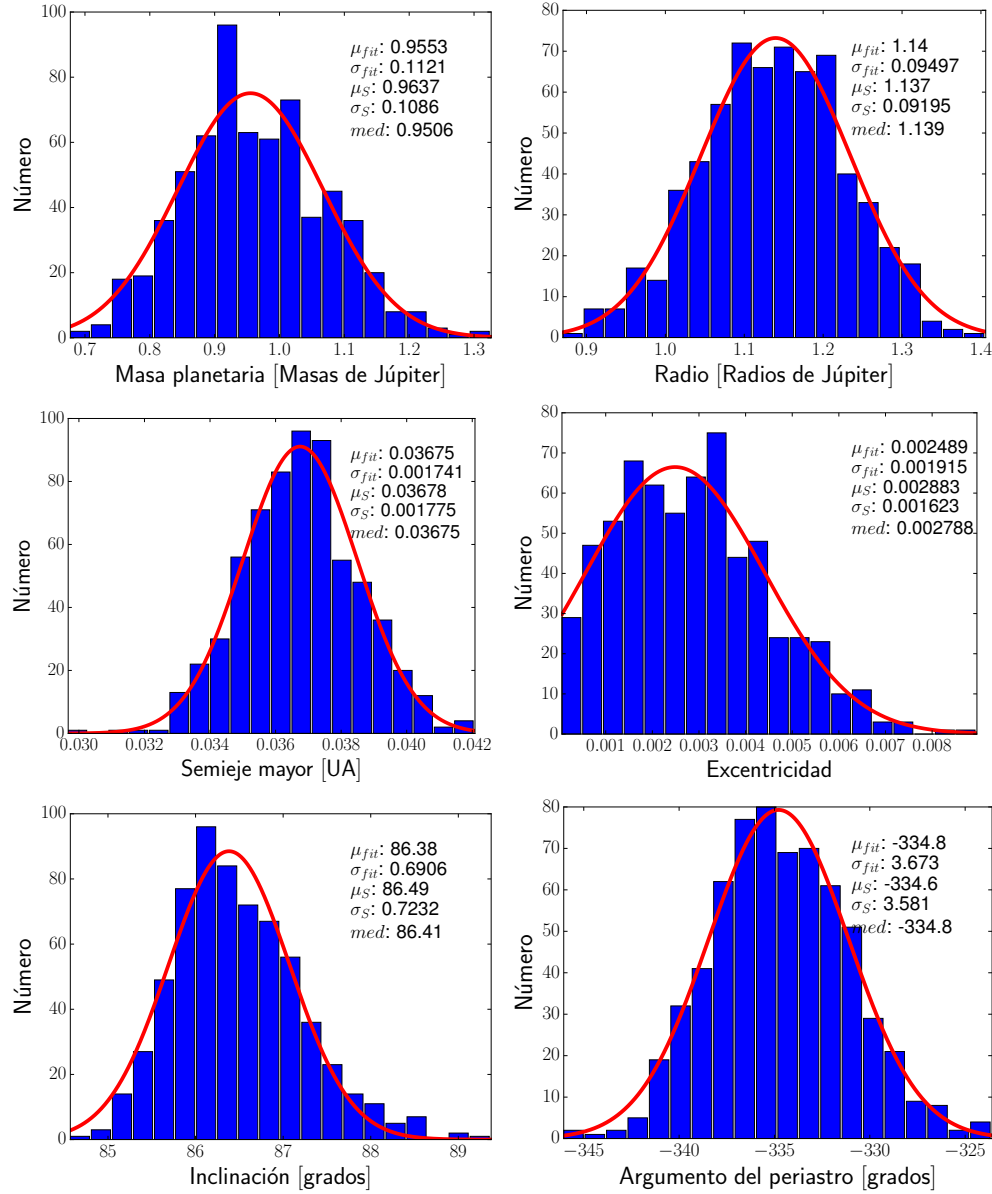


Figura 3.8: Distribuciones obtenidas para algunos parámetros del sistema de la estrella WASP-44. En cada panel, la línea roja indica el ajuste Gaussiano. El significado de las etiquetas es el siguiente:  $\mu_{fit}$  y  $\sigma_{fit}$  son la media y desviación estándar del ajuste a una función Gaussiana,  $\mu_S$  y  $\sigma_S$  son la media y desviación estándar muestrales, y  $med$  indica la mediana del histograma.

Tabla 3.3: Estimaciones de algunos parámetros del sistema planetario de la estrella WASP-44. La letra en paréntesis indica el tipo de ajuste realizado: S, ajuste simultáneo que incluye curvas de velocidad radial y de luz; F, ajuste que sólo incluye curvas de luz.

	Este trabajo	Anderson et al. (2012) (S)
$M_{\star}$	$1.02 \pm 0.14$	$0.951 \pm 0.034$
$R_{\star}$		$0.927 \pm 0.074$
$M_p$	$0.96 \pm 11$	$0.889 \pm 0.062$
$R_p$	$1.140 \pm 0.095$	$1.14 \pm 0.11$
$a$	$0.0367 \pm 0.0017$	$0.03473 \pm 0.00041$
$e$	$0.0025 \pm 0.0019$	
$i$	$86.38 \pm 0.69$	$86 \pm 1.11$
Mancini et al. (2013) (F)		
$M_{\star}$	$0.917 \pm 0.077$	
$R_{\star}$	$0.865 \pm 0.025$	
$M_p$	$0.869 \pm 0.075$	
$R_p$	$1.002 \pm 0.033$	
$a$	$0.03445 \pm 0.00093$	
$e$		
$i$		

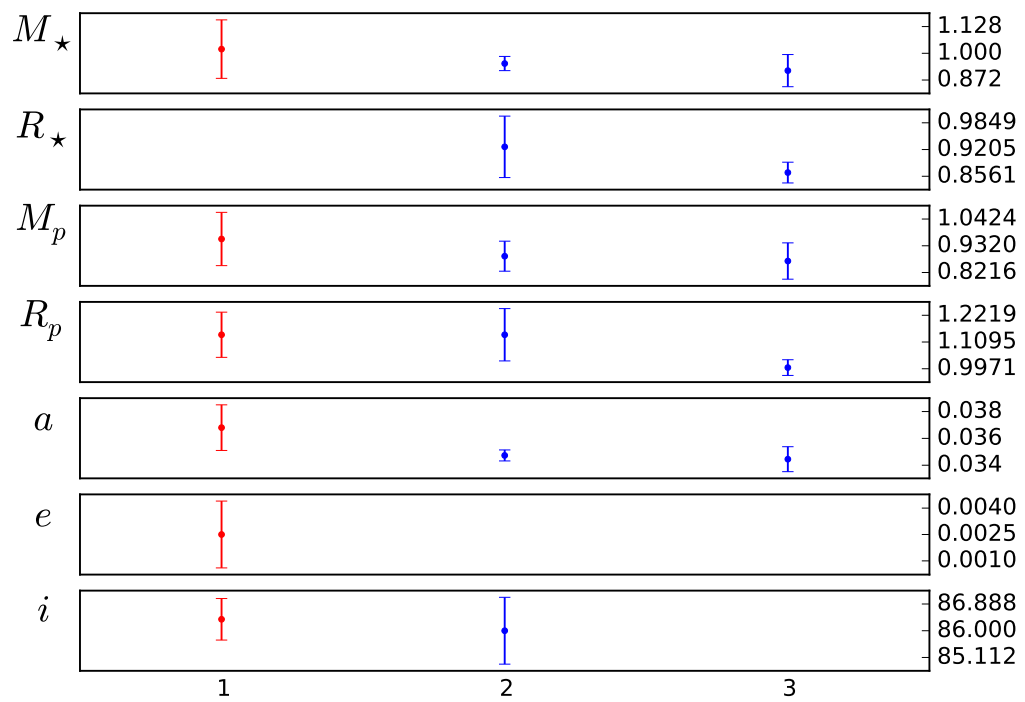


Figura 3.9: Comparación gráfica de las estimaciones de la Tabla 3.3. El eje de las abscisas indica la referencia: 1, este trabajo (en rojo); 2, Anderson et al. (2012); 3, Mancini et al. (2013).

## Capítulo 4

# Discusión general y conclusiones

El ajuste simultáneo de curvas de luz y curvas de velocidad radial, aunque es una tarea abordada cada vez con mayor frecuencia, aún carece de un tratamiento general extendido. Una metodología general que aborda este enfoque se está desarrollando actualmente por un par de autores (véase la sección 1.4.7), además de este trabajo. Entre estos dos, PlanetPack es el único de estos proyectos que se encuentra en vías de desarrollo de un modelo de ajuste simultáneo con interacciones dinámicas; actualmente, es posible ajustar una serie de tránsitos para generar los datos de TTVs y posteriormente analizarlos. No obstante, al inicio de este trabajo no se tenían noticias del desarrollo de PlanetPack en esta dirección. ExoFast por su parte, aunque incorpora ajustes simultáneos, considera únicamente modelos analíticos, descartando interacciones dinámicas en su análisis. Así, nuestra motivación, es decir, el desarrollo de una metodología general para el ajuste simultáneo de curvas de luz y curvas de velocidad radial que considere interacciones dinámicas, aún conserva su carácter novel.

En nuestro modelo, la exploración del espacio paramétrico se realiza con AGA (véase la sección 2.2.1). Entre las ventajas de este algoritmo se encuentran las siguientes:

- Se adapta muy bien a equipos con procesadores de múltiples núcleos, debido a que la búsqueda se basa en la elección de las curvas que mejor ajustan de entre una población, en cada iteración del algoritmo, y el cálculo de la población completa se hace en un sólo bloque, repartiéndose el número total de curvas entre el número total de núcleos (o procesadores, dado el caso). Esto disminuye el tiempo utilizado en la comunicación entre los distintos pasos del algoritmo y constituye una ventaja sobre algunos algoritmos ampliamente extendidos como el método Nelder-Mead (conocido también como método downhill simplex o método amoeba) que requieren un proceso lineal. Más

---

aún, esto presenta una ventaja cuando se combina con un método de Monte Carlo para la obtención de las incertidumbres en las estimaciones, debido a que hace al método independiente del número de núcleos del equipo en el que se estén realizando los cálculos, a diferencia de métodos lineales que han sido adaptados para procesos multihilos, como el método MCMC (véase la sección 2.2.2).

- AGA tiene un grado de flexibilidad alto: variando el número de padres y/o el número de descendientes es posible beneficiar un tipo de tarea específica: una exploración amplia del espacio paramétrico (muchos padres) o una búsqueda más ajustada (para mejorar la precisión) cuando se tiene certeza de la cercanía de la solución a cierto punto.

La integración numérica en nuestro modelos se hace con el método de avance Runge-Kutta-Fehlberg con los coeficientes originales de Fehlberg (Press et al., 1992), implementado en la rutina `gsl_odeiv2_step_rkf45` de GSL (véase la sección 2.3.4). Antes de ello, se utilizaron el método Runge-Kutta-Felberg con los coeficientes de Cash-Karp (Press et al., 1992) y el método de Bulirsch-Stoer (Press et al., 1992), ambos en las implementaciones de Press et al. (1992). El último resultó un poco más eficiente que el primero. Sin embargo, ambos métodos presentaron frecuentes errores. Por este motivo, se optó por el integrador actual de GSL, que resultó más robusto para nuestros propósitos. Además, los integradores de GSL manejan precisión doble, mientras que los integradores de Press et al. (1992), utilizan por defecto precisión simple. Por otro lado, entre los programas que realizan evolución dinámica es frecuente el uso de métodos simplécticos de integración, además de los ya mencionados, o una combinación de ellos. La elección del mejor método para realizar esta tarea será un punto a tratar en la continuación de este trabajo.

En teoría el único caso inabordable para nuestro modelo en su estado actual es el de un planeta con una órbita paralela al plano del cielo o con una órbita circular, debido al sistema de coordenadas usado (el nodo ascendente sólo está definido para órbitas con una inclinación distinta de cero, mientras que el periastro está definido sólo para órbitas con una excentricidad no nula; esto mismo ocurre con los parámetros relacionados a estos puntos, la longitud del nodo ascendente y el argumento del periastro). Esto no representa un gran inconveniente puesto que la única impronta que podría ser observable en las curvas de luz o de velocidad radial de su estrella huésped proviene de las interacciones dinámicas con otros planetas cuyas órbitas estuvieran fuera del plano del cielo. Sin embargo, la inclusión de estos casos será necesaria para poder incorporar datos de astrometría. Una detallada caracterización de nuestro modelo será llevada a cabo durante la tesis doctoral.

Mediante simulaciones de datos observacionales, nuestro modelo permite ca-

racterizar el potencial de los instrumentos actuales para llevar a cabo el estudio de sistemas planetarios y optimizar la estrategia observacional, poniendo condiciones al modo y calidad de los datos requeridos (muestreo, base temporal, relación señal ruido, etc.). También puede contribuir a mejorar el diseño de futuros instrumentos.

El estado actual de nuestro modelo admite la inclusión de efectos adicionales al ajuste simultáneo, como el denominado Rossiter-McLaughlin y la contribución del albedo de los planetas a la curva de luz de su estrella, además de otro tipo de datos observacionales, por ejemplo, datos de astrometría. Lo cual realizaremos en la continuación de este trabajo. También estudiaremos como restringir parámetros tales como la excentricidad orbital, lo que se facilita mediante el análisis conjunto de tránsitos primarios y secundarios (véase la Sección 1.3.2).

Con el equipo que disponemos actualmente (véase 2.3.5) estimamos un tiempo de unos pocos meses para caracterizar sistemas multiplanetarios como por ejemplo, Kepler 88 y KOI-142 (conocido como el rey de las variaciones de los tránsitos). De estos dos sistemas, tenemos resultados preliminares obtenidos con el equipo 1 que no se presentan aquí, pero que se completarán y discutirán en la tesis doctoral que seguirá a este trabajo.

En un futuro cercano, existe la posibilidad de poder utilizar un equipo de muy altas prestaciones. Se espera que para principios del año 2015 se encuentre operativa la supercomputadora del Laboratorio Nacional de Supercómputo (LNS) del sureste, proyecto que lidera la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla y en el cual el INAOE es un importante partícipe. La proyección del LNS es contar con casi 5000 núcleos de procesamiento trabajando conjuntamente. Este hecho abre interesantes posibilidades de aplicación de nuestro modelo.

Además, trabajaremos en mejorar el desempeño de nuestro algoritmo, lo que será uno de los principales objetivos de la tesis doctoral. En la siguiente sección describimos en detalle el trabajo futuro que pretendemos llevar a cabo.

## Capítulo 5

# Trabajo futuro

Durante el desarrollo de la tesis doctoral, que seguirá a este trabajo, planeamos desarrollar los objetivos que a continuación se describen.

*Aplicación del modelo para la búsqueda y caracterización de planetas telúricos alrededor de estrellas de tipo solar, enanas frías y enanas de muy baja masa.* Para la realización de este último proyecto, el equipo de trabajo cuenta con 35 horas de datos obtenidos con el instrumento OSIRIS instalado en el telescopio de 10.4-m del Gran Telescopio de Canarias (GTC)(Observatorio del Roque de Los Muchachos, La Palma, España).

*La caracterización del modelo mediante simulaciones.* Uno de los puntos más importantes de cualquier herramienta es conocer sus alcances. Mediante futuras simulaciones de sistemas en tránsito, pretendemos conocer las limitaciones y posibles aplicaciones alternativas de nuestro algoritmo. Entre estas últimas hemos planeado estudiar los requerimientos y/o alcances para un telescopio (ya sea espacial o terrestre) que pretenda observar el tránsito de un planeta de ciertas características, o la impronta de una luna en la curva de luz de un tránsito planetario. Así, llevaremos a cabo investigaciones en el contexto de los proyectos CARMENES y PHASES (*Planet Hunting and Asteroseismology Explorer Spectrophotometer*; del Burgo et al. (2010, 2013a)) y de observaciones obtenidas con GTC/OSIRIS. PHASES, el cual busca desarrollar un telescopio espacial para obtener mediciones de flujo absoluto de muy alta precisión (con una relación señal a ruido mayor a 100) de estrellas brillantes ( $V < 10$ ), será el objetivo primario en este aspecto.

*Análisis estadístico de los pesos dados la curva de luz y a la curva de velocidad radial.* Otro aspecto del que nos hemos percatado es que, dado que el número de puntos de las curvas de luz así como los errores asociados suelen ser mucho mayores a los correspondientes a las curvas de velocidad radial, nuestro algoritmo termina por dar menos peso en los ajustes a estas últimas. Por esta razón podríamos asignar pesos distintos a estos dos tipos de curvas para que el ajuste

sea más equilibrado entre los dos tipos de curvas. Sin embargo, debemos explorar los posibles sesgos que esto genera en los resultados finales.

*Incorporación de herramientas estadísticas para el análisis de los resultados.* Hasta ahora sólo se ha incorporado al algoritmo las herramientas necesarias para poder, dado un espacio restringido de búsqueda, explorar y hallar las soluciones que mejor describen los datos proporcionados, así como una estimación de las incertidumbres asociadas. Sin embargo, queremos incorporar herramientas que verifiquen la significancia estadística de dichas soluciones. Asimismo, planeamos incorporar algunos criterios estadísticos de parada para la búsqueda paramétrica (por ejemplo, diagramas de Kolmogorov-Smirnov).

*Estudio de las correlaciones entre los parámetros.* Un aspecto considerable de este estudio es que nos permitió vislumbrar el problema de elegir un espacio bien delimitado para la búsqueda de soluciones, lo cual es especialmente importante cuando se tratan modelos no analíticos. Por ello planeamos realizar un estudio de las posibles correlaciones entre los distintos parámetros para seleccionar un posible conjunto de parámetros que mejore la convergencia del algoritmo.

*Estudio de la naturaleza geométrica del problema.* Existen estudios detallados acerca de la naturaleza geométrica de las órbitas en modelos de N cuerpos (acerca de la propiedad caótica, por ejemplo). Pretendemos hacer un estudio, si no minucioso, al menos suficiente para incorporar algunas mejoras basados en dichos estudios que faciliten la restricción del espacio de búsqueda o que permitan descartar en primera instancia soluciones inviables.

*Inclusión de datos de astrometría.* Con la liberación de los datos de la misión GAIA, planeada para 2016, se dará un gran salto en el estudio astrométrico de diverso tipos de objetos. Uno de ellos son los sistemas planetarios (objetivo primario de GAIA). Considerando esto, un objetivo muy claro en la continuación de este trabajo claro es incorporar datos de astrometría en nuestro algoritmo.



# Referencias

- Amado, P. J., Quirrenbach, A., Caballero, J. A., et al. 2013, in Highlights of Spanish Astrophysics VII, 842–847
- Anderson, D. R., Collier Cameron, A., Gillon, M., et al. 2012, MNRAS, 422, 1988
- Andrae, R., Schulze-Hartung, T., & Melchior, P. 2010, ArXiv e-prints, arXiv:1012.3754
- Baglin, A., Auvergne, M., Boisnard, L., et al. 2006, in COSPAR Meeting, Vol. 36, 36th COSPAR Scientific Assembly, 3749
- Bakos, G., Noyes, R. W., Kovács, G., et al. 2004, PASP, 116, 266
- Baluev, R. V. 2013, Astronomy and Computing, 2, 18
- . 2014, ArXiv e-prints, arXiv:1410.1327
- Barclay, T., Rowe, J. F., Lissauer, J. J., et al. 2013, Nature, 494, 452
- Borucki, W. J., Koch, D., Basri, G., et al. 2010, Science, 327, 977
- Bourrier, V., & Lecavelier des Etangs, A. 2013, A&A, 557, A124
- Bourrier, V., Lecavelier des Etangs, A., & Vidal-Madjar, A. 2014, A&A, 565, A105
- Boyajian, T., von Braun, K., Feiden, G. A., et al. 2014, ArXiv e-prints, arXiv:1411.5638
- Brown, T. M., Charbonneau, D., Gilliland, R. L., Noyes, R. W., & Burrows, A. 2001, ApJ, 552, 699
- Butler, R. P., Wright, J. T., Marcy, G. W., et al. 2006, ApJ, 646, 505
- Cantó, J., Curiel, S., & Martínez-Gómez, E. 2009, A&A, 501, 1259
- Charbonneau, D., Brown, T. M., Latham, D. W., & Mayor, M. 2000, ApJL, 529, L45

- 
- Claret, A. 2000, *A&A*, 363, 1081
- . 2004, *A&A*, 428, 1001
- Collier Cameron, A., Wilson, D. M., West, R. G., et al. 2007, *MNRAS*, 380, 1230
- del Burgo, C., Allende Prieto, C., & Peacocke, T. 2010, *Journal of Instrumentation*, 5, 1006
- del Burgo, C., Vather, D., Allende Prieto, C., & Murphy, N. 2013a, in *Astronomical Society of the Pacific Conference Series*, Vol. 472, *New Quests in Stellar Astrophysics III: A Panchromatic View of Solar-Like Stars, With and Without Planets*, ed. M. Chavez, E. Bertone, O. Vega, & V. De la Luz, 291
- del Burgo, C., Vather, D., & Murphy, N. 2013b, in *European Physical Journal Web of Conferences*, Vol. 47, *European Physical Journal Web of Conferences*, 15006
- Diamond-Lowe, H., Stevenson, K. B., Bean, J. L., Line, M. R., & Fortney, J. J. 2014, *ApJ*, 796, 66
- Eastman, J., Gaudi, B. S., & Agol, E. 2013, *PASP*, 125, 83
- Exoplanet Team. 2014, *The Extrasolar Planets Encyclopaedia*
- Faigler, S., Tal-Or, L., Mazeh, T., Latham, D. W., & Buchhave, L. A. 2013, *ApJ*, 771, 26
- Gazak, J. Z., Johnson, J. A., Tonry, J., et al. 2012, *Advances in Astronomy*, 2012, 30
- . 2011, *Transit Analysis Package (TAP and autoKep): IDL Graphical User Interfaces for Extrasolar Planet Transit Photometry*, *Astrophysics Source Code Library*, ascl:1106.014
- Henry, G. W., Marcy, G., Butler, R. P., & Vogt, S. S. 1999, *IAU Circ.*, 7307, 1
- Henry, G. W., Marcy, G. W., Butler, R. P., & Vogt, S. S. 2000, *ApJL*, 529, L41
- Holman, M. J., Fabrycky, D. C., Ragozzine, D., et al. 2010, *Science*, 330, 51
- Ionov, D. E., Bisikalo, D. V., Kaygorodov, P. V., & Shematovich, V. I. 2012, in *IAU Symposium*, Vol. 282, *IAU Symposium*, ed. M. T. Richards & I. Hubeny, 545–546
- Kipping, D. M. 2008, *MNRAS*, 389, 1383
- . 2009, *MNRAS*, 392, 181

- 
- Knutson, H. A., Charbonneau, D., Noyes, R. W., Brown, T. M., & Gilliland, R. L. 2007, *ApJ*, 655, 564
- Knutson, H. A., Fulton, B. J., Montet, B. T., et al. 2014, *ApJ*, 785, 126
- Lagrange, A.-M., Bonnefoy, M., Chauvin, G., et al. 2010, *Science*, 329, 57
- Latham, D. W., Charbonneau, D., Brown, T. M., et al. 1999, *IAU Circ.*, 7315, 1
- Lecavelier Des Etangs, A. 2010, *Bulletin of the Astronomical Society of India*, 38, 137
- Lilensten, J., Simon Wedlund, C., Barthélemy, M., et al. 2013, *Icarus*, 222, 169
- Lissauer, J. J., Marcy, G. W., Bryson, S. T., et al. 2014, *ApJ*, 784, 44
- Lomb, N. R. 1976, *APSS*, 39, 447
- Mancini, L., Nikolov, N., Southworth, J., et al. 2013, *MNRAS*, 430, 2932
- Mandel, K., & Agol, E. 2002, *ApJL*, 580, L171
- Marois, C., Macintosh, B., Barman, T., et al. 2008, *Science*, 322, 1348
- Mayor, M., & Queloz, D. 1995, *Nature*, 378, 355
- Mayor, M., Pepe, F., Queloz, D., et al. 2003, *The Messenger*, 114, 20
- Mazeh, T., Nachmani, G., Holczer, T., et al. 2013, *ApJS*, 208, 16
- Meschiari, S., Wolf, A. S., Rivera, E., et al. 2009, *PASP*, 121, 1016
- Miller-Ricci, E., Rowe, J. F., Sasselov, D., et al. 2008, *ApJ*, 682, 586
- Moses, J. I., Visscher, C., Fortney, J. J., et al. 2011, *ApJ*, 737, 15
- Pepe, F. A., Cristiani, S., Rebolo Lopez, R., et al. 2010, in *SPIE Conference Series*, Vol. 7735
- Pollacco, D. L., Skillen, I., Collier Cameron, A., et al. 2006, *PASP*, 118, 1407
- Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., & Flannery, B. P. 1992, *Numerical recipes in C. The art of scientific computing*
- Quirrenbach, A., Amado, P. J., Seifert, W., et al. 2012, in *SPIE Conference Series*, Vol. 8446
- Rauer, H., Catala, C., Aerts, C., et al. 2014, *Experimental Astronomy*, arXiv:1310.0696

- 
- Richardson, L. J., Harrington, J., Seager, S., & Deming, D. 2006, *ApJ*, 649, 1043
- Ricker, G. R., Winn, J. N., Vanderspek, R., et al. 2014, in *SPIE Conference Series*, Vol. 9143, 20
- Robichon, N., & Arenou, F. 2000, *A&A*, 355, 295
- Rowe, J. F., Bryson, S. T., Marcy, G. W., et al. 2014, *ApJ*, 784, 45
- Scargle, J. D. 1982, *ApJ*, 263, 835
- Seager, S., & Mallén-Ornelas, G. 2003, *ApJ*, 585, 1038
- Simpson, E. K., Barros, S. C. C., Brown, D. J. A., et al. 2011, *AJ*, 141, 161
- Sing, D. K., Vidal-Madjar, A., Désert, J.-M., Lecavelier des Etangs, A., & Ballester, G. 2008, *ApJ*, 686, 658
- Southworth, J. 2008, *MNRAS*, 386, 1644
- . 2010, *MNRAS*, 408, 1689
- . 2012, *MNRAS*, 426, 1291
- Steffen, J. H., Fabrycky, D. C., Agol, E., et al. 2013, *MNRAS*, 428, 1077
- Torres, G., Andersen, J., & Giménez, A. 2010a, *A&PR*, 18, 67
- Torres, G., Bakos, G. Á., Hartman, J., et al. 2010b, *ApJ*, 715, 458
- Udalski, A. 2003, *Acta Astronomica*, 53, 291
- van Hamme, W. 1993, *AJ*, 106, 2096
- Vidal-Madjar, A., Sing, D. K., Lecavelier Des Etangs, A., et al. 2011, *A&A*, 527, A110
- Vidal-Madjar, A., Huitson, C. M., Bourrier, V., et al. 2013, *A&A*, 560, A54
- Vogt, S. S., Allen, S. L., Bigelow, B. C., et al. 1994, in *SPIE Conference Series*, Vol. 2198, *Instrumentation in Astronomy VIII*, 362
- Winn, J. N., Noyes, R. W., Holman, M. J., et al. 2005, *ApJ*, 631, 1215
- Winn, J. N., Howard, A. W., Johnson, J. A., et al. 2011, *AJ*, 141, 63
- Wittenmyer, R. A., Welsh, W. F., Orosz, J. A., et al. 2005, *ApJ*, 632, 1157
- Wolszczan, A., & Frail, D. A. 1992, *Nature*, 355, 145
- Xie, J.-W. 2013, *ApJS*, 208, 22
- . 2014, *ApJS*, 210, 25